## §1．基本事項

以下，$\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ を自然に $\mathbb{R}^{n^2}$ と見てその距離 $d$ を考える．
$d$ は $\|A\| := \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$ で定まるノルムにより，$d(A,B) = \|A-B\|$ と表される．
$O(n) := O(n,\mathbb{R}) := \{g \in GL(n,\mathbb{R})\ ;\ {}^tgg = I\}$：**実直交群**．本講義では単に**直交群**と呼ぶ．$g \in O(n,\mathbb{R})$ に対しては，$g^{-1} = {}^tg$ である．

**問 1**　行列 $T \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ を，$n$ 個の列ベクトル $\boldsymbol{t}_1,\dots,\boldsymbol{t}_n$ が横に並んでいると見る．このとき，次を示せ．

$$T \in O(n,\mathbb{R}) \iff \boldsymbol{t}_1,\dots,\boldsymbol{t}_n \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の正規直交基底}$$

**問 2**　$O(n) \subset M(n,\mathbb{R})$ の連結成分は 2 個で，単位元（= 単位行列）を含む方は

$$SO(n) := SO(n,\mathbb{R}) := \{g \in O(n)\ ;\ \det g = 1\}$$

であることを示せ．$SO(n)$ のことを $n$ 次元の**回転群**（または**特殊実直交群**）と呼ぶ．

**問 3**　$O(n)$ はコンパクトであることを示せ.

以下，$S := S^{n-1}$ を $\mathbb{R}^n$ の単位球面とする．

**問 4**　$SO(n)$ は $S$ に**推移的**に作用する，すなわち，$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in S$ に対して，$g \in SO(n)$ が存在して，$g\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ となることを示せ．

- もちろん，$\boldsymbol{u} := \boldsymbol{e}_1 := {}^t(1,0,\dots,0)$ のときに示せば十分である．問 1 を用いよ．

**問 5**　$\boldsymbol{e}_n := {}^t(0,\dots,0,1) \in S$ における $SO(n)$ の**固定部分群**

$$L := \{g \in SO(n)\ ;\ g\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n\}$$

は $L = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & 1 \end{array} \right)\ ;\ A \in SO(n-1) \right\}$ と表せることを示せ．

**問 6**　問 4 の $L$ の $u = {}^t(u_1,\dots,u_n) \in S$ を通る**軌道**$Lu := \{lu\ ;\ l \in L\}$ は，$\boldsymbol{e}_n$ を極とする**等緯度集合**で $\boldsymbol{u}$ を通るもの，すなわち，次で定義される集合 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{e}_n}(\boldsymbol{u})$ に一致することを示せ．

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{e}_n}(\boldsymbol{u}) := \left\{\boldsymbol{v} \in S^{n-1}\ ;\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n\right\}.$$

以下，$\Delta := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$：$\mathbb{R}^n$ における **Laplacian**.

$\mathbb{R}^n$ には **Euclid の合同変換**がある：

(1) **平行移動**：　$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$　$(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$，　(2) **直交変換**：　$\boldsymbol{x} \mapsto g\boldsymbol{x}$　$(g \in O(n))$.

(1), (2) を函数空間のレベルで考えたものを，$\tau_{\boldsymbol{a}}$，$T(g)$ と書く．すなわち，

$$\tau_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}), \qquad T(g)f(\boldsymbol{x}) := f(g^{-1}\boldsymbol{x}).$$

このとき，$\tau_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} = \tau_{\boldsymbol{a}}\tau_{\boldsymbol{b}}$，$T(gh) = T(g)T(h)$ が成立する．

**問 7**　$\mathbb{R}^n$ 上の函数 $f$ がなめらかなとき，次を示せ．

(1) $\tau_{\boldsymbol{a}}\Delta f = \Delta f \tau_{\boldsymbol{a}}$　$(\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$　　(2) $T(g)\Delta f = \Delta T(g) f$　$(\forall g \in O(n))$

● **多重指数**　各 $\alpha = (alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqq 0}$ に対して．

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$\boldsymbol{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

また，多項式 $p(\boldsymbol{x}) = \sum c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$ に対して，$p\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right) := \sum c_\alpha \left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\alpha$ とおく．

**定理 1.1.**　偏微分作用素 $D = \sum c_\alpha(\boldsymbol{x})\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\alpha$ が

(1) $\tau_{\boldsymbol{a}} D = D\tau_{\boldsymbol{a}}$　$(\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$,

(2) $T(g)D = DT(g)$　$(\forall g \in SO(n))$

をみたすならば，$\exists p(t) \in \mathbb{C}[\,t\,]$ s.t. $D = p(\Delta)$ と表される．

**証明.**　条件 (1) より，$c_\beta$ は定数函数である（詳細略）．
ゆえに $q(\boldsymbol{x}) := \sum c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$ とおくとき，$D = q\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)$ となる．
次に，$q\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)e^{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}} = q(\boldsymbol{y})e^{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}$ に注意する[1]．したがって作用素の等式 (2) を $f(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}$ $(\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$ に作用させ，$g \in SO(n)$ であることより $e^{\boldsymbol{y}\cdot g^{-1}\boldsymbol{x}} = e^{g\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}$ に注意すると，$q(\boldsymbol{y})e^{g\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}} = q(g\boldsymbol{y})e^{g\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}$ を得る．ここでゆえに $q(g\boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{y})$ $(\forall g \in SO(n))$ となる．すなわち，$q$ は $\boldsymbol{SO(n)}$ **不変な多項式函数**である．
ここで $q(\boldsymbol{y}) = \sum q_k(\boldsymbol{y})$ （$q_k(\boldsymbol{y})$ は $k$ 次斉次）と分解するとき，$q(\boldsymbol{y}) = q(g\boldsymbol{y}) = \sum q_k(g\boldsymbol{y})$ において，$\boldsymbol{y} \mapsto q_k(g\boldsymbol{y})$ も $k$ 次斉次多項式函数であるから，各斉次部分 $q_k(\boldsymbol{y})$ も $SO(n)$ 不変である．次の命題が必要である．

● **記号**：$\mathscr{P}_k$：$\mathbb{R}^n$ 上の $k$ 次斉次多項式函数の全体がなすベクトル空間．

**命題 1.2.**　$p \in \mathscr{P}_k$：$SO(n)$ 不変 $\Longrightarrow$ $p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} b\,\|\boldsymbol{x}\|^k & (k \text{ は偶数，} b \in \mathbb{C})\,, \\ 0 & (k \text{ は奇数})\,. \end{cases}$

**証明.**　$f(\boldsymbol{x}) := \dfrac{p(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^k}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\})$ とおくと，

$$f(g\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \ \ (\forall g \in SO(n)), \quad f(r\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \ \ (\forall r > 0).$$

[1] $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積.

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，$g \in SO(n)$ をとって $g\boldsymbol{e}_n = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ とする．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = f\Big(\cancel{\|\boldsymbol{x}\|}\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big) = f(g\boldsymbol{e}_n) = f(\boldsymbol{e}_n) = p(\boldsymbol{e}_n). \qquad \therefore p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{e}_n)\|\boldsymbol{x}\|^k.$$

$k$ が奇数ならば $\|\boldsymbol{x}\|^k$ は多項式函数ではないので $p(\boldsymbol{e}_n) = 0$ となる．よってこの場合 $p(\boldsymbol{x}) = 0$ である． □

**定理 1.1 の証明の続き**　各 $q_k$ に命題 1.2 を適用して，$q(\boldsymbol{x}) = \sum b_j \|\boldsymbol{x}\|^{2j}$ を得る．したがって，$p(t) := \sum b_j t^j \in \mathbb{C}[\,t\,]$ とおくと，$D = q\Big(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) = p(\Delta)$ となる． □

**定理 1.3.**　$p \in \mathscr{P}_k$ は $L$ 不変とする．すなわち，$p(l\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$ $(\forall l \in L)$

$$\Longrightarrow\ p(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{[k/2]} a_j \,\|\boldsymbol{x}\|^{2j}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_n)^{k-2j} \quad (a_j \in \mathbb{C}).$$

**証明.**　$\mathsf{Z} := (\mathbb{R}\boldsymbol{e}_n)^{\perp} = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{e}_{n-1}$ とし，各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + t\boldsymbol{e}_n$ $(z \in \mathsf{Z},\ t := \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R})$ と表す．このとき，変数 $t$ について整理すると，

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} p_i(\boldsymbol{z})\,t^{k-i} \quad \text{（$p_i$ は $\mathsf{Z}$ 上の $i$ 次斉次多項式函数）．}$$

$l\boldsymbol{x} = l\boldsymbol{z} + t\boldsymbol{e}_n$ ゆえ，$p(l\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} p_i(l\boldsymbol{z})\,t^{k-i}$.　　$\therefore p_i(l\boldsymbol{z}) = p_i(\boldsymbol{z})$ $(\forall l \in L)$.

命題 1.2 を $\mathsf{Z} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ と $L \cong SO(n-1)$ に適用して，

$$p_i(\boldsymbol{z}) = b_j\,\|\boldsymbol{z}\|^{2j} \ \ (i = 2j,\, b_j \in \mathbb{C}), \qquad p_i(\boldsymbol{z}) = 0 \ \text{（$i$ は奇数）．}$$

ゆえに，$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{[k/2]} b_j\,\|\boldsymbol{z}\|^{2j}\,t^{k-2j} = \sum_{j=0}^{[k/2]} b_j\,(\|\boldsymbol{x}\|^2 - t^2)^j\,t^{k-2j}$.

$(\|\boldsymbol{x}\|^2 - t^2)^j$ を二項展開して定理を得る． □

**定理 1.4 (Hobson の公式).**　$\mathbb{R}^n$ 上の $C^\infty$ 函数 $f(\boldsymbol{x})$ は，1 変数函数 $f_0(r)$ によって $f(\boldsymbol{x}) = f_0(\|\boldsymbol{x}\|)$ の形に書けているとする．このとき，任意の $p \in \mathscr{P}_k$ に対して，次式が成り立つ．ただし，$[k/2]$ は $k/2$ を越えない最大の整数を表す．

$$p\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{1}{2^j\,j!}\Big[\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^{k-j} f_0\Big](\|\boldsymbol{x}\|)\cdot\Delta^j p(\boldsymbol{x}).$$

本講義での Hobson の公式の証明では，次の Euler 作用素を用いる．

$$E := \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

また，Laplacian との交換関係も用いる．$[A, B] := AB - BA$ とするとき，

$$[\Delta, E] = 2\Delta, \qquad [\Delta^j, E] = 2j\,\Delta^j \ \ (j = 1, 2, \ldots).$$

**問 8**　次の等式 (1), (2) を示せ．

(1) $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$.

(2) $n=1,2,\ldots$ に対して，$[A,B^n]=\sum\limits_{j=0}^{n-1}B^j[A,B]B^{n-j-1}$.

**問 9**　Euler 作用素 $E$ について，$p\in\mathscr{P}_k$ ならば $Ep=kp$ であることを示せ．

**定理 1.4 の証明**　$p\in\mathscr{P}_k$ ゆえ，定理の公式の右辺の $\sum\limits_{j=0}^{[k/2]}$ は $\sum\limits_{j=0}^{k}$ としてもよいことに注意する．証明は $p(\boldsymbol{x})$ の次数 $k$ についての帰納法による．$k=0$ のときは明らか．等式が $k$ 次の任意の多項式に対して成り立つことを仮定して，$p\in\mathscr{P}_{k+1}$ とする．問 8 より $Ep=(k+1)p$ ゆえ，$p=\dfrac{1}{k+1}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$ となるから，

$$p\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\Big)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\Big).$$

$\dfrac{\partial p}{\partial x_i}\in\mathscr{P}_k$ より帰納法の仮定を用いることができて，次式を得る．

$$p\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\Big)f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j j!}\Big[\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^{k-j}f_0\Big](\|\boldsymbol{x}\|)\cdot\Delta^j\frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

右辺において，各 $i$ について $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を実行すると，

$$\begin{aligned}p\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\Big)f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j j!}\Big\{&\Big[\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^{k+1-j}f_0\Big](\|\boldsymbol{x}\|)\cdot x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta^j p(\boldsymbol{x})\\&+\Big[\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^{k-j}f_0\Big](\|\boldsymbol{x}\|)\cdot\Delta^j\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{x})\Big\}.\quad\cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

和の順序を交換して，次式に到達する（①の第 1 項目において $j=k+1$ とする項を付け加えても和は変わらないことに注意する）．

$$\begin{aligned}p\Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\Big)f(\boldsymbol{x})=&\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{2^j j!}\Big[\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^{k+1-j}f_0\Big](\|\boldsymbol{x}\|)\cdot E\Delta^j p(\boldsymbol{x})\\&+\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j j!}\Big[\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^{k-j}f_0\Big](\|\boldsymbol{x}\|)\cdot\Delta^{j+1}p(\boldsymbol{x}).\quad\cdots\cdots\ ②\end{aligned}$$

ここで $[\Delta^j,E]=2j\Delta^j$ より，$E\Delta^j=\Delta^jE-2j\Delta^j$ であるから，②の右辺第 1 項において，

$$E\Delta^j p(\boldsymbol{x})=\Delta^j Ep(x)-2j\Delta^j p(\boldsymbol{x})=(k+1-2j)\Delta^j p(\boldsymbol{x})$$

である．また，②の右辺第 2 項において，和の変数を $j$ から $j-1$ に変換すると（変換後に $j=0$ の項を付け加えても和は変わらないことに注意），次式になる．

$$\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{2j}{2^j j!}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k+1-j} f_0\right](\|\boldsymbol{x}\|)\cdot\Delta^j p(\boldsymbol{x}).$$

ゆえに $p\Big(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)f(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{2^j j!}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k+1-j} f_0\right](\|\boldsymbol{x}\|)\cdot\Delta^j p(\boldsymbol{x})$ となって，帰納法が完成する． □

Hobson の公式の直接の応用として，次の公式を挙げておく．

**命題 1.5.** $p \in \mathscr{P}_k$ のとき，各 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ において，

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} p(\boldsymbol{x})\, e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x} = i^{-k}\, e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2}\sum_{j=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^j}{2^j j!}\,\Delta^j p(\boldsymbol{\xi}).$$

**証明.** まず Fourier 変換における基本公式より，

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x} = e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2}. \quad \cdots\cdots ③$$

ゆえに，$k = 0$ のときに命題の等式が成り立つ．以下 $k \geqq 1$ として，③の両辺に $p\Big(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}}\Big)$ を作用させる．左辺は次式になる（積分記号下の微分）．

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} p(-i\boldsymbol{x})\, e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x}.$$

ここで $p(-i\boldsymbol{x}) = (-i)^k p(\boldsymbol{x})$ に注意．一方，右辺は Hobson の公式より

$$p\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}}\Big)e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2} = e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2}\sum_{j=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^{k-j}}{2^j j!}\,\Delta^j p(\boldsymbol{\xi}) \quad \cdots\cdots ④$$

となるから，所要の等式を得る． □

- $\Delta f = 0$ をみたす $C^2$ 級の函数 $f$ を**調和函数**と呼ぶ．
- 調和函数になる多項式を**調和多項式**と呼ぶ．
- $k$ 次斉次調和多項式の全体がなすベクトル空間を $\mathscr{H}_k$ で表す．

**例 1.6.** $\mathscr{H}_k \neq \{0\}$ である．実際，$(x_1 + ix_2)^k$ は調和多項式である．

**例 1.7.** **差積** $D(\boldsymbol{x}) := \prod_{k>j}(x_k - x_j)$ は調和多項式である．

$n$ 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ で表し，$\mathfrak{S}_n$ を $\mathbb{R}^n$ 上の函数空間に座標の入れ替えによって作用させる．すなわち，各 $s \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$(sf)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)})$$

とおく（これが実際に作用を定義していることは，容易に確かめられる）．このとき，Laplacian $\Delta$ と各 $s \in \mathfrak{S}_n$ の函数への作用とは可換である．すなわち，なめらかな $f$ に対して，次式が成り立つ．

$$\Delta(sf) = s(\Delta f). \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

さて，$p \in \mathscr{P}$ が

$$(sp)(\boldsymbol{x}) = (\operatorname{sgn} s)\, p(\boldsymbol{x}) \qquad (\forall s \in \mathfrak{S}_n)$$

をみたすとき，$p(\boldsymbol{x})$ を**交代多項式**という．⑤より，$p(\boldsymbol{x})$ が交代多項式なら，$\Delta p(\boldsymbol{x})$ も交代多項式である．差積 $D(\boldsymbol{x})$ が交代多項式であることは容易にわかるから（隣接互換のときに確かめれば十分），$\Delta D(\boldsymbol{x})$ も交代多項式である．ゆえに，$\Delta D(\boldsymbol{x})$ は最簡交代式である差積 $D(\boldsymbol{x})$ で割りきれる（たとえば，高木貞治『代数学講義』の 31 節等参照）．しかし，多項式 $\Delta D(\boldsymbol{x})$ の次数は多項式 $D(\boldsymbol{x})$ の次数より真に低いので，$\Delta D = 0$ でなければならない． □

**定理 1.8.** $p \in \mathscr{P}_k$ のとき，次の (1)〜(3) は同値である．

(1) $p \in \mathscr{H}_k$.

(2) $\displaystyle \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} p(\boldsymbol{x})\, e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x} = i^{-k}\, p(\boldsymbol{\xi})\, e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2} \quad (\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n).$

(3) $\displaystyle p\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}}\Big)\, e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2} = (-1)^k\, p(\boldsymbol{\xi})\, e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2} \quad (\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n).$

**証明.** **(1) $\Longrightarrow$ (2)** 命題 1.5 より．

**(2) $\Longrightarrow$ (3)** (2) の左辺が $i^k p\Big(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}}\Big)\, e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2}$ に等しいことより．

**(3) $\Longrightarrow$ (1)** (3) が成り立てば，⑤より $\displaystyle\sum_{j=1}^{[k/2]} \frac{(-1)^j}{2^j\, j!}\, \Delta^j p(\boldsymbol{\xi}) = 0$ $(\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n)$ を得る．ここで $\Delta^j p \in \mathscr{P}_{k-2j}$ ゆえ，$\Delta p = 0$. □

**定理 1.9 (Hecke 等式).** $h \in \mathscr{H}$ とする．

(1) $\displaystyle \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x})\, e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x} = h(-i\boldsymbol{\xi})\, e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2} \qquad (\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n).$

(2) $\displaystyle h\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2} = h(-\boldsymbol{x})\, e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2} \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n).$

**証明.** (1) 定理 1.8 (2) の右辺の $i^{-k} p(\boldsymbol{\xi})$ を $p(-i\boldsymbol{\xi})$ と書き直すと，$k$ に無関係な式の形になる．(2) も同様． □