確率ポートフォリオ理論について

九州大学大学院数理学府数理学専攻
修士課程 2 年
山西 浩介
指導教員：谷口 説男 教授

修士論文

平成 23 年 2 月 4 日提出

序文

数理ファイナンスでは, 市場を確率過程でモデル化している. そこでまず問題となるのは, リスクなしで利益が得られるような機会が存在するかどうかである. このような機会は, 裁定機会と呼ばれている. 一般に, 証券を半マルチンゲールでモデル化した場合, 同値マルチンゲール測度 (以下, EMM という) が存在するならば, 裁定機会は存在しないことが知られている. ここでいう EMM とは, 割引かれた価格過程がマルチンゲールとなるような, 元々の市場モデル化に用いられた確率測度 P と同値な確率測度のことである. EMM を利用して, 金融派生商品の価格付け公式が導出できる等, EMM は数理ファイナンスで重要な役割を果たしている. 更に, 投資戦略としては, 多種類の株を所有することがより安全であるという, リスク分散についての研究もなされている.

この論文では, 証券を半マルチンゲールでモデル化した市場において, 特定の証券に投資するのではなく, 多種類の証券を持つことをモデル化するダイバーシティーという概念を紹介する. この概念を定義する上で重要となるのが, 本論文 2.1 節で取り扱うマーケット・ポートフォリオ $\mu = \Big\{\mu(t) = \big(\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)\big)'\Big\}_{t\geq 0}$ である. このポートフォリオ μ は X_i $(i = 1, \ldots, n)$ を証券 i の価格として,

$$X(t) := \sum_{i=1}^{n} X_i(t)\ ,\ \mu_i(t) := \frac{X_i(t)}{X(t)} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義される. つまり, μ はその証券の価格が大きいほど, より多くその証券に投資を行うというポートフォリオである. また μ は $X_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ を仮定すれば, どの証券にも投資を行っていることを表す指標となっている. この点から, マーケット・ポートフォリオ μ は投資の分散度合をみるための指標として用いられている. このマーケット・ポートフォリオ μ を用いて, ダイバーシティーモデルを定義する. リスクが一つの証券に集中していないことを, 満期を $T > 0$ として, $\delta \in (0, 1)$ が存在して, このマーケット・ポートフォリオ μ が

$$\max_{1\leq i\leq n} \mu_i(t) < 1 - \delta \quad (0 \leq \forall t \leq T) \quad a.s.$$

を満たすことと定義し, この仮定を満たす市場モデルをダイバーシティーモデルという. また, この条件をゆるめた弱ダイバーシティーモデルを, 満期を $T > 0$ として, $\delta \in (0, 1)$ が存在して, このマーケット・ポートフォリオ μ が

$$\frac{1}{T}\int_0^T \max_{1\leq i\leq n} \mu_i(t)dt < 1 - \delta \quad a.s.$$

を満たす市場モデルと定義する. 本論文 3.3 , 3.4 節で見るように, このモデルにはマーケット・ポートフォリオに関して裁定機会となるポートフォリオが存在する. よって, EMM が存在しないモデルであることがわかる. ダイバーシティーモデル (EMM が存在しないモデル) の下でも, ある仮定を満たせば, 売り手がつけるヨーロピアン条件付き請求権の価格が導出できることを紹介する.

数理ファイナンスにおいて著名なモデルである Black-Scholes モデルを一般化した多次元の Black-Scholes モデルは, 裁定が存在しないことが知られている. したがって (弱) ダイバーシティーモデルではないといえる. この論文では, 多次元の Black-Scholes モデルがダイバーシティーモデルではないこと, 弱ダイバーシティーモデルではないことをダイバーシティーの定義に従い, 具体的かつ直接的な計算を通して示す.

この論文は大きく分けて, 3 章で構成されている. 第 1 章では, この論文で不可欠な確率積分の定義やいくつかの定理を紹介する. 第 2 章では, ポートフォリオや投資戦略等, 数理ファイナンスの基礎的な理論の説明や,

ダイバーシティーの概念を定義する上で最も重要となるマーケット・ポートフォリオの定義, 性質等を紹介する. 第 3 章では, ダイバーシティーの定義やダイバーシティーであるための十分条件をまず紹介する. 次に, 満期が一定の期間以上であれば, あるポートフォリオに関して裁定機会となるポートフォリオが存在すること、また満期によらず, あるポートフォリオに関して裁定機会となるポートフォリオが存在することを示す. そして, 多次元の Black-Scholes モデルがダイバーシティーモデルではないこと, 弱ダイバーシティーモデルではないことを定義に基づいて計算をして示す. 最後に, EMM が存在しなくてもある仮定の下で, 売り手がつけるヨーロピアン条件付き請求権の価格が導入できることを紹介する.

謝辞

本修士論文の作成にあたり, 学部 4 年の時から, 3 年間厳しくも温かいご指導, ご支援を賜りました谷口説男教授に深く感謝いたします. また同研究室の川副謙士郎君, 院生室 5 の皆様に深く感謝いたします.

目次

1　確率積分といくつかの定理

この section ではこの論文で使われる確率積分の定義やいくつかの定理等の準備をする.$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする.

1.1　ブラウン運動

まず, ブラウン運動を定義する. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率過程 $W = \big\{W(t)\big\}_{t\geq 0}$ がブラウン運動であるとは, 次の条件を満たすときにいう.

(i)　$W(0) = 0 \quad a.s.$

(ii)　任意の $\omega \in \Omega$ に対し, $W(t, \omega)$ は t について連続である.

(iii)　$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対し, 増分 $\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big)$ は互いに独立で, それぞれ平均値 0 , 分散 $t_i - t_{i-1}$ の正規分布に従う.

ブラウン運動は存在することが知られている.

次に d 次元ブラウン運動を定義する. この論文では $\mathbb{R}^d$ は縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ から成るとする. $(x_1, \ldots, x_n)'$ と転置記号 $\prime$ を用いて表すこともある. d 次元確率過程 $W(t) = \Big\{\big(W_1(t), \ldots, W_d(t)\big)'\Big\}_{t\geq 0}$ が d 次元ブラウン運動であるとは, 各 $W_i(t)$ がブラウン運動で, かつ W_i , $1 \leq i \leq d$ が独立であることをいう.

ここで, $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動を定義するためにフィルトレーションの定義を述べておく. $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{F}_t$ が

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \quad 0 \leq \forall t < s$$

を満たすとき, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ をフィルトレーションという. また, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ をフィルター付き確率空間という. 以下, この論文で扱うフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ は右連続で P-零集合をすべて含む, つまり,

$$\bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t \ , \ \mathcal{N} := \big\{N \in \mathcal{F} \ ; \ P(N) = 0\big\} \subset \mathcal{F}_t$$

が成立していると仮定する.

$(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動を定義する. 上記のフィルター付き確率空間上で定義されたブラウン運動 $W = \big\{W(t)\big\}_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動であるとは, 次の条件を満たすときにいう.

(i)　$W = \big\{W(t)\big\}_{t\geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合である.

(ii)　$0 \leq \forall s \leq t$ に対し,$W(t) - W(s)$ と $\mathcal{F}_s$ は独立である.

ただし, 確率過程 $X = \big\{X(t)\big\}_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合であるとは各 t で $X(t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-可測であることをいう.

1.2　確率積分

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ をフィルター付き確率空間, $\big\{W(t)\big\}_{t\geq 0}$ を $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動とする.

次に確率積分を定義していくために, 以下の集合を用意しておく. ただし, 任意の $t \in [0,T]$ に対して写像 $(s,\omega) \in \big([0,t]\times\Omega, \mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t\big) \to f(s,\omega) \in \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ が可測であるとき, 確率過程 f は $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測であるという.

$$\mathcal{L}_T^0 = \Big\{ f = \big\{f(t)\big\}_{t\in[0,T]}; f(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j I_{(t_{j-1},t_j]}(t)\ ;\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, n \in \mathbb{N} \text{ において各 } \tilde{f}_j \text{ は } (\mathcal{F}_{t_{j-1}})\text{-可測で有界} \Big\}$$

$$\mathcal{L}_T^2 = \Big\{ f = \big\{f(t)\big\}_{t\in[0,T]}; (\mathcal{F}_t)\text{-発展的可測}, \mathbb{E}\Big(\int_0^T |f(t)|^2 dt\Big) < \infty \Big\}$$

$$\mathcal{M}_T = \Big\{ M = \{M(t)\}_{t\in[0,T]}; M \text{ は連続な 2 乗可積分 } (\mathcal{F}_t)\text{-マルチンゲール}, M(0) = 0 \Big\}$$

$T > 0$ を固定して時間 t を有界区間 $[0,T]$ 上に限定して確率積分を定義する. まず, $\big\{f(t)\big\} \in \mathcal{L}_T^0$ の確率積分を

$$M_t(f) := \int_0^t f(s)dW(s) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j \big(W(t\wedge t_j) - W(t \wedge t_{j-1})\big)\ ,\ t \in [0,T]$$

と定義する. このとき, $\big\{M_t(f)\big\} \in \mathcal{M}_T$ となる.

次に $\big\{f(t)\big\} \in \mathcal{L}_T^2$ の確率積分を以下のように定義する. 任意の $\big\{f(t)\big\} \in \mathcal{L}_T^2$ に対して $\big\{f^n(t)\big\} \in \mathcal{L}_T^0, n \in \mathbb{N}$ の列が存在し,

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T |f(t) - f^n(t)|^2 dt\Big) \to 0\ ,\ n \to \infty$$

が成り立つ. このとき, $\big\{M(f^n)\big\}$ は $\mathcal{M}_T$ 内のコーシー列となる. $\mathcal{M}_T$ は完備であることから, $\big\{M(f^n)\big\}$ の極限 $M(f) = \big\{M_t(f)\big\} \in \mathcal{M}_T$ が定まる. この $M_t(f)$ を

$$\int_0^t f(s)dW(s)\ ,\ t \in [0,T]$$

と書き,$\big\{f(t)\big\} \in \mathcal{L}_T^2$ のブラウン運動 W に関する確率積分という. $M(f)$ は $\{f^n\}$ のとり方によらず, 一意に定まる. ここで,

$$\mathcal{L}^2 = \Big\{ f = \big\{f(t)\big\}_{t\geq 0}; \text{任意の } T > 0 \text{ に対し}, \big\{f(t)\big\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}_T^2(\mathcal{F}_t) \Big\}$$

$$\mathcal{M} = \Big\{ M = \big\{M(t)\big\}_{t\geq 0}; \text{任意の } T > 0 \text{ に対し}, \big\{M(t)\big\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T \Big\}$$

とおけば, 任意の $\big\{f(t)\big\} \in \mathcal{L}^2$ に対し, 確率積分 $M_t(f) = \displaystyle\int_0^t f(s)dW(s)\ ,\ t \geq 0$ が定まり, $\{M(f)\} \in \mathcal{M}$ となるので, 時間 t を $[0,\infty)$ に拡張できる.

以下, 局所マルチンゲールに対する確率積分を定義していくために停止時刻と局所マルチンゲールの定義を述べておく. $[0,\infty]$ に値をとる確率過程 τ が停止時刻であるとは

$$\{\omega\ ;\ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0$$

となることをいう.

$\{X(t)\}_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-局所マルチンゲールであるとは, $\tau_n \uparrow \infty$ となる停止時刻の列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し, $\{X(t\wedge\tau_n)\}_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールとなることをいう.

また, 以下の集合を用意する.

$\mathcal{L}^{2,loc} = \Big\{ f = \{f(t)\}_{t\geq 0}\ ;\ (\mathcal{F}_t)$-発展的可測, 任意の $T>0$ に対し, $P\Big(\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty\Big) = 1 \Big\}$

$\mathcal{M}^{loc} = \Big\{ M = \{M(t)\}_{t\in[0,T]}\ ;\ M$ は連続な 2 乗可積分 $(\mathcal{F}_t)$-局所マルチンゲール, $M(0)=0 \Big\}$

局所マルチンゲールに対する確率積分を定義する. $\{f(t)\} \in \mathcal{L}^{2,loc}$ に対して, $\tau_n \uparrow \infty\ a.s.$ となる停止時刻の増大列

$$\tau_n := n \wedge \inf\Big\{ t \geq 0;\ \int_0^t \big(f(s)\big)^2 ds \geq n \Big\}$$

を用いて, $\{f^n(t)\}$ を

$$f^n(t,\omega) = f(t,\omega) I_{\tau_n > s}(\omega)$$

と定義すれば, $\{f^n(t)\} \in \mathcal{L}_2$ である. このとき, $Y = \{Y(t)\} \in \mathcal{M}^{loc}$ が存在し,

$$Y(t\wedge\tau_n) = \int_0^{t\wedge\tau_n} f^n(s) dW(s)$$

が成り立つ. この $Y(t)$ を $\{f(t)\} \in \mathcal{L}^{2,loc}$ の確率積分 $\int_0^t f(s)dW(s)$ と定義する.

$\{f(t)\}, \{g(t)\} \in \mathcal{L}^{2,loc}$ とすると, 任意の $t \geq 0$ に対し,

$$\int_0^t \big(af(s) + bg(s)\big) dM(s) = a\int_0^t f(s)dM(s) + b\int_0^t g(s)dM(s)$$

が成り立つ.

$f_\nu = \{f_\nu(t)\}, \tilde{f}_\nu = \{\tilde{f}_\nu(t)\} \in \mathcal{L}^2, g = \{g(t)\}, \tilde{g} = \{\tilde{g}(t)\} \in \mathcal{L}^{1,loc}\big([0,\infty)\big), W = \big(W_\nu(t)\big)'_{1\leq\nu\leq d}$ を d 次元 $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動,$X(0)$ を $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数とする. このとき, 次のような確率過程 $X(t) = \{X(t)\}, Y(t) = \{Y(t)\}$ を考える.

$$X(t) = X(0) + \sum_{\nu=1}^d \int_0^t f_\nu(s) dW_\nu(s) + \int_0^t g(s)ds\ ,\ Y(t) = Y(0) + \sum_{\nu=1}^d \int_0^t \tilde{f}_\nu(s) dW_\nu(s) + \int_0^t \tilde{g}(s)ds$$

上記の X, Y のような形で表される確率過程を半マルチンゲールという. この連続半マルチンゲールに対する確率積分を定義する. 次の集合を用意しておく.

$\mathcal{L}^{1,loc}\big([0,\infty)\big) = \Big\{ f = \{f(t)\}_{t\geq 0}\ ;$ 任意の $T>0$ に対し, $P\Big(\int_0^T |f(t)| dt < \infty\Big) = 1 \Big\}$

このとき,

$$\int_0^t h(s)dX(s) := \sum_{\nu=1}^d \int_0^t h(s) f_\nu(s) dW_\nu(s) + \int_0^t h(s)g(s)ds$$

と定義できる. また, 上記の X, Y に対して

$$\langle X, Y \rangle_t = \sum_{\nu=1}^{d} \int_0^t f_\nu(s) \tilde{f}_\nu(s) ds$$

とする.

1.3 Itô の公式, Girsanov の定理, マルチンゲールの表現定理

後で使うために, いくつかの公式, 定理を紹介する.

Theorem 1.3.1 (Itô の公式).

$1 \le \forall i \le n, 1 \le \forall \nu \le d$ に対し, $f_{i\nu} = \{f_{i\nu}(t)\} \in \mathcal{L}^2, g_i = \{g_i(t)\} \in \mathcal{L}^{1,loc}([0,\infty)), W = (W_\nu(t))'_{1\le\nu\le d}$ を d 次元 $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動, $X_i(0)$ を $(\mathcal{F}_0)$-可測な確率変数とする. このとき, 各成分が次のような n 次元確率過程 $X(t) = (X_i(t))'_{i=1,\dots,n}$ を考える.

$$X_i(t) = X_i(0) + \sum_{\nu=1}^{d} \int_0^t f_{i\nu}(s) dW_\nu(s) + \int_0^t g_i(s) ds$$

このとき, 任意の $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}\phi(X(t)) &= \phi(X(0)) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{d} \int_0^t D_i\phi(X(s)) f_{i\nu}(s) dW_\nu(s) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t D_i\phi(X(s)) g_i(s) ds + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{d}\int_0^t D_{ij}^2\phi(X(s)) f_{i\nu}(s) f_{j\nu}(s) ds\ ,\ t \ge 0 \qquad a.s.\end{aligned}$$

が成り立つ.

Theorem 1.3.2 (Girsanov の定理).

$\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $\theta = \{\theta(t)\}_{0\le t\le T}$ は $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測とし, さらに以下を満たすとする.

$$\int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt < \infty \qquad a.s.$$

このとき, Z を以下で定義する.

$$Z(t) := \exp\Big(-\int_0^t \theta(s) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds\Big) \quad (0 \le t < \infty)$$

この Z がマルチンゲールとなるとき, P と同値な確率測度 $Q_T(A) := \mathbb{E}(Z(T) I_A)$ $(A \in \mathcal{F}_T)$ が定義できて,

$$\hat{W}(t) := W(t) + \int_0^t \theta'(s) ds$$

が Q_T の下でブラウン運動となる.

Theorem 1.3.3 (マルチンゲールの表現定理).

2 乗可積分確率変数 Y が $(\mathcal{F}_T^W)$-可測ならば, $f_\nu \in \mathcal{L}_T^2$, $1 \le \nu \le d$ が存在し, Y は

$$Y = \mathbb{E}(Y) + \sum_{\nu=1}^{d} \int_0^T f_\nu(s) dW_\nu(s)$$

と表現できる. さらに, $\{M(t)\}_{0\le t\le T}$ が 2 乗可積分 $(\mathcal{F}_T^W)$-マルチンゲールならば, $g_\nu \in \mathcal{L}_T^2$, $1 \le \nu \le d$ が存在し, $M(t)$ は

$$M(t) = \mathbb{E}(M(0)) + \sum_{\nu=1}^{d} \int_0^T g_\nu(s) dW_\nu(s)$$

と表現できる.

2　数理ファイナンスの基礎

2.1　市場とポートフォリオ

フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ を考える. ここで, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t<\infty}$ とする. また, $W = \Big\{\big(W_1(t), \dots, W_d(t)\big)'\Big\}_{t\ge 0}$ は d 次元ブラウン運動とし, $\mathcal{F}$ がブラウン運動 W から構成されるとき, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W$ と表すものとする.

次のような確率過程 $\{B(t)\}_{t\ge 0}$, $\{X_i(t)\}_{t\ge 0}$ $(i = 1, \cdots, n)$ を考える. 各々は, 証券の価格を表し, 市場 $\mathcal{M}$ はこれらの証券だけから成るとする.

$$dB(t) = B(t)r(t)dt\ ,\ B(0) = 1 \tag{2.1.1}$$

$$dX_i(t) = X_i(t)\Big(b_i(t)dt + \sum_{\nu=1}^{d} \sigma_{i\nu}(t)dW_\nu(t)\Big)\ ,\ X_i(0) = x_i > 0 \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{2.1.2}$$

ただし, ここで

$$b(t) = \big(b_i(t)\big)'_{1\le i\le n}\ ,\ \sigma(t) = \big(\sigma_{i\nu}(t)\big)_{1\le i\le n, 1\le \nu\le d} \quad (d \ge n)$$

とする. また, b , σ は発展的可測であり, さらに, $r(t)$, $b(t)$, $\sigma(t)$ は以下を満たすとする.

$$\int_0^T |r(t)|dt + \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \Big(|b_i(t)| + \sum_{\nu=1}^{d} \big(\sigma_{i\nu}(t)\big)^2\Big)dt < \infty \qquad a.s. \tag{2.1.3}$$

$a(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{1\le i,j\le n}$, $\gamma(t) = \big(\gamma_i(t)\big)'_{1\le i\le n}$ を次で定義する.

$$a_{ij}(t) := \sum_{\nu=1}^{d} \sigma_{i\nu}(t)\sigma_{j\nu}(t) = \big(\sigma(t)\sigma'(t)\big)_{ij} \tag{2.1.4}$$

$$\gamma_i(t) := b_i(t) - \frac{1}{2}a_{ii}(t) \tag{2.1.5}$$

(2.1.2) より, Itô の公式を用いて,

$$\begin{aligned} \log X_i(t) &= \log x_i + \sum_{\nu=1}^{d} \int_0^t \sigma_{i\nu}(s)dW_\nu(s) + \int_0^t b_i(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t a_{ii}(s)ds \\ &= \log x_i + \sum_{\nu=1}^{d} \int_0^t \sigma_{i\nu}(s)dW_\nu(s) + \int_0^t \gamma_i(s)ds \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

となる. よって,

$$X_i(t) = x_i \exp\Big(\sum_{\nu=1}^{d} \int_0^t \sigma_{i\nu}(s)dW_\nu(s) + \int_0^t \gamma_i(s)ds\Big) \tag{2.1.7}$$

という表示式を得る.

Def 2.1.1 (ポートフォリオ).

$\pi = \Big\{ \pi(t) = \big(\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t)\big)' \Big\}$ とおく.

$$\triangle_k^n := \big\{ (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pi_1^2 + \cdots + \pi_n^2 \le k^2 \ , \ \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1 \big\}$$

$$\triangle_{\ge 0}^n := \big\{ (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pi_1 \ge 0, \ldots, \pi_n \ge 0 \ , \ \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1 \big\}$$

$$\triangle_+^n := \big\{ (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \triangle^n \mid \pi_1 > 0, \ldots, \pi_n > 0 \big\}$$

とする. π がポートフォリオであるとは, k が存在し, $\pi(t) \in \triangle_k^n$ となる確率過程のことをいう. π がロング・オンリー・ポートフォリオであるとは, $\pi(t) \in \triangle_{\ge 0}^n$ となる確率過程のことをいう.

$\pi_i(t)$ は t 時点における総資産に占める証券 i の資産高の割合を表す. また, money market には投資 (空売りを含む) をしていないとする. $V^{\omega,\pi}(t)$ を時刻 t におけるポートフォリオ $\pi(t)$ の価値とすれば,

$$h_i(t) := \pi_i(t) V^{\omega,\pi}(t)$$

は t 時点において資産 i に投資した金額を表す. ここで, ω は初期値とし, $V^{\omega,\pi}(0) = \omega > 0$ とする.

$V^{\omega,\pi}$ は π がセルフ・ファイナンシングであるという仮定の下, θ_i^π を資産 i の保有量を表すとして,

$$dV^{\omega,\pi}(t) = \sum_{i=1}^n \theta_i^\pi(t) dX_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{h_i(t)}{X_i(t)} dX_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi_i(t) V^{\omega,\pi(t)}}{X_i(t)} dX_i(t)$$

が成り立つ. よって,

$$\frac{dV^{\omega,\pi}(t)}{V^{\omega,\pi}(t)} = \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \tag{2.1.8}$$

$$= \pi'(t)[b(t) + \sigma(t) dW(t)] \ , \ V^{\omega,\pi}(0) = \omega \quad \big(\because \ (2.1.2)\big) \tag{2.1.9}$$

となる. ここで,

$$b_\pi(t) := \sum_{i=1}^n \pi_i(t) b_i(t) \ , \ \sigma_{\pi\nu}(t) := \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \sigma_{i\nu}(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, d) \tag{2.1.10}$$

とおけば,

$$\frac{dV^{\omega,\pi}(t)}{V^{\omega,\pi}(t)} = b_\pi(t) dt + \sum_{\nu=1}^d \sigma_{\pi\nu}(t) dW_\nu(t) \qquad \big(V^{\omega,\pi}(0) = \omega\big) \tag{2.1.11}$$

が得られる. この式に Itô の公式を用いて,

$$\log V^{\omega,\pi}(t) = \log \omega + \int_0^t b_\pi(s) ds + \sum_{\nu=1}^d \int_0^t \sigma_{\pi\nu}(s) dW_\nu(s) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^d \int_0^t \big(\sigma_{\pi\nu}(s)\big)^2 ds$$

$$= \log \omega + \int_0^t \gamma_\pi(s) ds + \sum_{\nu=1}^d \int_0^t \sigma_{\pi\nu}(s) dW_\nu(s) \tag{2.1.12}$$

という表示式を得る. ただし,

$$\gamma_\pi(t) := \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \gamma_\pi^*(t) = b_\pi(t) - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{\pi\nu}(s)\big)^2 \tag{2.1.13}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\pi^*(t) &:= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)a_{ii}(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\pi_i(t)a_{ij}(t)\pi_j(t)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)a_{ii}(t) - \sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{\pi\nu}(s)\big)^2\Big) \end{aligned}\tag{2.1.14}$$

とする. よって,

$$V^{\omega,\pi}(t) = \omega \exp\Big(\int_0^t \gamma_\pi(s)ds + \sum_{\nu=1}^{d}\int_0^t \sigma_{\pi\nu}(s)dW_\nu(s)\Big) \tag{2.1.15}$$

となる. また, $V^\pi = V^{1,\pi}$ とする. このとき, (2.1.6) , (2.1.12) , (2.1.13) , (2.1.14) より以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\log V^\pi(t) &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \pi_i(s)\gamma_i(s)ds + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \pi_i(s)\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{i\nu}(s)dW_\nu(s) + \int_0^t \gamma_\pi^*(s)ds \\ &= \int_0^t \gamma_\pi^*(s)ds + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \pi_i(s)d\log X_i(s). \end{aligned}\tag{2.1.16}$$

Def 2.1.2 ($\pi_{(i)}(t)$).

以下のように $\pi_{(i)}(t)$ を定める.

$$\max_{1\le i\le n}\pi_i(t) := \pi_{(1)}(t) \ge \cdots \ge \pi_{(n)}(t) := \min_{1\le i\le n}\pi_i(t)$$

Def 2.1.3 (uniform boundness condition).

市場 $\mathcal{M}$ が uniform boundness condition(以下 UBC 条件という) を満たすとは, $K \in (0,\infty)$ が存在して,

$$\xi' a(t)\xi = \xi'\sigma(t)\sigma'(t)\xi \le K\|\xi\|^2$$

が任意の $t \in [0,\infty)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ で成り立つことをいう.

以下のように, $\tau^\pi(t) = \big(\tau_{ij}^\pi(t)\big)_{1\le i,j\le n}$ を定義する.

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^\pi(t) &:= \sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\pi\nu}(t)\big)\big(\sigma_{j\nu}(t) - \sigma_{\pi\nu}(t)\big) \\ &= \big(\pi(t) - e_i\big)' a(t)\big(\pi(t) - e_j\big) = a_{ij}(t) - a_{\pi i}(t) - a_{\pi j}(t) + a_{\pi\pi}(t) \end{aligned}\tag{2.1.17}$$

ただし,

$$a_{\pi i}(t) := \sum_{j=1}^{n}\pi_j(t)a_{ij}(t)\ ,\ a_{\pi\pi}(t) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\pi_i(t)a_{ij}(t)\pi_j(t) = \sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{\pi\nu}(t)\big)^2 \tag{2.1.18}$$

とする. このとき,

$$\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}^{\pi}(t)\pi_j(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\pi_j(t)-a_{\pi i}(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{\pi j}(t)\pi_j(t)+a_{\pi\pi}(t)=0 \tag{2.1.19}$$

が成り立つ.

投資戦略

投資戦略 $g=\Big\{\big(g_1(t),\dots,g_n(t)\big)'\Big\}_{t\geq 0}\in\mathbb{R}^n$ (各 $g_i(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-可測とする.) について考える. 確率積分を定義するために g は以下を満たすとする.

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Big(|g_i(t)||b_i(t)-r(t)|+\big(g_i(t)\big)^2a_{ii}(t)\Big)dt<\infty \quad a.s. \quad \big(\forall T\in(0,\infty)\big)$$

$g_i(t)$ は時間が t のとき, i 番目の資産に投資された金額の量を, $\mathcal{V}^{\omega,g}(t)$ は初期値 $\omega>0$, 時刻 t における $g(t)$ の価値過程を表すとする. よって, $\mathcal{V}^{\omega,g}(t)-\sum_{i=1}^{n}g_i(t)$ は money market に投資された金額の量を表し, セルフ・ファイナンシングを仮定していることから, θ_i を資産 i の保有量を表すとして,

$$d\mathcal{V}^{\omega,g}(t)=\theta_0(t)dB(t)+\sum_{i=1}^{n}\theta_i(t)dX_i(t)=\frac{\mathcal{V}^{\omega,g}(t)-\sum_{i=1}^{n}g_i(t)}{B(t)}dB(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i(t)}{X_i(t)}dX_i(t)$$

が成り立つ. よって, (2.1.1) , (2.1.2) より,

$$d\mathcal{V}^{\omega,g}(t)=\Big(\mathcal{V}^{\omega,g}(t)-\sum_{i=1}^{n}g_i(t)\Big)r(t)dt+\sum_{i=1}^{n}g_i(t)\Big(b_i(t)dt+\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{i\nu}(t)dW_\nu(t)\Big) \tag{2.1.20}$$

となる. (2.1.1) から $d\left(\frac{1}{B(t)}\right)=-r(t)\frac{1}{B(t)}dt$ となるので, Itô の公式を用いて,

$$d\left(\frac{\mathcal{V}^{\omega,g}(t)}{B(t)}\right)=\frac{g'(t)}{B(t)}\big(b(t)-r(t)I\big)dt+\frac{g'(t)}{B(t)}\sigma(t)dW(t) \tag{2.1.21}$$

が成り立つ.

セルフ・ファイナンシングなポートフォリオ π について, $h_i(t)=\pi_i(t)V^{\omega,\pi}(t)$ とおけば, h が投資戦略となる. このとき, $\mathcal{V}^{\omega,h}(t)=V^{\omega,\pi}(t)$ が任意の $t\in[0,\infty)$ で成り立つ. また, 逆に, money market に投資しなければ, セルフ・ファイナンシングな投資戦略 h に対し, $\pi_i(t)=\dfrac{h_i(t)}{\mathcal{V}^{\omega,h}(t)}$ となる π がポートフォリオとなる. このとき, $\mathcal{V}^{\omega,h}(t)=V^{\omega,\pi}(t)$ が任意の $t\in[0,\infty)$ で成り立つ.

この論文では admissible な戦略 h のみを扱う. ただし, 戦略 h が $(\omega,T)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ に関して, admissible であるとは, ($h\in\mathcal{H}(\omega,T)$ と記す.)

$$P[\mathcal{V}^{\omega,h}(t)\geq 0\ \forall 0\leq t\leq T]=1$$

が成り立つことをいう. また, 戦略 h が $(\omega, T) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ に関して, strongly admissible であるとは, ($h \in \mathcal{H}_+(\omega, T)$ と記す.)

$$P[\mathcal{V}^{\omega,h}(t) > 0 \ \forall 0 \le t \le T] = 1$$

が成り立つことをいう.

$$\mathcal{H}_+(\omega) := \bigcap_{T>0} \mathcal{H}_+(\omega, T)\ ,\ \mathcal{H}(\omega) := \bigcap_{T>0} \mathcal{H}(\omega, T)$$

とおく.

2.2　マーケット・ポートフォリオ

$$X(t) := \sum_{i=1}^{n} X_i(t) \tag{2.2.1}$$

$$\mu_i(t) := \frac{X_i(t)}{X(t)} \quad (i = 1, \dots, n) \tag{2.2.2}$$

とおく. この $\mu = \Big\{\mu(t) = \big(\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)\big)'\Big\}_{t \geq 0}$ をマーケット・ポートフォリオという. $X_i(t) > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ より, $0 < \mu_i(t) < 1$ $(i = 1, \dots, n)$ となる. また定義より明らかに, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) = 1$ を満たす.

(2.1.8) , (2.2.1) , (2.2.2) より,

$$\frac{dV^{\omega,\mu}(t)}{V^{\omega,\mu}(t)} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dX_i(t)}{X(t)} = \frac{dX(t)}{X(t)} \tag{2.2.3}$$

が成り立つ. この式を解いて,

$$V^{\omega,\mu}(t) = \frac{\omega}{X(0)} X(t) \qquad (\forall t \geq 0) \tag{2.2.4}$$

を得る. また,

$$\begin{aligned} d\log V^{\omega,\mu}(t) &= \gamma_\mu(t)dt + \sum_{\nu=1}^{d} \sigma_{\mu\nu}(t) dW_\nu(t)\ ,\ V^{\omega,\mu}(0) = \omega \quad \big(\because\ (2.1.12)\big) \\ &= d\log X(t) \quad \big(\because\ (2.2.4)\big) \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

となる. さらに, (2.1.6) , (2.2.5) より,

$$d\log \mu_i(t) = d\log X_i(t) - d\log X(t) = \big(\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t)\big)dt + \sum_{\nu=1}^{d} \big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\mu\nu}(t)\big) dW_\nu(t) \tag{2.2.6}$$

が成り立つ. これより, Itô の公式を用いて,

$$\frac{d\mu_i(t)}{\mu_i(t)} = \Big(\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t) + \frac{1}{2}\tau_{ii}^{\mu}(t)\Big)dt + \sum_{\nu=1}^{d} \big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\mu\nu}(t)\big) dW_\nu(t) \tag{2.2.7}$$

という表示式を得る.

Def 2.2.1 (Coherence).

(2.1.1) , (2.1.2) を満たす市場 $\mathcal{M}$ が coherent であるとは, (2.2.1) , (2.2.2) で定義したマーケット・ポートフォリオ μ が

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log \mu_i(T) = 0 \quad a.s. \quad (\forall i = 1, \dots, n) \tag{2.2.8}$$

を満たすことをいう.

Theorem 2.2.2.
$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log\log T}{T^2}\int_0^T \|a(t)\|^2 dt = 0 \qquad a.s. \tag{2.2.9}$$
が成り立つとする. このとき, 以下の (i) , (ii) , (iii) は同値である.

(i) $\mathcal{M}$ が coherent

$$\text{(ii)} \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \big(\gamma_i(t)-\gamma_\mu(t)\big)dt = 0 \qquad a.s. \quad (i=1,\dots,n) \tag{2.2.10}$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \big(\gamma_i(t)-\gamma_j(t)\big)dt = 0 \qquad a.s. \quad (i,j=1,\dots,n) \tag{2.2.11}$$

定理の証明には, 次の事実を用いる.

Prop 2.2.3.

M を連続な局所マルチンゲールとして,
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\langle M\rangle_t \log\log t = 0 \qquad a.s.$$
が成り立つとする. このとき,
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}M(t) = 0 \qquad a.s.$$
が成立する.

(Proof of Theorem 2.2.2)

(i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す.
まず,
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Big(\log V^{\omega,\mu}(T) - \int_0^T \gamma_\mu(t)dt\Big) = 0 \qquad a.s. \tag{2.2.12}$$
を示す.
$$\log\left(\frac{V^{\omega,\mu}(T)}{V^{\omega,\mu}(0)}\right) = \int_0^T \gamma_\mu(t)dt + \sum_{\nu=1}^d \int_0^T \sigma_{\mu\nu}(t)dW_\nu(t) \qquad \big(\because\ (2.2.5)\big)$$

$$L(T) := \log\left(\frac{V^{\omega,\mu}(T)}{V^{\omega,\mu}(0)}\right) - \int_0^T \gamma_\mu(t)dt = \sum_{\nu=1}^d \int_0^T \sigma_{\mu\nu}(t)dW_\nu(t)$$
とすると, L は連続な局所マルチンゲールであり,
$$\langle L\rangle_t = \sum_{\nu=1}^d \int_0^T \big(\sigma_{\mu\nu}(t)\big)^2 dt \qquad a.s.$$

が成り立つ. 右辺の被積分関数は

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{d}\bigl(\sigma_{\mu\nu}(t)\bigr)^2 &= \sum_{\nu=1}^{d}\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\sigma_{i\nu}(t)\Bigr)^2 \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{d}\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\bigl(\mu_i(t)\bigr)^2\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\bigl(\sigma_{i\mu}(t)\bigr)^2\Bigr) \quad (\because \text{シュワルツの不等式}) \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{d}\sum_{i=1}^{n}\bigl(\sigma_{i\mu}(t)\bigr)^2 \quad \Bigl(\because\ 0<\mu<1\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)=1\Bigr) \\
&= \|a(t)\|^2
\end{aligned}$$

と評価できる. よって, (2.2.9) より,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\langle L\rangle_T\log\log T=0 \qquad a.s.$$

となる. したがって, Prop 2.2.3 より,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Bigl(\log V^{\omega,\mu}(T)-\int_0^T\gamma_\mu(t)dt-\log\omega\Bigr)=0 \qquad a.s.$$

が成り立つ. 故に, (2.2.12) が成立する.

次に,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Bigl(\log X_i(T)-\int_0^T\gamma_i(t)dt\Bigr)=0 \qquad a.s. \tag{2.2.13}$$

を示す.

(2.1.6) より,

$$\log\left(\frac{X_i(t)}{X_i(0)}\right)=\int_0^T\gamma_i(t)dt+\sum_{\nu=1}^{d}\int_0^T\sigma_{i\nu}(t)dW_\nu(t)$$

$$N(T):=\log\left(\frac{X_i(t)}{X_i(0)}\right)-\int_0^T\gamma_i(t)dt=\sum_{\nu=1}^{d}\int_0^T\sigma_{i\nu}(t)dW_\nu(t)$$

とすると, N は連続な局所マルチンゲールであり,

$$\langle N\rangle_t=\sum_{\nu=1}^{d}\int_0^T\bigl(\sigma_{i\nu}(t)\bigr)^2dt \qquad a.s.$$

である. 行列のノルムに

$$\sum_{\nu=1}^{d}\bigl(\sigma_{i\nu}(t)\bigr)^2=a_{ii}(t)\leq\|a(t)\|^2$$

という評価式が成り立つ. したがって, (2.2.9) より,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\langle N\rangle_T\log\log T=0 \qquad a.s.$$

となる. 故に, 先程と同様にして, Prop 2.2.3 より, (2.2.13) が成立する.

(2.2.5) , (2.2.8) , (2.2.12) , (2.2.13) より, (i) から (ii) が従う.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) を示す.

(ii) より,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\big(\gamma_i(t)-\gamma_\mu(t)\big)dt=0 \qquad a.s.$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\big(\gamma_j(t)-\gamma_\mu(t)\big)dt=0 \qquad a.s.$$

となり, (ii) から (iii) が従う.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) を示す.

(2.2.13) より,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Big(\log X_i(T)-\int_0^T\gamma_i(t)dt\Big)=0 \qquad a.s. \quad (i=1,\ldots,n)$$

となる. また, (iii) の仮定より,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\big(\gamma_i(t)-\gamma_j(t)\big)dt=0 \qquad a.s. \quad (i,j=1,\ldots,n)$$

である. よって,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Big(\log X_i(T)-\int_0^T\gamma_1(t)dt\Big)=0 \qquad a.s. \quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.2.14}$$

を得る. したがって,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Big(\max_{1\le i\le n}\big(\log X_i(t)\big)-\int_0^T\gamma_1(t)dt\Big)=0 \qquad a.s.$$

となる. すなわち,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\Big(\log\big(\max_{1\le i\le n}X_i(t)\big)-\int_0^T\gamma_1(t)dt\Big)=0 \qquad a.s. \tag{2.2.15}$$

が成り立つ. また,

$$\log X_1(t)\le\log X(t)\le\log n+\log\big(\max_{1\le i\le n}X_i(t)\big) \qquad a.s.$$

より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\Big(\log X_1(t)-\int_0^T\gamma_1(t)dt\Big)&\le\frac{1}{T}\Big(\log X(t)-\int_0^T\gamma_1(t)dt\Big)\\&\le\frac{1}{T}\Big(\log n+\log\big(\max_{1\le i\le n}X_i(t)\big)-\int_0^T\gamma_1(t)dt\Big)\end{aligned}$$

となる. (2.2.14) , (2.2.15) と $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log n=0$ より,

$$\frac{1}{T}\Big(\log X(t)-\int_0^T\gamma_1(t)dt\Big)\ \to\ 0 \quad (T\to\infty) \qquad a.s. \tag{2.2.16}$$

が成り立つ. (2.2.15) , (2.2.16) より,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\big(\log X_i(T)-\log X(T)\big)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\mu_i(T)=0 \qquad a.s. \quad (i=1,\ldots,n)$$

である. すなわち, (iii) から (i) が従う. □

2.3 ポートフォリオ, ボラティリティーに関する諸式

Lemma 2.3.1.

π をポートフォリオとする.

$$R_i^\pi(t) := \log\left(\frac{X_i(t)}{V^{\omega,\pi}(t)}\right)\bigg|_{\omega=X_i(0)} \quad (0 \le t < \infty) \tag{2.3.1}$$

とすると, $\tau_{ij}^\pi(t) = \dfrac{d}{dt}\left\langle R_i^\pi, R_j^\pi\right\rangle_t$ が成り立つ. 特に, $\tau_{ii}^\pi(t) = \dfrac{d}{dt}\left\langle R_i^\pi\right\rangle_t \ge 0$ となる.

(Proof)

$$\begin{aligned} dR_i^\pi(t) &= d\log X_i(t) - d\log V^{\omega,\pi}(t) \\ &= \big(\gamma_i(t) - \gamma_\pi(t)\big)dt + \sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\pi\nu}(t)\big)dW_\nu(t) \quad \big(\because (2.1.6), (2.1.12)\big) \end{aligned}$$

より, 主張が従う. □

Lemma 2.3.2.

π, ρ をポートフォリオとする. このとき,

$$d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\rho(t)}\right) = \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log\left(\frac{X_i(t)}{V^\rho(t)}\right) \tag{2.3.2}$$

が成り立つ. 特に $\rho = \mu$ (μ:マーケット・ポートフォリオ) のとき

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) &= \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log \mu_i(t) \\ &= \big(\gamma_\pi^*(t) - \gamma_\mu^*(t)\big)dt + \sum_{i=1}^n \big(\pi_i(t) - \mu_i(t)\big) d\log\mu_i(t) \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

となる.

(Proof)

(2.1.16) より,

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\rho(t)}\right) &= \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log X_i(t) - d\log V^\rho(t) \\ &= \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log X_i(t) - \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log V^\rho(t) \quad \Big(\because \sum_{i=1}^n \pi_i(t) = 1\Big) \\ &= \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log\left(\frac{X_i(t)}{V^\rho(t)}\right) \end{aligned}$$

となり, (2.3.2) が成立する.

$\rho = \mu$ のとき,

$$d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) = \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log\mu_i(t) \quad \big(\because (2.2.5), (2.3.2)\big)$$

であるから, (2.3.3) の第 1 の等号は示された. 次に,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \mu_i(t) d\log\mu_i(t) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(t)\big(\gamma_i(t)-\gamma_\mu(t)\big)dt + \sum_{i=1}^n\sum_{\nu=1}^d \mu_i(t)\big(\sigma_{i\nu}(t)-\sigma_{\mu\nu}(t)\big)dW_\nu(t) \quad \big(\because (2.2.6)\big)\\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i(t)\gamma_i(t)dt - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mu_i(t)\mu_j(t)\gamma_j(t)dt - \sum_{i=1}^n \mu_i(t)\gamma_\mu^*(t)dt \quad \big(\because (2.1.13)\big)\\ &= -\gamma_\mu^*(t)dt \quad \Big(\because \sum_{i=1}^n \mu_i(t)=1\Big)\end{aligned}$$

となるから, (2.3.3) が成り立つ. □

Lemma 2.3.3.

π,ρ をポートフォリオとする.

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\tau_{ii}^\rho(t) - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\rho(t)\Big) \tag{2.3.4}$$

が成り立つ. 特に, $\rho=\pi$ とすると,

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\tau_{ii}^\pi(t) \tag{2.3.5}$$

となる. また, π がロング・オンリー・ポートフォリオとすると, $\gamma_\pi^*(t)\geq 0$ $(\forall t\geq 0)$ となる.

(Proof)

(2.1.17) , (2.1.18) より,

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\tau_{ii}^\rho(t) = \sum_{i=1}^n \pi_i(t)a_{ii}(t) - 2\sum_{i=1}^n \pi_i(t)a_{\rho i}(t) + a_{\rho\rho}(t)$$

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\rho(t) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \pi_i(t)a_{ij}(t)\pi_j(t) - 2\sum_{i=1}^n \pi_i(t)a_{\rho i}(t) + a_{\rho\rho}(t)$$

よって,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\tau_{ii}^\rho(t) - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\rho(t)\Big)\\ =&\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n \pi_i(t)a_{ii}^\rho(t) - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)a_{ij}^\rho(t)\Big) = \gamma_\pi^*(t)\end{aligned}$$

すなわち, (2.3.4) が成立する.

$\rho=\pi$ のとき, $\sum_{j=1}^n \tau_{ij}^\pi(t)\pi_j(t)=0$ より,

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \pi_i(t)\tau_{ij}^\rho(t)\pi_j(t) = 0$$

となる. (2.3.4) に代入すれば,

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\tau_{ii}^\pi(t)$$

であるので, (2.3.5) が示せた.

π がロング・オンリー・ポートフォリオのとき, $\pi_i, \tau_{ii}^\pi \geq 0$ より, $\gamma_\pi^*(t) \geq 0$ となる. □

(2.3.4) より, 以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) &= \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)d\log\mu_i(t) \quad \bigl(\because (2.3.3)\bigr) \\ &= \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)\frac{d\mu_i(t)}{\mu_i(t)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \tau_{ii}^\mu(t)dt \quad \bigl(\because (2.2.6), (2.2.7)\bigr) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}d\mu_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)dt \quad \bigl(\because (2.3.4)\bigr) \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Def 2.3.4 (strong nondegeneracy condition).

市場 $\mathcal{M}$ が strong nondegeneracy condition(以下 SNC 条件という) を満たすとは, $\epsilon \in (0,\infty)$ が存在して,

$$\xi' a(t)\xi = \xi'\sigma(t)\sigma'(t)\xi \geq \epsilon\|\xi\|^2$$

が任意の $t \in [0,\infty), \xi \in \mathbb{R}^n$ で成り立つことをいう.

Lemma 2.3.5.

π をポートフォリオとする. 市場 $\mathcal{M}$ が SNC 条件を満たすとき, ϵ が存在して,

$$\epsilon\bigl(1-\pi_i(t)\bigr)^2 \leq \tau_{ii}^\pi(t) \qquad a.s. \quad (i = 1,\dots,n) \tag{2.3.7}$$

が成り立つ. また, π をロング・オンリー・ポートフォリオとすると,

$$\frac{\epsilon}{2}\bigl(1-\pi_{(1)}(t)\bigr) \leq \gamma_\pi^*(t) \qquad a.s. \tag{2.3.8}$$

となる.

(Proof)

SNC 条件より, ϵ が存在して,

$$\begin{aligned} \tau_{ii}^\pi(t) &= \bigl(\pi(t)-e_i\bigr)' a(t)\bigl(\pi(t)-e_i\bigr)' \geq \epsilon\|\pi(t)-e_i\|^2 \\ &= \epsilon\Bigl(\bigl(1-\pi_i(t)\bigr)^2 + \sum_{i\neq j}\bigl(\pi_j(t)\bigr)^2\Bigr) \end{aligned}$$

となるので, (2.3.7) が成り立つ.

次に上の式と (2.3.5) より,

$$
\begin{aligned}
\gamma_\pi^* &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\tau_{ii}^{\pi}(t) \\
&\geq \frac{\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\Big(\big(1-\pi_i(t)\big)^2 + \sum_{i\neq j}\big(\pi_j(t)\big)^2\Big) \\
&= \frac{\epsilon}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\big(1-\pi_i(t)\big)^2 + \sum_{i=1}^{n}\big(\pi_i(t)\big)^2\big(1-\pi_i(t)\big)\Big) \\
&= \frac{\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\big(1-\pi_i(t)\big) \\
&\geq \frac{\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\big(1-\pi_{(1)}(t)\big) = \frac{\epsilon}{2}\big(1-\pi_{(1)}(t)\big).
\end{aligned}
$$

よって (2.3.8) が成り立つ. □

Lemma 2.3.5 より, 次の定理が成り立つ.

Theorem 2.3.6.

市場 $\mathcal{M}$ が SNC を満たすとする. 定数ロング・オンリー・ポートフォリオ π を考える. さらに $1-\pi_{(1)} =: \eta > 0$ を仮定する. また, 市場 $\mathcal{M}$ が coherent であるとする. このとき,

$$
\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)}\right) \geq \frac{\epsilon\eta}{2} > 0 \qquad a.s. \tag{2.3.9}
$$

が成り立つ.

(Proof)

(2.3.3) より,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\log\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i}{T}\log\mu_i(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\pi^*(t)dt \\
&\geq \frac{\epsilon\eta}{2} > 0 \qquad \forall T\in(0,\infty) \qquad (\because \text{Lemma 2.3.5})
\end{aligned}
$$

が成り立ち, また, 市場 $\mathcal{M}$ が coherent であるので, (2.3.9) が成り立つ. □

後で利用するために, UBC 条件から従う式を挙げておく.

Lemma 2.3.7

π をロング・オンリー・ポートフォリオとする. 市場 $\mathcal{M}$ が UBC 条件を満たすとき, K が存在して

$$
\tau_{ii}^{\pi}(t) \leq K\big(1-\pi_i(t)\big)\big(2-\pi_i(t)\big) \quad a.s. \quad i=1,\dots,n \tag{2.3.10}
$$

$$
\gamma_\pi^*(t) \leq 2K\big(1-\pi_{(1)}(t)\big) \quad a.s. \tag{2.3.11}
$$

が成り立つ.

(Proof)

UBC 条件より, K が存在して,

$$
\begin{aligned}
\tau_{ii}^{\pi}(t) &= \big(\pi(t)-e_i\big)' a(t) \big(\pi(t)-e_i\big)' \le K\|\pi(t)-e_i\|^2 \\
&= K\Big(\big(1-\pi_i(t)\big)^2 + \sum_{i\neq j}\big(\pi_j(t)\big)^2\Big) \\
&\le K\Big(\big(1-\pi_i(t)\big)^2 + \sum_{i\neq j}\pi_j(t)\Big) \quad (\because \pi \text{がロング・オンリー・ポートフォリオ}) \\
&= K\Big(\big(1-\pi_i(t)\big)^2 + 1-\pi_i(t)\Big) \\
&= K\big(1-\pi_i(t)\big)\big(2-\pi_i(t)\big)
\end{aligned}
$$

となるので, (2.3.10) が成り立つ.

次に (2.3.5) , (2.3.10) より,

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\pi}^{*} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\tau_{ii}^{\pi}(t) \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)K\big(1-\pi_i(t)\big)\big(2-\pi_i(t)\big) \\
&\le K\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\big(1-\pi_i(t)\big) \\
&= K\Big(\pi_{(1)}(t)\big(1-\pi_{(1)}(t)\big) + \sum_{k=2}^{n}\pi_{(k)}(t)\big(1-\pi_{(k)}(t)\big)\Big) \\
&\le K\Big(\big(1-\pi_{(1)}(t)\big) + \sum_{k=2}^{n}\pi_{(k)}(t)\Big) = 2K\big(1-\pi_{(1)}(t)\big).
\end{aligned}
$$

よって, (2.3.11) が成り立つ. □

3 ダイバーシティー

3.1 ダイバーシティーの定義といくつかの性質

Def 3.1.1 (ダイバーシティー).

(i) 市場 $\mathcal{M}$ がダイバーシティーモデルであるとは, $\delta \in (0.1)$ が存在して,

$$\mu_{(1)}(t) < 1 - \delta \quad (0 \leq \forall t \leq T) \qquad a.s.$$

を満たすことをいう.

(ii) 市場 $\mathcal{M}$ が弱ダイバーシティーモデルであるとは, $\delta \in (0.1)$ が存在して,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mu_{(1)}(t)dt < 1 - \delta \quad a.s.$$

を満たすことをいう.

Theorem 3.1.2.

市場 $\mathcal{M}$ が SNC 条件を満たし, かつダイバーシティーモデルであるとする. このとき, $\delta > 0$ が存在して,

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \delta \quad (\forall 0 \leq t \leq T) \qquad a.s. \tag{3.1.1}$$

が成り立つ. また, 市場 $\mathcal{M}$ が UBC 条件を満たし, かつ, $\delta > 0$ が存在して,

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \delta \quad \forall 0 \leq t \leq T \qquad a.s.$$

が成り立つならば, 市場 $\mathcal{M}$ はダイバーシティーモデルである.

同様にして, 市場 $\mathcal{M}$ が SNC 条件を満たし, かつ弱ダイバーシティーモデルであるとする. このとき, $\delta > 0$ が存在して,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt < \delta \quad a.s. \tag{3.1.2}$$

が成り立つ. また, 市場 $\mathcal{M}$ が UBC 条件を満たし, かつ, $\delta > 0$ が存在して,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt < \delta \quad a.s.$$

が成り立つならば, 市場 $\mathcal{M}$ は弱ダイバーシティーモデルである.

(Proof)

市場 $\mathcal{M}$ がダイバーシティーモデルであることから, $\delta > 0$ が存在して,

$$\mu_{(1)}(t) < 1 - \delta \quad \forall 0 \leq \forall t \leq T \qquad a.s.$$

が成り立つ. また, 市場 $\mathcal{M}$ が SNC 条件を満たすので, (2.3.8) より, $\epsilon > 0$ が存在して,

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \frac{\epsilon}{2}\bigl(1 - \mu_{(1)}(t)\bigr) \geq \frac{\epsilon\delta}{2}$$

よって, (3.1.1) が成り立つ. 弱ダイバーシティーモデルのときも同様にして (3.1.2) が成り立つ.

市場 $\mathcal{M}$ が UBC 条件を満たすので, (2.3.10) より, K が存在して,

$$\gamma_\mu^*(t) \le 2K\big(1 - \mu_{(1)}(t)\big)$$

が成り立つ. また, $\gamma_\mu^*(t) \ge \delta$ という仮定から,

$$\frac{\gamma_\mu^*(t)}{2K} \le 1 - \mu_{(1)}(t)$$

よって,

$$\mu_{(1)}(t) \le 1 - \frac{\gamma_\mu^*(t)}{2K} \le 1 - \frac{\delta}{2K}$$

となるので, 市場 $\mathcal{M}$ はダイバーシティーモデルとなる. 弱ダイバーシティーモデルのときも同様にして成り立つ. □

Prop 3.1.3.

すべての $i, j = 1, \ldots, n$ に対し, $\gamma_i(t) = \gamma_j(t)$ $(t \ge 0)$ とする. このとき,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt = 0 \qquad a.s.$$

が成り立つ.

(Proof)

仮定より,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \big(\gamma_i(t) - \gamma_j(t)\big)dt = 0 \qquad a.s.$$

が成り立つ. よって, Theorem 2.2.2 より,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \big(\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t)\big)dt = 0 \qquad a.s.$$

となる. また, 仮定より,

$$\gamma_\mu(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t)\gamma_i(t) + \gamma_\mu^*(t) = \gamma_i(t) + \gamma_\mu^*(t)$$

であるので,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt = 0 \qquad a.s.$$

が成り立つ. □

Theorem 3.1.4.

市場 $\mathcal{M}$ が SNC 条件を満たすとする. また, すべての $i, j = 1, \ldots, n$ に対し, $\gamma_i(t) = \gamma_j(t)$ $(t \ge 0)$ とする. このとき, 市場 $\mathcal{M}$ は弱ダイバーシティーモデルではない.

(Proof)

市場 $\mathcal{M}$ が弱ダイバーシティーモデルであると仮定する. Theorem 3.1.2 より, $\delta > 0$ が存在して,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt \geq \delta \quad a.s.$$

が成り立つ. これは, Prop 3.1.3 に矛盾する. よって, 市場 $\mathcal{M}$ は弱ダイバーシティーモデルではない. $\square$

3.2　裁定機会

Def 3.2.1 (裁定機会).

$T>0$, π,ρ をポートフォリオとする. このとき, π が ρ に関して $[0,T]$ 上で裁定機会であるとは,

$$P\bigl(V^{\pi}(T)\geq V^{\rho}(T)\bigr)=1 \quad \text{かつ} \quad P\bigl(V^{\pi}(T)>V^{\rho}(T)\bigr)>0$$

が成り立つことをいう. 特に, $P\bigl(V^{\pi}(T)>V^{\rho}(T)\bigr)=1$ となるとき, π は ρ に関して裁定機会である.

市場 $\mathcal{M}$ が (2.1.1) , (2.1.2) , (2.1.3) を満たすとする. また, $\mathbb{R}^d$ 値確率過程 $\theta=\bigl\{\theta(t)\bigr\}_{0\leq t\leq T}$ は発展的可測とし, さらに以下を満たすとする.

$$\sigma(t)\theta(t)=b(t)-r(t)I \quad (0\leq \forall t\leq T) \quad \text{かつ} \quad \int_0^T \|\theta(t)\|^2dt<\infty \quad a.s. \tag{3.2.1}$$

この θ をリスクの市場価格という. このリスクの市場価格 θ に対して, Z を以下で定義する.

$$Z(t):=\exp\Bigl(-\int_0^t \theta'(s)dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2ds\Bigr) \quad (0\leq t<\infty) \tag{3.2.2}$$

定義から, Itô の公式を用いて,

$$dZ(t)=-Z(t)\theta'(t)dW(t)$$

となるので, Z は非負の局所マルチンゲールとなる. また, 下に有界な局所マルチンゲールならば, 優マルチンゲールであるので, Z は優マルチンゲールとなる.

また, Z がマルチンゲールとなる必要十分条件は $\mathbb{E}\bigl(Z(T)\bigr)=1$ $\bigl(\forall T\in[0,\infty)\bigr)$ である.

$$\hat{W}(t):=W(t)+\int_0^t \theta(s)ds \tag{3.2.3}$$

とする.

Theorem 3.2.2

θ をリスクの市場価格とし, 市場 $\mathcal{M}$ が UBC 条件を満たすとする. また, すべての $T>0$ に対して, ポートフォリオ ρ が存在して, ポートフォリオ π が ρ に関して $[0,T]$ 上で裁定機会であるとする. このとき,

$$\mathbb{E}\bigl(Z(T)\bigr)<1$$

が成り立つ.

(Proof)

Z が優マルチンゲールであることから,

$$\mathbb{E}\bigl(Z(T)\bigr)\leq Z(0)=1$$

が成り立つ. $\mathbb{E}\bigl(Z(T)\bigr)=1$ とすると, Z はマルチンゲールとなるので, Girsanov の定理より, P と同値な確率測度 $Q_T(A):=\mathbb{E}\bigl(Z(T)I_A\bigr)$ $(A\in\mathcal{F}_T)$ が定義できて, (3.2.3) で定義した $\hat{W}$ が Q_T の下でブラウン運動とな

る. (2.1.1) から $d\left(\dfrac{1}{B(t)}\right)=-r(t)\dfrac{1}{B(t)}dt$ となるので, この式と (2.1.2) から, Itô の公式を用いて,

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{X_i(t)}{B(t)}\right) &= \frac{1}{B(t)}dX_i(t)+X_i(t)d\left(\frac{1}{B(t)}\right)\\
&= \frac{X_i(t)}{B(t)}\Big((b_i(t)-r(t))dt+\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{i\nu}(t)dW_\nu(t)\Big)\\
&= \frac{X_i(t)}{B(t)}\Big(\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{i\nu}(t)\theta_\nu(t)+\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{i\nu}(t)dW_\nu(t)\Big)\\
&= \frac{X_i(t)}{B(t)}\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{i\nu}(t)d\hat{W}_\nu(t). \qquad (3.2.4)
\end{aligned}
$$

よって, 市場 $\mathcal{M}$ が UBC 条件を満たしていることより, $\dfrac{X_i}{B}$ は Q_T の下で非負のマルチンゲールとなる.
同様にして, (2.1.11) から, Itô の公式を用いて,

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{V^\pi(t)}{B(t)}\right) &= \frac{1}{B(t)}dV^\pi(t)+V^\pi(t)d\left(\frac{1}{B(t)}\right)\\
&= \frac{V^\pi(t)}{B(t)}\bigg(\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)b_i(t)-r(t)\Big)dt+\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{\pi\nu}(t)dW_\nu(t)\bigg)\\
&= \frac{V^\pi(t)}{B(t)}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\big(b_i(t)-r(t)\big)dt+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{d}\pi_i(t)\sigma_{\pi\nu}(t)dW_\nu(t)\Big)\\
&= \frac{V^\pi(t)}{B(t)}\pi'(t)\sigma(t)d\hat{W}(t) \quad \big(V^\pi(0)=1\big). \qquad (3.2.5)
\end{aligned}
$$

よって, $\dfrac{V^\pi}{B}$ は Q_T の下で非負のマルチンゲールとなる. さらに, ρ をポートフォリオとして, $\triangle:=\dfrac{V^\pi-V^\rho}{B}$ も Q_T の下でマルチンゲールとなる. したがって, $\mathbb{E}\big(\triangle(T)\big)=\triangle(0)=0$ となる. 仮定より,$P\big(V^\pi(T)\geq V^\rho(T)\big)=1$ かつ $P\big(V^\pi(T)>V^\rho(T)\big)>0$ であり, また, Q_T が P と同値であることから, $Q_T\big(V^\pi(T)\geq V^\rho(T)\big)=1$ かつ $Q_T\big(V^\pi(T)>V^\rho(T)\big)>0$ が成り立つ. $\mathbb{E}^Q\big(\triangle(T)\big)=0$ は $Q_T\big(V^\pi(T)>V^\rho(T)\big)>0$ であることに矛盾するので, $\mathbb{E}\big(Z(T)\big)=1$ となる. □

$$
\hat{X}_i(t):=\frac{Z(t)}{B(t)}X_i(t)\ ,\ \hat{X}(t):=\frac{Z(t)}{B(t)}X(t)\ ,\ \hat{\mathcal{V}}^{\omega,h}(t):=\frac{Z(t)}{B(t)}\mathcal{V}^{\omega,h}(t) \quad \big(h\in\mathcal{H}(\omega)\big) \qquad (3.2.6)
$$

とおく. Itô の公式を用いて,

$$
\begin{aligned}
d\hat{X}_i(t) &= \frac{X_i(t)}{B(t)}dZ(t)+Z(t)d\frac{X_i(t)}{B(t)}-\frac{Z(t)}{B(t)}X_i(t)\sum_{\nu=1}^{d}\theta_\nu(t)\sigma_{i\nu}(t)dt\\
&= \hat{X}_i(t)\sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{i\nu}(t)-\theta_\nu(t)\big)dW_\nu(t) \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

となる. よって,

$$
\begin{aligned}
d\hat{X}(t) &= \sum_{i=1}^{n} d\hat{X}_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{d} \hat{X}_i(t)\big(\sigma_{i\nu}(t)-\theta_\nu(t)\big)dW_\nu(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{d} \hat{X}_i(t)\sigma_{i\nu}(t)dW_\nu(t) - \hat{X}(t)\sum_{\nu=1}^{d}\theta_\nu(t)dW_\nu(t) \\
&= \frac{Z(t)}{B(t)}X(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{d}\mu_i(t)\sigma_{i\nu}(t)dW_\nu(t) - \hat{X}(t)\sum_{\nu=1}^{d}\theta_\nu(t)dW_\nu(t) \\
&= \hat{X}(t)\sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{\mu\nu}(t)-\theta_\nu(t)\big)dW_\nu(t) \qquad (3.2.8)
\end{aligned}
$$

これより,

$$
\begin{aligned}
d\hat{\mathcal{V}}^{\omega,h}(t) &= \frac{\hat{\mathcal{V}}^{\omega,h}(t)}{B(t)}dZ(t) + Z(t)d\frac{\hat{\mathcal{V}}^{\omega,h}(t)}{B(t)} \\
&= \bigg(\frac{Z(t)h'(t)}{B(t)}\sigma(t) - \hat{\mathcal{V}}^{\omega,h}(t)\theta'(t)\bigg)dW(t) \quad \big(\hat{\mathcal{V}}^{\omega,h}(0)=\omega\big) \qquad (3.2.9)
\end{aligned}
$$

となる.

Theorem 3.2.3.

Theorem 3.2.2 と同じ仮定の下で, $\hat{V}^{\omega,\rho}(t) := \dfrac{Z(t)}{B(t)}V^{\omega,\rho}(t)$ とすると, $\mathbb{E}\big(\hat{V}^{\omega,\rho}(T)\big) < \omega$ が成り立つ.

(Proof)

すべての $t \geq 0$ において, $V^{\omega,\rho}(t) = \omega V^{\rho}(t)$ となる. $h(\cdot) := V^{\omega,\rho}(\cdot)\rho(\cdot)$, $\theta^{\rho}(\cdot) := \sigma'(\cdot)\rho(\cdot) - \theta(\cdot)$ とする. Itô の公式を用いて,

$$
\begin{aligned}
d\bigg(\frac{V^{\rho}(t)}{B(t)}\bigg) &= \frac{1}{B(t)}dV^{\rho}(t) + V^{\rho}(t)d\bigg(\frac{1}{B(t)}\bigg) \\
&= \frac{V^{\rho}(t)}{B(t)}\bigg(\big(b_\rho(t)-r(t)\big)dt + \sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{\rho\nu}(t)dW_\nu(t)\bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\bigg(Z(t)\frac{V^{\rho}(t)}{B(t)}\bigg) &= Z(t)d\bigg(\frac{V^{\rho}(t)}{B(t)}\bigg) + \frac{V^{\rho}(t)}{B(t)}dZ(t) - Z(t)\frac{V^{\rho}(t)}{B(t)}\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{\rho\nu}(t)\theta_\nu(t)dt \\
&= Z(t)\frac{V^{\rho}(t)}{B(t)}\bigg(\Big(b_\rho(t)-r(t)-\sum_{\nu=1}^{d}\sigma_{\rho\nu}(t)\theta_\nu(t)\Big)dt + \sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{\rho\nu}(t)-\theta_\nu(t)\big)dW_\nu(t)\bigg) \\
&= \hat{V}^{\rho}(t)\sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{\rho\nu}(t)-\theta_\nu(t)\big)dW_\nu(t) \\
&= \hat{V}^{\rho}(t)\big(\theta^{\rho}(t)\big)'dW(t) \qquad (3.2.10)
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\hat{V}^{\omega,\rho}(t) = \omega\hat{V}^{\rho}(t) = \omega\exp\Big(\int_0^t \big(\theta^{\rho}(s)\big)'dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta^{\rho}(s)\|^2 ds\Big) \qquad (3.2.11)
$$

となる. (3.2.10) , (3.2.11) より, $\hat{V}^{\omega,\rho}$ は非負局所マルチンゲール, つまり, 優マルチンゲールとなる. よって, $\mathbb{E}\big(\hat{V}^{\omega,\rho}(T)\big) \le \omega$ が成り立つ.

$\mathbb{E}\big(\hat{V}^{\omega,\rho}(T)\big) < \omega$ を背理法で示す. すなわち, $\mathbb{E}\big(\hat{V}^{\omega,\rho}(T)\big) = \omega$ と仮定する. このとき, $\hat{V}^{\omega,\rho}$ はマルチンゲールとなる. よって, Theorem 1.3.2 を用いることができ,

$$\tilde{W}^{(\rho)}(t) := W(t) - \int_0^t \big(\theta^\rho(s)\big)' ds = \hat{W}(t) - \int_0^t \sigma'(s)\rho(s)ds \tag{3.2.12}$$

とすると, $\tilde{W}^{(\rho)}$ は, P と同値な確率測度 $\tilde{P}_T^{(\rho)}(A) := \dfrac{\mathbb{E}\big(\hat{V}^{\omega,\rho}(T)I_A\big)}{\omega}$ $(A \in \mathcal{F}_T)$ の下で, ブラウン運動となる. また,

$$\big(\hat{V}^{\omega,\rho}(t)\big)^{-1} = \omega^{-1}\exp\Big(-\int_0^t \big(\theta^\rho(s)\big)' d\tilde{W}^{(\rho)}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta^\rho(s)\|^2 ds\Big)$$

より,

$$\begin{aligned} d\bigg(\frac{1}{\hat{V}^{\omega,\rho}(t)}\bigg) &= -\frac{1}{\hat{V}^{\omega,\rho}(t)}\big(\theta^\rho(t)\big)' d\tilde{W}^{(\rho)}(t) \\ &= -\frac{1}{\hat{V}^{\omega,\rho}(t)}\big(\theta^\rho(t)\big)'\Big(W(t) - \big(\theta^\rho(t)\big)' dt\Big) \end{aligned}$$

よって, Itô の公式を用いて,

$$\begin{aligned} d\bigg(\frac{V^\pi(t)}{V^\rho(t)}\bigg) &= d\bigg(\frac{\hat{V}^\pi(t)}{\hat{V}^\rho(t)}\bigg) = \frac{1}{\hat{V}^{\omega,\rho}(t)} d\hat{V}^\pi(t) + \hat{V}^\pi(t) d\bigg(\frac{1}{\hat{V}^{\omega,\rho}(t)}\bigg) - \frac{\hat{V}^\pi(t)}{\hat{V}^\rho(t)}\sum_{\nu=1}^d \theta_\nu^\rho(t)\theta_\nu^\pi(t)dt \\ &= \frac{\hat{V}^\pi(t)}{\hat{V}^\rho(t)}\sum_{k=1}^n\sum_{\nu=1}^d \big(\pi_k(t) - \rho_k(t)\big)\sigma_{k\nu}(t)dW_\nu(t) + \frac{\hat{V}^\pi(t)}{\hat{V}^\rho(t)}\Big(\sum_{\nu=1}^d \big(\theta_\nu^\rho(t)\big)^2 - \sum_{\nu=1}^d \theta_\nu^\rho(t)\theta_\nu^\pi(t)\Big)dt \\ &= \frac{V^\pi(t)}{V^\rho(t)}\sum_{k=1}^n\sum_{\nu=1}^d \big(\pi_k(t) - \rho_k(t)\big)\sigma_{k\nu}(t)\big(dW_\nu(t) - \theta_\nu^\rho(t)dt\big) \\ &= \frac{V^\pi(t)}{V^\rho(t)}\sum_{k=1}^n\sum_{\nu=1}^d \big(\pi_k(t) - \rho_k(t)\big)\sigma_{k\nu}(t)d\tilde{W}_\nu^{(\rho)}(t) \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

よって, $\dfrac{V^\pi}{V^\rho}$ は $\tilde{P}_T^{(\rho)}$ の下で, 非負局所マルチンゲール, つまり優マルチンゲールとなる. したがって, $\tilde{\mathbb{E}}_T^{(\rho)}\bigg(\dfrac{V^\pi(T)}{V^\rho(T)}\bigg) \le 1$ となる.

また, π が ρ に関して裁定機会であること, $\tilde{P}_T^{(\rho)}$ が P と同値であることから, $\tilde{P}_T^{(\rho)}\big(V^\pi(T) \ge V^\rho(T)\big) = 1$ が成り立つので, $P\big(V^\pi(T) = V^\rho(T)\big) = 1$ である. これは, $P\big(V^\pi(T) > V^\rho(T)\big) > 0$ に矛盾する. よって, $\mathbb{E}\big(\hat{V}^{\omega,\rho}(T)\big) < \omega$ となる. □

Theorem 3.2.4.

Theorem 3.2.2 と同じ仮定の下で, $\rho = \mu$ (μ はマーケット・ポートフォリオとする) とすると,

$$\mathbb{E}\big(\hat{X}_i(T)\big) < x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つ.

(Proof)

(3.2.7) から, $\hat{X}_i$ は優マルチンゲールであるので

$$\mathbb{E}\big(\hat{X}_i(T)\big) \le x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つ. $\omega = X(0)$ とすると, すべての $t \ge 0$ で $\hat{V}^{\omega,\mu}(t) = \hat{X}(t)$ が成り立つので, Theorem3.2.3 より, $\mathbb{E}\big(\hat{X}(T)\big) < X(0)$ が成り立つ. よって, 少なくとも 1 つは $\hat{X}_j$ で $\mathbb{E}\big(\hat{X}_j(T)\big) < x_j$ が成り立つものが存在する. それを $\hat{X}_j$ とする.

背理法を用いて,

$$\mathbb{E}\big(\hat{X}_i(T)\big) < x_i \quad \forall i \ne j$$

を示す. よって, ある $i \ne j$ に対し, $\mathbb{E}\big(\hat{X}_i(T)\big) = x_i$ が成り立つと仮定する. このとき $\hat{X}_i$ はマルチンゲールとなる. $\rho(\cdot) \equiv e_i$, $\pi(\cdot) \equiv e_j$ とすると, (3.2.13) より,

$$d\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\rho}(t)}\right) = d\left(\frac{X_j(t)}{X_i(t)}\right) = \frac{X_j(t)}{X_i(t)} \sum_{\nu=1}^{d} \big(\sigma_{j\nu}(t) - \sigma_{i\nu}(t)\big) d\tilde{W}_{\nu}^{(e_i)}(t)$$

となるので, $[0, T]$ 上で, $\dfrac{X_j}{X_i}$ は $\tilde{P}_T^{(e_i)}$-マルチンゲールとなる. 特に,

$$\frac{x_j}{x_i} = \tilde{\mathbb{E}}_T^{(e_i)}\left(\frac{X_j(T)}{X_i(T)}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Z(T)X_j(T)}{B(T)x_i}\right)$$

である. つまり, $x_j = \mathbb{E}\big(\hat{X}_j(T)\big)$ が成り立つ. これは, $\mathbb{E}\big(\hat{X}_j(T)\big) < x_j$ に矛盾する. よって,

$$\mathbb{E}\big(\hat{X}_i(T)\big) < x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つ. □

3.3 ダイバーシティーモデルと裁定ポートフォリオ

Theorem 3.3.1.

U を $\triangle_+^n$ の近傍とし, $G : U \to (0, \infty)$ を C^2 級関数とする. また, 任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し, $x_i D_i \log G(x)$ が U 上有界と仮定する. このとき, μ をマーケット・ポートフォリオとして,

$$\pi_i(t) := \Big(D_i \log G\big(\mu(t)\big) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j D_j \log G\big(\mu(t)\big) \Big) \mu_i(t) \tag{3.3.1}$$

と定義すると, π はポートフォリオである. また, このとき,

$$\log \left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)} \right) = \log \left(\frac{G\big(\mu(T)\big)}{G\big(\mu(0)\big)} \right) - \int_0^T \frac{1}{2G\big(\mu(t)\big)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^2 G\big(\mu(t)\big) \mu_i(t) \mu_j(t) \tau_{ij}^\mu(t) dt \tag{3.3.2}$$

となる.

(Proof)

すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して $\pi_i(t)$ は有界であり, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) = 1$ を満たすので, π はポートフォリオである.

$$g_i(t) := D_i \log G\big(\mu(t)\big) \ , \ N(t) := 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) g_j(t)$$

とする. Itô の公式を用いて,

$$\begin{aligned} d \log G\big(\mu(t)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_i(t) \big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\mu\nu}(t)\big) \mu_i(t) dW_\nu(t) + \sum_{i=1}^{n} g_i(t) \Big(\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t) + \frac{1}{2} \tau_{ii}^\mu(t) \Big) \mu_i(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{d} D_{ij}^2 \log G\big(\mu(t)\big) \big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\mu\nu}(t)\big) \big(\sigma_{j\nu}(t) - \sigma_{\mu\nu}(t)\big) \mu_i(t) \mu_j(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i(t) d\mu_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}^2 \log G\big(\mu(t)\big) \mu_i(t) \mu_j(t) \tau_{ij}^\mu(t) dt \quad \big(\because (2.2.7)\big) \end{aligned}$$

となる. さらに, $x \in U$ として

$$\begin{aligned} D_{ij}^2 \log G(x) &= D_j \left(\frac{D_i G(x)}{G(x)} \right) \\ &= \frac{D_{ij} G(x)}{G(x)} - \frac{D_j G(x) D_i G(x)}{\big(G(x)\big)^2} \\ &= \frac{D_{ij} G(x)}{G(x)} - D_i \log G(x) D_j \log G(x) \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} d \log G\big(\mu(t)\big) &= \sum_{i=1}^{n} g_i(t) d\mu_i(t) + \frac{1}{2G\big(\mu(t)\big)} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}^2 G\big(\mu(t)\big) \mu_i(t) \mu_j(t) \tau_{ij}^\mu(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_i(t) g_j(t) \mu_i(t) \mu_j(t) \tau_{ij}^\mu(t) dt \end{aligned}$$

となる. $\pi_i(t)=\big(g_i(t)+N(t)\big)\mu_i(t)$ より, 第 1 項は,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}d\mu_i(t)&=\sum_{i=1}^{n}g_i(t)d\mu_i(t)+N(t)d\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\Big)\\&=\sum_{i=1}^{n}g_i(t)d\mu_i(t)\end{aligned}$$

となる. 第 3 項は,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)&=\sum_{i,j=1}^{n}\big(g_i(t)+N(t)\big)\big(g_j(t)+N(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}g_i(t)g_j(t)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)\qquad\big(\because\ (2.1.19)\ ,\ \tau_{ij}^{\pi}=\tau_{ji}^{\pi}\big)\end{aligned}$$

と変形できる. さらに, (2.3.6) より,

$$\begin{aligned}d\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\mu}(t)}\right)&=\sum_{i=1}^{n}g_i(t)d\mu_i(t)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_i(t)g_j(t)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)\\&=d\log G\big(\mu(t)\big)-\frac{1}{2G\big(\mu(t)\big)}\sum_{i,j=1}^{n}D_{ij}^{2}G\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)dt\end{aligned}$$

である. よって, (3.3.2) が成り立つ. □

Thorem 3.3.2.

(2.1.1) , (2.1.2) , (2.1.3) を満たす市場 $\mathcal{M}$ が弱ダイバーシティーモデルであり, かつ, SNC 条件を満たすとする.

$p\in(0,1)$ とし, μ をマーケット・ポートフォリオとする. このとき,

$$\mu_i^{(p)}(t):=\frac{\big(\mu_i(t)\big)^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\big(\mu_i(t)\big)^p}\qquad(i=1,\dots,n)$$

とすると, $\mu^{(p)}$ はポートフォリオとなり,

$$V^{\mu^{(p)}}(T)>V^{\mu}(T)(n^{-\frac{1}{p}}e^{\frac{\epsilon\delta T}{2}})^{1-p}\qquad a.s.$$

が成り立つ. また,

$$T\geq\frac{2}{\epsilon\delta p}\log n\implies P\big(V^{\mu^{(p)}}(T)>V^{\mu}(T)\big)=1$$

が成り立つ.

(Proof)

Theorem 3.3.1 より, $x\in U$ として, $G(x):=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ と定義すると,

$$
\begin{aligned}
D_i \log G(x) &= \frac{D_i\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j)^p\Big)^{\frac{1}{p}}}{\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j)^p\Big)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j)^p\Big)^{\frac{1}{p}-1} p(x_i)^{p-1}}{p\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j)^p\Big)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{(x_i)^{p-1}}{\sum_{j=1}^{n}(x_j)^p}
\end{aligned}
$$

となる. よって, $\sum_{j=1}^{n} x_j D_j \log G(x) = 1$ が成り立つので,

$$
\mu_i^{(p)}(t) = \Big(D_i \log G\big(\mu(t)\big) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log G\big(\mu(t)\big)\Big)\mu_i(t)
$$

が成り立つ. また, すべての $t \geq 0$ で $0 < \mu_i^{(p)}(t) < 1$ が成り立つので, $\mu_i^{(p)}$ はロング・オンリー・ポートフォリオである. よって, (3.3.2) より,

$$
\begin{aligned}
\log\left(\frac{V^{\mu^{(p)}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) &= \log\left(\frac{G(\mu(T))}{G(\mu(0))}\right) - \int_0^T \frac{1}{2G\big(\mu(t)\big)} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}^2 G\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)dt \\
&= \log\left(\frac{G(\mu(T))}{G(\mu(0))}\right) + (1-p)\int_0^T \gamma_{\mu^{(p)}}^{*}(t)dt \qquad (3.3.3)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

ここで, (3.3.3) の第 1 項を評価していく. ヘルダーの不等式より, $\sum_{i=1}^{n} y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big(\sum_{i=1}^{n} 1\Big)^{1-\frac{1}{\alpha}}$ となるので, $y_i = \big(\mu_i(t)\big)^p$, $\alpha = \dfrac{1}{p}$ とすると,

$$
1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} \big(\mu_i(t)\big)^p = \Big(G\big(\mu(t)\big)\Big)^p \leq n^{1-p}
$$

が成り立つ.

よって, $G\big(\mu(T)\big) \geq 1$, $G\big(\mu(0)\big) \leq n^{\frac{1-p}{p}}$ より $\dfrac{1}{G\big(\mu(0)\big)} \geq n^{-\frac{1-p}{p}}$ が成り立つ. したがって, $\dfrac{G\big(\mu(T)\big)}{G\big(\mu(0)\big)} \geq n^{-\frac{1-p}{p}}$ つまり, (3.3.3) の第 1 項は

$$
\log\left(\frac{G(\mu(T))}{G(\mu(0))}\right) \geq -\frac{1-p}{p}\log n \qquad (3.3.4)
$$

と評価できる.

次に, (3.3.3) の第 2 項を評価していく. SNC 条件を満たすことから, (2.3.8) より, $\epsilon > 0$ が存在して,

$$
\gamma_{\mu^{(p)}}^{*}(t) \geq \frac{\epsilon}{2}\big(1 - \mu_{(1)}^{(p)}(t)\big) \qquad (3.3.5)
$$

となる. また,

$$\begin{aligned}\big(\mu^{(p)}_{(1)}(t)\big)^{1-p}\sum_{k=1}^{n}\big(\mu_{(k)}(t)\big)^{p} &= \sum_{k=1}^{n}\big(\mu_{(k)}(t)\big)^{p}\big(\mu^{(p)}_{(1)}(t)\big)^{1-p} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n}\big(\mu_{(k)}(t)\big)^{p}\big(\mu^{(p)}_{(k)}(t)\big)^{1-p} = \sum_{k=1}^{n}\mu_{(k)}(t) = 1\end{aligned}$$

である. すなわち,

$$\mu^{(p)}_{(1)}(t) \leq \mu_{(1)}(t) \tag{3.3.6}$$

となる. さらに, 弱ダイバーシティーモデルであるという仮定から, $\delta \in (0,1)$ が存在して,

$$\int_0^T \big(1-\mu_{(1)}(t)\big)dt > \delta T \qquad a.s. \tag{3.3.7}$$

が成り立つ. 以上より, (3.3.3) の第 2 項は

$$\begin{aligned}\int_0^T \gamma^*_{\mu^{(p)}}(t)dt &\geq \frac{\epsilon}{2}\int_0^T \big(1-\mu^{(p)}_{(1)}(t)\big)dt \quad \big(\because (3.3.5)\big) \\ &\geq \frac{\epsilon}{2}\int_0^T \big(1-\mu_{(1)}(t)\big)dt \quad \big(\because (3.3.6)\big) \\ &> \frac{\epsilon\delta T}{2} \quad \big(\because (3.3.7)\big)\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

と評価できる. よって, (3.3.3) , (3.3.4) , (3.3.8) より,

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{V^{\mu^{(p)}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) &> -\frac{1-p}{p}\log n + (1-p)\frac{\epsilon\delta T}{2} \\ &= (1-p)\left(\log n^{-\frac{1}{p}} + \log\left(\exp\frac{\epsilon\delta T}{2}\right)\right) \\ &= \log\left(n^{-\frac{1}{p}}\exp\frac{\epsilon\delta T}{2}\right)^{1-p}\end{aligned}$$

となる. 故に,

$$V^{\mu^{(p)}}(T) > V^{\mu}(T)\left(n^{-\frac{1}{p}}\exp\frac{\epsilon\delta T}{2}\right)^{1-p} \tag{3.3.9}$$

が成り立つ. また, $\left(n^{-\frac{1}{p}}\exp\frac{\epsilon\delta T}{2}\right)^{1-p} \geq 1$ と $T \geq \frac{2}{p\epsilon\delta}\log n$ は同値であるから, $T \geq \frac{2}{p\epsilon\delta}\log n$ ならば, (3.3.9) より, $P\big(V^{\mu^{(p)}}(T) > V^{\mu}(T)\big) = 1$ が成立する. □

Theorem 3.3.3.

(2.1.1) , (2.1.2) , (2.1.3) を満たす市場 $\mathcal{M}$ が弱ダイバーシティーモデルであり, かつ, SNC 条件を満たすとする.

$$\pi_i(t) = \left(\frac{2-\mu_i(t)}{G\big(\mu(t)\big)} - 1\right)\mu_i(t)\ ,\ G(x) := 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

と定義する. このとき,

$$V^{\pi}(T) > \frac{1}{2}V^{\mu}(T)\exp\frac{\epsilon\delta^2 T}{2n}$$

が成り立つ. また, 特に,

$$T \geq \frac{2n \log 2}{\epsilon \delta^2} \implies P\big(V^\pi(T) > V^\mu(T)\big) = 1$$

が成り立つ.

(Proof)

$$D_i \log G(x) = \frac{-x_i}{1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

$$\sum_{j=1}^n x_j D_j \log G(x) = \frac{-\displaystyle\sum_{j=1}^n (x_j)^2}{1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

が成り立つので,

$$\pi_i(t) = \Big(D_i \log G\big(\mu(t)\big) + 1 - \sum_{j=1}^n \mu_j(t) D_j \log G\big(\mu(t)\big)\Big)\mu_i(t)$$

となる. したがって, (3.3.2) より,

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)}\right) &= \log\left(\frac{G(\mu(T))}{G(\mu(0))}\right) - \int_0^T \frac{1}{2G\big(\mu(t)\big)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D^2_{ij} G\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau^\mu_{ij}(t)dt \\ &= \log\left(\frac{G(\mu(T))}{G(\mu(0))}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{1}{G\big(\mu(t)\big)}\big(\mu_i(t)\big)^2 \tau^\mu_{ii}(t)dt \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

が成り立つ.

(3.3.10) の各項を評価していく. $\dfrac{1}{2} < G\big(\mu(t)\big) < 1$ より, (3.3.10) の第 1 項は,

$$\log\left(\frac{G(\mu(T))}{G(\mu(0))}\right) > \log\frac{1}{2} \tag{3.3.11}$$

と評価される.

次に, (3.3.10) の第 2 項を評価していく. SNC 条件を満たすことから, (2.3.7) より, $\epsilon > 0$ が存在して,

$$\epsilon\big(1 - \mu_{(1)}(t)\big)^2 \leq \epsilon\big(1 - \mu_i(t)\big)^2 \leq \tau_{ii}(t) \quad a.s. \tag{3.3.12}$$

となる. またシュワルツの不等式より, $\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^n 1\Big)^{\frac{1}{2}}$ が成り立つので, $y_i = \mu_i(t)$ とすると, $1 \leq \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n \big(\mu_i(t)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}$, つまり,

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n (\mu_i(t))^2 \tag{3.3.13}$$

である. さらに, 弱ダイバーシティーモデルであるという仮定から, $\delta \in (0,1)$ が存在して,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big(1 - \mu_{(1)}(t)\big)dt > \delta \quad a.s.$$

が成り立つ. この式に, シュワルツの不等式を用いて,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big(1-\mu_{(1)}(t)\big)^2 dt > \delta^2 \tag{3.3.14}$$

が成立する. 以上より, (3.3.10) の第 2 項は,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{1}{G\big(\mu(t)\big)}\big(\mu_i(t)\big)^2 \tau_{ii}^{\mu}(t)dt \\
\geq\ & \frac{\epsilon}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^n \big(\mu_i(t)\big)^2\big(1-\mu_{(1)}(t)\big)^2 dt \quad \left(\because \frac{1}{G\big(\mu(t)\big)} > 1, (3.3.12)\right) \\
\geq & \frac{\epsilon}{2n}\int_0^T \big(1-\mu_{(1)}(t)\big)^2 dt \quad \big(\because (3.3.13)\big) \\
> & \frac{\epsilon}{2n}\delta^2 T \quad \big(\because (3.3.14)\big)
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

と評価できる. したがって, (3.3.10) , (3.3.11) , (3.3.15) より,

$$\log\left(\frac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) > \log\frac{1}{2} + \frac{\epsilon\delta^2 T}{2n} = \log\left(\frac{1}{2}\exp\frac{\epsilon\delta^2 T}{2n}\right)$$

つまり,

$$V^{\pi}(T) > \frac{1}{2}V^{\mu}(T)\exp\frac{\epsilon\delta^2 T}{2n}$$

となる. また, $\frac{1}{2}\exp\frac{\epsilon\delta^2 T}{2n} \geq 1$ と $T \geq \frac{2n\log 2}{\epsilon\delta^2}$ が同値なので,

$$T \geq \frac{2n\log 2}{\epsilon\delta^2}\text{ならば } P\big(V^{\pi}(T) > V^{\mu}(T)\big) = 1$$

が成り立つ. □

3.4 鏡像ポートフォリオ, 満期によらない裁定ポートフォリオ

Def 3.4.1 (鏡像ポートフォリオ).

μ をマーケット・ポートフォリオ, π をポートフォリオとして, ポートフォリオ $\tilde{\pi}^{[q]}$ を以下で定義する.

$$\tilde{\pi}^{[q]}(\cdot) := q\pi(\cdot) + (1-q)\mu(\cdot)$$

この $\tilde{\pi}^{[q]}$ を q-鏡像ポートフォリオという. また, π がロング・オンリー・ポートフォリオであり, かつ, $0 < q < 1$ とする. このとき, $\tilde{\pi}^{[q]}$ はロング・オンリー・ポートフォリオとなる.

$$\tau^{\pi}_{\mu\mu}(t) := \big(\pi(t) - \mu(t)\big)' a(t) \big(\pi(t) - \mu(t)\big) \quad 0 \le t \le T$$

と定義する.

Remark 3.4.2.

$$\tau^{\pi}_{\mu\mu}(t) = \pi'(t)\tau^{\mu}(t)\pi(t) = \tau^{\mu}_{\pi\pi}(t) \quad , \quad \tau^{\mu}_{\tilde{\pi}^{[q]}\tilde{\pi}^{[q]}}(t) = q^2 \tau^{\mu}_{\pi\pi}(t)$$

が成り立つ.

(Proof)

定義から,

$$\begin{aligned}
\tau^{\pi}_{\mu\mu}(t) &= \big(\pi(t) - \mu(t)\big)' a(t) \big(\pi(t) - \mu(t)\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \mu_j(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t) a_{ij}(t) \mu_j(t) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t) - 2\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \mu_j(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t) a_{ij}(t) \mu_j(t) \qquad (\because a \text{ が対称行列})
\end{aligned}$$

が成り立つ. 一方,

$$\begin{aligned}
\pi'(t)\tau^{\mu}(t)\pi(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) \tau^{\mu}_{ij}(t) \pi_j(t) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{\mu i}(t) \pi_j(t) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{\mu j}(t) \pi_j(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{\mu\mu}(t) \pi_j(t) \qquad \big(\because (2.1.17)\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t) - 2\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \mu_j(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t) a_{ij}(t) \mu_j(t) \qquad \big(\because a \text{ が対称行列}, (2.1.19)\big)
\end{aligned}$$

から, 1 つ目の式が成り立つ. 2 つ目の式は $\tilde{\pi}^{[q]}$ を代入すれば, 明らかに成り立つ. □

Remark 3.4.3.

$$\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) = q \log\left(\frac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) + \frac{q(1-q)}{2} \int_0^T \tau^{\mu}_{\pi\pi}(t)dt$$

が成り立つ.

(Proof)

(2.3.3) より,

$$
\begin{aligned}
& d\ \left(\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) - q\log\left(\frac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)}\right)\right) \\
&= \big(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - \gamma^*_{\mu}(t)\big)dt + \sum_{i=1}^{n}\big(\tilde{\pi}^{[q]}_i(t) - \mu_i(t)\big)d\log\mu_i(t) \\
&\quad -q\big(\gamma^*_{\pi}(t) - \gamma^*_{\mu}(t)\big)dt - q\sum_{i=1}^{n}\big(\pi_i(t) - \mu_i(t)\big)d\log\mu_i(t) \\
&= (q-1)\gamma^*_{\mu}(t)dt + \big(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - q\gamma^*_{\mu}(t)\big)dt
\end{aligned} \tag{3.4.1}
$$

(3.4.1) の第 2 項は次のように変形できる.

$$
\begin{aligned}
& 2\ \big(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - q\gamma^*_{\mu}(t)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\tilde{\pi}^{[q]}_i(t)\tau^{\mu}_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n}\tilde{\pi}^{[q]}_i(t)\tilde{\pi}^{[q]}_j(t)\tau^{\mu}_{ij}(t) \\
&\quad -q\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\tau^{\mu}_{ii}(t) + q\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\tau^{\mu}_{ij}(t) \quad \big(\because (2.3.4)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\tilde{\pi}^{[q]}_i(t)\tau^{\mu}_{ii}(t) - \tau^{\mu}_{\tilde{\pi}^{[q]}\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - q\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\tau^{\mu}_{ii}(t) + q\tau^{\mu}_{\pi\pi}(t) \\
&= (1-q)\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\tau^{\mu}_{ii}(t) + q\tau^{\mu}_{\pi\pi}(t) - q^2\tau^{\mu}_{\pi\pi}(t) \quad (\because \text{Remark 3.4.2}) \\
&= (1-q)\big(2\gamma^*_{\mu}(t) + q\tau^{\mu}_{\pi\pi}(t)\big) \quad \big(\because (2.3.5)\big)
\end{aligned}
$$

よって, (3.4.1) の式は,

$$
\frac{q(1-q)}{2}\tau^{\mu}_{\pi\pi}(t)dt \tag{3.4.2}
$$

に一致する. □

Remark 3.4.4.

ポートフォリオ π は以下の 2 条件を満たすとする.

(i) $P\left(\dfrac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)} \geq \beta\right) = 1$ または $P\left(\dfrac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)} \leq \dfrac{1}{\beta}\right) = 1$

(ii) $P\left(\displaystyle\int_0^T \tau^{\mu}_{\pi\pi}(t)dt \geq \eta\right) = 1$

また, $T > 0$, $\eta\ > 0$, $0 < \beta < 1$ とする. このとき, ポートフォリオ $\hat{\pi}$ が存在して,

$$
P\big(V^{\hat{\pi}}(T) < V^{\mu}(T)\big) = 1
$$

が成り立つ.

(Proof)

まず, $P\left(\dfrac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)} \leq \dfrac{1}{\beta}\right) = 1$ とする.

$$\hat{\pi}(\cdot) \equiv \tilde{\pi}^{[q]}(\cdot)\ ,\ q > 1 + \frac{2}{\eta}\log\frac{1}{\beta} > 1$$

とすると, Remark 3.4.2 より,

$$\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) \leq q\log\frac{1}{\beta} + \frac{q(1-q)}{2}\eta < 0 \qquad a.s. \tag{3.4.3}$$

が成り立つ.

次に,$P\left(\dfrac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)} \geq \beta\right) = 1$ とする.

$$\hat{\pi}(\cdot) \equiv \tilde{\pi}^{[q]}(\cdot)\ ,\ q < \min\{0, 1 + \frac{2}{\eta}\log\beta\}$$

とすると, Remark 3.4.2 より,

$$\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) \leq q\log\beta + \frac{q(1-q)}{2}\eta = q(\log\beta + \frac{(1-q)}{2}\eta) < 0 \qquad a.s. \tag{3.4.4}$$

が成り立つ. □

ここで, Remark 3.4.4 のポートフォリオ $\hat{\pi}$ を具体的に形成していく. 仮定として, 市場 $\mathcal{M}$ が弱ダイバーシティーモデルであり, SNC 条件を満たすとする. また, $\pi = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)'$, $q > 1$ とする.

$$\hat{\pi}(t) := \tilde{\pi}^{[q]}(t) = qe_1 + (1-q)\mu(t) \tag{3.4.5}$$

とおく. このとき, Remark 3.4.3 より,

$$\log\left(\frac{V^{\hat{\pi}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) = q\log\left(\frac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) + \frac{q(1-q)}{2}\int_0^T \tau^{\mu}_{\pi\pi}(t)dt \tag{3.4.6}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\mu}(t)}\right) &= \frac{1}{\mu_i(t)}d\mu_i(t) - \frac{1}{2}\tau^{\mu}_{11}(t)dt \quad \big(\because (2.3.6)\big) \\ &= \big(\gamma_1(t) - \gamma_\mu(t)\big)dt + \sum_{\nu=1}^{d}\big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\mu\nu}(t)\big)dW_\nu(t) \quad \big(\because (2.2.7)\big) \\ &= d\log\mu_1(t) \quad \big(\because (2.2.6)\big) \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

が成り立つ. さらに, 仮定より,

$$\tau^{\mu}_{\pi\pi}(t) = \tau^{\mu}_{11}(t) \quad \big(\because (2.1.15)\big) \tag{3.4.8}$$

である. よって, (3.4.6) , (3.4.7) , (3.4.8) より,

$$\log\left(\frac{V^{\hat{\pi}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) = q\log\left(\frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)}\right) - \frac{q(q-1)}{2}\int_0^T \tau^{\mu}_{11}(t)dt \tag{3.4.9}$$

となる.

SNC 条件から, (2.3.7) より, $\epsilon > 0$ が存在して,

$$\epsilon\big(1-\mu_{(1)}(t)\big)^2 \le \epsilon\big(1-\mu_1(t)\big)^2 \le \tau^{\mu}_{11}(t) \tag{3.4.10}$$

となる. シュワルツの不等式と弱ダイバーシティーモデルであるという仮定から, $\delta \in (0,1)$ が存在して,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big(1-\mu_{(1)}(t)\big)^2 dt > \delta^2 \tag{3.4.11}$$

である. よって, (3.4.10) , (3.4.11) より,

$$\int_0^T \tau^{\mu}_{11}(t) \ge \epsilon\int_0^T \big(1-\mu_{(1)}(t)\big)^2 dt > \epsilon\delta^2 T := \eta > 0 \tag{3.4.12}$$

が成り立つ. また, $\beta = \mu_1(0)$ とすると,

$$\frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)} \le \frac{1}{\beta} \tag{3.4.13}$$

となる. よって, (3.4.12) , (3.4.13) より,

$$q > q(T) := 1 + \frac{2}{\epsilon\delta^2 T}\log\frac{1}{\beta} \tag{3.4.14}$$

ととれば, (3.4.5) で定義した $\hat{\pi}$ は Remark 3.4.4 を満たすポートフォリオとなる. また, (3.4.9) より,

$$V^{\hat{\pi}}(t) \le \left(\frac{\mu_1(t)}{\mu_1(0)}\right)^q V^{\mu}(t) \tag{3.4.15}$$

が成り立つ.

次に, 任意の $T > 0$ に対し, マーケット・ポートフォリオ μ には裁定機会となるポートフォリオ η が存在することをみていく.

投資戦略 h を以下で定義する. $t = 0$ のとき, $\dfrac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q}$ をマーケット・ポートフォリオ μ に投資し, 1 を先程のポートフォリオ $\hat{\pi}$ に使い, 空売りする. また, money market には投資しないものとする. $q > 1$ とする.

$$h(\cdot) := \frac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q} V^{\mu}(\cdot)\mu(\cdot) - V^{\hat{\pi}}(\cdot)\hat{\pi}(\cdot)$$

とすると, $z := \dfrac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q} - 1 > 0$ を初期値として, この投資戦略 h により生成される価値過程は (2.1.20) より,

$$\begin{aligned} d\mathcal{V}^{z,h}(t) &= \left(\frac{q}{(\mu_1(0))^q} V^{\mu}(t)\mu'(t) - V^{\hat{\pi}}(t)\hat{\pi}'(t)\right)[b(t)dt + \sigma(t)dW(t)] \\ &= \sum_{i=1}^n V^{\mu}(t)\frac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q}\mu_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} - \sum_{i=1}^n V^{\hat{\pi}}(t)\hat{\pi}_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \\ &= \frac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q} dV^{\mu}(t) - dV^{\hat{\pi}}(t) \end{aligned}$$

となる.

また, h から生成されるポートフォリオを η とすると, $\eta_i(\cdot) = \dfrac{h_i(\cdot)}{\mathcal{V}^{z,h}(\cdot)}$ となり, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \eta_i(t) = 1$ となる.

η がロング・オンリー・ポートフォリオであることを示す. $i = 2, \ldots, n$ のとき, $\hat{\pi}_i(t) = -(q-1)\mu_i(t) < 0$ ($\because q > 1$) より, $\eta_i(t) \geq 0$ となる. よって, $\eta_1(t) \geq 0$ を示す.

$$\begin{aligned}
\eta_1(t) &= \frac{q\mu_1(t)}{(\mu_1(0))^q} V^\mu(t) - \Big(q - \big(q-1\big)\mu_1(t)\Big) V^{\hat{\pi}}(t) \\
&\geq \frac{q\mu_1(t)}{\big(\mu_1(0)\big)^q} V^\mu(t) - \Big(q - \big(q-1\big)\mu_1(t)\Big)\Big(\frac{\mu_1(t)}{\mu_1(0)}\Big)^q V^\mu(t) \quad (\because (3.4.15)) \\
&= \frac{V^\mu(t)\mu_1(t)}{\big(\mu_1(0)\big)^q}\bigg(\big(q-1\big)\big(\mu_1(t)\big)^q + q\Big(1 - \big(\mu_1(t)\big)^{q-1}\Big)\bigg) > 0
\end{aligned}$$

よって, η はロング・オンリー・ポートフォリオとなる. また,

$$\begin{aligned}
V^{z,\eta}(T) &= \frac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q} V^\mu(T) - V^{\hat{\pi}}(T) \\
&\geq V^\mu(T)\left(\frac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q} - \left(\frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{1-q}{2}\eta\right)\right)^q\right) \quad (\because (3.4.3)) \\
&> V^\mu(T)\left(\frac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q} - 1\right) \quad (\because (3.4.3)) \\
&= zV^\mu(T) = V^{z,\mu}(T) \quad a.s.
\end{aligned}$$

よって, T が短い期間であっても, 同じ初期値でマーケットポートフォリオ μ に関して裁定機会を持つポートフォリオを生成できることがわかる. しかし, $q > q(T)$ であり, $0 < \mu_1(0) < 1$ であるから,

$$z = \frac{q}{\big(\mu_1(0)\big)^q} - 1 > \frac{q(T)}{\big(\mu_1(0)\big)^{q(T)}} - 1$$

である. よって, $T \to 0$ とすると, $q(T) \to \infty$ より, $z \to \infty$ となる. すなわち, T が小さくなれば, 初期値 z は大きくしなければならない.

3.5 ダイバーシティーモデルの例

この section では, ダイバーシティーとなる市場モデルの例を紹介する.

Example 3.5.1.

以下を仮定する. $T > 0$, $\delta \in (1/2, 1)$, σ は定数の行列, $g_1, \ldots, g_n$ を非負の定数とする. また, 証券の個数を n 個, ブラウン運動を n 次元とする. このとき, 以下の市場モデルを考える.

$$d\log X_i(t) = \gamma_i(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_{i\nu} dW_\nu(t), \quad 0 \le t \le T \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\gamma_i(t) := g_i 1_{\mathcal{O}_i^c}\big(\mathcal{X}(t)\big) - \frac{M}{\delta} \frac{1_{\mathcal{O}_i}\big(\mathcal{X}(t)\big)}{\log\big((1-\delta)X(t)/X_i(t)\big)}$$

ただし, $\mathcal{X}(t) = \big\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\big\}'_{0 \le t \le T}, X(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j(t)$ とする. さらに,

$$\mathcal{O}_1 := \left\{x \in (0,\infty)^n \mid x_1 \ge \max_{2 \le j \le n} x_j\right\}, \ \mathcal{O}_n := \left\{x \in (0,\infty)^n \mid x_n > \max_{1 \le j \le n-1} x_j\right\}$$

$$\mathcal{O}_i := \left\{x \in (0,\infty)^n \mid x_i > \max_{1 \le j \le i-1} x_j \ , \ x_i \ge \max_{i+1 \le j \le n x_j}\right\} \quad (i = 2, \ldots, n-1)$$

とすると, このモデルはダイバーシティーとなる.

3.6 多次元 Black-Scholes モデル

この section では, 一般の多次元 Black-Scholes モデルが,(弱) ダイバーシティーモデルではないことを示す.

Prop 3.6.1.

次の市場モデルを考える.

$$dS_i(t) = S_i(t)b_i dt + S_i(t)\sigma_i dW_i(t) \qquad (i = 1, 2)$$

ただし, b_i, σ_i $(i = 1, 2)$ は定数とする. このモデルはダイバーシティーモデルではない.

(Proof)

上の式を解くと,

$$S_i(t) = S_i(0) \exp\left\{\sigma_i W_i(t) + (b_i - \sigma_i^2/2)t\right\} \qquad (i = 1, 2) \tag{3.6.1}$$

となることから, $p = b_2 - \dfrac{\sigma_2^2}{2} - b_1 + \dfrac{\sigma_1^2}{2}$ として,

$$\frac{S_1(t)}{S_1(t) + S_2(t)} = \frac{1}{1 + S_2(t)/S_1(t)} = \frac{1}{1 + \Big(S_2(0) \exp\left\{\sigma_2 W_2(t) - \sigma_1 W_1(t) + pt\right\}\Big)/S_1(0)}$$

となる.$\delta \in (0, 1)$ とする. $\delta' = \dfrac{1}{1-\delta} - 1$ とおけば,

$$\left\{\frac{1}{1 + \Big(S_2(0) \exp\left\{\sigma_2 W_2(t) - \sigma_1 W_1(t) + pt\right\}\Big)/S_1(0)} < 1 - \delta\right\} = \left\{\sigma_2 W_2(t) - \sigma_1 W_1(t) + pt > \log\left(\frac{\delta' S_1(0)}{S_2(0)}\right)\right\}$$

が成り立つ.

$$\sigma_2 W_2(t) - \sigma_1 W_1(t) + \left(b_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} - b_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t$$

は, 平均 $b_2 - \dfrac{\sigma_2^2}{2} - b_1 + \dfrac{\sigma_1^2}{2}$, 分散 $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t$ の正規分布に従うので,

$$P\left(\frac{1}{1 + \Big(S_2(0) \exp\left\{\sigma_2 W_2(t) - \sigma_1 W_1(t) + pt\right\}\Big)/S_1(0)} < 1 - \delta\right) < 1$$

となる. 同様にして, 任意の $\delta \in (0, 1)$ において,

$$P\left(\frac{S_2(t)}{S_1(t) + S_2(t)} < 1 - \delta\right) < 1$$

である. 故にこのモデルはダイバーシティーモデルではない. □

このことから一般の Black-Scholes モデルはダイバーシティーモデルではないことがいえる.

Prop 3.6.2.

次の市場モデルを考える.

$$dS_i(t) = S_i(t)b_i dt + S_i(t)\sigma_i dW_i(t) \qquad (i = 1, 2)$$

ただし, b_i, σ_i $(i=1,2)$ は定数とする. このモデルは弱ダイバーシティーモデルではない.

(Proof)

$q = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{1}{2}}$ とおく. $B(t) = \dfrac{1}{q}\big(\sigma_2 W_2(t) - \sigma_1 W_1(t)\big)$ と定義する.
$\big\{B(t)\big\}$ は連続なマルチンゲールであり,

$$\begin{aligned}\langle B\rangle_t &= \frac{1}{q^2}\langle \sigma_2 W_2 - \sigma_1 W_1\rangle_t \\ &= \frac{1}{q^2}\big(\sigma_2^2\langle W_2\rangle_t + \sigma_1^2\langle W_1\rangle_t\big) \\ &= \frac{1}{q^2}(\sigma_2^2 t + \sigma_1^2 t) = t\end{aligned}$$

となる. よってレヴィの定理より, $\big\{B(t)\big\}$ はブラウン運動となる.

任意の $\delta \in (0,1)$ に対し,

$$P\left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{S_i(t)}{S_1(t)+S_2(t)}dt < 1-\delta\right) < 1 \qquad (i=1,2)$$

となることを示す. S_1 と S_2 の順序を入れかえてもよいので, $i=1$ の場合のみを示せば十分である. $\dfrac{1}{1+S_2(0)/S_1(0)} \leq 1 - \dfrac{\delta}{2}$ として一般性を失わない.

$$\begin{aligned}\frac{S_1(t)}{S_1(t)+S_2(t)} &= \frac{1}{1+\Big(S_2(0)\exp\big\{qB(t)+pt\big\}\Big)/S_1(0)} \\ &\geq \frac{1}{1+\Big(S_2(0)\exp\big\{q\max_{0\leq t\leq T}\big|B(t)+pt/q\big|\big\}\Big)/S_1(0)}\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

である.

$\alpha = \dfrac{p}{q}, \dfrac{1}{1+\big(S_2(0)e^{q\epsilon}\big)/S_1(0)} = 1 - \dfrac{\delta}{2}$, すなわち, $\epsilon = \dfrac{1}{q}\log\left(\dfrac{S_1(0)}{S_2(0)}\dfrac{\delta/2}{1-\delta/2}\right)$ とおく. $\Big\{\max\limits_{0\leq t\leq T}\big|B(t)+\alpha t\big| < \epsilon\Big\}$ 上では, (3.5.1) より,

$$\frac{S_1(t)}{S_1(t)+S_2(t)} \geq \frac{1}{1+\big(S_2(0)e^{q\epsilon}\big)/S_1(0)} = 1 - \frac{\delta}{2}$$

となる. $[0,T]$ 上で積分すれば, $\Big\{\max\limits_{0\leq t\leq T}\big|B(t)+\alpha t\big| < \epsilon\Big\}$ 上で,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{S_1(t)}{S_1(t)+S_2(t)}dt \geq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

すなわち,

$$P\left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{S_1(t)}{S_1(t)+S_2(t)}dt \geq 1-\frac{\delta}{2}\right) \geq P\Big(\max_{0\leq t\leq T}\big|B(t)+\alpha t\big| < \epsilon\Big) \tag{3.6.3}$$

が成り立つ. この式より,

$$P\Big(\max_{0\leq t\leq T}\big|B(t)+\alpha t\big| < \epsilon\Big) > 0 \tag{3.6.4}$$

を示せば, 弱ダイバーシティーモデルではないことがいえる.

(3.6.4) を示す. 一般に, $\{b(t)\}$ を 1 次元ブラウン運動とすれば, $\max_{0\le t\le T}\big|b(t)\big|$ の分布は, $2\big|b(T)\big|$ と等しくなる ([1] より). 特に,

$$P\Big(\max_{0\le t\le T}\big|b(t)\big|<\epsilon\Big)>0 \tag{3.6.5}$$

となる.

$\hat{B}(t)=B(t)+\alpha t$ とおき, 確率測度 Q を

$$Q(A)=\mathbb{E}\left(I_A\exp\left\{-\alpha B(T)-\frac{\alpha^2 T}{2}\right\}\right)\ (A\in\mathcal{F}_T)$$

と定義する. このとき, 任意の $\epsilon>0$ に対して,

$$\begin{aligned}
P\Big(\max_{0\le t\le T}\big|B(t)+\alpha t\big|<\epsilon\Big)&=\mathbb{E}\left(I_{\left\{\max_{0\le t\le T}\left|\hat{B}(t)\right|<\epsilon\right\}}\right)\\
&=\mathbb{E}\left(I_{\left\{\max_{0\le t\le T}\left|\hat{B}(t)\right|<\epsilon\right\}}\exp\left\{\alpha B(T)+\frac{\alpha^2T}{2}\right\}\exp\left\{-\alpha B(T)-\frac{\alpha^2T}{2}\right\}\right)\\
&=\mathbb{E}\left(I_{\left\{\max_{0\le t\le T}\left|\hat{B}(t)\right|<\epsilon\right\}}\exp\left\{\alpha\hat{B}(T)-\frac{\alpha^2T}{2}\right\}\exp\left\{-\alpha B(T)-\frac{\alpha^2T}{2}\right\}\right)\\
&=\mathbb{E}_Q\left(I_{\left\{\max_{0\le t\le T}\left|\hat{B}(t)\right|<\epsilon\right\}}\exp\left\{\alpha\hat{B}(T)-\frac{\alpha^2T}{2}\right\}\right)
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

が成り立つ. Theorem 1.3.2 より, Q の下, $\{\hat{B}(t)\}$ はブラウン運動となる. よって, (3.6.5) に注意すれば,

$$Q\Big(\max_{0\le t\le T}\big|\hat{B}(t)\big|<\epsilon\Big)>0.$$

したがって, (3.6.6) と合わせれば, (3.6.4) が成立する. □

3.7 ヘッジ

(3.2.1) で定義したリスクの市場価格 θ, 裁定ポートフォリオが存在すると仮定する. つまり, 同値マルチンゲール測度 (以下 EMM) は存在しないとする.

$$y := \mathbb{E}\left(\frac{YZ(T)}{B(T)}\right) < \infty$$

となる $(\mathcal{F}_T)$-可測な確率変数 $Y : \Omega \to [0, \infty)$ (ヨーロピアン条件付き請求権) を考える.

Lemma 3.7.1.

証券の個数を n 個, W を n 次元ブラウン運動, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W$, また, σ を可逆行列とする.

$$M(t) := \mathbb{E}\left(\frac{YZ(T)}{B(T)} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right) \quad (0 \le t \le T)$$

とおく. このとき,

$$V_*(\cdot) := \frac{M(\cdot)B(\cdot)}{Z(\cdot)} \ , \ h_*(\cdot) := \left(\frac{B(\cdot)}{Z(\cdot)}\right) a^{-1}(\cdot)\sigma(\cdot)\big(\psi(\cdot) + M(\cdot)\theta(\cdot)\big)$$

とすると,

$$V_*(\cdot) = y \ , \ V_*(T) = Y \ , \ V_*(\cdot) \equiv \mathcal{V}^{y,h_*}(\cdot) \ge 0 \quad a.s.$$

となる.

(Proof)

M はブラウン運動から定まるフィルトレーションについて非負マルチンゲールであるので, Theorem 1.3.3 より, $\psi \in \mathcal{L}_T^2$ が存在して,

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbb{E}\big(M(t)\big) + \int_0^t \psi'(s)dW(s) \\ &= y + \int_0^t \psi'(s)dW(s) \quad (0 \le t \le T) \end{aligned}$$

と表せる.

$V_*(\cdot) = y$, $V_*(T) = Y$ は明らかなので, $V_*(\cdot) \equiv \mathcal{V}^{y,h_*}(\cdot) \ge 0$ $a.s.$ を示す. (3.2.9) に h_* を代入して整理すると,

$$\frac{Z(t)}{B(t)}\mathcal{V}^{y,h_*}(t) = y + \int_0^t \psi'(s)dW(s) + \int_0^t \theta'(s)\left(M(s) - \frac{Z(s)}{B(s)}\mathcal{V}^{y,h_*}(s)\right)dW(s)$$

となる. $I(\cdot) := \dfrac{Z(\cdot)}{B(\cdot)}\mathcal{V}^{y,h_*}(\cdot) - M(\cdot)$ とすると, $I(t) = -\int_0^t \theta'(s)I(s)dW(s)$ より, I は非負局所マルチンゲール, つまり, 優マルチンゲールであるので, $\mathbb{E}\big(I(t)\big) \le I(0) = 0$ となり, また, 任意の t に対して $I(t) \ge 0$ より, 任意の t において $I(t) = 0$ となる. よって, $V_*(\cdot) \equiv \mathcal{V}^{y,h_*}(\cdot)$ となる. □

Theorem 3.7.2.

証券の個数を n 個, W を n 次元ブラウン運動, $\mathcal{F}=\mathcal{F}^W$, また, σ を可逆行列とする. 売り手が付けるヨーロピアン条件付き請求権 Y の値段は

$$\mathcal{U}^Y(T) := \inf\{\omega > 0 \mid \exists h(\cdot) \in \mathcal{H}(\omega;T)\ s.t.\ \mathcal{V}^{\omega,h}(T) \geq Y\ a.s.\}$$

とできる. このとき, $\mathcal{U}^Y(T)=y$ となる.

(Proof)

まず, $\mathcal{U}^Y(T) \geq y$ を示す.

$$A_1 := \{\omega > 0 \mid \exists h \in \mathcal{H}(\omega;T)\ s.t.\ \mathcal{V}^{\omega,h}(T) \geq Y\ a.s.\}$$

とする. A_1 が空集合のとき, $\mathcal{U}^Y(T)=\infty$ より, $\mathcal{U}^Y(T) \geq y$ となる. A_1 が空集合でないときを考える. このとき, 任意の $\omega \in A_1$ に対し, $h \in \mathcal{H}(\omega;T)$ が存在して, (3.2.9) より, $\hat{\mathcal{V}}^{\omega,h}$ は非負局所マルチンゲールとなるので, 優マルチンゲールである. よって,

$$\omega \geq \mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{V}^{\omega,h}(T)Z(T)}{B(T)}\right) \geq \mathbb{E}\left(\frac{YZ(T)}{B(T)}\right) = y$$

となるので, $\mathcal{U}^Y(T) \geq y$ となる.

次に, $\mathcal{U}^Y(T) \leq y$ を示す.
Lemma 3.7.1 より, $h_* \in \mathcal{H}(\omega;T)$ が存在して, $\mathcal{V}^{y,h_*}(T) = Y\ a.s.$ を満たす. よって, $y \in A_1$ となるので, $y \geq \mathcal{U}^Y(T)$ となる. 以上から, $\mathcal{U}^Y(T)=y$ が成り立つ. □

Remark 3.7.3 (Put-Call-Parity).

L_1 , L_2 を正値, 連続 $(\mathcal{F}_t)$-適合過程とする.

$$Y_1 := \big(L_1(T)-L_2(T)\big)^+\ ,\ Y_2 := \big(L_2(T)-L_1(T)\big)^+\ ,\ U_i := \mathbb{E}\left(\frac{Z(T)Y_i}{B(T)}\right) \quad (i=1,2)$$

とおく. L_1 , L_2 が Put-Call-Parity を満たすとは,

$$U_1 - U_2 = \mathbb{E}\left(\frac{Z(T)\big(L_1(T)-L_2(T)\big)}{B(T)}\right) = L_1(0) - L_2(0)$$

が成り立つことをいう.

もし, $\dfrac{Z(L_1-L_2)}{B}$ がマルチンゲールのときは, Put-Call-Parity を満たす. また, π が ρ に関して裁定機会を持つならば, $L_1(\cdot) \equiv V^\pi(\cdot)$, $L_2(\cdot) \equiv V^\rho(\cdot)$ として,

$$U_1 - U_2 = \mathbb{E}\left(\frac{Z(T)\big(L_1(T)-L_2(T)\big)}{B(T)}\right) > 0 = V^\pi(0) - V^\rho(0)$$

となるので, L_1 , L_2 は Put-Call-Parity を満たさない.

Theorem 3.7.2 と同じ証明を用いれば, 時刻 T にマーケット・ポートフォリオ μ の資産 $V^\mu(T)$ の r 倍を得られる投資戦略が存在する最小の T を次のように求めることができる.

Theorem 3.7.4.

証券の個数を n 個, W を n 次元ブラウン運動, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W$, また, σ を可逆行列とする. また, 任意の $T > 0$ においてマーケット・ポートフォリオ μ に関して裁定機会となるポートフォリオが存在すると仮定する. $r > 1$ として,

$$\mathbb{T}(r) = \inf\left\{T \in (0,\infty) \mid \exists h \in \mathcal{H}(1;T)\ s.t.\ \frac{\mathcal{V}^h(T)}{V^\mu(T)} \geq r \quad a.s.\right\}$$

を考える. このとき,

$$\mathbb{T}(r) = \inf\left\{T \in (0,\infty) \mid f(T) \leq \frac{1}{r}\right\},\ f(t) := \frac{1}{X(0)}\mathbb{E}\left(\frac{Z(t)}{B(t)}X(t)\right)$$

と表せる.

(Proof)

$$F_1 = \left\{T\ \in (0,\infty) \mid \exists h \in \mathcal{H}(1;T) \quad s.t.\quad \frac{\mathcal{V}^h(T)}{V^\mu(T)} \geq r \quad a.s.\right\},\ F_2 = \left\{T \in (0,\infty) \mid f(T) \leq \frac{1}{r}\right\}$$

とする. また, $\mathbb{T} = \inf F_2$ としておく.

まず, $\mathbb{T} \leq \mathbb{T}(r)$ を示す.
F_1 が空集合のとき, $\mathbb{T}(r) = \infty$ なので $\mathbb{T} \leq \mathbb{T}(r)$ となる. F_1 が空集合でないとき, 任意の $T \in F_1$ に対して, $h \in \mathcal{H}(1;T)$ が存在して,

$$\mathcal{V}^h(T) \geq rV^\mu(T) \quad a.s.$$

を満たす. (3.2.9) より $\dfrac{Z\mathcal{V}^h}{B}$ は優マルチンゲールとなり,

$$1 \geq \mathbb{E}\left(\frac{Z(T)\mathcal{V}^h(T)}{B(T)}\right) \geq r\mathbb{E}\left(\frac{Z(T)V^\mu(T)}{B(T)}\right) = rf(T)$$

となる. したがって, $\mathbb{T} \leq \mathbb{T}(r)$ が成り立つ.

次に, $\mathbb{T} \geq \mathbb{T}(r)$ を示す.
F_2 が空集合のとき, $\mathbb{T} = \infty$ なので $\mathbb{T} \geq \mathbb{T}(r)$ となる.F_2 が空集合でないとき, $T \in F_2$, $y := f(T)$ とすると, $0 < y \leq \dfrac{1}{r}$ となる. Lemma 3.7.1 より, $h_* \in \mathcal{H}(1;\mathbb{T})$ が存在して,

$$Y := \frac{X(T)}{X(0)} = \mathcal{V}^{y,h_*}(T) = y\mathcal{V}^{h_*}(T) \quad a.s.$$

が成り立つ. よって,

$$\frac{1}{r}\mathcal{V}^{h_*}(T) \geq y\mathcal{V}^{h_*}(T) = \frac{X(T)}{X(0)} = V^\mu(T) \quad a.s.$$

であるので, $\mathbb{T} \geq \mathbb{T}(r)$ が成り立つ. 以上より, $\mathbb{T}(r) = \inf\left\{T \in (0,\infty) \mid f(T) \leq \dfrac{1}{r}\right\}$ となる. □

参考文献

[1] 舟木直久,『確率微分方程式』, 岩波書店,(2005).

[2] 長井英夫,『確率微分方程式』, 共立出版,(1999).

[3] ROBERT FERNHOLZ,IOANNIS KARATZAS, *Stochastic Portfolio Theory: an Overview* ,(2008).

[4] FERNHOLZ,E.R.,KARATZAS,I. & KARDARAS,C., *Diversity and arbitrage in equity markets. Finance* & *Stochastics 9*,1-27,(2005).

[5] FERNHOLZ,E.R., *Stochastic Portfolio Theory* ,Springer-Verlag,(2002).

[6] FERNHOLZ,E.R. & KARATZAS,I., Relative arbitrage in volatility-stabilized markets. *Annals of Finance*1,149-177,(2005).