

CIR 金利モデルについて

九州大学大学院数理学府数理学専攻

修士課程 2 年

塚永 政富

指導教員：谷口 説男 教授

修士論文

平成 21 年 1 月 29 日提出

序文

数理ファイナンスでは, マーケットのオプションに対して適切な価格を導く際に, 同値マルチンゲール測度 (以下 EMM とする) という概念が重要な役割を果たす。最も有名なマーケットモデルに Black-Scholes モデルというものがある。これはリスク資産 S_t を

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

という確率微分方程式で定めている。この Black-Scholes モデルの下では, EMM が存在し, マーケットが無裁定であるという結果が知られている。一般には EMM が存在するならば無裁定であることが知られている。(詳しくは [7], もしくは本論文 2.1 節を参照) そこで当然疑問となることは, リスク資産を別のものに変えたとき, そのマーケットでは EMM が存在するか? ということである。本論文では, リスク資産を

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

で与える CIR 過程について考察する。このモデルは元々, 金利の変動を表すモデルとして用いられているが, ここではリスク資産として用いる。その理由として, Black-Scholes モデルではリスク部分がそれ自身に比例しているのに対し, CIR 過程ではルートに比例するため, 変動が穏やかになるという違いがあるということ, さらに他の一般的なモデルに比べての CIR 過程の扱いやすさという点である。CIR 過程では興味深い性質が多く知られていて, EMM の存在を示すための道具はたくさん揃っている。本論文では, CIR 過程をリスク資産としたときのマーケットでは, EMM は係数が $k\theta = 0$ のときのみ存在することを Z.J.Guo 氏の論文 [8] に従って紹介する。上の一般論より, その場合はマーケットは無裁定であることもいえる。

この修士論文の構成について説明する。第 1 節では, 確率積分や確率微分方程式などの基本的な概念の定義と性質を述べた後, 先で必要になる CIR 過程の原点への到達時刻についての性質や, 時間変更についての話題を紹介する。時間変更については B.Øksendal 氏の論文 [12] を参照した。

第 2 節は, まず数理ファイナンスの基本となる概念と一般論を述べ, その後に 1 節で挙げた CIR 過程の性質を使って, EMM の存在を示す。

謝辞

本論文の作成にあたり, 長期間に渡り, 時には優しく時には厳しく, 終始丁寧な御指導, 御支援, 御助言を頂いた谷口説男教授に深く感謝いたします。

目次

1	確率微分方程式	1
1.1	確率積分	1
1.2	確率微分方程式と解の定義	7
1.3	解の存在について	7
1.4	一次元確率微分方程式 ($N=1$)	10
1.5	時間変更	10
1.6	ギルサノフの定理	12
1.7	CIR 過程と Bessel 過程	12
2	金利モデル	19
2.1	数理ファイナンスの一般論	19
2.2	CIR マーケットモデル	19

記号の定義

$$\mathcal{M} := \{(X_t)_{t \geq 0} \mid \text{右連続な 2 乗可積分マルチンゲール}\}$$

$$\mathcal{M}_c := \{(X_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M} \mid t \mapsto X_t \text{は連続 (a.s.)}\}$$

$$\mathcal{M}_{loc} := \{(X_t)_{t \geq 0} \mid X_0 = 0 \text{ となる局所マルチンゲール}\}$$

$$\mathcal{M}_{loc,c} := \{(X_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc} \mid t \mapsto X_t \text{は連続 (a.s.)}\}$$

$X \in \mathcal{M}_{loc,c}$ に対し,

$$\mathcal{L}_{loc}(X) := \{(f(t))_{t \geq 0} \mid \text{発展的可測で } P(\int_0^T f(t)^2 d\langle X \rangle_t < \infty) = 1\}$$

$X \in \mathcal{M}_c$ に対し,

$$\mathcal{L}(X) := \{(f(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{L}_{loc}(X) \mid E[\int_0^T f(t)^2 d\langle X \rangle_t] < \infty\}$$

$$\mathcal{L}_0 := \{(f(t))_{t \geq 0} \mid f(t, \omega) = \sum_{i=0}^n \xi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]} \text{で各 } \xi_i \text{ は } \mathcal{F}_{t_i} \text{ 可測で有界}\}$$

1 確率微分方程式

1.1 確率積分

Definition 1.1.1. (フィルトレーション) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ がフィルトレーションであるとは次の2つの条件を満たすときをいう。

- (1) $\{\mathcal{F}_t\}$ は σ -加法族, $t \geq 0$
- (2) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $t \geq s \geq 0$

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ をあわせて $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ と書き, これをフィルター付き確率空間という。

Definition 1.1.2. (通常条件) フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ が通常条件を満たすとは,

- (1) $\forall t \geq 0$ で $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ (右連続)
- (2) $\mathcal{F}_0$ が確率 0 の事象を全て含む。

ただし, $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ とおいた。

Definition 1.1.3. (適合過程) 確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ が $\mathcal{F}_t$ -適合であるとは, $\forall t \geq 0$ で X_t が $\mathcal{F}_t$ -可測の時を言う。

最も基本的な確率過程として, 次に定義するブラウン運動がある。

Definition 1.1.4. (ブラウン運動) 確率過程 $(W_t)_{t \geq 0}$ が $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動とは, 以下の条件を満たすときをいう。

- (1) $t \geq s \geq 0$ に対し, $(W_t - W_s)$ が平均 0, 分散 $t - s$ の正規分布に従い, $\mathcal{F}_s$ と独立である。
- (2) $t \mapsto W_t$ は連続である (a.s.)
- (3) (W_t) は $\mathcal{F}_t$ -適合である。
- (4) $W_0 = 0$ (a.s.)

ここで, (4) が $W_0 = x$ (a.s.) のときは W_t は x から出発するブラウン運動であるといい, 更に, $(W_t^1), (W_t^2), \dots, (W_t^d)$ が独立なブラウン運動としたとき, $(W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^d))_{t \geq 0}$ を d 次元ブラウン運動という。

Definition 1.1.5. (マルチンゲール) 確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ が $\mathcal{F}_t$ -マルチンゲールであるとは次の3つを満たすときをいう。

- (1) $E[|X_t|] < \infty$ $t \geq 0$
- (2) (X_t) は $\mathcal{F}_t$ -適合である。

$$(3) \quad E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad (a.s.) \quad t \geq s$$

(3) での” = ”が” $\geq$ ”のとき、劣マルチンゲールといい、” $\leq$ ”のときは優マルチンゲールであるという。更に $(M_t = (M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^d))_{t \geq 0}$ で $(M_t^1), (M_t^2), \dots, (M_t^d)$ がそれぞれマルチンゲールであるとき、 (M_t) を d 次元マルチンゲールという。

• ここで以下のように記号を定義しておく。

$$\mathcal{M} := \{(X_t)_{t \geq 0} \mid \text{右連続な 2 乗可積分マルチンゲール}\}$$

$$\mathcal{M}_c := \{(X_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M} \mid t \mapsto X_t \text{ は連続 (a.s.)}\}$$

Definition 1.1.6. (停止時刻) τ が停止時刻であるとは、 $\forall t \geq 0$ に対して、 $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ であるときをいう。

Definition 1.1.7. τ を停止時刻としたとき、 τ までの情報を表すものとして

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall t \geq 0 \text{ に対して、} A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

を考えることができる。さらに 確率過程 (X_t) に対して、 X_τ を

$$(X_\tau)(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$$

と定義する。

Proposition 1.1.8. 上で定義したものの重要な性質として、次の 2 つがある。

- (1) 2 つの停止時刻 τ_1, τ_2 があって $\tau_1 \leq \tau_2$ ならば $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$
- (2) 停止時刻 τ に対して、 X_τ は $\mathcal{F}_\tau$ で可測になる。

マルチンゲールの概念を幅広く応用ができるように、次の定義を導入する。

Definition 1.1.9. (局所マルチンゲール) 確率過程 (X_t) に対して、停止時刻の列 $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で $\tau_n \leq \tau_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ となるものがあって、各 n について $Y_t := X_{t \wedge \tau_n}$ がマルチンゲールになるとき、 (X_t) は局所マルチンゲールであるという。

• 以下の記号を定義する。

$$\mathcal{M}_{loc} := \{(X_t)_{t \geq 0} \mid X_0 = 0 \text{ となる局所マルチンゲール}\}$$

$$\mathcal{M}_{loc,c} := \{(X_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc} \mid t \mapsto X_t \text{ は連続 (a.s.)}\}$$

Theorem 1.1.10. $X, Y \in \mathcal{M}_{loc,c}$ に対し、 $XY - A_t \in \mathcal{M}_{loc,c}$ となる有界変動をもつ連続な適合過程 (A_t) が一意的に存在する。

Definition 1.1.11. (相互変動) 上の定理の A_t を $\langle X, Y \rangle_t$ と書くことにする。これを相互変動と呼ぶ。特に, $X = Y$ の時は A_t を $\langle X \rangle_t$ と書く。この $\langle X \rangle_t$ は t について単調増加になる。

Definition 1.1.12. (半マルチンゲール) 連続適合過程 (X_t) が

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

と書ける $M_t \in \mathcal{M}_{loc,c}$ と有界変動をもつ適合過程 A_t が存在するとき, (X_t) は半マルチンゲールという。 $(X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d))_{t \geq 0}$ として $(X_t^1), (X_t^2), \dots, (X_t^d)$ がそれぞれ半マルチンゲールであるとき, (X_t) は d 次元半マルチンゲールという。

Definition 1.1.13. (マルコフ性) 適合過程 (X_t) が, 任意の有界ボレル関数 f に対して

$$E[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = E[f(X_{t+s})|X_t], \quad t, s \geq 0$$

となるとき, (X_t) はマルコフ性をもつという。

Definition 1.1.14. (可予測)

$$\mathbb{L} = \{(X_t) \mid \text{適合過程で } t \mapsto X_t \text{ は左連続}\}$$

とし, $\mathcal{P}$ を $\mathbb{L}$ を可測にする $([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty) \times \mathcal{F}))$ 上の最小の σ -加法族としたとき, $\mathcal{P}$ -可測な関数を可予測であるという。

Definition 1.1.15. (発展的可測) $(f(t))$ について, $\forall t \geq 0$ に対して,

$$f(s, \omega) : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t] \times \mathcal{F}_t)) \longrightarrow (R^d, \mathcal{B}^d), \quad t \geq s$$

が可測であるとき, $f(t)$ を発展的可測であるという。

Proposition 1.1.16. $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動 (W_t) に対して, 以下が成立する。

- (1) $\mathcal{F}_t$ -マルチンゲールである。
- (2) $\langle W \rangle_t = t$, d 次元ブラウン運動であれば, $\langle W^i, W^j \rangle_t = \delta_{i,j} t$

連続確率過程を評価する不等式として, よく知られているものとして, 次の Doob の不等式がある。

Theorem 1.1.17. (Doob の不等式) (X_t) を連続劣マルチンゲールで, $p > 1$ で p 乗可積分とすると, $C > 0$ に対して次が成り立つ。

$$C^p P \left(\sup_{s \leq t} |X_s| \geq C \right) \leq E[|X_t|^p]$$

- 次の記号を導入する。

$X \in \mathcal{M}_{loc,c}$ に対し,

$$\mathcal{L}_{loc}(X) := \{(f(t))_{t \geq 0} \mid \text{発展的可測で } P(\int_0^T f(t)^2 d\langle X \rangle_t < \infty) = 1\}$$

$X \in \mathcal{M}_c$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X) &:= \{(f(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{L}_{loc}(X) \mid E[\int_0^T f(t)^2 d\langle X \rangle_t] < \infty\} \\ \mathcal{L}_0 &:= \{(f(t))_{t \geq 0} \mid f(t, \omega) = \sum_{i=0}^n \xi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]} \text{で各 } \xi_i \text{ は } \mathcal{F}_{t_i} \text{ 可測で有界}\}\end{aligned}$$

Definition 1.1.18. ($\mathcal{L}_0$ の確率積分) $X \in \mathcal{M}_c, f(t) \in \mathcal{L}_0$ に対しての確率積分 $I_t(f)$ を

$$I_t(f) := \sum_{i=0}^n \xi_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

と定義し, $I_t(f) = \int_0^t f(s) dX_s$ と表す。ただし, $t = t_{n+1}$ となるよう分点を合わせている。

Proposition 1.1.19. $f \in \mathcal{L}_0, \forall T > 0$ に対して, 次の等式が成り立つ。

$$E \left[\int_0^T f(t)^2 d\langle X \rangle_t \right] = E [I_T(f)^2]$$

Theorem 1.1.20. $X \in \mathcal{M}_c, f \in \mathcal{L}(X)$ に対して, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_0$ が存在して, 次が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T (f(t) - f_n(t))^2 d\langle X \rangle_t \right] = 0, \quad \forall T > 0$$

さらに, $f \in \mathcal{L}(X)$ に対して, $\|f\|_T := \int_0^T E[f^2(t)] d\langle X \rangle_t$ とノルムを定めると, ヒルベルト空間になる。

Definition 1.1.21. ($\mathcal{L}(X)$ の確率積分) $X \in \mathcal{M}_c, f \in \mathcal{L}(X)$ に対し, 前定理の $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を取ってくる。proposition 1.1.19 の式から

$$\begin{aligned}E [(I_T(f_n) - I_T(f_m))^2] &= E \left[\int_0^T (f_n(t) - f_m(t))^2 d\langle X \rangle_t \right] \\ &= \|f_n - f_m\|_T\end{aligned}$$

となる。ここで, $(f_n)_n$ は $\mathcal{L}(X)$ のコーシー列なので, $n, m \rightarrow \infty$ とすれば, 上の式は 0 に収束する。すると, $(I_T(f_n))_n$ が $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上のコーシー列となる。これより,

$$E[(Y - I_n(f))^2] \longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる確率変数 Y の存在が示される。この Y を $\int_0^T f(t) dX_t$ と書き, f の確率積分という。

Proposition 1.1.22. $X \in \mathcal{M}_c, f \in \mathcal{L}(X)$ に対し, その確率積分は連続な 2 乗可積分マルチンゲールであり,

$$E \left[\int_0^T f(t)^2 d\langle X \rangle_t \right] = E \left[\left(\int_0^T f(t) dX_t \right)^2 \right]$$

が成り立つ。

Definition 1.1.23. ($\mathcal{L}_{loc}(X)$ の確率積分) 最後に, $X \in \mathcal{M}_{loc,c}$, $f \in \mathcal{L}_{loc}(X)$ のときの確率積分の定義を与える。まず

$$\tau_n = n \wedge \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t f_s^2 d\langle X \rangle_s \geq n \right\}$$

とおき, $X_{t \wedge \rho'_n} \in \mathcal{M}_c$, $\rho'_n \rightarrow \infty$ (a.s.) となる停止時刻の列 $\{\rho'_n\}$ をとり, $\rho_n = \rho'_n \wedge \tau_n$ とする。このとき

$$X_t^n = X_{t \wedge \rho_n}, \quad f^n(t) = f(t)1_{t \leq \rho_n}$$

とおけば, この 2 つに関する確率積分は定義できる。 $n < m$ であれば,

$$\int_0^t f^n(s) dX_s^n = \int_0^t f^m(s) dX_s^m, \quad 0 \leq t \leq \rho_n$$

となるので,

$$\int_0^t f(s) dX_s = \int_0^t f^n(s) dX_s^n, \quad 0 \leq t \leq \rho_n$$

によって, 元の X と f に関する確率積分が定義される。この定義から明らかに $\int_0^t f(s) dX_s$ は連続な局所マルチンゲールであることは分かる。

Proposition 1.1.24. $X \in \mathcal{M}_{loc,c}$, $f \in \mathcal{L}_{loc}(X)$ に関する確率積分の性質を挙げる。

- (1) $a, b \in \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{L}_{loc}(X)$ のとき, $\int_0^t (af + bg)(s) dX_s = a \int_0^t f(s) dX_s + b \int_0^t g(s) dX_s$
- (2) $a, b \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathcal{M}_{loc,c}$ のとき, $\int_0^t f(s) d(aX + bY)_s = a \int_0^t f(s) dX_s + b \int_0^t f(s) dY_s$
- (3) $\forall Z \in \mathcal{M}_{loc,c}$ に対し $\langle \int f dX, Z \rangle_t = \int_0^t f(s) d\langle X, Z \rangle_s$ が成り立ち, この式が成り立つ $\mathcal{M}_{loc,c}$ の元は $\int_0^t f(s) dX_s$ だけである。特に, $Z_t = \int_0^t g(s) dY_s$ と確率積分で与えられているならば, $\langle \int f dX, \int g dY \rangle_t = \int_0^t f(s) g(s) d\langle X, Y \rangle_s$ となる。

Lemma 1.1.25. $f(t, \omega)$ を $\mathcal{G}_t$ 適合な確率過程とする。このとき, $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ となる停止時刻の列 $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$P \left(\int_0^{\tau_n} f^2(s, \omega) ds < \infty \right) = 1$$

が成立したとする。このとき, $A = \left\{ \int_0^{\tau_n} f^2(s, \omega) ds < \infty \right\}$ とおくと

$$P \left(A \cap \left\{ \sup_n \left| \int_0^{\tau_n} f(s, \omega) dW_s \right| = \infty \right\} \right) = 0$$

となる。

Proof of Lemma 1.1.25

$N > 0$ に対して $\sigma_N = \inf \{ t \leq \tau \mid \int_0^t f^2(s) ds \geq N \}$, $\inf \phi = \tau$, $f_N(t) = f(s)1_{t \leq \sigma_N}$ とする。 $\sigma_N = \tau$, $\sigma_N < \tau$ で場合分けすると, $C > 0$ に対して,

$$P \left(A \cap \left\{ \sup_n \left| \int_0^{\tau_n} f(s, \omega) dW_s \right| > C \right\} \right) \leq P \left(\sup_n \left| \int_0^{\tau_n} f_N(s, \omega) dW_s \right| > C \right)$$

$$+ P\left(A \cap \left\{\int_0^\tau f^2(s)ds > N\right\}\right)$$

となる。任意の $n_0 > 0$ について, Doob の不等式から

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{n \leq n_0} \left|\int_0^{\tau_n} f_N(s, \omega) dW_s\right| > C\right) &\leq \frac{1}{C^2} E\left[\left(\int_0^{\tau_{n_0}} f_N(s) dW_s\right)^2\right] \\ &\leq \frac{1}{C^2} E\left[\int_0^{\tau_{n_0}} f_N^2(s) ds\right] \\ &\leq \frac{N}{C^2} \end{aligned}$$

となるので, $n_0 \rightarrow \infty$ として,

$$P\left(\sup_n \left|\int_0^{\tau_n} f_N(s, \omega) dW_s\right| > C\right) \leq \frac{N}{C^2}$$

が得られる。これで $C \rightarrow \infty$ とすれば,

$$P\left(A \cap \left\{\sup_n \left|\int_0^{\tau_n} f(s, \omega) dW_s\right| = \infty\right\}\right) \leq P\left(A \cap \left\{\int_0^\tau f^2(s)ds > N\right\}\right)$$

となる。さらに, $N \rightarrow \infty$ とすれば, 事象 A の仮定に注意して

$$P\left(A \cap \left\{\sup_n \left|\int_0^{\tau_n} f(s, \omega) dW_s\right| = \infty\right\}\right) = 0$$

を得る。

Theorem 1.1.26. (伊藤の公式) $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ を

$$X_t^i = X_0^i + M_t^i + A_t^i, \quad 1 \leq i \leq d$$

となる d 次元連続局所マルチンゲール M_t と有界変動をもつ d 次元適合過程 A_t で書ける半マルチンゲールとする。 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ に対して $f(X_t)$ も半マルチンゲールであり,

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f(X_s)}{\partial x^i} dM_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f(X_s)}{\partial x^i} dA_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f(X_s)}{\partial x^i \partial x^j} d\langle M^i, M^j \rangle_s$$

が成り立つ。

Rem : ここで, 右辺の第 2 項と 3 項をまとめて

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f(X_s)}{\partial x^i} dX_s^i$$

と書くことがある。更に X_t の相互変動を $\langle X^i, X^j \rangle_t = \langle M^i, M^j \rangle_t$ と定義すれば,

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f(X_s)}{\partial x^i} dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f(X_s)}{\partial x^i \partial x^j} d\langle X^i, X^j \rangle_s$$

と表せる。

ブラウン運動 (W_t) に対して, $\mathcal{F}_t^W$ を $\sigma\{W_s; s \leq t\}$ と, これに P 上の零集合全体を合わせた最小の σ -加法族 とする。このとき, 通常条件を満たすフィルター付き確率空間になる。

Theorem 1.1.27. (マルチンゲール表現定理) $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t^W\})$ 上の右連続な $(X_t) \in \mathcal{M}_{loc}$ に対して, $f \in \mathcal{L}_{loc}(W)$ が一意的存在して

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s) dW_s$$

が成り立つ。特に, このとき $\mathcal{M}_{loc} \subset \mathcal{M}_{loc,c}$ が成り立つ。

1.2 確率微分方程式と解の定義

ボレル可測な関数

$$b_i(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq N$$

$$a_{i,j}(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq d$$

に対して,

$$a(t, x) = (a_{i,j}(t, x))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq d}, \quad b(t, x) = (b_i(t, x))_{1 \leq i \leq N}$$

とおく。

Definition 1.2.1. (確率微分方程式の解) $((X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t))$ が確率微分方程式の解であるとは, 以下の 4 つを満たすときにいう。

- (1) $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ はフィルター付き確率空間で $\mathcal{F}_t$ は通常条件をみたす。
- (2) X_t は連続な N 次元適合過程で, W_t は d 次元の $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動である。
- (3) $P(\int_0^t \{|b_i(s, X_s)| + a_{i,j}^2(s, X_s)\} ds < \infty) = 1, \quad \forall i, j, \forall t \geq 0$
- (4) $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t a(s, X_s) dW_s, \quad \forall t \geq 0 \quad (a.s.)$

この (4) での式は成分的には, $dX_t^i = b_i(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^d a_{i,j}(t, X_t) dW_t^j, \quad 1 \leq i \leq N$ である。

Definition 1.2.2. (解の一意性について) 同じ確率空間上の共通のブラウン運動があり $((X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t))$ と $(\tilde{X}, W), ((\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t))$ を 2 つの解とする。このとき $X_t = \tilde{X}_t, \quad \forall t \geq 0 \quad (a.s.)$ が成り立つならば, 2 つの解は道ごとに一意であるという。それぞれの分布が等しいときは, 単に一意であるという。

Rem : $X_t = \xi + \int_s^t b(u, X_u) du + \int_s^t a(u, X_u) dW_u$ の解を $X_t^{(s, \xi)}$ と書くことにする。

1.3 解の存在について

Theorem 1.3.1. 確率微分方程式 $dX_t = b(t, X_t) dt + a(t, X_t) dW_t$ の係数

が, 正の定数 K に対し

$$a^2(t, x) + b(t, x)^2 \leq K(1 + x^2), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

を満たし, $a(t, x), b(t, x)$ が連続であるとする。このとき, 解が存在する。

Theorem 1.3.2. $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t a(s, X_s)dW_s$ の解が存在して,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d |a_{i,j}(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad \sum_{i=1}^N x_i b_i(t, x) \leq K(1 + |x|^2)$$

となるとき, $\forall q \geq 1$ に対して次が成立する。

$$E[|X_t|^{2q}]^{\frac{1}{q}} \leq E[|X_0|^{2q}]^{\frac{1}{q}} e^{ct} + c \int_0^t e^{c(t-s)} ds, \quad \forall t \geq 0$$

ただし, $c = 2qK$ である。

Proof of Theorem 1.3.2

まず, 伊藤の公式から

$$\begin{aligned} |X_t|^{2q} &= |X_0|^{2q} + q \int_0^t |X_s|^{2(q-1)} \sum_i \sum_j 2X^i a_{i,j}(s, X_s) dW_s \\ &= q \int_0^t |X_s|^{2(q-1)} \sum_i 2X^i b_i(s, X_s) ds + \frac{1}{2} q(q-1) \int_0^t |X_s|^{2(q-2)} \sum_i \sum_j |2X^i a_{i,j}(s, X_s)|^2 ds \end{aligned}$$

となる。 $\tau_M = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = M\}$, $\inf \phi = \infty$ とおけば, 仮定から

$$\begin{aligned} E[|X_{t \wedge \tau_M}|^{2q}] &\leq E[|X_0|^{2q}] + E \left[\int_0^{t \wedge \tau_M} 2qK |X_s|^{2(q-1)} (1 + |X_s|^2) ds \right] \\ &\quad + E \left[\int_0^{t \wedge \tau_M} 2q(q-1)K |X_s|^{2(q-1)} (1 + |X_s|^2) ds \right] \\ &\leq E[|X_0|^{2q}] + 2q^2 K E \left[\int_0^t |X_{s \wedge \tau_M}|^{2q} ds \right] + 2q^2 K E \left[\int_0^t |X_{s \wedge \tau_M}|^{2(q-1)} ds \right] \\ &\leq E[|X_0|^{2q}] + 2q^2 K \int_0^t E[|X_{s \wedge \tau_M}|^{2q}] ds + 2q^2 K \int_0^t E[|X_{s \wedge \tau_M}|^{2q}]^{\frac{q-1}{q}} ds \end{aligned}$$

これは, $m(t) = E[|X_{t \wedge \tau_M}|^{2q}]$, $c = 2qK$ とすると,

$$m(t) \leq m(0) + cq \int_0^t m(s) ds + cq \int_0^t m(s)^{1-\frac{1}{q}} ds$$

と書ける。

$$G_y : p(\cdot) \mapsto y + m(0) + cq \int_0^t p(s) ds + cq \int_0^t p(s)^{1-\frac{1}{q}} ds, \quad y > 0$$

とおくとき、次が成り立つ。

$$\forall t \geq 0, 0 \leq p_1(t) \leq p_2(t) \implies \forall t \geq 0, 0 \leq G_y p_1(t) \leq G_y p_2(t)$$

$$p_n(t) \text{ が有界で } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = p(t) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} G_y p_n(t) = G_y p(t)$$

さらに、 $v(t) = Re^{cqt}$ とし、 R を大きくとると

$$G_y v(t) \leq v(t)$$

となる。実際、

$$\frac{y + m(0)}{R} + \frac{e^{cqt}}{R^{\frac{1}{q}}} \int_0^t e^{-cs} ds < 1$$

となるよう R を大きくとれば、

$$\begin{aligned} G_y v(t) &= y + m(0) + R(e^{cqt} - 1) + cR^{1-\frac{1}{q}} \int_0^t e^{c(q-1)s} ds \\ &\leq y + m(0) + R(e^{cqt} - 1) + cR^{1-\frac{1}{q}} e^{cqt} \int_0^t e^{cs} ds \\ &= R \left(\frac{y + m(0)}{R} + \frac{ce^{cqt}}{R^{\frac{1}{q}}} \int_0^t e^{cs} ds - 1 \right) + Re^{cqt} \\ &\leq v(t) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $m(t) \leq v(t)$ となるよう R を大きくとると、

$$m(t) \leq G_y m(t) \leq G_y^2 m(t) \leq \dots \leq G_y^n m(t) \leq G_y^n v(t) \leq v(t)$$

となるので、 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} G_y^n m(t) \equiv v_y(t)$ であり、 $m(t) \leq v_y(t)$ となる。

$$\begin{aligned} v_y(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_y^n m(t) = G_y \lim_{n \rightarrow \infty} G_y^{n-1} m(t) = G_y v_y(t) \\ &= y + m(0) + cq \int_0^t v_y(s) ds + cq \int_0^t v_y(s)^{1-\frac{1}{q}} ds \end{aligned}$$

であり、 $0 < y + m(0) \leq v_y(t)$ となる。

また、 $v'_y(t) = cq v_y(t) + c v_y(t)^{1-\frac{1}{q}}$ より、 $v'_y(t) v_y(t)^{\frac{1}{q}-1} = cq v_y(t)^{\frac{1}{q}} + cq$ だから、 $u(t) = v_y(t)^{\frac{1}{q}}$ において、

$$u'(t) = cu(t) + c$$

となるので、

$$u(t) = e^{ct} \left(m(0) + c \int_0^t e^{-cs} ds \right), \quad m(0) = u(0) = (c + y)^{\frac{1}{q}}$$

$y \searrow 0$ として、 $m(t) \leq v_y(t)$ より、

$$m(t) = e^{cqt} \left(c^{\frac{1}{q}} + c \int_0^t e^{-cs} ds \right)^q$$

となる。最後に $R \rightarrow \infty$ として結果を得る。

1.4 一次元確率微分方程式 (N=1)

Theorem 1.4.1. 一次元確率微分方程式 $dX_t = b(t, X_t)dt + a(t, X_t)dW_t$ の解が存在して, $\forall t \geq 0$ で

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|, \quad |a(t, x) - a(t, y)| \leq h(|x - y|)$$

を満たすとする。ここで, K は正の定数で $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は狭義単調増加関数でとし,

$$\int_{(0, \varepsilon)} h^{-2}(u) du = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad h(0) = 0$$

とする。このとき, 道ごとの一意性が成り立つ。

Theorem 1.4.2. フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ があったとし, そこで一次元 $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動 (W_t) と一次元連続適合過程 $X^{(1)}, X^{(2)}$ があり, $j = 1, 2$ に対して,

$$X_t^{(j)} = X_0^{(j)} + \int_0^t \mu_j(s, X_s^{(j)}) ds + \int_0^t \nu(s, X_s^{(j)}) dW_s$$

がほとんど確実に成り立っているとする。更に以下を仮定する。

- (1) μ_j, ν は連続である。
- (2) ν は定理 を満たす。
- (3) $X_0^{(1)} \leq X_0^{(2)}$ (a.s.)
- (4) $\mu_1(t, x) \leq \mu_2(t, x), \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}$
- (5) μ_1, μ_2 のどちらかが定理を満たす。

このとき, $P(X_t^{(1)} \leq X_t^{(2)}, \forall t \geq 0) = 1$ となる。

1.5 時間変更

フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ 上の $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動 W_t があり, $c(t) > 0$ となる発展的可測な $c(t)$ に対して $\varphi_t = \int_0^t c(s) ds < \infty, \varphi_t$ の逆関数を ϕ_t と定義する。

Y_t, X_t をそれぞれ次の確率微分方程式の解, 伊藤過程とし, Y_t には解の一意性を仮定する。

$$dY_t = b(Y_t)dt + a(Y_t)dW_t \quad ; \mathcal{H}_t - \text{適合}$$

$$dX_t = \mu(t, \omega)dt + \nu(t, \omega)dW_t \quad ; \mathcal{F}_t - \text{適合}$$

ここで, $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_{\phi_t}$ である。更に係数についても以下を仮定する。

$$E \left[\int_0^t |\mu(s)| ds \right] < \infty, \quad E \left[\int_0^t |\nu(s)|^2 ds \right] < \infty$$

$$|b(y)| \leq K(1 + |y|^2), \quad |a(y)| \leq K(1 + |y|^2)$$

- ここで時間変更の議論に必要な記号と事実を、まず述べる。

$$\mathcal{A}f(x) := b(x)f'(x) + \frac{1}{2}a^2(x)f''(x)$$

$$\mathcal{L}f(t) := \mu(t)f'(X_t) + \frac{1}{2}\nu^2(t)f''(X_t)$$

$$W = C([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R})$$

$\omega_1, \omega_2 \in W$ に対して $d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\sup_{0 \leq t \leq n} |\omega_1(t) - \omega_2(t)| \wedge 1)$ とし、この位相的ボレル集合体を $\mathcal{W}$ とする。

Definition 1.5.1. $(W, \mathcal{W})$ 上の確率過程 $(X_t)(\omega) = \omega(t)$ について、

$$N_t(f) = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s)ds, \quad \forall f \in C_0^2$$

がマルチンゲールになる確率測度 P をマルチンゲール問題の解という。

Theorem 1.5.2. 確率微分方程式の解の一意性とマルチンゲール問題の解の一意性は同値である。

Lemma 1.5.3. 上の仮定のもとで、次の 2 つは同値である。

- (1) $X_{\phi_t} \stackrel{\text{law}}{=} Y_t$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_{\phi_s \wedge n}^{\phi_t \wedge n} \mathcal{L}f(r)dr \mid \mathcal{H}_s \cap \mathcal{F}_n \right] = E \left[\int_s^t \mathcal{A}f(X_{\phi_r})dr \mid \mathcal{H}_s \right], \quad \forall f \in C_0^2, t \geq s$

Proof of Lemma 1.5.3

(1) $\implies$ (2) 伊藤の公式から

$$f(X_{\phi_t \wedge n}) = f(X_{\phi_s \wedge n}) + \int_{\phi_s \wedge n}^{\phi_t \wedge n} \mathcal{L}f(r)dr + \int_{\phi_s \wedge n}^{\phi_t \wedge n} a(r)f'(X_r)dW_r$$

$$E[f(X_{\phi_t}) \mid \mathcal{H}_s] = f(X_{\phi_s}) + \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_{\phi_s \wedge n}^{\phi_t \wedge n} \mathcal{L}f(r)dr \mid \mathcal{H}_s \cap \mathcal{F}_n \right]$$

一方で、 $f(Y_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(Y_r)dr$ は $\mathcal{H}_t$ マルチンゲールだから、仮定の (1) から $f(X_{\phi_t}) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_{\phi_r})dr$ も $\mathcal{H}_t$ マルチンゲールとなる。これより、

$$E[f(X_{\phi_t}) - f(X_{\phi_s})] = E \left[\int_s^t \mathcal{A}f(X_{\phi_r})dr \mid \mathcal{H}_s \right]$$

とかけるので (2) が成立する。

(2) $\implies$ (1) 仮定より、再び

$$E[f(X_{\phi_t}) - f(X_{\phi_s})] = E \left[\int_s^t \mathcal{A}f(X_{\phi_r})dr \mid \mathcal{H}_s \right]$$

が成立していて, Y_t についても $f(Y_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(Y_r)dr$ がマルチンゲールとなる。ここで, Y_t の解の一意性より, マルチンゲール問題の解も一意であるので, (1) を得る。

Corollary 1.5.4. $c(t)$ に対して各 ω ごとに

$$\mu(t) = c(t)b(X_t), \quad \nu^2(t) = c(t)a(X_t)$$

が成り立っているとき, $X_{\phi_t} \stackrel{\text{law}}{=} Y_t$ となる。

Proof of Corollary 1.5.4

仮定から, $\forall f \in C_0^2$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_{\phi_s \wedge n}^{\phi_t \wedge n} \mathcal{L}f(r)dr \mid \mathcal{H}_s \cap \mathcal{F}_n \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_{s \wedge \varphi_n}^{t \wedge \varphi_n} \mathcal{L}f(\phi_r) \frac{1}{c(\phi_r)} dr \mid \mathcal{H}_s \cap \mathcal{F}_n \right] \\ &= E \left[\int_s^t \mathcal{A}f(X_{\phi_r})dr \mid \mathcal{H}_s \right] \end{aligned}$$

となるので, Lemma 1.5.3 より成立する。

1.6 ギルサノフの定理

X を $X_0 = 0$ となる $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ 上の連続局所マルチンゲールとして,

$$M_X(t) = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right)$$

とおく。この $M_X(t)$ を X による指数型マルチンゲールという。ただし, $M_X(t)$ は一般的には, 局所マルチンゲールであり, 条件をつけることで, マルチンゲールになることがある。

$M_X(t)$ がマルチンゲールのときは, $\forall T > 0$ に対して

$$P_X(A) = E[M_X(T)1_A], \quad A \in \mathcal{F}_t, \quad t \leq T$$

と定義する。これは $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 上の確率である。

Theorem 1.6.1. (ギルサノフの定理) W_t を $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動とする。

M_{X_t} が連続マルチンゲールのとき, $\tilde{W}_t = W_t - \langle W, X \rangle_t$ は P_X 上で $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動となる。

Theorem 1.6.2. (Novikov の条件) X を $X_0 = 0$ となる連続局所マルチンゲールとしたとき,

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right) \right] < \infty$$

が成り立てば, M_X は連続マルチンゲールとなる。

1.7 CIR 過程と Bessel 過程

Definition 1.7.1. (CIR 過程) 次の確率微分方程式

$$d\bar{r}_t = k(\theta - \bar{r}_t)dt + \sigma\sqrt{|\bar{r}_t|}dW_t$$

の解を CIR 過程という。ここで, k, θ, σ は定数で $\sigma > 0$ とする。

Proposition 1.7.2. CIR 過程 $(\bar{r}_t)$ に対して次が成り立つ。

- (1) $d\bar{r}_t = k(\theta - \bar{r}_t)dt + \sigma\sqrt{|\bar{r}_t|}dW_t$ は道ごとに一意的な解を持つ。
- (2) $\forall t \geq 0$ に対し, $\forall p \geq 1$ で $\bar{r}_t$ は p 乗可積分である。

Proof of Prop 1.7.2

(1) は Theorem 1.3.1 の条件を満たすことから, 解が存在することが分かり, 道ごとの一意性は, Theorem 1.4.1 で $h(u) = \sqrt{u}$ とすれば条件を満たすので, (1) の主張が示される。(2) については, Theorem 1.3.2 より得られる。

Lemma 1.7.3. $\bar{r}_0 > 0, \tau(\omega) := \inf \{0 \leq t \mid \bar{r}_t(\omega) = 0\}, \inf \phi = \infty$ としたとき,

- (1) $\sigma^2 \leq 2k\theta \implies P(\tau < \infty) = 0$
- (2) $\sigma^2 > 2k\theta, k \geq 0 \implies P(\tau < \infty) = 1$
- (3) $\sigma^2 > 2k\theta, k < 0 \implies 0 < P(\tau < \infty) < 1$

がそれぞれ成り立つ。

Proof of Lemma 1.7.3

$M \geq 0$ に対して, $\tau_M = \inf \{t \geq 0 \mid \bar{r}_t = M\}$ として, $f(x) : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \int_1^x e^{y \frac{2k}{\sigma^2}} y^{-\frac{2k\theta}{\sigma^2}} dy$$

とおく。このとき,

$$\frac{df}{dx} = e^{\frac{2kx}{\sigma^2}} x^{-\frac{2k\theta}{\sigma^2}}, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{2k}{\sigma^2} e^{\frac{2kx}{\sigma^2}} x^{-\frac{2k\theta}{\sigma^2}} - \frac{2k\theta}{\sigma^2} e^{\frac{2kx}{\sigma^2}} x^{-\frac{2k\theta}{\sigma^2}-1}$$

となるので,

$$\frac{\sigma^2 x}{2} \frac{d^2f}{dx^2} + k(\theta - x) \frac{df}{dx} = 0$$

が成り立つ。次に, $\bar{r}_0 > 0$ に対して, $0 < \varepsilon < \bar{r}_0 < M$ となる ε と M を任意にとり, 停止時刻 $\tau_{\varepsilon, M} = \tau_M \wedge \tau_\varepsilon$ とおくと, 伊藤の公式と上の微分方程式から

$$\begin{aligned} (*) \quad f(\bar{r}_{t \wedge \tau_{\varepsilon, M}}) &= f(\bar{r}_0) + \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, M}} \frac{df}{dx}(\bar{r}_s) d\bar{r}_s + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, M}} \frac{d^2f}{dx^2}(\bar{r}_s) d\langle \bar{r} \rangle_s \\ &= f(\bar{r}_0) + \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, M}} \frac{df}{dx}(\bar{r}_s) \sigma \sqrt{\bar{r}_s} dW_s \end{aligned}$$

となる。

- $f(\bar{r}_0) = f(\varepsilon)P(\tau_\varepsilon < \tau_M) + f(M)P(\tau_\varepsilon > \tau_M)$ を示す。

これは, (*) の式期待値をとって, $t \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\begin{aligned} f(\bar{r}_0) &= E[f(\bar{r}_{\tau_\varepsilon, M})] \\ &= E[f(\bar{r}_{\tau_\varepsilon, M})1_{\tau_\varepsilon < \tau_M} + f(\bar{r}_{\tau_\varepsilon, M})1_{\tau_\varepsilon > \tau_M}] \\ &= f(\varepsilon)P(\tau_\varepsilon < \tau_M) + f(M)P(\tau_\varepsilon > \tau_M) \end{aligned}$$

となる。次に (1) を示すため, $2k\theta \geq \sigma^2$ を仮定する。

$$\lim_{x \searrow 0} \int_x^1 e^{y \frac{2k}{\sigma^2}} y^{-\frac{2k\theta}{\sigma^2}} dy = \infty$$

となるので, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$ である。ここで,

$$\frac{f(\bar{r}_0)}{f(\varepsilon)} = P(\tau_\varepsilon < \tau_M) + \frac{f(M)}{f(\varepsilon)} P(\tau_\varepsilon > \tau_M)$$

に $\varepsilon \searrow 0$ として

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau_\varepsilon < \tau_M) \\ &= P(\cap_n \{\tau_{\frac{x}{n}} < \tau_M\}) \\ &= P(\tau < \tau_M) \end{aligned}$$

ここで, $M_n \nearrow \infty$ となる列 $(M_n)_n$ をとると,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\cup_n \{\tau < \tau_{M_n}\}) \\ &= P(\tau < \infty) \end{aligned}$$

となり, (1) が示された。ここから, $\sigma^2 > 2k\theta$ を仮定する。 $-\frac{2k\theta}{\sigma^2} > -1$ より,

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \int_1^x e^{y \frac{2k}{\sigma^2}} y^{-\frac{2k\theta}{\sigma^2}} dy < \infty$$

となる。 $\lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0)$ において, $f(\bar{r}_0) = f(\varepsilon)P(\tau_\varepsilon < \tau_M) + f(M)P(\tau_\varepsilon > \tau_M)$ に $\varepsilon \searrow 0$ とすれば,

$$f(\bar{r}_0) = f(0)P(\tau < \tau_M) + f(M)P(\tau > \tau_M)$$

が得られる。今, $k \geq 0$ とする。このとき,

$$\begin{aligned} \lim_{M \nearrow \infty} f(M) &= \lim_{M \nearrow \infty} \int_1^M e^{y \frac{2k}{\sigma^2}} y^{-\frac{2k\theta}{\sigma^2}} dy \\ &\geq \lim_{M \nearrow \infty} \int_1^M y^{-1} dy \\ &= \infty \end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{f(\bar{r}_0)}{f(M)} = \frac{f(0)}{f(M)} P(\tau < \tau_M) + P(\tau > \tau_M)$$

この式に $M \rightarrow \infty$ として $P(\tau = \infty) = 0$ なので, $P(\tau < \infty) = 1$ となり, (2) を得る。

$k < 0$ のときは $f(\infty) := \lim_{M \nearrow \infty} f(M) < \infty$ より,

$$\frac{f(\bar{r}_0)}{f(\infty)} = \frac{f(0)}{f(\infty)} P(\tau < \infty) + P(\tau = \infty)$$

この式で, $P(\tau < \infty) = 0$ とすれば, $P(\tau = \infty) = 1$ となるが, これは $f(x)$ は狭義単調増加関数であることに反する。 $P(\tau < \infty) = 1$ としたときも, 同じように矛盾する。これより (3) を得る。

Definition 1.7.4. (2 乗 Bessel 過程) $\delta \in \mathbb{R}$ に対して, 確率微分方程式

$$dX_t = \delta dt + 2\sqrt{|X_t|}dW_t$$

の解を $X_t(\delta)$ と書き, これを 2 乗 Bessel 過程という。

Proposition 1.7.5. 2 乗ベッセル過程に対し, 次が成り立つ。

- (1) $dX_t = \delta dt + 2\sqrt{|X_t|}dW_t$ は道ごとに一意的な解を持つ。
- (2) $\forall t \geq 0$ に対し, $\forall p \geq 1$ で $X_t(\delta)$ は p 乗可積分である。
- (3) $\delta \geq 0 \implies X_t(\delta) \geq 0, \quad \forall t \geq 0$

Proof of Prop 1.7.5

(1),(2) は CIR 過程のときと同様に Theorem 1.3.1 と Theorem 1.4.1 から従う。(3) については Theorem 1.4.2 で, $X^{(1)} = 0, X^{(2)} = X(\delta)$ とすれば, $\delta \geq 0$ なので, $X_t(\delta) \geq 0, \forall t \geq 0$ となる。

Lemma 1.7.6. CIR 過程と 2 乗ベッセル過程の間には, 次のような関係がある。

$$\{\bar{r}_t^{(s,y)} \mid s \leq t\} \stackrel{\text{law}}{=} \{\eta_t X_{\alpha_t}^{(\alpha_s, y/\eta_s)}(\delta) \mid s \leq t\}$$

ただし, 各記号は

$$\eta_t = e^{-kt}$$

$$\alpha_t = \frac{1}{4} \int_0^t \frac{\sigma^2}{\eta_u} du, \quad \beta_t = \alpha_t^{-1} \text{ (}\alpha_t \text{ の逆関数)}$$

$$\delta = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$$

とする。

Proof of Lemma 1.7.6

$Y_t = \eta_{\beta_t} X_t(\delta)$, $c(t) = \frac{4\eta_{\beta_t}}{\sigma^2}$ とおく。 Y_t について伊藤の公式を使うと

$$\begin{aligned} dY_t &= \eta_{\beta_t} dX_t(\delta) + X_t(\delta) d\eta_{\beta_t} \\ &= 2\eta_{\beta_t} \sqrt{|X_t(\delta)|} dW_t + \eta_{\beta_t} \delta dt - kX_t(\delta) \eta_{\beta_t} \frac{4\eta_{\beta_t}}{\sigma^2} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} 4\eta_{\beta_t}^2 |X_t(\delta)| &= 4\eta_{\beta_t} |Y_t(\delta)| \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \\ &= c(t) \sigma^2 |Y_t(\delta)| \end{aligned}$$

となり,

$$\frac{4k\theta}{\sigma^2} \eta_{\beta_t}^2 - \frac{4kY_t}{\sigma^2} \eta_{\beta_t} = c(t)(k\theta - kY_t)$$

となり, Corollary より $Y_{\alpha_t} \stackrel{\text{law}}{=} \bar{r}_t$ だから, $\eta_t X_{\alpha_t}(\delta) \stackrel{\text{law}}{=} \bar{r}_t$ となる。

Proposition 1.7.7. 2 乗 Bessel 過程を使って, 次の CIR 過程の性質を得る。

- (1) $k\theta \geq 0$ のとき, $\bar{r}_t \geq 0$, $\forall t \geq 0$
- (2) $k\theta < 0 \implies 0 < P(\tau < \infty)$

ここで, τ は $\tau(\omega) := \inf \{0 \leq t \mid \bar{r}_t(\omega) = 0\}$, $\inf \phi = \infty$ とする。

Proof of Prop 1.7.7

(1) については, $k\theta \geq 0$ なので, $\delta \geq 0$ となり, そのとき $X_t(\delta) \geq 0$ となる 2 乗 Bessel 過程と同分布になるので, $\bar{r}_t \geq 0$ となる。

次に (2) を示す。 $X_0(\delta) \geq 0$, $0 \leq \delta < 2$ のときは, $0 < \frac{4k\theta}{\sigma^2} < 2$ なので, つまり $0 < 2k\theta < \sigma^2$ である。このとき, Lemma 1.7.3 より CIR 過程 $\bar{r}_t$ は 0 に到達する確率は正となるで, Lemma 1.7.6 から $X_t(\delta)$ も同じように,

$$P(2 > \delta > 0 \text{ で } X_t(\delta) \text{ は } 0 \text{ に到達する。}) > 0$$

が成り立つ。これで, Theorem 1.4.2 より,

$$P(\delta < 0 \text{ で } X_t(\delta) \text{ は } 0 \text{ に到達する。}) \geq P(2 > \delta > 0 \text{ で } X_t(\delta) \text{ は } 0 \text{ に到達する。}) > 0$$

となり, 結果が得られる。

Lemma 1.7.8. $\lambda \in \mathbb{R}$ と CIR 過程 $\bar{r}_t$ に対して

$$Z_T = \exp \left(\int_0^T \lambda \sqrt{\bar{r}_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2 \bar{r}_s ds \right)$$

とおくと, $E[Z_t] = 1$ が成り立つ。

固定した s に対して, $(X_t)_{t \geq s}$, $X_s = r$ の分布を $Q_{s,r}$ と書き, そのときの期待値を表す記号を $E_{(s,r)}$ と書くことにする。

Proof of Lemma 1.7.8

$\forall t < t' \leq T, \forall y > 0, q = \sup_{s \leq T} \left| \frac{2\lambda\eta_s}{\sigma} \right|, \alpha_{t'} - \alpha_t < \frac{\pi}{2q}$ のとき,

$$E_{(t,y)} \left[\frac{Z_{t'}}{Z_t} \right] = 1$$

を示すことができれば, マルコフ性から

$$\begin{aligned} E \left[Z_t \cdot \frac{Z_T}{Z_t} \right] &= E \left[Z_t E \left[\frac{Z_T}{Z_t} \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= E \left[Z_t E_{(t, \bar{r}_t)} \left[\frac{Z_T}{Z_t} \right] \right] \\ &\vdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。ここで, α_s の一様連続性から上の式変形は有限回で終わることに注意する。以下の2つのステップを示す。

Step1 $\forall x \geq 0, E_{(\alpha_t, x)} \left[\exp \left(\frac{q^2}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} X_s(\delta) ds \right) \right] < \infty$

Step2 $E_{(t,y)} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_t^{t'} \lambda^2 \bar{r}_s ds \right) \right] \leq E_{(\alpha_t, y/\eta_t)} \left[\exp \left(\frac{q^2}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} X_s(\delta) ds \right) \right]$

Step1 を示す。 $f_s = \sin(q(s - \alpha_{t'}) + \frac{\pi}{2})$, $\alpha_t \leq s \leq \alpha_{t'}$ とする。このとき, $\alpha_{t'} - \alpha_t < \frac{\pi}{2q}$ となるようにとれば, $f_s > 0$ となる。 $F_s = -\frac{f'_s}{f_s}$ とおき, 伊藤の公式から

$$\begin{aligned} F_{\alpha_{t'}} X_{\alpha_{t'}}(\delta) &= F_{\alpha_t} X_{\alpha_t}(\delta) + \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} F_s dX_s(\delta) + \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} X_s(\delta) dF_s \\ &= F_{\alpha_t} X_{\alpha_t}(\delta) + \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} F_s dX_s(\delta) + \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} q^2 X_s(\delta) ds - \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} F_u^2 X_u(\delta) du \end{aligned}$$

と計算できる。次に, $M_t = 2 \int_0^t \sqrt{X_s(\delta)}$ に対して

$$Z_{t,t'} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} F_u dM_u - \frac{1}{2} \left\langle -\frac{1}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} F dM \right\rangle_u \right)$$

とおけば,

$$Z_{t,t'} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} F_u dX_u(\delta) + \frac{\delta}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} F_u du - \frac{1}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} F_u^2 X_u(\delta) du \right)$$

$$= f_{\alpha_t}^{\frac{\delta}{2}} \cdot \exp \left(\frac{1}{2} F_{\alpha_t} X_{\alpha_t}(\delta) + \frac{q}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} X_u(\delta) du \right)$$

$Z_{t,t'}$ は優マルチンゲールだから, $E_{(\alpha_t, x)}[Z_{t,t'}] \leq 1$ なので,

$$f_{\alpha_t}^{\frac{\delta}{2}} \cdot E_{(\alpha_t, x)} \left[\exp \left(\frac{q}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} X_u(\delta) du \right) \right] \cdot \exp(F_{\alpha_t} x) \leq 1$$

$$E_{(\alpha_t, x)} \left[\exp \left(\frac{q}{2} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} X_u(\delta) du \right) \right] \leq f_{\alpha_t}^{-\frac{\delta}{2}} \cdot \exp(F_{\alpha_t} x) < \infty, \quad \forall x \geq 0$$

次に Step2 を示す。Corollary 1.5.4 から

$$\begin{aligned} \int_t^{t'} \lambda^2 \bar{r}_s ds &\stackrel{\text{law}}{=} \int_t^{t'} \lambda^2 \eta_s X_{\alpha_s}(\delta) ds \\ &= \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} \lambda^2 \eta_{\beta_s} X_s(\delta) \frac{d\beta}{ds} ds \\ &= \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} X_s(\delta) \left(\frac{2\lambda \eta_{\beta_s}}{\sigma} \right)^2 ds \\ &\leq \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t'}} X_s(\delta) q^2 ds \end{aligned}$$

となるので, それぞれ期待値をとって結果を得る。

2 金利モデル

2.1 数理ファイナンスの一般論

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間として, $(S_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^n))_{t \geq 0}$ を半マルチンゲールであるとする。組 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, S)$ をマーケットモデルという。

マーケットの投資戦略に対する次のような概念を導入する。

Definition 2.1.1. (許容可能) 確率過程 (H_t) が許容可能であるとは, (H_t) が $H_0 = 0$ の可予測で $\forall t \geq 0$ で $\sum_{i=0}^n \int_0^t H_u^i dS_u^i \geq -a$ となる非負値の定数 a が存在するときをいう。

Definition 2.1.2. (無裁定) マーケット $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, S)$ が無裁定であるとは,

$$J = \left\{ \sum_{i=0}^n \int_0^\infty H_u^i dS_u^i \mid H \text{ は許容可能で } \sum_{i=0}^n \int_0^\infty H_u^i dS_u^i \text{ が } (a.s.) \text{ で存在する。} \right\}$$

$$L_+^\infty = \{f \mid f \text{ は確率変数で } f \geq 0, (a.s.) \text{ で有界}\}$$

おいたとき, $J \cap L_+^\infty = \{0\}$ が成り立つときをいう。

つまり無裁定とは, 資産 0 から投資を始めて, 満期 τ に資産が正となる確率は 0 であることを意味している。

数理ファイナンスの一般論より, 次のことが知られている。

Theorem 2.1.3. マーケット $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, S)$ に対して, $\exists Q \sim P$; $\exists f$: 非負値をとるの可予測と $M: Q$ 上のマルチンゲールで, 各 i に対し $S_t^i = \int_0^t f(s) dM_s^i$ となるとする。このときマーケットは無裁定となる。

2.2 CIR マーケットモデル

リスク資産の時間発展が CIR 過程で与えられるものを, CIR マーケットモデルと呼ぶ。すなわち,

Definition 2.2.1. (CIR マーケットモデル) リスク資産 1 つと無リスク債券 1 つのマーケットを考える。リスク資産を (r_t) , 無リスク債券を (B_t) で表し,

$$\begin{cases} r_t = \bar{r}_{t \wedge \tau} \\ B_t = e^{Rt} \end{cases}$$

とする。ただしここで,

- $\bar{r}_t$ は CIR 過程 $(d\bar{r}_t = k(\theta - \bar{r}_t)dt + \sigma\sqrt{|\bar{r}_t|}dW_t)$ の解

- k, θ, σ, R は定数で $\sigma > 0, R > 0$
- (W_t) は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動
- $\tau(\omega) := \inf \{0 \leq t \mid \bar{r}_t(\omega) = 0\}, \quad \inf \phi = \infty$

である。

Definition 2.2.2. (EMM) CIR マーケットモデルに対して次の 2 つを満たす $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率 $\tilde{P}$ を EMM (equivalent martingale measure(同値マルチンゲール測度)) と呼ぶことにする。

- (1) $\mathcal{F}_\tau$ 上で $\tilde{P}$ と P は同値
- (2) $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t \wedge \tau}$ に対し, $(e^{-Rt}r_t)_{t \geq 0}$ は $\mathcal{G}_t$ -マルチンゲール

Theorem 2.2.3. CIR マーケットモデルで EMM が存在する必要十分条件は $k\theta = 0$ である。

Lemma 2.2.4. CIR マーケットモデルで EMM $\tilde{P}$ が存在したとする。そのとき, 次の 3 つを満たす $\mathcal{G}_t$ 適合な確率過程 γ_t が存在する。

- (1) $P \left(\int_0^\tau \gamma_s^2 ds < \infty \right) = 1, \quad \frac{d\tilde{P}}{dP} \Big|_{\mathcal{G}_t} = \exp \left(\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds \right)$
- (2) $\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t \gamma_s ds$ は $\tilde{P}$ 上のブラウン運動
- (3) $-Rr_t + k(\theta - r_t) + \sigma\sqrt{r_t}\gamma_t = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau$

Proof of Lemma 2.2.4

一意性は (3) の式から明らかであるので, 存在のみを示す。

$$Z_t = E \left[\frac{d\tilde{P}}{dP} \Big| \mathcal{G}_t \right]$$

とおくと, より (Z_t) は連続マルチンゲールで $E[Z_t] = 1, Z_t > 0$ となる。伊藤の公式から,

$$\log Z_t = \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{Z_s^2} d\langle Z \rangle_s$$

となる。右辺の第一項はマルチンゲール表現定理より

$$\int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s = \int_0^t \gamma_s dW_s$$

となる適合過程 (γ_t) が存在するので,

$$\log Z_t = \int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds$$

$$Z_t = \exp \left(\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds \right)$$

これより (1) を得る。(2) はギルサノフの定理より従う。(3) については再び伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d(e^{-Rt}r_t) &= -Rr_t e^{-Rt}dt + e^{-Rt}dr_t \\ &= e^{-Rt} \{ (-Rr_t + k(\theta - r_t) + \sigma\sqrt{r_t}\gamma_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}_t \} \end{aligned}$$

となり, $e^{-Rt}r_t$ がマルチンゲールであることから結果を得る。

Proof of Theorem 2.2.3

次の 4 つに分けて証明をする。

- (1) $\sigma^2 \leq 2k\theta, 0 < k\theta$ のとき EMM は存在しない。
- (2) $k\theta = 0$ のとき EMM は存在する。
- (3) $\sigma^2 > 2k\theta > 0$ のとき EMM は存在しない。
- (4) $k\theta < 0$ のとき EMM は存在しない。

まず (1) を示す。Lemma 1.7.3 の (1) より r_t は 0 には到達しない。ここで EMM $\tilde{P}$ が存在したと仮定すると、同値性から、 $\tilde{P}$ の下でも r_t は 0 には到達しない。

$$\gamma_t = \frac{Rr_t - k(\theta - r_t)}{\sigma\sqrt{r_t}} \quad (t \leq \tau)$$

とおき, Lemma 2.2.4 の $\tilde{W}_t$ に対し

$$dr_t = Rr_t dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}_t$$

が成立する。このとき, 元の θ にあたるものが 0, k にあたるものは $-R < 0$ となっているので, Lemma 1.5.3 の (3) から r_t は $\tilde{P}$ で 0 に到達する確率は正になり, 矛盾である。

次に (2) について示す。

$$\bar{Z}_t = \exp \left(\int_0^t \bar{f}_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \bar{f}_s^2 ds \right)$$

とする。ただし $\bar{f}_t = \frac{(R+k)\sqrt{r_t}}{\sigma}$ とおいた。Lemma 1.7.8 より $E[\bar{Z}_t] = 1$ となる。次に, $A \in \mathcal{F}_\tau$ に対して $\bar{P}(A) = E[\bar{Z}_\tau 1_A]$ で $\bar{P}$ を定義し, $e^{-Rt}r_t$ が $\bar{P}$ 上マルチンゲールになることをいう。ギルサノフの定理から

$$\bar{W}_t := W_t - \int_0^t \bar{f}_s ds$$

は $\bar{P}$ 上ブラウン運動で

$$d(e^{-Rt}r_t) = e^{-Rt}dr_t - Re^{-Rt}r_t dt$$

$$= e^{-Rt} \sigma \sqrt{r_t} d\tilde{W}_t$$

となり, r_t の可積分性から $e^{-Rt} r_t$ が $\bar{P}$ 上マルチンゲールであることが分かる。

(3) については (1) と同じく EMM $\tilde{P}$ が存在したとすれば, (1) で定義した γ_t に対し

$$P\left(\int_0^\tau \gamma_t^2 dt < \infty\right) = 1$$

となり,

$$P\left(\int_0^\tau \frac{1}{r_t} dt < \infty\right) = 1$$

が成立することが分かる。ここで

$$A := \{\tau < \infty\} \cap \left\{\int_0^\tau \frac{1}{r_t} dt < \infty\right\}$$

とすると, $A \in \mathcal{F}_\tau$ かつ $P(A) > 0$ となる。 $\tau_n = \inf\{t \geq 0 \mid r_t = 1/n\}$ とすると $\tau_n \nearrow \tau$ だから

$$P\left(A \cap \left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \log r_{\tau_n} \neq -\infty\right\}\right) = 0$$

となるが, 一方で伊藤の公式から

$$\begin{aligned} (*) \quad \log r_{\tau_n} &= \log r_0 + \int_0^{\tau_n} \frac{1}{r_s} dr_s - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_n} \frac{1}{r_s^2} d\langle r \rangle_s \\ &= \log r_0 + \int_0^{\tau_n} k(\theta - r_s) \frac{1}{r_s} ds + \int_0^{\tau_n} \frac{\sigma \sqrt{r_s}}{r_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_n} \frac{\sigma^2}{r_s} ds \end{aligned}$$

ここで Lemma 1.1.25 より

$$P\left(A \cap \left\{\sup \left| \int_0^{\tau_n} \frac{1}{\sqrt{r_t}} dW_s \right| = \infty\right\}\right) = 0$$

となつて, (*) の式で $n \rightarrow \infty$ とすれば右辺は A 上で有限となる。しかし, $\log r_{\tau_n} \rightarrow -\infty$ なので, $P(A) = 0$ とならなければならず, $P(A) > 0$ に矛盾する。

(4) のときは $P(\tau < \infty) > 0$ なので, (3) と同じく $P(A) > 0$ となるので, 後は (3) と同様に示せる。

参考文献

- [1] 関根順.(2007), 数理ファイナンス, 培風館.
- [2] 長井英夫.(1999), 確率微分方程式, 共立出版株式会社.
- [3] 舟木直久.(2005), 確率微分方程式, 株式会社岩波書店.
- [4] 松本裕行.(2004), 応用のための確率論・確率過程, 臨時別冊・数理科学 SGS ライブラリー-36, 株式会社サイエンス社.
- [5] 渡辺信三.(1975), 確率微分方程式, 産業図書株式会社.
- [6] J,C,Cox.,J,E,Ingersoll.,S,A,Ross.(1985),A theory of the term structure of interest rates.Econometrica 53(2),385-408.
- [7] F,Delbaen.and W,Schachermayer.(2006),The Mathematics of Arbitrage.Springer,Berlin.
- [8] Z,J,Guo.(2008), A note on the CIR process and the existence of equivalent martingale measures, Statistics and Probability Letters78 481-487.
- [9] John.C.Hull, “ Options, Futures and Others Derivatives ” , 5th Edition, Prentice Hall, Eaglewood Cliff, New Jersey, (2003) (邦訳：三菱証券商品開発本部訳, 『フィナンシャルエンジニアリング デリバティブ取引とリスク管理の総体系』, 金融財政事情研究会, 東京, 2005).
- [10] I,Karazas.and S,E,Shreve.(1991),Brownian Motion and Stochastic Calculus,2th Edition,Springer-Verlag,New York.
- [11] H,H,Kuo.(2006),Introduction to Stochastic Integration,Universitext,Springer-Verlag.
- [12] B,Øksendal.(1990), When is a Stochastic Integral a Time Change of a Diffusion?,Journal of Theoretical Probability,Vol3 ,No.2,1990.
- [13] H,Shirakawa.(2002),Squared Bessel processes and their applications to the square root interest rate model. Asia-Pacific Financial Markets 9,169-190.

