

インプライドボラティリティについて

九州大学大学院数理学府数理学専攻

修士課程 2 年

塩塚 喬

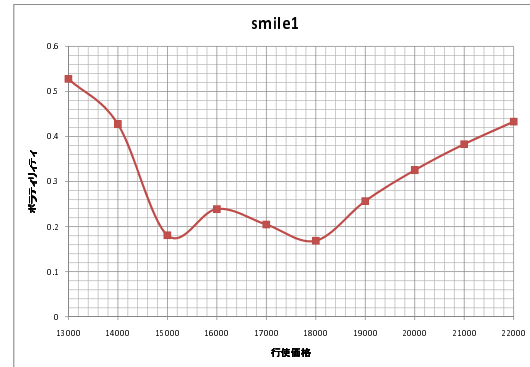
指導教員：谷口 説男 教授

修士論文

平成 21 年 1 月 26 日提出

序文

金融工学において、株等の危険資産の価格を決めるモデルとして Black-Sholes-Merton モデルが著名である。Black-Sholes-Merton モデルは 2 つのパラメーターから定まるが、価格公式に应用する際には、ボラティリティ (volatility) とよばれるパラメーターのみが用いられる。ボラティリティとは変動性という意味の言葉で、株価等の危険資産価格の変動率、危険度を表すパラメーターである。この値を推定・決定することは実務的な観点からも大変重要な問題である。実際、後で紹介する金融商品であるオブ



ション価格はボラティリティが高ければ価格は高くなり、逆にボラティリティが低いほど価格は低くなる事が分かっている。市場の金融商品の価格から Black-Sholes-Merton モデルを用い逆算することによりボラティリティを求めることができる。これをインプライドボラティリティと呼んでいる。しかし、この推定法で求めたボラティリティを用いた Black-Sholes-Merton モデルは、市場の価格の不規則な動きに対応しきれていない。実際、上の図 (図の詳しい紹介については論文内です。) のようなボラティリティスマイルといわれるボラティリティのゆらぎが市場では日常的に観測される。この現象は、Black-Sholes-Merton モデルが現実には即してないことの一つの”証拠”として長らく論じられてきている。本論文では Black-Sholes-Merton モデルと価格公式を紹介した後、インプライドボラティリティの計算法を紹介し、ボラティリティスマイルを実験的に再現してみる。

最後に、この修士論文の構成を紹介する。第 1 章では論文内で用いた主な確率論と確率過程論の基本的な事項を列挙する。第 2 章では数理ファイナンスの基本事項と、Black-Sholes-Merton モデルを紹介し、オプションの価格公式を述べる。第 3 章では、ボラティリティの推定法であるヒストリカルボラティリティとインプライドボラティリティを述べ、インプライドボラティリティを求めるための数値解析法ニュートンラプソン法を紹介する。第 4 章では、実際にインプライドボラティリティを Excel で計算し、ボラティリティスマイルと呼ばれる現象を実験的に再現してみせる。

目次

1	準備	1
1.1	確率論	1
2	数理ファイナンス	6
2.1	価格公式	6
2.2	証明の為の準備	11
2.3	価格公式の証明	16
3	ボラティリティ	21
3.1	ヒストリカルボラティリティ	21
3.2	インプライドボラティリティ	22
3.3	ニュートン-ラプソン法	24
4	ボラティリティスマイル	25
4.1	ボラティリティスマイル	25
4.2	インプライドボラティリティの計算法	26
4.3	初期値の仮定	26
4.4	ボラティリティスマイルの描き方	26
4.5	ボラティリティスマイル 1	30
4.6	ボラティリティスマイル 2	31
4.7	ボラティリティスマイル 3	33

1 準備

1.1 確率論

この章では, この論文で使われる確率論の定義, 定理などを準備する. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, 特にことわらないときは時間区間 $[0, \infty)$ 上で考える.

Definition 1.1.1 (σ -加法族). 確率変数 X が生成する σ -加法族 $\sigma(X)$ は次で定める.

$$\sigma(X) := \{\{X \in A\}; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

ただし, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の Borel 加法族とする.

Definition 1.1.2 (フィルトレーション). $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族の増加列 $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ が与えられているとする. すなわち, $\mathcal{F}_t$ は σ -加法族で $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ かつ $0 \leq s \leq t$ のとき $\mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t$ を満たしている. この時, $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ をフィルトレーションという. さらに, フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ が連続とは,

$$\sigma\left(\bigcup_{s \leq t} \mathcal{F}_s\right) =: \mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つことである.

Definition 1.1.3 ($\mathcal{F}_t$ -適合). 確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$ -適合 (adapted) とは, $\forall t \geq 0$ に対し $X_t : \Omega \rightarrow R$ が $\mathcal{F}_t$ -可測の時に言う.

Definition 1.1.4 (停止時刻). 確率変数 $\sigma : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ が $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に関する停止時刻 (stopping time) とは, $\forall t \geq 0$ に対し

$$\{\sigma \leq t\} = \{\omega; \sigma(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

が成立するときという.

Definition 1.1.5 (発展的可測). 確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が発展的可測 (progressively measurable) とは, $\forall t \in [0, \infty)$ に対し, 写像 $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega) \in \mathbb{R}$ が $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$ -可測のときにいう.

Definition 1.1.6 (マルチンゲール). 右連続な確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ についてマルチンゲール (martingale), または簡略に $(\mathcal{F}_t)$ -マルチンゲールとは

- (1) $E[|X_t|] < \infty \quad \forall t \geq 0$
- (2) $X = (X_t)_{t \geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$ -適合である.
- (3) $0 \leq \forall s \leq t$ に対して $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad a.s.$

の三条件を満たす時にいう. 条件 (3) の代わりに

$E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s \quad a.s.$ が成立するとき X を劣マルチンゲール (submartingale) といい,
 $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s \quad a.s.$ が成立するとき X を優マルチンゲール (supermartingale) という.

Definition 1.1.7 ($\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動). 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された確率過程 $W = (W_t)_{t \geq 0}$ が $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動とは

- (1) $W_0 = 0$ a.s.
- (2) $\forall \omega \in \Omega$ に対し $W_t(\omega)$ は t について連続である.
- (3) $0 = t_0 \leq \forall t_1 \leq \dots \leq t_n, \forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 増分 $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ はそれぞれ平均値 0, 分散 $t_i - t_{i-1}$ の Gauss 分布に従う.
- (4) $W = (W_t)$ は $(\mathcal{F}_t)$ -適合
- (5) $0 \leq \forall s \leq t$ に対し $W_t - W_s$ と $\mathcal{F}_s$ は独立.

Definition 1.1.8 (マルコフ性). $\mathcal{F}_t$ -可測な確率過程 X_t と, フィルトレーション $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s; s \in [0, T], s \leq t\}$ に対して,

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[f(X_t) | \sigma(X_s)]$$

が $0 \leq s \leq t$ に対して成り立つ時, X はマルコフ性 (Markovian property) をもつという.

Proposition 1.1.9 (ブラウン運動に対するマルコフ性). ブラウン運動 $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ と, 有界可測な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t, s \geq 0$ に対して

$$E[f(W_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = E[f(W_{t+s}) | \sigma(W_s)] = E[f(W_t + x)]|_{x=W_s}$$

が成り立つ.

Proposition 1.1.10 (Doob-Meyer 分解). $X = (X_t)_{t \geq 0}$ を連続な $(\mathcal{F}_t)$ -劣マルチンゲールとする. σ が停止時刻全体を動くとき, $\forall T > 0$ に対して $\{X_{\sigma \wedge T}\}_\sigma$ が一様可積分ならば, 連続な $(\mathcal{F}_t)$ -マルチンゲール $M = (M_t)$ と, $A_0 = 0$ なる $\mathcal{F}_t$ -適合な連続増加過程 $A = (A_t)$ が存在し, X は

$$X_t = M_t + A_t, \quad t > s \geq 0$$

と分解できる. さらに, この分解は一意に定まる. ただし, A が増加過程とは, $t > s \geq 0$ の時 $A_t \geq A_s$ a.s. である時にいう.

Definition 1.1.11 (2 次変分). ここでは $\forall T > 0$ を固定し, 時間を $t \in [0, T]$ で制限して考える. 2 乗可積分かつ連続な $(\mathcal{F}_t)$ -マルチンゲール $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ で $M_0 = 0$ a.s. となるものの全体を $\mathcal{M}_T$ とする. M_t^2 は劣マルチンゲールになり, σ が停止時刻全体を動くとき, $\forall T > 0$ に対して $\{M_{\sigma \wedge T}^2\}_\sigma$ が一様可積分なので Doob-Meyer 分解より連続増加過程 A_t が一意的に存在して $M_t^2 - A_t$ がマルチンゲールになることが分かる. この A_t を $\langle M \rangle_t$ と書き, M の 2 次変分 (quadratic variation) とよぶ. $M, N \in \mathcal{M}_T$ に対し

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2}(\langle M + N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t), \quad t \in [0, T]$$

とおけば, $\langle M, N \rangle_t$ は a.s. に有界変動であり, かつ $M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$ はマルチンゲールとなる. $\langle M, N \rangle$ を M と N の 2 次変分という.

$\langle M \rangle$ を M の 2 次変分と呼ぶのは次の理由からである.

Proposition 1.1.12. $[0, t]$ の分割を $\Delta := \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = t\}$ と表し, $|\Delta| := \max |t_i - t_{i-1}|$ として

$$\langle M \rangle_t = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \quad (\text{in prob.})$$

が成り立つ.

Definition 1.1.13 (集合). 集合を定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,T} &:= \left\{ (f_t)_{t \in [0,T]}; \mathcal{F}_t\text{-発展的可測}, E \left[\int_0^T f_t^2 dt \right] < \infty \right\} \\ \mathcal{L}_{i,T}^{loc} &:= \left\{ (f_t)_{t \in [0,T]}; \mathcal{F}_t\text{-発展的可測}, \int_0^T |f_t|^i dt < \infty \quad a.s. \right\} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Definition 1.1.14 (確率積分). 被積分関数 $f_t(\omega)$, $t \in [0, T]$ に対する確率積分 $\int_0^t f_s dW_s$ を定義する. $T > 0$ は任意だが固定しておく. まず, $f = (f_t(\omega))$ が

$$f_t = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t), \quad t \in [0, T]$$

という形の時, この時 f を階段過程と呼び, 階段過程に対して確率積分を定義する. ここで $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}_j$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ -可測で有界, かつ分点 $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ は ω によらぬものとする. 階段過程に対して確率積分を

$$M_t(f) \equiv \int_0^t f_s dW_s := \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j (W_{t \wedge t_j} - W_{t \wedge t_{j-1}}), \quad t \in [0, T]$$

により定義する.

次に一般の場合 ($f \in \mathcal{L}_{2,T}$) の時を定義する. f に対して,

$$E \left[\int_0^T (f_t - f_t^n)^2 dt \right] \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす階段過程の列 f_t^n が存在し, この階段過程の列の確率積分 $M(f^n)$ の L^2 極限 (X_t) ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|M_t(f^n) - X_t|^2] \longrightarrow 0$$

が存在する.

この X_t を $\int_0^t f_s dW_s$, $t \in [0, T]$ と書き, $f \in \mathcal{L}_{2,T}$ のブラウン運動 $W = (W_t)$ に関する (伊藤の) 確率積分と呼ぶ.

最後に, $f \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ の時を定義する. f に対して停止時刻列 $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$\tau_n := \inf \left\{ t \geq 0; \int_0^t f_u^2 du \geq n \right\} \wedge T$$

で定義し, さらに $f_t^{(n)} := f_t 1_{\{t \leq \tau_n\}} (\in \mathcal{L}_{2,T})$ とおく. $m \leq n$ のとき $\tau_m \leq \tau_n$ で, $n \uparrow \infty$ の時 $\tau_n \uparrow T$ a.e. であることに注意する. これを用いて

$$\left(\int_0^t f_u dW_u \right) 1_{\{t \leq \tau_n\}} := \int_0^t f_u^{(n)} dW_u$$

と定義する.

Remark 1.1.15 (確率積分の性質). 確率積分の性質をいくつかあげる. $f, g \in \mathcal{L}_{2,T}$, $a \in \mathbb{R}$ とする.

(性質 1); $M = (M_t(f)) \in \mathcal{M}_T$ の 2 次変分は

$$\langle M(f), M(g) \rangle_t = \int_0^t f_s g_s ds, \quad t \geq 0$$

特に,

$$E \left[\int_0^t f_s dW_s \int_0^t g_s dW_s \right] = E \left[\int_0^t f_s g_s ds \right]$$

である.

(性質 2); $\int_0^t (af_s + bg_s) dW_s = a \int_0^t f_s dW_s + b \int_0^t g_s dW_s, \quad \forall t \geq 0, \text{ a.s.}$

Definition 1.1.16 (伊藤過程). 連続確率過程 $X = (X_t)$ が次の形の時, X_t を伊藤過程と呼ぶ.

$$X_t := X_0 + \int_0^t \phi_s dW_s + \int_0^t \psi_s ds, \quad t \geq 0$$

ただし, $X_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}, \psi \in \mathcal{L}_{1,T}^{loc}$ である.

Theorem 1.1.17 (伊藤の公式). $\forall \varphi \in C^2(\mathbb{R})$ と伊藤過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ に対して

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'(X_s) \phi_s dW_s + \int_0^t \varphi'(X_s) \psi_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi''(X_s) \phi_s^2 ds, \quad t \geq 0, \text{ a.s.}$$

が成り立つ.

Definition 1.1.18 (確率的指数).

$$X_t := \int_0^t \alpha_s dW_s + \int_0^t \beta_s ds, \quad \alpha \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}, \beta \in \mathcal{L}_{1,T}^{loc}$$

に対して,

$$\mathcal{E}(X)_t := e^{X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t}$$

とおく. この過程 $\mathcal{E}(X)$ を X の確率的指数 (stochastic exponential) とよぶ.

伊藤の公式を用いて

$$\mathcal{E}(X)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s$$

あるいは微分形式で書いて

$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_t dX_t$$

を満たすことが分かる. 特に $\beta \equiv 0$, すなわち X が局所マルチンゲールの時は, その確率的指数 $\mathcal{E}(X)$ も局所マルチンゲールとなる.

Theorem 1.1.19 (任意抽出定理). τ_1, τ_2 $\tau_1 \leq \tau_2 \leq T$, *a.s.* な停止時刻とする ($T \in \mathbb{R}_{++}$). (優/劣) マルチンゲールに対し

$$E[X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = \begin{cases} \leq X_{\tau_1}, & X \text{ が優マルチンゲールの時,} \\ = X_{\tau_1}, & X \text{ がマルチンゲールの時,} \\ \geq X_{\tau_1}, & X \text{ が劣マルチンゲールの時,} \end{cases}$$

が成り立つ.

Theorem 1.1.20 (マルチンゲールの表現定理). $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が $\mathcal{F}_t := \sigma(\sigma(W_s; s \leq t) \cup \mathcal{N})$ -可測 ($\mathcal{N}$ については2章を参照) ならば, $f \in \mathcal{L}_{2,T}$ が存在し, Y は

$$Y = E[Y] + \int_0^T f_s dW_s$$

と表すことができる.

2 数理ファイナンス

この章では, 1 次元における Black-Sholes-Merton モデル, デリバティブの価格公式を考察する.

$$\mathcal{L}_{2,T}^{loc} := \left\{ f \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}; \inf_{\omega \in \Omega, t \in [0,T]} \left(\int_0^t f_s dW_s(\omega) \right) > -\infty \right\}$$

と定義する.

2.1 価格公式

この章では, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間, 時間集合を $[0, T]$ とし, $W := (W_t)_{t \in [0, T]}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上のブラウン運動とする.

さらに, フィルトレーションは,

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\sigma(W_s; s \leq t) \cup \mathcal{N})$$

ただし,

$$\mathcal{N} := \{ A \subset \Omega; B \in \mathcal{F} \text{ で } B \subset A, P(B) = 0 \text{ を満たすものが存在} \}$$

である.

Definition 2.1.1 (デリバティブ (derivative security)).

デリバティブ (派生証券) とは, 市場のニーズに応じて設計され売買される人為的に生み出された金融商品の総称であり, $\mathcal{F}_T$ -可測な確率変数で価格 (ペイオフ) が $\mathbb{R}$ 値で表わされるものである.

具体例をいくつか示す.

(1) ヨーロピアンデリバティブ

満期日 T に危険資産過程 S_T によって決定される $f(S_T)$ の額を受け取ることができる.

この金融商品のことを『満期 T , ペイオフ $f(S_T)$ の, S の上に書かれたヨーロピアンデリバティブ』とよぶ. 例えば,

(a) ヨーロピアンコールオプション

満期日にあらかじめ決められた行使価格 K で危険資産を購入できる権利である. もし, 危険資産価格が K 以下ならば権利を行使せず, K 以上ならば権利を行使する. すなわち, 満期 T , 行使価格 K のヨーロピアンコールオプションのペイオフ F は

$$F := f(S_T), \quad \text{ただし} \quad f(s) = (s - K)^+$$

で表される.

(b) ヨーロピアンプットオプション

満期日にあらかじめ決められた行使価格 K で危険資産を売却できる権利である. もし, 危険資産価格が K 以上ならば権利を行使せず, K 以下ならば権利を行使する. すなわち, 満期 T , 行使価格 K のヨーロピアンプットオプションのペイオフ F は

$$F := f(S_T), \quad \text{ただし} \quad f(s) = (K - s)^+$$

で表される.

(2) エキゾチックデリバティブ

ヨーロッパンデリバティブ以外にも様々な条項がついたデリバティブが市場には存在する. ここでは, エキゾチックデリバティブと呼ばれるデリバティブの例をいくつか示す.

ここでは, 満期 T で購入者が

$$F := f(S_T, M_T) \quad \text{ただし,} \quad M_t := \max_{s \in [0, t]} S_s$$

を受け取れるようなデリバティブの例を挙げる.

(a) ルックバックプットオプション又は, 最大値オプション

満期日 T に危険資産を時刻 0 から T までの価格の最大値 M_T で売却できる権利で, ペイオフは

$$F = f(S_T, M_T) := M_T - S_T$$

で表す.

(b) ノックアウトコールオプション又は, アップアンドアウトオプション

ヨーロッパンコールオプションに権利が消滅するノックアウト条項がついているものである. 即ち, 満期 T までに危険資産 S_t が一度でもノックアウト価格 L を上回ったなら, 購入者の権利は消滅するものとする. ペイオフは

$$F = f(S_T, M_T) := (S_T - K)^+ 1_{M_t \leq L} \quad \text{ただし} \quad S_0, K \leq L$$

で表される.

Definition 2.1.2 (Black-Scholes-Merton モデル). 以下の (1)-(4) で構成される金融市場数理モデルのことを Black-Scholes-Merton モデル (以降, BSM-モデルと略す.) とよぶ.

(1) 取引は任意の時刻 $t \in [0, T]$ で行われる.

(2) 安全運用過程を

$$B := (B_t)_{t \in [0, T]}, \quad B_t := e^{rt}$$

で与える. $r \in \mathbb{R}$ を連続複利で表した際の安全運用金利と呼ぶ.

(3) 危険資産過程を

$$S := (S_t)_{t \in [0, T]}, \quad S_t := S_0 Z_t^{\sigma, \mu}(\omega)$$

($S_0 > 0, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$) で与える. ただし,

$$Z_t^{\sigma, \mu}(\omega) := \exp \left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right)$$

である.

(4) 単純化のために投資戦略に次のような仮定をおく.

(a) 株式に配当, 株式分割等は存在しない.

(b) 任意の時刻で, 危険資産に価格がついており, その価格で任意の実数単位での売買が可能である.

(c) 任意の時刻で, 任意実数金額の銀行預金, 借り入れが可能である. また, 預金金利と借入金利は等しい.

(d) 危険資産の売買, 銀行預金の出し入れに関して手数料は発生しない. また, 税金も課されない.

Remark 2.1.3. BSM-モデルの危険資産過程は微分形で書けば

$$dS_t = S_t(\sigma dW_t + \mu dt)$$

である.

Definition 2.1.4 (資金自己調達の戦略). 金融市場モデル上で安全運用と危険資産への投資を組み合わせる行う投資家を考える.

- (1) 時刻 0 での初期運用 (資本) 額を $x(> 0)$ とする.
- (2) 時刻 $t(\in [0, T])$ に危険資産を ξ_t 枚保有する. 残額は銀行に預けて安全に運用する.
- (3) 追加の資本投入は行わない. また資本流出もないものとする.

この投資戦略を資金自己調達の戦略 (self-financing strategy) と呼ぶ

Definition 2.1.5 (資金自己調達のポートフォリオ). BSM-モデル上で, 資金自己調達のなポートフォリオ (self-financing portfolio wealth process) を定義する. 初期運用額を $x(\in \mathbb{R})$, 危険資産保有枚数戦略を $\xi := (\xi_t)_{t \in [0, T]}$ とし, 市場の危険資産保有戦略全体を

$$\mathcal{A}_T := \left\{ \xi; \xi S \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}, \inf_{\omega \in \Omega} \left(\int_0^t \xi_u d\tilde{S}_u \right) > -\infty \right\}$$

とする. この初期資産と危険資産の組 (x, ξ) で表すポートフォリオ富過程 $X^{x, \xi}$ は

$$X_t^{x, \xi} := B_t \left(x + \int_0^t \xi_u d\tilde{S}_u \right), \quad \left(\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t} \right)$$

で定義される. なぜなら, $X_t^{x, \xi}$ に伊藤の公式を用いると

$$\begin{aligned} dX_t^{x, \xi} &= rX_t^{x, \xi}dt + B_t\xi_t d\tilde{S}_t \\ &= rX_t^{x, \xi}dt + B_t\xi_t \tilde{S}_t \sigma dW_t + B_t\xi_t \tilde{S}_t (\mu - r)dt \\ &= \left(X_t^{x, \xi} - \xi_t S_t \right) rdt + \xi_t dS_t \end{aligned}$$

が得られる. この式は微少な時間区間 $[t, t + \delta t]$ でみると,

$$\begin{aligned} dX_t^{x, \xi} &\approx X_{t+\delta}^{x, \xi} - X_t^{x, \xi} : \text{ポートフォリオ価値の変動} \\ dS_t &\approx (S_{t+\delta} - S_t) : \text{危険資産価格の変動} \\ \xi_t dS_t &: \text{危険資産によって生じるキャッシュフロー} \\ (X_t^{x, \xi} - \xi_t S_t) &: \text{時刻 } T \text{ に危険資産に投資した残額} \\ rdt &: \text{安全運用 (預金) に生じる利率} \end{aligned}$$

と解釈することができ, 資金自己調達の戦略を満たすポートフォリオであることが分かる.

Definition 2.1.6 (裁定機会).

$$(1) -F + X_T^{x,\xi} \geq 0, \quad \text{かつ} \quad P\left(-F + X_T^{x,\xi} > 0\right) > 0$$

または,

$$(2) F + X_T^{-x,\xi} \geq 0, \quad \text{かつ} \quad P\left(F + X_T^{-x,\xi} > 0\right) > 0$$

が実現したとき, F を裁定機会 (arbitrage opportunity, あるいは略して arbitage) とよぶ.

(1) の戦略は売り手の戦略である. 時刻 0 に価格 x でデリバティブ F を売却する. 一方でその売却資金 x を元手にし資金自己調達の危険資産を保有戦略 $\xi := (\xi_t)_{t \in [0, T]}$ に従って運用する. そして, 満期 T には F を支払うのでこの投資家の総資産額は $-F + X_T^{x,\xi}$ となる.

(2) の戦略は買い手の戦略である. 時刻 0 に借り入れした資金 x でデリバティブ F を購入する. 一方で, 資金自己調達のポートフォリオ $(-x, \xi)$ を組んで運用する. そして, 満期 T には F をもらうので, この投資家の総資産額は $F + X_T^{-x,\xi}$ となる.

Definition 2.1.7 (適正価格).

裁定機会が生じない価格を無裁定価格 (arbitrage-free price, 或いは no-arbitage price) と呼ぶことにし, これを適正価格 (fair price) という.

Definition 2.1.8 (複製戦略, 複製ポートフォリオ). 危険資産の保有戦略 $\xi \in \mathcal{A}_T$ に対し, ある $x \in \mathbb{R}$ が存在し $F = X_T^{x,\xi}$ を満たすとき, ξ を F の複製戦略 (x, ξ) を複製ポートフォリオという.

Definition 2.1.9 (ヘッジング, ヘッジングコスト).

投資家が損失や損失の「リスク」(=「不確実性」)を抑えるためにとる投資戦略を, ヘッジング (hedging) とよぶ. ヘッジングのためのポートフォリオ戦略, ヘッジングのための初期コストはヘッジングコストとそれぞれよぶ.

Definition 2.1.10 (ヘッジング戦略, 完全複製戦略). ペイオフ F のデリバティブのオプションを売却し, 一方で資金自己調達のポートフォリオ (x, ξ) を組んで運用する. この時, 満期日での総資産額

$$-F + X_t^{x,\xi}$$

の損失部分

$$\left(-F + X_t^{x,\xi}\right)^- = \left(F - X_t^{x,\xi}\right)^+$$

をなるべく小さくするため,

$$\left(-F + X_t^{x,\xi}\right)^- \equiv 0 \iff F \leq X_t^{x,\xi}$$

を実現する戦略 (x, ξ) を (完全) ヘッジング戦略 (hedging strategy), あるいは優ヘッジング戦略 (superhedging strategy) とよび, x をヘッジングコストとよぶ. 最小のヘッジングコストをもつ複製戦略の事を完全複製戦略という.

Definition 2.1.11. $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率測度 Q を $\forall A \in \mathcal{F}_t$ に対し

$$Q(A) := \int_A \exp \left(-\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right) dP, \quad \left(\lambda := \frac{\mu - r}{\sigma} \right)$$

と定義する.

Remark 2.1.12. 上で定義した Q が確率測度になることは, この後の Cameron-Martin の定理より分かり, さらに Q の下で $\tilde{S}$ はマルチンゲールになる. そのため, Q はリスク中立確率と呼ばれる.

Theorem 2.1.13. デリバティブ F に関し,

$$F \text{ は下に有界, かつ } F \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$$

を仮定する.

このとき以下の (1)-(3) が成立する.

$$(1) \quad x^F = \bar{x}^F = \underline{x}^F.$$

ただし,

$$\bar{x}^F := \inf \left\{ x \in \mathbb{R}; \text{ ある } \xi \in \mathcal{A}_T \text{ に対して } -F + X_T^{x, \xi} \geq 0 \right\},$$

$$\underline{x}^F := \sup \left\{ x \in \mathbb{R}; \text{ ある } \xi \in \mathcal{A}_T \text{ に対して } F + X_T^{-x, \xi} \geq 0 \right\},$$

$$x^F := E^Q[B_T^{-1}F]$$

とおく.

(2) $F = X_T^{x^F, \xi^F}$ を満たす完全複製戦略 $\xi^F (\in \mathcal{A}_T)$ が一意に存在する.

ポートフォリオ (x^F, ξ^F) は, $\bar{x}^F, \underline{x}^F$ の $\inf, \sup$ を達成する. またこの複製ポートフォリオの富過程は

$$X_t^{x^F, \xi^F} = E^Q[B_t B_T^{-1} F | \mathcal{F}_t]$$

を満たす.

(3) 複製コスト x^F は唯一の無裁定価格である.

Theorem 2.1.14. ペイオフ関数 $F := f(S_T)$ は

$$0 \leq f(y) \leq C_1(1 + |y|^{C_2}), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (\exists C_1, C_2 > 0)$$

を満たすものと仮定する. この時 F を複製するポートフォリオ (x^F, ξ^F) は

$$x^F = v^F(0, S_0), \quad \xi_t^F = \partial_y v^F(t, S_t) \quad (t \in [0, T])$$

を満たす. ただし, $v^F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_{++})$ は線形偏微分方程式

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 \partial_{yy} + ry \partial_y - r \right) v(t, y) = 0 & ((t, y) \in [0, T) \times \mathbb{R}_{++}) \\ v(T, y) = f(y) \end{cases}$$

の解であり, 表現

$$\begin{aligned} v^F(t, y) &:= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f \left(y e^{\sigma z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} \right) g(T-t, 0, z) dz \\ g(t, x, y) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{(x-y)^2}{2t} \right) \end{aligned}$$

を持つ.

Theorem 2.1.13. と Theorem 2.1.14. の証明については次の節で行う.

2.2 証明の為の準備

価格公式 Theorem 2.1.13. と Theorem 2.1.14. の証明のためいくつかの補題を導入する. ただし, $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t \in [0, T]}$ は $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 上の任意のブラウン運動とする. $\underline{\mathcal{L}}_{2, T}^{loc}$ は $\widehat{W}$ に対するものとする.

Lemma 2.2.1. $G \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ が下に有界とする. この時,

$$G = G_0 + \int_0^T \eta_t^G d\widehat{W}_t \quad (*)$$

を成り立たせる組 $(G_0, \eta^G) \in \mathbb{R} \times \underline{\mathcal{L}}_{2, T}^{loc}$ が存在する. 特に,

$$EG = \min \left\{ G_0 \in \mathbb{R}; G = G_0 + \int_0^T \eta_t^G d\widehat{W}_t \text{ を成り立たせる組 } (G_0, \eta^G) \in \mathbb{R} \times \underline{\mathcal{L}}_{2, T}^{loc} \text{ が存在する.} \right\}$$

であり, $(*)$ を $G_0 := EG$ として成り立たせる $\eta^G \in \underline{\mathcal{L}}_{2, T}^{loc}$ は一意に定まる.

証明のため, 補題を 2 つ導入する.

Lemma 2.2.2. 任意の $f \in \underline{\mathcal{L}}_{2, T}^{loc}$ に対して $X_t := \int_0^t f_u d\widehat{W}_u$ は優マルチンゲールである.

Proof

停止時刻 $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$\tau_n = \inf \{ t \geq 0; |X_t| \geq n \} \wedge T$$

で定義する. $n \uparrow \infty$ のとき $\tau_n \uparrow T$ a.s. である. この時 $X_{\tau_n \wedge t}$ は有界であり, マルチンゲール性

$$E[X_{\tau_n \wedge t} | \mathcal{F}_s] = X_{\tau_n \wedge s} \quad (s \leq t \leq T)$$

を満たしている. この時, ある $c \in \mathbb{R}$ に対して, $X \geq c$ (下に有界より) が成り立っているので,

$$\begin{aligned} E[X_t - c | \mathcal{F}_s] &= E[\liminf_{n \rightarrow \infty} (X_{t \wedge \tau_n} - c) | \mathcal{F}_s] \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[(X_{t \wedge \tau_n} - c) | \mathcal{F}_s] \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (X_{s \wedge \tau_n} - c) \\ &= X_s - c \end{aligned}$$

従って, $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ が成り立つので優マルチンゲールである.

□

Lemma 2.2.3. $G \in L^1(P, \mathcal{F}_T)$ とし $G_0 = EG$ と書く. この時, $\eta^G \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ で

$$G = G_0 + \int_0^T \eta_t^G d\widehat{W}_t$$

を成り立たせ, さらに任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$E[G | \mathcal{F}_t] = G_0 + \int_0^t \eta_u^G d\widehat{W}_u, \quad a.s.$$

を満たすもの, 即ち $\int \eta^G d\widehat{W}$ がマルチンゲールであるものが存在する.

Proof

G_t をマルチンゲール

$$G_t := E[G | \mathcal{F}_t] \quad t \in [0, T]$$

とし, 停止時刻の列 τ_n を

$$\tau_n := \inf\{t > 0; |G_t| \geq n\} \wedge T \quad (n \in \mathbb{N})$$

とする. $n \uparrow \infty$ の時 $\tau_n \uparrow \infty$ *a.s.* であることに注意する. この τ_n で G_t を停止させた過程を

$$G_t^n := G_{t \wedge \tau_n}$$

とする. 有界マルチンゲール G_t^n に対して, マルチンゲールの表現定理より,

$$G_t^n = EG + \int_0^t \eta_u^{G^n} d\widehat{W}_u \quad (t \in [0, T])$$

を満たす $\eta^{G^n} \in \mathcal{L}_{2,T}$ が存在する. $m \leq n$ の時 $\{t \leq \tau_m\}$ 上で $G^m = G^n$ が成り立っている

ので,

$$\int_0^{t \wedge \tau_m} \eta_u^{G^m} d\widehat{W}_u = \int_0^{t \wedge \tau_m} \eta_u^{G^n} d\widehat{W}_u$$

である. よって, $\{t \leq \tau_m\}$ 上で $\eta_t^{G^m} = \eta_t^{G^n}$ である. 従って, $\eta^G \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ を

$$\eta_t^G 1_{\{t \leq \tau_n\}} = \eta_t^{G^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定義すると,

$$E[G|\mathcal{F}_t] = G_0 + \int_0^t \eta_u^G 1_{\{u \leq \tau_n\}} d\widehat{W}_u$$

を満たす. この時 $n \uparrow \infty$ とすれば表現を得る.

□

Proof of Lemma2.2.1.

Lemma2.2.3. より, $G_0 = EG$ に対し, ある $\eta^G \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ が存在して,

$$E[G|\mathcal{F}_t] = G_0 + \int_0^t \eta_u^G d\widehat{W}_u$$

が任意の $t \in [0, T]$ に対して成立する. また, $\inf_{\omega \in \Omega} G(\omega) > -\infty$ より

$$E[G|\mathcal{F}_t] \geq \inf_{\omega \in \Omega} G(\omega) > -\infty$$

が成り立つ. 従って $\eta^G \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ が成り立つ.

次に $G_0 = EG$ の最小性を示す. 上記の (G_0, η_t^G) とは別に, $(G'_0, \phi_t^G) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ が定理の主張を満たすとする. この時

$$G_0 + \int_0^T \eta_t^G d\widehat{W}_t = G = G'_0 + \int_0^T \phi_t^G d\widehat{W}_t$$

である. 左辺の確率積分の項は, Lemma2.2.3. よりマルチンゲールである. 一方, 右辺の確率積分の項は優マルチンゲールである. よって

$$G_0 \leq G'_0$$

が成り立つ. 次に η^G の一意性を示す. $(G_0, \phi_t^G) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ が表現を満たすとする. この時, 確率過程 Y_t を

$$Y_t := \int_0^t (\eta_u^G - \phi_u^G) d\widehat{W}_u$$

と置くと, $\int_0^t \eta_u^G d\widehat{W}_u$ はマルチンゲール, $\int_0^t \phi_u^G d\widehat{W}_u$ は優マルチンゲールより, Y_t は劣マルチンゲールで $Y_T = 0$ を満たす. よって, $\forall t \in [0, T]$ に対して,

$$0 = E[Y_T|\mathcal{F}_t] \geq Y_t$$

と

$$E[Y_t] \geq Y_0 = 0$$

より $Y_t = 0$ a.s. が成り立つ. ここで, 停止時刻を $\tau_n = \inf \{t \geq 0 : \eta_t^G - \phi_t^G \geq n\} \wedge T$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= E \left[\left(\int_0^{\tau_n} (\eta_u^G - \phi_u^G) d\widehat{W}_u \right)^2 \right] \\ &= E \left[\int_0^{\tau_n} (\eta_u^G - \phi_u^G)^2 du \right] \\ &\longrightarrow E \left[\int_0^T (\eta_u^G - \phi_u^G)^2 du \right] \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

従って $\eta^G \equiv \phi^G$ が成り立つ.

□

さらに, 新しい確率測度とブラウン運動を導入するため次の補題を導入する.

Lemma 2.2.4 (Cameron-Martin の公式). $a \in \mathbb{R}$ に対して $Z_T^a = \exp\left(aW_T - \frac{a^2}{2}T\right)$ を密度関数に持つ測度 P^a , 即ち

$$P^a : \mathcal{F}_T \ni A \mapsto P^a(A) := \int_A Z_T^a dP$$

を $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上に定義した時, P^a は確率測度である. さらに P^a の下で,

$$W_t^a := W_t - at$$

は $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動である.

証明のため, 補題を一つ用意する.

Lemma 2.2.5 (ベイズの公式; Bayes formula). $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ 上に P と同値な確率測度 $\hat{P}$ が

$$\hat{P} : \mathcal{F} \ni A \mapsto \hat{P}(A) := \int_A Z dP \in [0, 1]$$

と, $Z > 0, EZ = 1$ を満たす確率変数 Z を用いて定義されている. この時 $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{F}_t$ 可測な $\hat{P}$ -可積分な確率変数 X に対して

$$E^{\hat{P}}[X|\mathcal{F}_t] = \frac{E[E[Z|\mathcal{F}_t]X|\mathcal{F}_s]}{E[Z|\mathcal{F}_s]}$$

が成立する. $E^{\hat{P}}[\cdot]$ は $\hat{P}$ に関する期待値を表す.

Proof

$Z_t := E[Z|\mathcal{F}_t]$ とする. 任意の $A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$\begin{aligned} E^{\hat{P}} \left[1_A \frac{E[Z_t X|\mathcal{F}_s]}{Z_s} \right] &= E[1_A E[Z_t X|\mathcal{F}_s]] \\ &= E[E[1_A Z_t X|\mathcal{F}_s]] \\ &= E[1_A Z_t X] \\ &= E^{\hat{P}}[1_A X] \end{aligned}$$

が成り立つ.

□

Proof of Lemma 2.2.4.

まず, P^a が確率測度になることを確かめる.

$$\begin{aligned}
EZ_T^a &= \int_{\Omega} \exp\left(aW_T - \frac{a^2}{2}T\right) dP \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(ax - \frac{a^2}{2}T\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(x - aT)^2}{2T}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right) d\tilde{x} \quad \left(\tilde{x} := \frac{x - aT}{\sqrt{T}}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

よって, P^a は確率測度である. 次に W_t^a が $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動であることを示す. P^a に関する期待値を E^a とする. $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ に対してベイズの公式を用いる.

$$\begin{aligned}
E^a[\exp(k(W_{t_i}^a - W_{t_{i-1}}^a)) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] &= \frac{E[E[Z_T^a | \mathcal{F}_{t_i}] \exp(k(W_{t_i}^a - W_{t_{i-1}}^a)) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]}{E[Z_T^a | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]} \\
&= E\left[\frac{Z_{t_i}^a}{Z_{t_{i-1}}^a} \exp(k(W_{t_i}^a - W_{t_{i-1}}^a)) \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] \\
&= E\left[\frac{Z_{t_i}^{a+k}}{Z_{t_{i-1}}^{a+k}} \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] \exp\left(\frac{k^2}{2}(t_i - t_{i-1})\right) \\
&= \exp\left(\frac{k^2}{2}(t_i - t_{i-1})\right)
\end{aligned}$$

が得られる. 同様に, 条件付期待値の塔性を用いて,

$$E^a\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n k_i(W_{t_i}^a - W_{t_{i-1}}^a)\right)\right] = \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{k_i^2}{2}(t_i - t_{i-1})\right)$$

よって W_t^a は $(P^a, \mathcal{F}_t)$ -ブラウン運動である. □

危険資産過程 $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ が定義された確率空間上に, 以前定義した確率測度 Q を導入し, さらに $W^Q := (W_t^Q)_{t \in [0, T]}$ を

$$W_t^Q := W_t + \lambda t, \quad \text{ただし,} \quad \lambda := \frac{\mu - r}{\sigma}$$

で定義する. $Q = P^{-\lambda}$ であるから Cameron-Martin の公式より, Q の下で W^Q は $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動である. この W^Q を用いると, 危険資産過程 S を安全運用で割り引いた $\tilde{S}$ は

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_t &:= \frac{S_t}{B_t} = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \\
&= S_0 \exp\left(\sigma W_t^Q - \frac{\sigma^2}{2}t\right)
\end{aligned}$$

と表される. 微分形式で表わすと

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \sigma\tilde{S}_t dW_t + (\mu - r)\tilde{S}_t dt \\ &= \sigma\tilde{S}_t dW_t^Q \end{aligned}$$

である. よって $\tilde{S}$ は $(Q, \mathcal{F}_t)$ -マルチンゲールとなる.

2.3 価格公式の証明

Proof of Theorem 2.1.13.

Lemma 2.2.1. を $G := B_T^{-1}F$ と $(Q, \mathcal{F}_t)$ -ブラウン運動 W^Q に用いる.

$$\begin{aligned} \frac{F}{B_T} &= x^F + \int_0^T \eta_t dW_t^Q \\ &= x^F + \int_0^T \frac{B_t \eta_t^G}{\sigma S_t} d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

を満たす $(x^F, \eta^G) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}_{2,T}^{loc}$ の存在がいえる. そこで, 保有戦略 ξ_t^F を

$$\xi_t^F := \frac{B_t \eta_t^G}{\sigma S_t}$$

とおく. すると $B_T^{-1}F$ は下に有界なので,

$$\frac{B_t \eta_t^G}{\sigma S_t} \in \mathcal{L}_{2,T}^{loc} \quad \text{であり} \quad \frac{B_t \eta_t^G}{\sigma S_t} \in \underline{\mathcal{A}}_T$$

が従い, η_t^G の一意性から, 完全複製戦略ポートフォリオが一意に構成されることが分かる.

(1) についての証明

(x^F, ξ^F) は複製戦略であることと, $\bar{x}^F, \underline{x}^F$ の定義より

$$\begin{aligned} F &= X_T^{x^F, \xi^F} & F &= X_T^{-x^F, \xi^F} \\ -F + X_T^{x^F, \xi^F} &= 0 & F + X_T^{-x^F, \xi^F} &= 0 \\ \implies \bar{x}^F &\leq x^F & \implies x^F &\leq \underline{x}^F \end{aligned}$$

が成り立つ. また,

$$-F + X_T^{x, \xi^F} \geq 0 \quad \text{が成り立つ} \quad \forall x \geq 0$$

と

$$F + X_T^{-y, \eta^F} \geq 0 \quad \text{が成り立つ} \quad \forall y \geq 0$$

を足し合わせることににより

$$X_T^{x-y, \xi^F + \eta^F} \geq 0$$

が成り立ち

$$(x - y) + \int_0^T \sigma \tilde{S}_u (\xi_u^F + \eta_u^F) dW_u^Q \geq 0$$

確率積分の項は優マルチンゲールより $E \left[\int_0^T \sigma \tilde{S}_u (\xi_u^F + \eta_u^F) dW_u^Q \right] \leq 0$ が成り立つので,
 $x - y \geq 0$ が成り立つ. 従って

$$\bar{x}^F \geq \underline{x}^F$$

よって

$$x^F = \bar{x}^F = \underline{x}^F$$

が成り立つ.

(2) は (1) の証明と (x^F, ξ^F) の作り方から明かである.

(3) について,

x^F 以外で裁定機会が生じることを示す.

デリバティブに $x^*(> x^F)$ の価格がついていたならば, このデリバティブを購入する. この時, 得た資金を $x^F - x^*$ と $-x^F$ に分ける. そして前者を安全運用で運用, 後者を ξ^F で自己資本的ポートフォリオで運用する. この時, 時刻 T で全資産は

$$X_T^{-x^F, \xi^F} + (x^F - x^*)B_t = -F + (x^F - x^*)B_t$$

となり F をうけとるので

$$(x^F - x^*)B_t \geq 0$$

となり裁定機会が生じる. 価格が $x^* > x^F$ の時は売却し, 購入時と同様にして裁定機会が生じる.

x^F が無裁定価格であることを示す. x^F で裁定機会が生じないことを背理法で示す. つまり, $\xi \in \underline{\mathcal{A}}_t$ に対して

$$X_T^{0, \xi} \geq 0 \text{ かつ } P(X_T^{0, \xi} > 0) > 0$$

が起こらないことを示せば十分である. 今 $X_T^{0, \xi} \geq 0$ が成立しているとする. $\tilde{X}^{0, \xi} := B^{-1}X^{0, \xi}$ の Q -優マルチンゲール性より, $E^Q X_T^{0, \xi} \leq 0$, 従って

$$X_T^{0, \xi} = 0, \quad Q - a.s.$$

P と Q の同値性より

$$X_T^{0, \xi} = 0, \quad P - a.s.$$

従って, 無裁定価格である. □

Proof of Theorem 2.1.14.

$$F = X_T^{x^F, \xi^F}$$

の両辺を B_T で割って, Q について条件付期待値をとると,

$$X_t^{x^F, \xi^F} = E^Q[B_t B_T^{-1} f(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

が得られる. さらに, W^Q と S のマルコフ性に注意すると,

$$\begin{aligned}
E^Q[B_t B_T^{-1} f(S_T) | \mathcal{F}_t] &= E^Q[B_t B_T^{-1} f(S_T) | \sigma(S_t)] \\
&= E^Q \left[B_t B_T^{-1} f \left(y e^{\sigma(W_T^Q - W_t^Q) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right) \right] \Big|_{y=S_t} \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f \left(S_t e^{\sigma z + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right) g(T-t, 0, z) dz \\
&= v^F(t, S_t)
\end{aligned}$$

と, 上で表現した 2 変数関数 v^F を用いて表すことが分かる. 次に, この $v^F(t, y)$ が偏微分方程式を満たすことを求める. v^F は,

$$v^F(t, y) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(e^{\sigma z}) \left(T-t, \frac{1}{\sigma} \log y + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) (T-t), z \right) dz$$

と書きなおせばわかるように, $v^F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ である. そこで

$$\tilde{v}^F(t, y) = B_t^{-1} v^F(t, B_t y)$$

と書く. すなわち,

$$\tilde{v}^F(t, \tilde{S}_t) = \tilde{X}_t^{x^F, \xi^F}(t \in [0, T])$$

である. 伊藤の公式より,

$$\begin{aligned}
d\tilde{v}^F(t, \tilde{S}_t) &= \partial_t \tilde{v}^F(t, \tilde{S}_t) dt + \partial_y \tilde{v}^F d\tilde{S}_t + \frac{1}{2} \partial_{yy} \tilde{v}^F(t, \tilde{S}_t) d\tilde{S}_t d\tilde{S}_t \\
&= \partial_t \tilde{v}^F(t, \tilde{S}_t) dt + \partial_y \tilde{v}^F d\tilde{S}_t + \frac{1}{2} \partial_{yy} \tilde{v}^F(t, \tilde{S}_t) \sigma^2 \tilde{S}_t^2 dt
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $(\tilde{v}_u^F := \tilde{v}^F(u, \tilde{S}_u))$ と略記する.)

$$\tilde{v}^F(t, \tilde{S}_t) = \tilde{v}_0^F + \int_0^t \partial_y \tilde{v}_u^F d\tilde{S}_u + \int_0^t \left(\partial_u + \frac{1}{2} \sigma^2 \tilde{S}_u^2 \partial_{yy} \right) \tilde{v}_u^F du$$

である. ここで, $\tilde{v}^F = \tilde{X}_t^{x^F, \xi^F}$ より,

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 \partial_{yy} \right) \tilde{v}_t^F = 0, \quad (\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}_{++})$$

である. また,

$$\tilde{X}_T^{x^F, \xi^F} = \tilde{v}^F = \tilde{v}_0^F + \int_0^t \partial_y \tilde{v}_u^F d\tilde{S}_u$$

より,

$$x^F = \tilde{v}_0^F = v^F(0, B_0 S_0) = v^F(0, S_0)$$

$$\begin{aligned}
\xi_t^F &= \partial_y \tilde{v}_t^F \\
&= \partial_z e^{-rt} v(t, z) \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{z=e^{rt} S_t} \\
&= \partial_z v(t, z) \Big|_{z=e^{rt} S_t}
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. 更に,

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{v}_t^F &= -re^{-rt}v^F(t, e^{rt}y) + e^{-rt}\partial_t(t, e^{rt}y)\Big|_{y=S_t} \\
&= e^{-rt}(-rv^F(t, e^{rt}y) + \partial_tv^F(t, e^{rt}y))\Big|_{y=S_t} \\
&= e^{-rt}(-rv^F(t, z) + \partial_tv^F(t, z) + rz\partial_zv^F(t, z))\Big|_{z=e^{rt}S_t}
\end{aligned}$$

と,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma^2y^2\partial_{yy}e^{-rt}v(t, e^{rt}y)\Big|_{y=S_t} &= \frac{1}{2}\sigma^2y^2\partial_{zz}e^{-rt}v^F(t, z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\Big|_{z=e^{rt}S_t} \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2(ye^{-rt})^2\partial_{zz}e^{-rt}v^F(t, z)\Big|_{z=e^{rt}S_t} \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2z^2\partial_{zz}e^{-rt}v^F(t, z)\Big|_{z=e^{rt}S_t}
\end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\partial_t + \frac{1}{2}\sigma^2y^2\partial_{yy}\right)\tilde{v}_t^F \\
&= e^{-rt}(-rv^F(t, z) + \partial_tv^F(t, z) + rz\partial_zv^F(t, z)) + \frac{1}{2}\sigma^2z^2\partial_{zz}e^{-rt}v^F(t, z)\Big|_{z=e^{rt}S_t} \\
&= e^{-rt}\left(\partial_t + \frac{1}{2}\sigma^2z^2\partial_{zz} + rz\partial_z - r\right)v^F(t, z)\Big|_{z=e^{rt}S_t}
\end{aligned}$$

が成り立ち v^F が偏微分方程式を満たすことが分かる. □

Example 2.3.1 (ヨーロピアンコールオプション). $F := f(S_T) = (S_T - K)^+$, ($K > 0$) に対して Theorem 2.1.14. を用いると

$$\begin{aligned}
v^F(t, S_t) &= S_t\Phi(d_1(t, S_t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2(t, S_t)) \\
d_1(t, S_t) &:= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\log\frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\} \\
d_2(t, S_t) &:= d_1(t, S_t) - \sigma\sqrt{(T-t)}
\end{aligned}$$

$$\xi_t^F := \partial_y v^F(t, S_t) = \Phi(d_1(t, S_t))$$

と計算される. $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布 $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ を表すものとする.

実際, Theorem 2.1. を用いると,

$$\begin{aligned}
v^F(t, y) &= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \left(y e^{\sigma z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - K \right)^+ g(T-t, 0, z) dz \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \left(y e^{\sigma \sqrt{(T-t)z} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - K \right)^+ g(1, 0, z) dz \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{-d_2(t, y)}^{\infty} \left(y e^{\sigma \sqrt{(T-t)z} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - K \right) g(1, 0, z) dz \\
&= y \int_{-d_2(t, y)}^{\infty} e^{\sigma \sqrt{(T-t)z} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} g(1, 0, z) dz - K e^{-r(T-t)} \int_{-d_2(t, y)}^{\infty} g(1, 0, z) dz \\
&= y \int_{-d_1(t, y)}^{\infty} g(1, 0, z) dz - e^{-r(T-t)} K \int_{-d_2(t, y)}^{\infty} g(1, 0, z) dz \\
&= y \Phi(d_1(t, y)) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2(t, y))
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\xi_t^F &= \partial_y v^F(t, y) \\
&= \partial_y (y \Phi(d_1(t, y)) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2(t, y))) \\
&= \Phi(d_1(t, y)) + \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1(t, y)^2}{2}\right) \frac{\partial d_1(t, y)}{\partial y} \\
&\quad - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t)} \exp\left(-\frac{(d_1(t, y) - \sigma \sqrt{T-t})^2}{2}\right) \frac{\partial (d_1(t, y) - \sigma \sqrt{T-t})}{\partial y} \\
&= \Phi(d_1(t, y)) + \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1(t, y)^2}{2}\right) \frac{\partial (d_1(t, y))}{\partial y} \\
&\quad - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1(t, y)^2}{2}\right) \frac{y}{K} \frac{\partial (d_1(t, y))}{\partial y} \\
&= \Phi(d_1(t, y))
\end{aligned}$$

と計算できるからである.

3 ボラティリティ

本章では,BSM-モデルをもちいた代表的なボラティリティ値決定法を2つ紹介する.

3.1 ヒストリカルボラティリティ

ここでは,次の拡張したBSM-モデルを用いる

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\sigma_t dW_t + \mu_t dt) \\ \sigma_t : \text{時間のみに依存する決定的過程}, 0 < \exists c_1 \leq \sigma_t \leq \exists c_2 \\ \mu_t : \text{有界な発展的可測過程} \end{cases}$$

2次変分に関する定理より, 区間 $[s, t] (0 \leq s \leq t \leq T)$ の分割

$$\Delta := \{s = t_1, t_2, \dots, t_n = T\}$$

をとる. 分割が細かくなるとき, 即ち $\|\Delta\| := \max_i \{t_{i+1} - t_i; i = 1, \dots, n-1\} \rightarrow 0$ の時,

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right) \right\}^2 \longrightarrow \langle \log S \rangle_t - \langle \log S \rangle_s = \int_s^t \sigma_u^2 du$$

が成り立つ. ここでの収束は確率収束である. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} P \left(\left| \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right) \right\}^2 - \int_s^t \sigma_u^2 du \right| > \epsilon \right) = 0$$

が成り立っている.

この性質を利用して, 時間平均ボラティリティを推定することができる.

十分細かい時間間隔

$$s = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$$

で株価

$$S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}$$

が観測されたとき,

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{t-s} \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right) \right\}^2$$

によって, 時刻 s から t までの時間平均ボラティリティの近似値

$$\hat{\sigma} (\approx \sigma)$$

が得られる. この近似値, 推定量 $\hat{\sigma}$ を実現ボラティリティ (realized volatility), あるいは現在時刻 t 以前のデータから得られるボラティリティという意味でヒストリカルボラティリティ (historical volatility) という.

Example 3.1.1. 次の表は、一ヶ月間の日経平均株価のデーターから Excel によって計算したヒストリカルボラティリティである.

月/日	日経平均	株価の対数	時刻	ボラティリティ
2008/09/01	12,936.81	9.4678320153	0.00000	
2008/09/02	12,779.89	9.4556281207	0.03333	0.00446805
2008/09/03	12,703.36	9.4496218044	0.06667	0.00277516
2008/09/04	12,627.64	9.4436433412	0.10000	0.00220753
2008/09/05	12,385.65	9.4242938234	0.13333	0.00446368
2008/09/08	12,359.93	9.4222150676	0.23333	0.00256919
2008/09/09	12,529.96	9.4358778555	0.26667	0.00294806
2008/09/10	12,249.14	9.4132110094	0.30000	0.00433312
2008/09/11	12,237.52	9.4122619212	0.33333	0.00390251
2008/09/12	12,256.78	9.4138345323	0.36667	0.00355448
2008/09/16	12,028.45	9.3950299561	0.50000	0.00331384
2008/09/17	11,737.62	9.3705543471	0.53333	0.00422996
2008/09/18	11,576.94	9.3567704675	0.56667	0.00431642
2008/09/19	11,631.60	9.3614808113	0.60000	0.00411360
2008/09/22	12,037.89	9.3958144543	0.70000	0.00520994
2008/09/24	12,031.98	9.3953233840	0.73333	0.00497345
2008/09/25	11,925.71	9.3864518528	0.76667	0.00485987
2008/09/26	12,026.34	9.3948545233	0.83333	0.00455581
2008/09/29	11,883.25	9.3828851245	0.93333	0.00422119
2008/09/30	11,565.70	9.3557991003	0.96667	0.00483458
2008/10/01	11,396.61	9.3410712217	1.00000	0.00489034

3.2 インプライドボラティリティ

ヒストリカルボラティリティが過去の株価データからボラティリティを推定したのに対し、次に考えるボラティリティの推定法は市場価格からボラティリティ値を推定する方法である.

本項では、2章で用いた BSM-モデルを用いる. また、満期が T で行使価格 K のヨーロピアンコールオプションが十分流通していて、常に売買されているような金融市場を想定する. 従って、コールオプションの価格

$$\{C_t^{mkt}; t \in [0, T]\}$$

は常に市場で観測されているとする.

一方で BSM-モデルに対する価格公式によって、時刻 $t(\in [0, T])$ でのコールオプション

の理論的な適正価格を計算すると

$$\begin{aligned}
& E^Q[B_t B_T (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\
&= S_t \Phi(d_1(t, S_t, \sigma)) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2(t, S_t, \sigma)) \\
&=: C(t, S_t; \sigma)
\end{aligned}$$

となる. ただし

$$\begin{cases} d_1(t, x, y) := \frac{1}{y\sqrt{T-t}} \left\{ \log \left(\frac{B_T x}{B_t K} \right) + \frac{y^2}{2} (T-t) \right\} \\ d_2(t, x, y) := d_1(t, x, y) - y\sqrt{T-t}, \\ \Phi(d) := \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{cases}$$

で与えられる. ここで

$$y \mapsto C(t, x, y)$$

は単調増大である. なぜなら,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(t, x, y)}{\partial y} &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} \right) \frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} \\
&\quad - e^{-r(T-t)} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_2(t, x, y)^2}{2} \right) \frac{\partial d_2(t, x, y)}{\partial y} \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} \right) \frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} \\
&\quad - e^{-r(T-t)} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(d_1(t, x, y) - y\sqrt{T-t})^2}{2} \right) \left(\frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} - 1 \right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} \right) \frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} \\
&\quad - e^{-r(T-t)} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} + y\sqrt{T-t} d_1(t, x, y) - \frac{y^2(T-t)}{2} \right) \left(\frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} - 1 \right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} \right) \frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} \\
&\quad - e^{-r(T-t)} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} + \log \left(\frac{B_T x}{B_t K} \right) \right) \left(\frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} - 1 \right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} \right) \frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} \\
&\quad - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} \right) \left(\frac{\partial d_1(t, x, y)}{\partial y} - 1 \right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{d_1(t, x, y)^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つからである. また,

$$(1) C(t, x, y) \rightarrow x \quad (y \rightarrow \infty) \quad (2) C_t^{mkt} \leq S_t$$

である。(1) はコールオプションの理論価格の式から明らかである。(2) は C_t^{mkt} が S_t をこえると裁定機会が起こるからである。それは次のような戦略を考えると分かる。

時刻 t で S_t でオプションを売却したとする。一方で S_t で危険資産を購入し満期 T まで保有する。満期 T でオプションの購入者が権利を行使すれば、 S_T で危険資産を売却する。一方購入者が権利を行使しなかった場合は S_T の危険資産が残る。従ってオプションの売却者に裁定機会が生じてしまうので (2) が成り立つ。

以上の考察から、各時刻 $t(\in [0, T])$ で、コールオプションの市場価格とモデルから計算される理論価格が一致する、すなわち

$$C(t, S_t : IV_T) = C_t^{mkt}$$

が成り立つようなボラティリティの値 IV_T を求めるができる。この IV_T を、インプライドボラティリティ (implied volatility) という。さらに、インプライドボラティリティの値の決定法を与える。

3.3 ニュートン-ラプソン法

インプライドボラティリティを求めるためには、上で述べたように $C(t, S_t : \sigma) = C_t^{mkt}$ を満たすボラティリティ σ を求めなければいけない。しかし、これは一般の方法では解くことができない。そのため、数値解析法の一つニュートン法 (Newton's method) (又は、ニュートン-ラプソン (Newton-Raphson) 法) を用いることにする。ニュートン法は、関数 f が微分可能なとき、方程式 $f(x) = 0$ を解く際に f の導関数を利用して、その n 回目の近似解 x_n を

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

で与える方法である。この反復計算を停止させる収束判定は

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

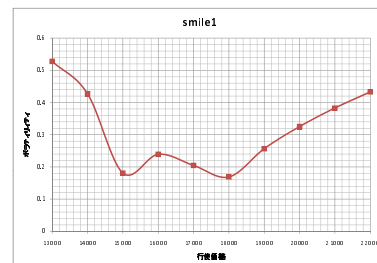
であたえる。ただし、 $\epsilon > 0$ は必要な精度に応じてあらかじめ設定される定数である。判定条件 ϵ が小さければ小さいほど近似の精度は上がるがその分だけ時間がかかってしまう。ニュートン法を用いてインプライドボラティリティを求める際には、理論価格 C と市場価格 C^{mkt} に対し、これらの値の差の関数を

$$f(y) = C(t, x, y) - C^{mkt}$$

と置き、この関数に対する方程式 $f(y) = 0$ をニュートン法で解を近似し、その近似した解をインプライドボラティリティとする。

4 ボラティリティスマイル

BSM-モデルを用いた価格公式で必要となる確率積分の係数 σ を知る必要があり, インプライドボラティリティ等のボラティリティ推定法が必要となる. しかし, BSM-モデルでは σ が定数であったが, この σ が定数ではモデルとして簡単すぎるため市場に適合していない. そのため, この章で紹介する右図のようなボラティリティスマイルとよばれる現象が現れる. 本章ではボラティリティスマイルを実験的に再現してみる.



4.1 ボラティリティスマイル

横軸に行使価格, 縦軸にインプライドボラティリティをとって点をプロットして補完してできた曲線をボラティリティカーブ (volatility curve) という. ボラティリティカーブには次のような性質が知られている.

- $S_t = K$ 付近ではインプライドボラティリティの値が小さくなりやすい.
- $S_t < K$, $S_t > K$ 付近ではインプライドボラティリティの値が大きくなりやすい.

といった性質がみられることが知られている. このようなインプライドボラティリティの観測値にみられる現象をボラティリティスマイル (volatility smile) という. また, オプションの残存期間が多いほどスマイルが表れやすい傾向にある.

この現象に関しては様々な説明がされているが, 本章では実際に Excel を用いてヨーロピアンコールオプションのインプライドボラティリティを計算して, その点をプロットしボラティリティカーブを描き, なぜ市場においてボラティリティスマイルが現れるのかを考察する.

Remark 4.1.1. (1) $S_t = K$ の状態, つまり行使価格と危険資産価格が一致しているときこれをアットザマネー (ATM) と呼ぶ.

(2) $S_t < K$ の状態, つまり行使価格が危険資産価格よりも高いときこれをアウトオブザマネー (OTM) と呼ぶ.

(3) $S_t > K$ の状態, つまり危険資産価格が行使価格よりも高いときこれをインザマネー (ITM) と呼ぶ.

この章では, 前章の仮定をそのまま用いる. また市場価格は次の性質があるとする.

Remark 4.1.2 (市場価格と行使価格の関係). 市場のオプション価格は行使価格によって変化する. オプションの価格 $C^{mkt}(t, K)$ は行使価格に対して減少関数になっている. つまり,

$$\frac{\partial C^{mkt}(K)}{\partial K} \leq 0$$

という関係が成り立っている. これは, 行使価格が高くなるほど購入者は権利を行使する機会が減ってしまうため, オプションの価値が減ってしまうからである.

4.2 インプライドボラティリティの計算法

以前の章でもニュートン法による計算方法は書いたが, ここではより具体的に手順をおって計算機での計算方法を記す.

[1](入力)

最初の入力として満期 T (日), 金利 r , 現在時刻 t (日), 初期ボラティリティ σ_0 , 行使価格 K (円) 現在価格 S_t (円) を与える.

[2](BSM-モデルの計算)

与えた変数から理論価格を計算する. まず, $d_1(t, x, y), d_2(t, x, y)$ を計算し, Excel の Norm 関数を用いてオプションの理論価格 $C(t, x, y)$ を計算する. さらに, $d_1(t, x, y)$ を使って $\partial_y C(t, x, y)$ を計算する.

[3](ニュートン法)

ニュートン法の計算法を用いるために

$$\sigma_0 - \frac{C(t, x, y) - C_t^{mkt}}{\partial_y C(t, x, y)}$$

を計算しボラティリティ σ_1 を求める. このボラティリティ σ_1 をもとに [1]-[3] の計算をし次のボラティリティを決定する. これを 50 回計算する. そして, 次の収束判定

$$|\sigma_n - \sigma_{n-1}| < 10^{-5}$$

をし, 収束しているならば 50 回目のボラティリティをインプライドボラティリティとする. 収束していないならさらに 50 回計算をする. ただし, ニュートン法の収束では約 50 回ほどの計算で要求する収束判定を満たすようである.

4.3 初期値の仮定

以下のグラフでは, ボラティリティスマイルが出やすくするために以下の設定を置いておく. 満期 0.3, 初期時刻 0, 危険資産価格 17500, 金利 0.05, 行使価格を 13000-22000 で変化させるものとする.

4.4 ボラティリティスマイルの描き方

次の表とグラフは, BSM-モデルのボラティリティを 0.01 単位で $0 \leq \sigma \leq 1$ の間で変化させて $\sigma \mapsto C(0, 17500, \sigma)$ を, Excel で計算させたものであり, 図 1, 2 は縦軸に理論価格, 横軸にボラティリティとして点を取って補間したものである. 図 1 は行使価格 13000 – 18000 のグラフを集めたものである. 図 2 は行使価格 19000 – 22000 のグラフを集めたものである.

期	行便値格	行便値格	d(t,x,y)①	13000 d(t,x,y)②	14000 d(t,x,y)③	15000 d(t,x,y)④	16000 d(t,x,y)⑤	17000 d(t,x,y)⑥	18000 d(t,x,y)⑦	19000 d(t,x,y)⑧	20000 d(t,x,y)⑨	21000 d(t,x,y)⑩	22000
株値	0.3	0.01	13000 5701.181	4693.544785 43.4816	3708.432846 30.88529 2723.321 19.10222	1738.209 8.033727 753.097 -2.40192	0.258818514 -12.2732 4.8E-34 -2.1638 1.7E-103 -30.5459 1E-204 -39.0392 0						
		0.02	14000 2851.0001	4693.544785 21.74491	3708.432846 15.44675 2723.321 9.555217	1738.209 4.020972 753.0983 -1.19685	10.77429386 -6.13249 1.29E-08 -10.8149 2.55E-26 -15.2688 7.67E-52 -1.95155 3.9E-84						
		0.03	15000 1801.124	4693.544785 14.50117	3708.432846 10.3024 2723.321 6.374709	1738.209 2.685212 753.4185 -0.79334	34.89860825 -4.08376 0.001408 -7.20537 1.11E-11 -10.1746 3.56E-23 -13.0058 1.24E-37						
		0.04	16000 142.6322	4693.544785 10.80067	3708.432846 7.315641 2723.321 4.785824	1738.209 2.018702 756.6215 -0.58021	64.97200929 -3.05803 0.116505 -0.39924 2.25E-08 -7.62019 5.87E-13 -8.74953 3.56E-21						
		0.05	17000 141.1551	4693.544785 6.709466	3708.432846 6.190203 2723.321 3.833589	1738.216 1.811981 763.8346 -0.47674	98.28261606 -2.4415 1.140226 -4.31446 0.000807 -6.80983 4.05E-08 -7.7947 1.32E-13						
金利安全通用	0.05	0.06	18000 851.7943	4693.544785 7262.909	3708.432846 5.163523 2723.321 3.199678	1738.317 1.35493 776.8624 -0.38435	133.2394445 -2.02956 4.460193 -3.39306 0.023212 -5.075 2.04E-05 -6.49056 3.61E-09						
		0.07	19000 8.18323	4693.544785 6230437	3708.432846 4.430963 2723.322 2.747667	1738.824 1.66454 794.078 -0.32435	169.1658988 -1.73454 1.11886 -3.07237 0.196143 -4.34491 0.000976 -5.55825 1.54E-06						
		0.08	20000 7148.042	4693.544785 5456767	3708.432849 3.882227 2723.33 2.409344	1740.265 1.025782 815.1254 -0.27687	205.7132623 -1.51258 2.147003 -2.68319 0.848095 -3.79667 0.013111 -4.85833 8.61E-05						
		0.09	21000 6358.988	4693.544785 4855633	3708.432946 3.460042 2723.382 2.148612	1743.188 0.91698 833.0323 -0.24254	242.6801784 -1.33935 35.38847 -2.37988 2.455719 -3.36964 0.083083 -4.31335 0.001454						
		0.1	22000 5.72823	4693.544786 43.75273	3708.434076 3.115641 2723.566 1.937304	1748.005 0.830485 865.1718 -0.21308	279.9425925 -1.20021 52.52514 -2.13669 6.550482 -3.02747 0.327563 -3.87681 0.011601						
初期時刻	0	0.11	5.212767	4693.544803 3.982749	3708.441064 2.837829 2724.04 1.768441	1754.944 0.760215 893.0859 -0.18848	317.4204403 -1.08557 72.46821 -1.93722 10.35932 -2.74702 0.941489 -3.59194 0.056322						
		0.12	4.783169	4693.544979 3.656102	3708.469153 2.606409 2725.003 1.624487	1764.075 0.70212 922.3528 -0.16753	355.0597075 -0.90013 94.81038 -1.77053 17.26702 -2.51285 2.172398 -3.55825 0.194101						
		0.13	4.420915	4693.546074 3.38013	3708.551551 2.411183 2726.671 1.504793	1775.357 0.65337 952.7578 -0.14937	392.8226113 -0.9087 119.1994 -1.82907 26.32704 -2.31429 4.72959 -2.96763 0.523631						
		0.14	4.110417	4693.550726 3.143974	3708.744583 2.244237 2729.243 1.402589	1788.682 0.611983 984.0705 -0.13342	430.6819328 -0.93851 145.3258 -1.50743 37.54347 -2.1437 7.949516 -2.75037 1.179667						
		0.15	3.841684	4693.558555 2.83967	3708.127083 2.098916 2732.882 1.314378	1803.905 0.576478 1016.128 -0.11923	468.6175425 -0.77732 172.9305 -1.40164 50.85017 -1.99549 12.01933 -2.56172 2.319818						
金利安全通用	0.05	0.16	3.608085	4693.560422 2.761247	3708.794866 1.978777 2737.709 1.235755	1820.869 0.545755 1048.003 -0.10647	506.6142172 -0.72343 201.7973 -1.30873 66.14036 -1.85647 17.97913 -2.3393 4.108146						
		0.17	3.400331	4693.568256 2.604137	3710.852602 1.863177 2743.801 1.170055	1839.414 0.511988 1095.189 -0.09489	544.680214 -0.76756 231.746 -1.22643 83.28474 -1.75042 25.46357 -2.25003 6.700533						
		0.18	3.216465	4693.583128 2.464788	3712.405169 1.764992 2751.198 1.110377	1859.839 0.495461 1115.622 -0.0843	582.7463145 -0.6327 262.6264 -1.15297 102.1451 -1.64785 34.51364 -2.1197 10.23427						
		0.19	3.052511	4694.138456 2.340395	3714.550848 1.677431 2759.909 1.057269	1880.656 0.474717 1149.62 -0.07453	620.865166 -0.59407 294.3132 -1.08695 122.5829 -1.55579 45.13418 -2.00281 18.42226						
		0.2	2.905226	4694.595915 2.228716	3717.976346 1.5989 2769.92 1.009746	1903.083 0.456322 1183.904 -0.06546	650.9108197 -0.55902 326.7011 -1.02727 144.6486 -1.47266 57.30253 -1.87013 20.55097						
初期時刻	0	0.21	2.772228	4695.281824 2.127953	3720.954071 1.526108 2781.197 0.96701	1926.554 0.439939 1218.523 -0.0557	6971.783963 -0.53276 358.7013 -0.973 167.6846 -1.39719 70.97605 -1.80163 27.48123						
		0.22	2.651571	4696.259479 2.020692	3725.941118 1.464002 2793.696 0.928408	1950.956 0.425294 1253.348 -0.04612	753.635459 -0.49775 392.2387 -0.92342 192.0659 -1.32832 86.09849 -1.71438 35.8505						
		0.23	2.541643	4697.575405 1.953374	3730.579667 1.405708 2807.369 0.8934	1976.226 0.41262 1288.379 -0.04156	773.637931 -0.47075 427.2494 -0.87792 217.5621 -1.26521 102.6049 -1.63449 45.76809						
		0.24	2.441105	4698.298982 1.877346	3736.697866 1.3525 2822.153 0.861538	2002.252 0.400351 1323.59 -0.03447	811.775325 -0.44577 461.6789 -0.83597 244.0557 -1.20713 120.4526 -1.56102 55.75653						
		0.25	2.348822	4701.476811 1.80762	3743.711701 1.283367 2837.991 0.832445	2026.97 0.387905 1358.961 -0.02722	849.9960061 -0.42357 496.48 -0.79717 271.4586 -1.15348 139.4888 -1.49321 67.68486						
金利安全通用	0.05	0.26	2.263168	4704.161429 1.743468	3751.626449 1.258984 2854.824 0.805799	2056.315 0.380088 1394.471 -0.02128	888.223881 -0.40095 531.6124 -0.76113 298.691 -1.10374 159.7226 -1.43041 80.83182						
		0.27	2.185389	4707.380366 1.684271	3760.430647 1.217741 2872.530 0.781376	2094.228 0.371367 1427.518 -0.01512	926.546492 -0.38072 570.0492 -0.73179 328.6328 -1.05749 181.0647 -1.37306 95.16744						
		0.28	2.112719	4711.193757 1.629468	3770.137655 1.179829 2891.242 0.758805	2112.659 0.363502 1465.848 -0.00992	964.692817 -0.36175 602.3348 -0.6982 358.3642 -1.01433 203.4232 -1.31767 110.8552						
		0.29	2.04525	4715.605347 1.576891	3780.70716 1.144335 2910.715 0.738023	2141.551 0.35635 1501.69 -0.0035	1002.931195 -0.34389 638.667 -0.66681 388.685 -0.97398 226.7569 -1.25585 127.2539						
		0.3	1.982461	4720.644911 1.531454	3792.126481 1.111577 2930.961 0.718808	2170.892 0.349858 1538.916 -0.002003	1041.170332 -0.327704 674.8146 -0.6392 419.5806 -0.93613 250.9964 -1.21924 144.9199						
金利安全通用	0.05	0.31	1.923899	4732.682789 1.487441	3804.37168 1.081108 2951.931 0.701009	2200.616 0.343961 1573.625 0.007327	1079.409063 -0.3111 711.1565 -0.61319 451.0137 -0.90054 276.0833 -1.17452 163.6085						
		0.32	1.889169	4732.684399 1.44835	3817.416496 1.052715 2973.578 0.684494	2230.699 0.338604 1609.701 0.01249	1117.646334 -0.29599 747.8744 -0.58884 482.9379 -0.86701 301.9632 -1.13243 183.2742						
		0.33	1.859122	4739.660157 1.407919	3831.233114 1.028209 2995.86 0.669146	2261.112 0.333738 1645.84 0.017506	1155.81182 -0.28162 784.352 -0.56541 515.3142 -0.83534 328.549 -1.09272 200.8719						
		0.34	1.76985	4747.316347 1.371903	3845.792784 1.001423 3018.736 0.654862	2291.828 0.329318 1682.035 0.022387	1194.112724 -0.26794 821.1747 -0.54338 548.1076 -0.80535 355.9007 -1.05118 225.3573						
		0.35	1.724862	4755.630594 1.338105	3861.066329 0.97821 3042.168 0.641551	2322.823 0.325308 1718.28 0.027147	1232.340148 -0.25489 858.1296 -0.52246 581.2858 -0.77697 383.8662 -1.01963 247.6871						
金利安全通用	0.05	0.36	1.682175	4764.597417 1.306336	3877.024534 0.956439 3066.122 0.629131	2354.075 0.321673 1754.57 0.031794	1270.562697 -0.24241 895.1035 -0.50254 614.819 -0.74988 412.44 -0.74988 412.44						
		0.37	1.642114	4774.208732 1.276433	3893.638458 0.935982 3090.564 0.617531	2385.564 0.318382 1780.901 0.036338	1308.779667 -0.23045 932.3904 -0.48356 648.6834 -0.72431 441.5835 -0.93536 294.7411						
		0.38	1.604306	4784.454301 1.246248	3910.679668 0.916766 3115.464 0.600685	2417.271 0.315409 1822.768 0.040787	1348.990398 -0.21898 959.763 -0.46543 682.8521 -0.69844 471.2611 -0.92335 313.3322						
		0.39	1.568737	4795.222128 1.216449	3935.720409 0.898666 3140.795 0.585636	2449.181 0.312729 1843.867 0.045146	1385.194269 -0.20786 1007.054 -0.44809 717.3041 -0.67649 501.4394 -0.89427 344.8368						
		0.4	1.534771	4806.798864 1.196516	3967.133747 0.881608 3168.526 0.570302	2484.279 0.310319 1900.905 0.049428	1423.390693 -0.19735 1044.516 -0.43147 752.0192 -0.65417 532.0876 -0.8665 370.5929						
金利安全通用	0.05	0.41	1.502748	4818.870018 1.172743	3986.093643 0.865516 3192.637 0.5578124	2513.551 0.308161 1936.549 0.053363	1461.579112 -0.18713 1082.055 -0.41554 786.7879 -0.6328 563.1788 -0.83969 397.187						
		0.42	1.47238	4831.520326 1.150233	3985.576019 0.85032 3219.104 0.559771	2545.984 0.308236 1970.028 0.057868	1499.758995 -0.17726 1119.685 -0.40023 822.1663 -0.61233 584.8803 -0.81455 423.3272						
		0.43	1.44353	4844.733934 1.128897	4005.553792 0.833599 3245.906 0.551804	2578.757 0.304228 2009.524 0.061838	1537.929834 -0.16773 1157.34 -0.39361 857.5688 -0.59367 628.7374 -0.79019 452.0435						
		0.44	1.41616	4858.494604 1.108655	4026.008855 0.822375 3273.023 0.545478	2611.283 0.303021 2046.039 0.065468	1576.901141 -0.1585 1195.574 -0.38163 883.65 -0.57379 658.8328 -0.76892 480.2574						
		0.45	1.390106	4872.76587									

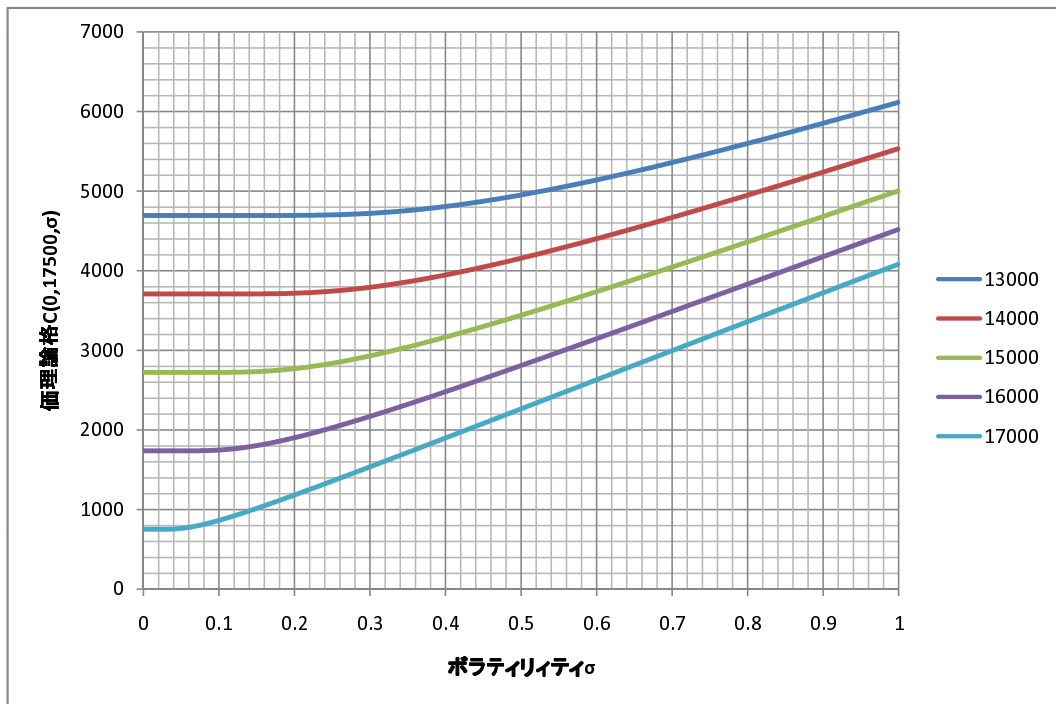


図 1: $\sigma \mapsto C(0, 17500, \sigma)$ [行使価格 13000-17000]

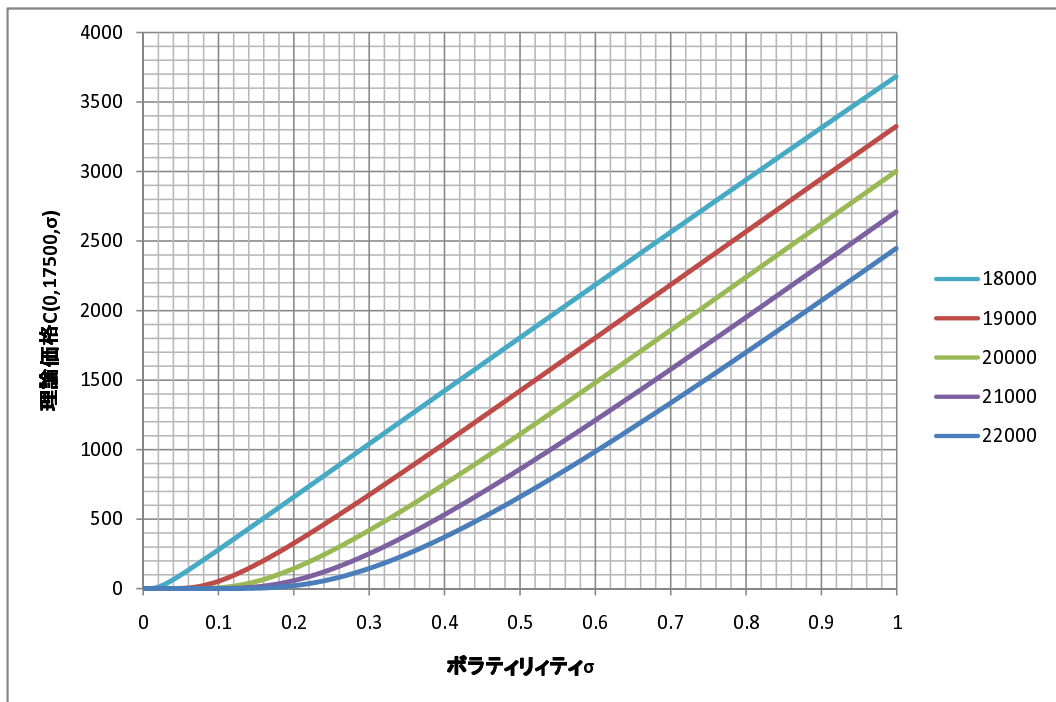


図 2: $\sigma \mapsto C(0, 17500, \sigma)$ [行使価格 18000-22000]

一方,満期を 0.3 から 5 へと変化させると先ほどのグラフは以下のように変化する.

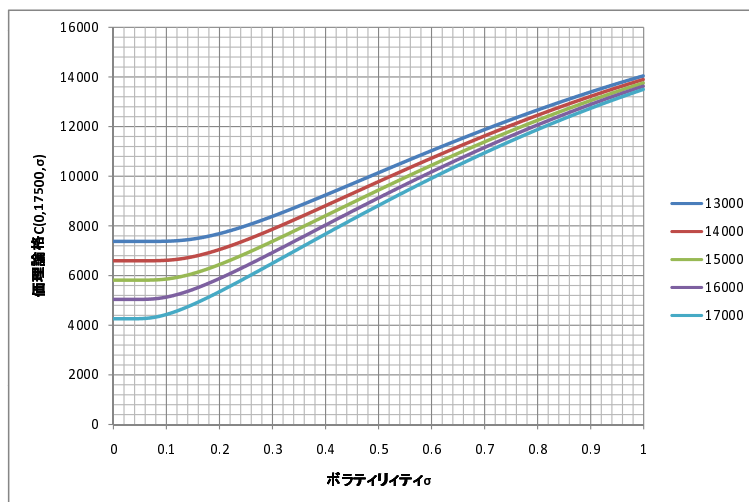


図 3: $\sigma \mapsto C(0,17500,\sigma)$ [行使価格 13000-17000]

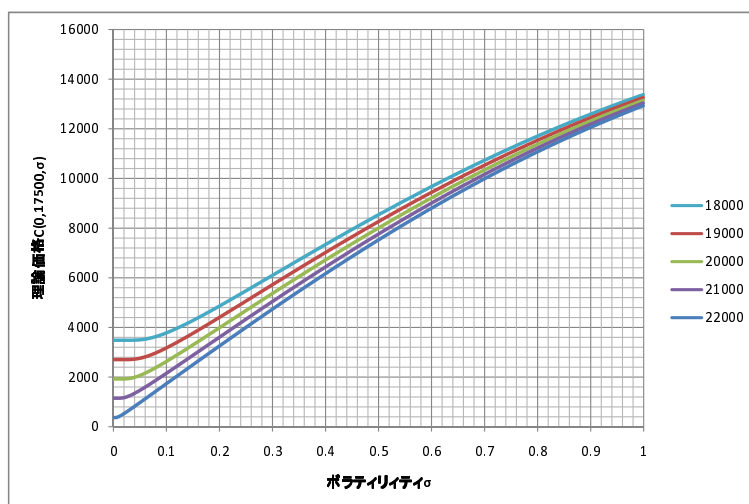
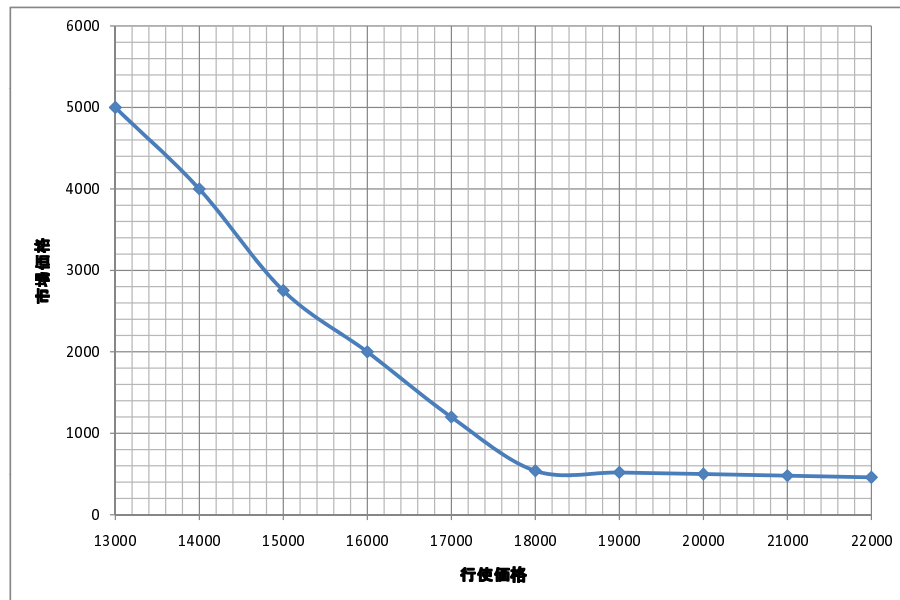


図 4: $\sigma \mapsto C(0,17500,\sigma)$ [行使価格 18000-22000]

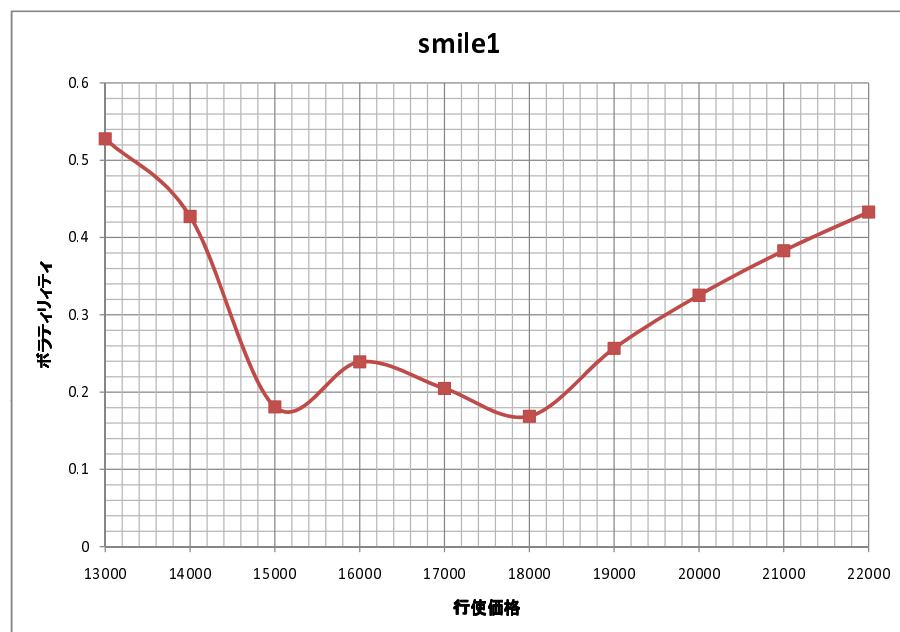
グラフからわかるように満期が大きくなると, 行使価格によるグラフの間隔が狭くなる. そのため, 市場価格の変化によってボラティリティに差が出にくくなってしまいうためスマイルが出にくい. 表と図 1,2 を用いてインプライドボラティリティを逆算する. 例えばボラティリティ 0.6 になるための理論価格を求め, それを市場価格と設定することにより, インプライドボラティリティが 0.6 と計算することができる. このことを用いて様々なボラティリティカーブを描くことができる.

4.5 ボラティリティスマイル1

C_t^{mkt} は行使価格によって変動する。 C_t^{mkt} を行使価格の関数としたとき、次の図のように市場価格が変化したときを考える。



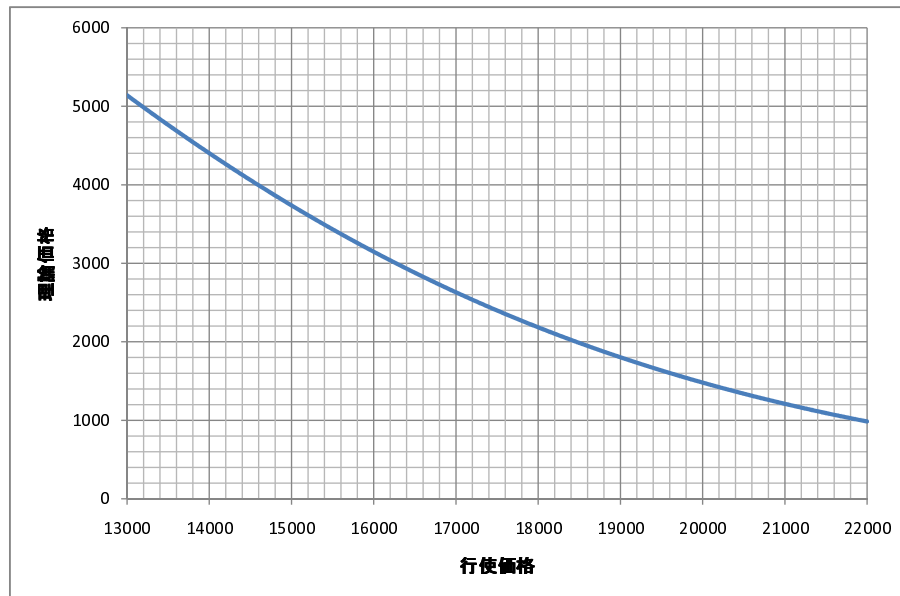
この時、インプライドボラティリティを求めると次のスマイルが出現する。



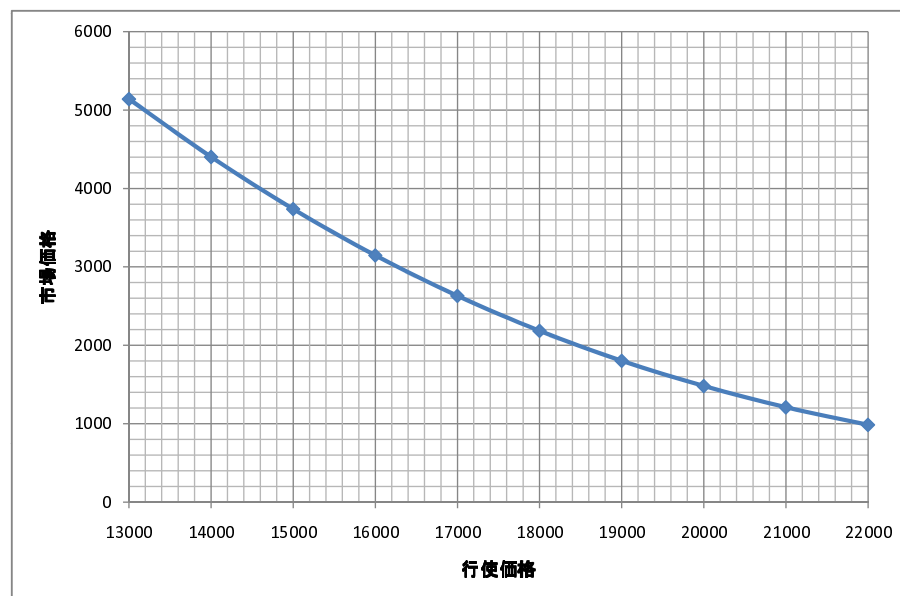
グラフの関係からわかるように、市場価格が急に減少し最後にゆっくりと減少したとき、ボラティリティスマイルが出現する。実際の市場も上で示したように少し速く落ちていって最後には一定値になる。行使価格が危険資産価格に近づいていき超えると、利益が出にくい為、素早く価格が落ちていき最後には全く利益が出にくいのでほとんど値段が付かなくなる。

4.6 ボラティリティスマイル2

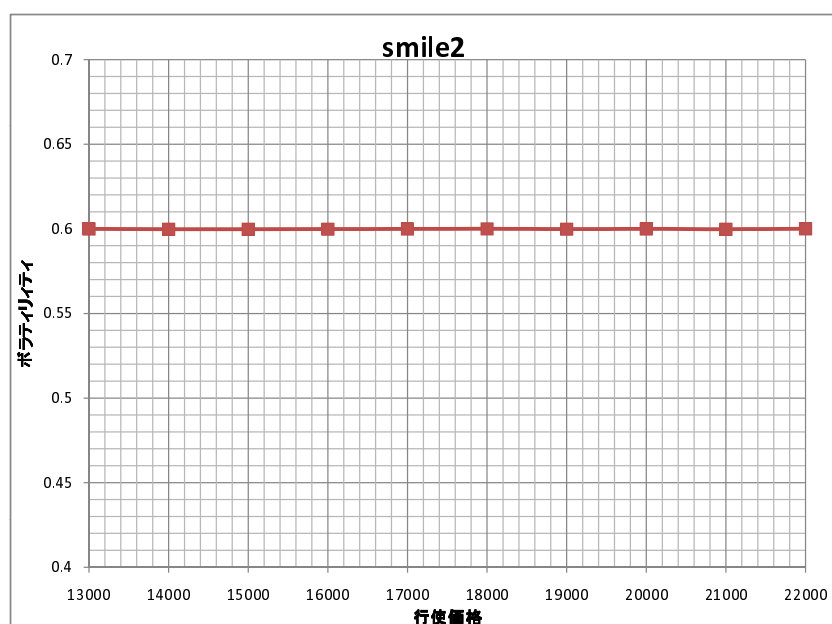
市場がBSM-モデルに適している場合のボラティリティカーブを描いてみる。まずBSM-モデルが $\sigma = 0.6$ の時、行使価格を変動させたときの理論価格のグラフを描く。



市場価格がほぼこのグラフのように動く想定する。

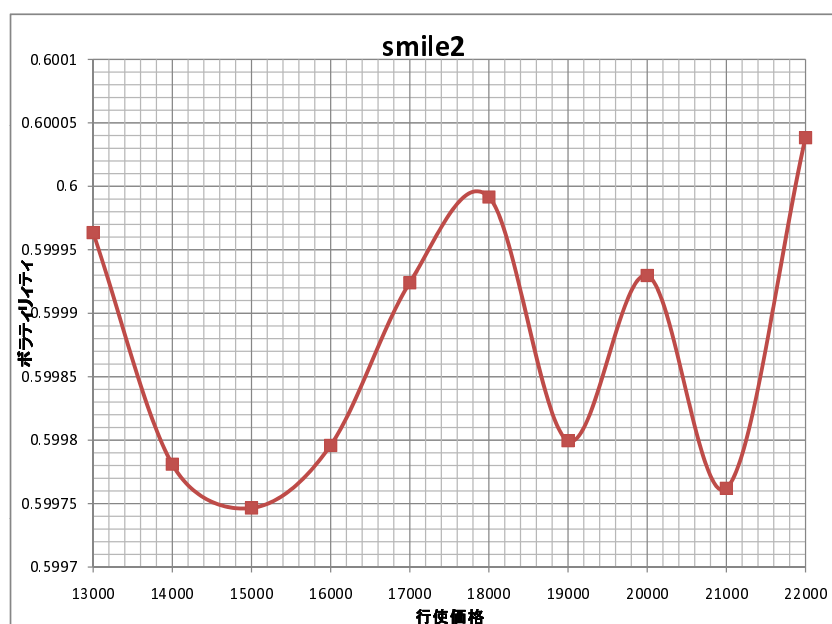


この時のボラティリティカーブを描くと、



smile1 のグラフと比較しても分かるように市場価格が滑らかに落ちて行った時ボラティリティは一定値になる。

しかし、一見このボラティリティカーブはスマイルが出ていないように思えるが、縦軸の範囲を 0.5997-0.6001 に変化させて、このグラフを拡大してみると次のような図になる。

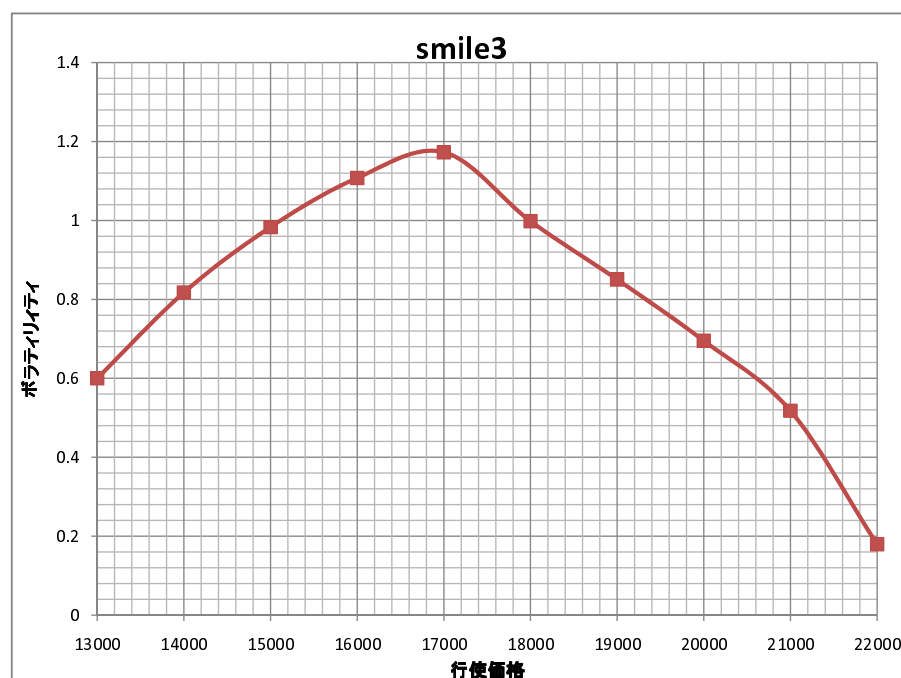
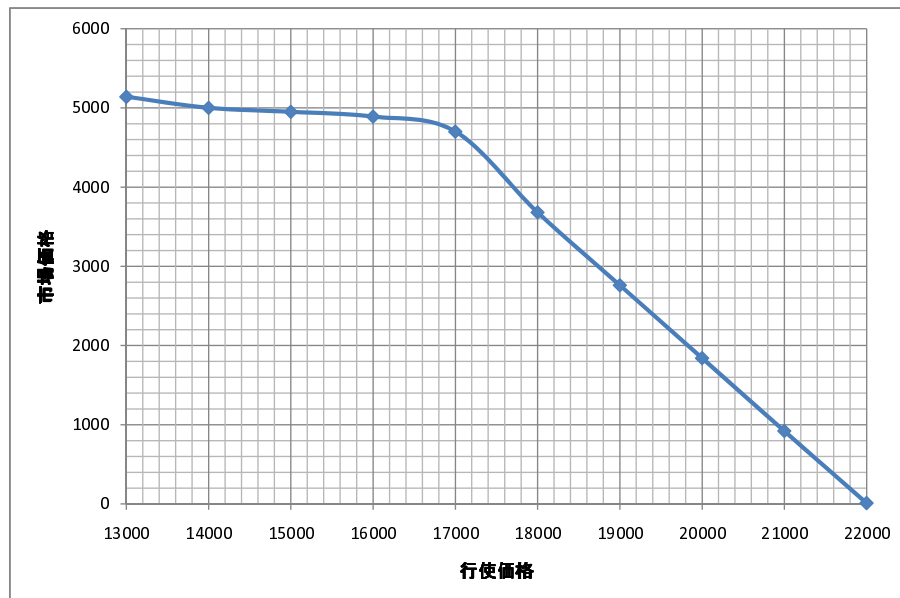


小さなスマイルがいくつも見て取れる。表の値からも分かるように、ボラティリティが完全に 6.0 に一致させる様な市場価格は実現しにくいことがわかる。この理論価格と市場価格のギャップがスマイルを引き起こしている要因であることがわかる。

Remark 4.6.1. このグラフを描く際の市場価格は、ボラティリティが 0.6 になるような理論価格の小数点以下を切り捨てた価格を採用した。

4.7 ボラティリティスマイル3

最後に、市場価格が次のような反応をしたとする。これは、市場価格が現実とは全く逆の反応を示した場合である。



smile1 のグラフとあわせて考えると、市場価格がゆっくりと減少した際にはボラティリティは上昇していく。一方、市場価格が急に減少していく際にはボラティリティは減少していく。そのためスマイルが逆転した形が現れる。今回想定した市場の反応は実際の市場ではあり得ないものである。なぜなら、行使価格が上がるにつれて利益が出にくくなるにもかかわらず価格がほぼ一定の値になっている。そのため、オプション価格があまりにも高

く設定されてしまっている。そのため、ボラティリティが大きくなっていきつてしまい図のような形を取るのである。

謝辞

最後になりましたが、本論文の作成にあたり、長期間に渡り、時には優しく時には厳しく、終始丁寧な御指導、御支援、御助言を頂いた谷口説男教授に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 舟木直久,(2005), 確率微分方程式, 岩波書店.
- [2] 木島正明, 青沼君明,(2003),Excel&VBA で学ぶファイナンスの数理, 金融財政事情研究会.
- [3] 木島正明, 近江義行, 長山いづみ,(1996), ファイナンス工学入門〈第3部〉数値計算法, 日科技連出版社.
- [4] 関根順,(2007), 数理ファイナンス, 培風館.
- [5] John.C.Hull,“ Options, Futures and Others Derivatives ”, 5th Edition, Prentice Hall, Eaglewood Cliff, New Jersey, (2003) (邦訳:三菱証券商品開発本部訳, 『フィナンシャルエンジニアリング デリバティブ取引とリスク管理の総体系』, 金融財政事情研究会, 東京, 2005)
- [6] D.Williams,(1991), Probability with Martingales. Cambridge University Press.