

修 士 論 文

~ *Master Thesis* ~

無限次元確率解析 と その金利モデルへの応用

九州大学大学院 数理学府 数理学専攻 数理科学コース

指導教員：谷口説男教授

楠 本 信 秀
(2MA06037S)

2008 年 1 月 22 日 提出

~ *Master Thesis* ~

INFINITE DIMENSIONAL STOCHASTIC ANALYSIS
AND ITS APPLICATION TO INTEREST RATE MODELS

Nobuhide KUSUMOTO

Presented : January 22, 2008.

Graduate School of Mathematics Kyushu University
Hakozaki 6-10-1 Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581 Japan

E-mail : ma206037@math.kyushu-u.ac.jp

はじめに

数理ファイナンスは、ファイナンスの問題を数学的に表現し数学的に解を与える理論体系である。その中の大きな柱の1つに「デリバティブ価格理論」が挙げられる。デリバティブとは、金融派生商品と訳され、原資産と呼ばれる株価や債券価格・為替・金利などの水準の動きに応じて将来のキャッシュフローが決まる商品である。

このデリバティブを販売する側にとって、その理論価格を知る必要があり、また原資産の動き次第では多額の損失を被るリスクがあるので、そのリスクの管理や回避を行うためには、様々なリスク指標を計算する必要がある。こうした価格やリスク指標を求めるためには、確率論に基づいた数理モデルが重要であり、とりわけ確率過程の時間発展を記述する確率微分方程式は極めて重要である。

デリバティブの数学的価格理論の始まりは、1900年に発表された Bachelier の “Théorie de la spéculation” である。その後、デリバティブ価格理論は 1973 年の Black と Scholes の論文 [2] を契機に、理論も実践も大規模な展開を見せていく。その中で、金利デリバティブの価格理論は他の原資産に比べ困難さがあった。それは金利が株価とは違い、時系列的依存性を持ち、また金利そのものは取引される証券ではない。さらに、株式や為替と違い、期間を伴う、言い換えれば期間構造を持っているためである。

金利といっても様々な種類があるが、数理ファイナンスにおいてよく利用されるのは債務不履行（デフォルト）しないゼロクーポン債の利回りである。金利のモデル化は、まず 1977 年に Vasicek[34] が Ornstein-Uhlenbeck 過程を使って、スポットレート r_t (時点 t での瞬間的な利子率) をモデル化した。その後、欠点を解消していく形で展開されていった。主なものを挙げると、Cox, Ingersoll and Ross[6], Ho and Lee[17], Hull and White[19], Black and Karasinski[1] などがある。その後、Heath, Jarrow and Morton[15] がフォワードレート $f(t, T)$ (時点 t における T での瞬間的な利子率) を次のようにモデル化した。

$$\begin{cases} df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sum_{n=1}^d \sigma_n(t, T)dW_t^{(n)} \\ f(0, T) = f(T) \end{cases} \quad (0.1)$$

上のスポットレートモデルをすべてこの Heath-Jarrow-Morton(HJM) モデルはすべて含んでおり、便利な点も多い。また、この HJM モデルは次のように書き直すと便利な時もある。時点 t における x 期間後のフォワードレート $f_t(x)$, すなわち上の記号を用いると $f_t(x) = f(t, t+x)$ と書ける。このとき、HJM モデルは次のような確率偏微分方程式となる。

$$\begin{cases} df_t(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f_t(x) + \alpha_t(x) \right) dt + \sum_{n=1}^d \sigma_t^{(n)}(x)dW_t^{(n)} \\ f_0(x) = f(x) \end{cases} \quad (0.2)$$

HJM モデルでこのような記号の変換を行い、確率偏微分方程式を導出したのは Musiela[26] である。詳しくは本修士論文の §3.4 で述べた。

この確率偏微分方程式は、伊藤清先生により確率微分方程式が導入されて以来、理論の発展と共に物理学や工学の中での現象を解明する中で発展していった。Hille-Yosida の理論にみられるように、偏微分方程式は無限次元空間上の常微分方程式とみなすこともできる。同様の意味で、確率偏微分方程式は無限次元空間上の確率微分方程式とみなすことができる。無限次元確率微分方程式の研究は 1960 年代に Daletskii[7] や L.Gross[14] らによって始められた。彼らは E を Banach 空間として $u \in E$ に対する方程式

$$du = A(u)dt + B(u)dW_t \quad (0.3)$$

を考察した。 $A(u)$ と $B(u)$ は E 上の一般に非線形であるが、しかし有界な作用素で、 W_t はある Hilbert 空間上 Wiener 過程である。ところが、これでは $A(u)$ として微分作用素をとることができず、したがって、確率偏微分方程式を扱うことができない。

その後 1970 年代に入ってから、Dawson[10], [11] らにより $A(u) = Au$ が線形作用素のときは非有界であっても、(0.3) を方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = A(u)$ に非斉次項 $B(u)\dot{W}_t$ が加わったものとみなし、積分方程式に書き直すことによりその数学的意味付けが与えられた。この意味での解を mild solution という。その後、 $A(u)$ が非線形の場合へと理論が展開されている。

ここで、HJM モデルに戻ることにする。上で述べたとおり、(0.2) は Hilbert 空間上の確率微分方程式としてみることができる。Musiela 以後、その方向で理論が展開されている。

本修士論文ではその中で R. Carmona and M. Tehranchi [4],[5] および M. Tehranchi[33] を参考にし、「抽象 HJM モデルに従う場合の債券ポートフォリオのヘッジ戦略」および「HJM モデルのエルゴート性」について述べる。

特に債券ポートフォリオのヘッジ戦略については、Malliavin 解析を用いた。Malliavin 解析は Wiener 過程の汎関数を解析するための基本的手段を提供している。とりわけ数理ファイナンスにおける Malliavin 解析の重要性は、理論展開において重要な役割を果たしているマルチンゲール表現定理に出てくる積分核を Malliavin 微分を使って表すことができる点である。本論文についてもこのことを中心に用いた。

最後に、この修士論文の構成を紹介する。第 1 章では論文内で用いた主な確率論と確率過程論の基本的な事項を列挙する。第 2 章では無限次元確率解析 (無限次元確率微分方程式・Malliavin 解析) について述べる。第 3 章では数理ファイナンスの基本事項、特に金利モデルについて述べる。第 4 章では Musiela の記号による HJM モデルの性質と一般化された債券ポートフォリオについて考える。第 5 章ではマルコフモデルに対するエルゴート性とそこから出てくる興味深い性質について考える。

目次

1	準備	1
1.1	確率論	1
1.1.1	確率空間と期待値	1
1.1.2	マルチンゲールと Wiener 過程	3
1.2	$\mathbb{R}^d$ -値確率変数に対する確率解析	6
1.2.1	確率積分	6
1.2.2	基本的な道具	9
1.2.3	確率微分方程式	11
2	無限次元確率解析	13
2.1	無限次元確率微分方程式	13
2.1.1	Bochner 積分	13
2.1.2	Wiener 過程	13
2.1.3	確率積分	18
2.1.4	基本的な道具	21
2.1.5	確率偏微分方程式	32
2.2	Malliavin 解析	36
2.2.1	Itô-Wiener カオス分解	36
2.2.2	Malliavin 微分	38
2.2.3	連鎖律	40
2.2.4	微分作用素 D_t と Clark-Ocone Formula	42
2.2.5	mild solution と Malliavin 微分	44
3	数理ファイナンス	48
3.1	ポートフォリオ	48
3.2	HJM Model	50
3.2.1	記号の導入	50
3.2.2	債券価格過程の算出	51
3.2.3	無裁定債券価格と期間構造	52
3.3	スポットレートモデル	54
3.3.1	Vasicek モデル	57
3.3.2	Cox-Ingersoll-Ross モデル	59
3.3.3	Hull-White モデル	60
3.4	Musiela の記号	62
4	抽象 HJM モデル	63
4.1	HJM 発展方程式	63
4.2	抽象 HJM モデル	65
4.2.1	ドリフト条件と無裁定	66
4.2.2	ロングレート	69
4.2.3	F の具体的な例	71
4.3	抽象 HJM モデルに従う場合の債券ポートフォリオのヘッジ戦略	74
4.3.1	債券価格のモデル	75

4.3.2	取引戦略	76
4.3.3	ヘッジ戦略の一意性	78
4.3.4	債券オプションに対するヘッジ戦略	79
5	特別な場合のモデル	86
5.1	マルコフモデル	86
5.1.1	問題設定	86
5.1.2	状態空間に対する仮定	87
5.1.3	ガウス・マルコフ HJM モデルに対する不変測度	89

1 準備

1.1 確率論

1.1.1 確率空間と期待値

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とする。すなわち, $N' \subset N \in \mathcal{F}$ で N が P -零集合 ($P(N) = 0$) ならば, $N' \in \mathcal{F}$ とする。このとき, $P(N') = 0$ となる。また, 集合族 $\mathcal{C}$ を含む最小の σ -field を $\sigma(\mathcal{C})$ とし, さらに位相空間 E の開集合全体を $\mathcal{O}_E$ としたときに $\mathcal{B}(E) := \sigma(\mathcal{O}_E)$ と定義する。

さらに, 位相空間 E に対して, 写像 $\xi: \Omega \rightarrow E$ が

$$\xi^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}, \quad (\forall A \in \mathcal{B}(E))$$

をみたすとき, $(E\text{-値})$ 確率変数である, または $\mathcal{F}$ -可測であるという。 E -値確率変数 ξ は

$$\Psi_\xi(A) = P \circ \xi^{-1}(A) = P(\xi^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}(E)$$

により, $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の確率測度 $\Psi_\xi = P \circ \xi^{-1}$ を誘導する。この Ψ_ξ を ξ の分布という。

次に, 測度 μ に対して, ω ごとに命題 $A(\omega)$ が与えられたとする。 μ -零集合 N が存在し, $\omega \notin N$ ならば, $A(\omega)$ が真となるときの命題 A はほとんど至るところで成り立つといい, 『 A μ -a.e.』と表す。また, μ が確率測度 (全測度が 1) のときは 『 A μ -a.s.』と表す。

Definition 1.1. $\mathbb{R}$ -値確率変数 ξ が非負もしくは可積分であるとき P に関する積分を $E[\xi]$ と表し, ξ の期待値という。確率測度を明示する必要があるときは E_P と表す。さらに, 分散を $\text{Var}_P[\xi] := E_P[|\xi - E[\xi]|^2]$ と表す。

また, 各 $p > 1$ に対し, $L^p(\mathcal{F}, P; E)$ で $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の P -a.s. に一致する E -値確率変数を同一視する同値関係で同値類別した空間を表す。同値類と代表元は区別せずに同じ関数の記号 ξ で表すものとする。

Definition 1.2 (収束). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$, を $\mathbb{R}$ -値確率変数とする。このとき

1. ξ_n が ξ に概収束する ($\xi_n \rightarrow \xi$ a.s. と表す) とは,

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| = 0\right\}\right) = 1$$

となることをいう。

2. ξ_n が ξ に p 次平均収束する ($\xi_n \rightarrow \xi$ in L^p と表す) とは, $p > 0$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|\xi_n - \xi|^p] = 0$$

となるときいう。

3. ξ_n が ξ に確率収束する ($\xi_n \rightarrow \xi$ in prob と表す) とは, 任意に $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$$

となるときいう。

上の収束には次のような関係がある。

Theorem 1.3. 1. 概収束もしくは p 次平均収束するならば, 確率収束する。

2. 確率収束するならば, 弱収束する。

3. 確率収束するならば, 概収束する部分列を取り出せる。

さらに, 次の意味での収束も定義しておく。

Definition 1.4 (弱収束). (E, ρ) を完備可分距離空間とし, E 上の確率測度 $\nu, \nu_1, \nu_2, \dots$ とする。 ν_n が ν に弱収束するとは, 任意の有界連続な実数値関数 f に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\nu_n = \int_E f d\nu$$

が成立することをいう。 ν_n が ν に弱収束するとき, $\nu_n \rightarrow \nu$ weakly と表す。

また, $\xi, \xi_n, (n = 1, 2, \dots)$ を E -値確率変数とする。このとき ξ_n が ξ に弱収束する ($\xi_n \rightarrow \xi$ weakly と表す) とは, それぞれの分布 Ψ_{ξ_n} が Ψ_ξ に弱収束となるときにいう。

Proposition 1.5. $\xi, \xi_n (n = 1, 2, \dots)$ は $\mathbb{R}$ -値確率変数とする。このとき ξ_n が ξ に確率収束するならば, 弱収束する。

Definition 1.6 (独立). σ -field の列 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots \subset \mathcal{F}$ が独立であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $A_j \in \mathcal{F}_j$ $j = 1, \dots, n$ に対して,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{j=1}^n P(A_j)$$

が成立するときをいう。位相空間 E_j に値をとる確率変数 $\xi_j, j = 1, \dots, n$ が独立であるとは $\mathcal{F}^{\xi_j} := \{\xi_j^{-1}(A) | A \in \mathcal{B}(E_j)\}, j = 1, 2, \dots$ が独立になるときをいう。位相空間 E_j に値をとる確率変数 ξ と σ -field $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ が独立であるとは, $\mathcal{F}^\xi$ と $\mathcal{G}$ が独立であることをいう。

Lemma 1.7 (Borel-Cantelli の補題). $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$ として,

1. $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば, $P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$ である。

2. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は独立で $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば, $P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ である。

ただし,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega | \omega \text{ は無限個の } A_i \text{ に含まれる} \}$$

という意味である。

次にこの修士論文でよく出てくる収束定理や不等式などをまとめておく。

Theorem 1.8. 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の有限測度を μ とする。また, $\xi_n (n \in \mathbb{N}), \xi, \phi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ はすべて $\mathcal{F}$ -可測とする。ここでは, 前に定義した $\mathcal{F}$ -可測を有限測度の場合に拡張した。このとき, 次のことが分かる。

1. (Fatou の補題) $\xi_n \geq 0$ ならば, $\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \xi_n d\mu$ となる。

2. (単調収束定理) $0 \leq \xi_n \nearrow \xi$ (単調増加) ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \xi_n d\mu = \int_{\Omega} \xi d\mu$ となる。

3. (Lebesgue の優収束定理) $\xi_n \rightarrow \xi$ a.s. で $|\xi_n| \leq \phi$ かつ ϕ が可積分ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \xi_n d\mu = \int_{\Omega} \xi d\mu$$

となる。

4. (有界収束定理) $\xi_n \rightarrow \xi$ a.s. である正定数 M が存在して, $|\xi_n| \leq M$ となるならば,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \xi_n d\mu = \int_{\Omega} \xi d\mu$ となる。
5. (Chebyshev の不等式) $\xi \geq 0$ であれば, $\mu(|\xi| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |\xi|^p d\mu$ ($\lambda, p > 0$) となる。
6. (Jensen の不等式) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\int_{\Omega} |f(\xi)| d\mu < \infty$ を満たす凸関数とする。このとき,

$$\int_{\Omega} f(\xi) d\mu \geq f\left(\int_{\Omega} \xi d\mu\right)$$

が成立する。

7. (Hölder の不等式) $1 < p, q < \infty$ が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ならば,

$$\int_{\Omega} \xi \phi d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |\xi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\phi|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成立する。特に $p = q = 2$ のとき, Schwarz の不等式という。

8. (Minkowski の不等式) $p \geq 1$ ならば,

$$\left(\int_{\Omega} |\xi + \eta|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |\xi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |\eta|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成立する。

9. (Fubini の定理) 直積測度空間 $(S, \mathcal{S}, \nu) = (S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, \nu_1 \times \nu_2)$ 上の可測関数 $f = f(x_1, x_2)$ が $f \geq 0$ または $\int_S |f| d\nu < \infty$ ならば,

$$\int_S f d\nu = \int_{S_1} \nu_1(dx_1) \int_{S_2} f(x_1, x_2) \nu_2(dx_2)$$

が成立する。

1.1.2 マルチンゲールと Wiener 過程

以下, すべて $\mathbb{T}$ は定数 $T > 0$ に対して $[0, T]$ もしくは $[0, \infty)$ とする。

Definition 1.9 (確率過程). 1. $t \in \mathbb{T}$ によりパラメーター付けられた位相空間 E -値確率変数の族 $\xi = \{\xi_t\}_{t \in \mathbb{T}} = \{\xi_t(\omega)\}_{t \in \mathbb{T}}$ を E -値確率過程という。単に確率過程といえは, $\mathbb{R}$ -値であるとする。

2. E -値確率過程 ξ が連続 (右連続, 左連続) であるとは, 任意の ω に対して, 写像 $t \mapsto \xi_t(\omega)$ が連続 (右連続, 左連続) となる時にいう。
3. E -値確率過程 ξ が P-a.s. に連続 (右連続) であるとは, P-a.s. に写像 $t \mapsto \xi_t(\omega)$ が連続 (右連続, 左連続) となる時にいう。

Definition 1.10. $\xi = \{\xi_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ と $\phi = \{\phi_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の位相空間 E -値確率過程とする。このとき、

1. 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して、 $P(\xi_t = \phi_t) = 1$ であるとき、 ξ は ϕ の変形 (version) であるという。
2. $P(\xi_t = \phi_t \ \forall t \in \mathbb{T}) = 1$ であるとき、 ξ と ϕ は区別できない (indistinguishable) という。このとき、特に $\xi = \phi$ と書く。

Proposition 1.11. ξ と ϕ が右連続ならば、上の 2 つは同値になる。

Definition 1.12 (フィルトレーション). 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して、 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ がフィルトレーションとは、

1. $\mathcal{F}_t$ は σ -field であり、 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ となる。
2. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ ($s \leq t$)

を満たすものをいう。また、 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ をフィルター付き確率空間という。

さらに、この修士論文内でのフィルトレーションはすべて usual condition を満たしていると仮定する。すなわち、 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は右連続 ($\forall t \geq 0$ に対して、 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$) で、 $\mathcal{F}_0$ は零集合をすべて含む ($\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F} | P(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$)。

Definition 1.13. 任意の $\mathbb{T}$ に対して、位相空間 E -値確率過程 $\xi = \{\xi_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合であるとは、 $\forall t \in \mathbb{T}$ に対して、 ξ_t が $\mathcal{F}_t$ -可測であるときにいう。

Definition 1.14 (Wiener 過程). 確率過程 $\{W_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ が $\mathbb{R}^d$ -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程であるとは以下の 4 条件をみたされているときである。

1. $W_0 = 0$ a.s. である。
2. $\{W_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な $\mathbb{R}^d$ -値確率変数である。
3. $\{W_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は右連続かつ P-a.s. に連続である。
4. 任意の $0 \leq s \leq t$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$ に対して次が成り立つ。

$$\mathbb{E}[\exp(i\langle \lambda, W_t - W_s \rangle_{\mathbb{R}^d}) | \mathcal{F}_s] = \exp\left(-\frac{\|\lambda\|_{\mathbb{R}^d}^2(t-s)}{2}\right)$$

ただし、 i は虚数単位であり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ を Hilbert 空間 H の内積とする。

Theorem 1.15. Wiener 過程は存在する。

Definition 1.16 (ガウス過程). $\mathbb{R}$ -値確率過程 ξ_t のすべての有限次元分布が正規分布となるとき、 ξ_t はガウス過程であるという。また、 $m_t := \mathbb{E}[\xi_t]$ を ξ_t の平均値関数といい、 $R(s, t) := \text{Cov}(\xi_s, \xi_t) = \mathbb{E}[(\xi_s - m_s)(\xi_t - m_t)]$ を共分散関数という。

Proposition 1.17. Wiener 過程は $\{W_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は、 $m_t = 0$ かつ $R(s, t) = s \wedge t$ のガウス過程となる。

Theorem 1.18. $(\omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、 $\mathcal{G}$ は σ -field とし、 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を満たすとする。可積分な確率変数 ξ に対して、

$$\mathbb{E}[\xi \phi] = \mathbb{E}[\hat{\xi} \phi], \quad (\forall \mathcal{G}\text{-可測かつ有界な } \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}) \quad (1.1)$$

となる $\mathcal{G}$ -可測で可積分な確率変数 $\hat{\xi}$ が存在する。さらに、 $\hat{\xi}'$ も同じ関係式を満たせば、 $P(\hat{\xi} = \hat{\xi}') = 1$ という意味で一意的である。

Definition 1.19 (条件付き期待値). 上の $\hat{\xi}$ を $E[\xi|\mathcal{G}]$ と表し, ξ の条件 $\mathcal{G}$ を与えられた下での条件付き期待値という。また, $A \in \mathcal{F}$ に対して, $P(A|\mathcal{G}) = E[1_A|\mathcal{G}]$ とおき, A の条件 $\mathcal{G}$ を与えられた下での条件付き確率という。

Remark 1.20. 条件付き期待値の性質については, 例えば [35] を参照せよ。

Definition 1.21 (マルチンゲール). $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ はフィルター付き確率空間とする。 $\mathbb{R}$ -値確率過程 $\{M_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ がマルチンゲールであるとは, 次の 3 つを満たすときにいう。

1. $E[|M_t|] < \infty$ 。
2. $\{M_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合である。
3. $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ a.s. ($s \leq t$)。
4. $P(t \mapsto M_t \text{ は右連続}) = 1$ 。

3 で “=” を “ $\leq$ ” で置き換えたとき, 優マルチンゲール, “ $\geq$ ” に置き直したとき劣マルチンゲールという。

Theorem 1.22 (Doob の不等式). $\xi = \{\xi_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は劣マルチンゲールとし, $\lambda > 0, p > 1$ とする。このとき

1.
$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \xi_s > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E\left[\xi_t : \sup_{0 \leq s \leq t} \xi_s > \lambda\right]$$

2. 特に $\forall t \geq 0$ に対して, $\xi_t \geq 0$ a.s. ならば,

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \xi_s > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E[\xi_t]$$

となる。

3. ξ が $E[|\xi|^p] < \infty$ を満たすマルチンゲール, または非負劣マルチンゲールならば,

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|\xi_t|^p] \quad (1.2)$$

となる。

以下, (1.2) を Doob の不等式という。

Definition 1.23 (stopping time). 写像 $\sigma : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ に関する stopping time であるとは, $\forall t \geq 0$ に対して,

$$\{\sigma \leq t\} := \{\omega \in \Omega | \sigma(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

が成立するときをいう。また, stopping time σ が有限個の値しか取らないとき, σ を simple stopping time という。

Definition 1.24 (局所マルチンゲール). $\{M_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ が局所マルチンゲールであるとは, a.s. に発散する stopping time の増大列 $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して, $\{M_{t \wedge \sigma_n}\}_{t \in \mathbb{T}}$ がマルチンゲールであることをいう。

以下特に断らない限り, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ 上の確率過程を考える。また, 次の記号を定義しておく。 $T > 0$ に対して,

$$\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R}) = \{\xi = \{\xi_t\}_{t \in [0, T]} \mid \text{連続かつ 2 乗可積分なマルチンゲールで, } \xi_0 = 0 \text{ a.s.}\}$$

とする。このとき, $\xi \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ となると, Jensen の不等式より, ξ^2 は非負連続劣マルチンゲールになる。さらに次のような分解ができることが分かる。

Theorem 1.25 (Doob-Meyer 分解). $\phi = \{\phi_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を連続な $\{\mathcal{F}_t\}$ -劣マルチンゲールとする。このとき, σ が stopping time 全体を動くとき, $\forall a > 0$ に対して $\{\phi_{\sigma \wedge a}\}_\sigma$ が一様可積分¹ならば, 連続なマルチンゲール $M = \{M_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ と $A_0 = 0$ となる $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な連続増加過程 $A = \{A_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ² が存在し, ϕ は $\phi_t = M_t + A_t$, $(t \geq 0)$ と分解できる。さらに, この分解は一意に定まる。

この Theorem を使うと, $\xi \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ に対して,

$$\xi_t^2 = M_t + A_t, \quad (0 \leq t \leq T)$$

と表せる。ただし, $M = \{M_t\}_{t \in [0, T]}$ は連続なマルチンゲール, $A = \{A_t\}_{t \in [0, T]}$ は $A_0 = 0$ となる $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な連続増加過程とする。この分解の一意性から ξ の 2 次変分 $\langle\langle \xi \rangle\rangle$ を一意に定めることができる。

Definition 1.26 (2 次変分). $\xi \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ とする。このとき ξ に対する 2 次変分 $\langle\langle \xi \rangle\rangle$ とは, 連続増加過程で $\langle\langle \xi \rangle\rangle_0 = 0$ を満たし, かつ $\xi^2 - \langle\langle \xi \rangle\rangle$ がマルチンゲールとなるものをいう。

さらに, $\xi, \phi \in \mathcal{M}_T^2$ に対する 2 次変分 $\langle\langle \xi, \phi \rangle\rangle$ を

$$\langle\langle \xi, \phi \rangle\rangle_t := \frac{1}{2}(\langle\langle \xi + \phi \rangle\rangle_t - \langle\langle \xi \rangle\rangle_t - \langle\langle \phi \rangle\rangle_t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

とする。

1.2 $\mathbb{R}^d$ -値確率変数に対する確率解析

1.2.1 確率積分

以下, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ をフィルター付き完備確率空間とし, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は usual condition を満たしているとする。また初めは Wiener 過程 $\{W_t\}_{t \in [0, \infty)}$ は 1 次元としておく。まず, この節で使う Lemma を 1 つ与える。

Lemma 1.27. B_1 と B_2 を Banach 空間とする。 B_0 を B_1 を線形部分空間とし, $I: B_0 \rightarrow B_2$ を線形な等距離作用素とする。このとき,

$$\tilde{I}b = Ib \quad (\text{for } \forall b \in B_0)$$

となる線形等距離作用素 $\tilde{I}: B_0 \rightarrow B_2$ が唯一存在する。

Definition 1.28 (可予測). Π を $A \times (s, t]$ $(0 \leq s \leq t < \infty, A \in \mathcal{F}_s)$ の族とする。

このとき, $\mathcal{P} := \sigma(\Pi)$ を可予測 σ -field という。また, $\mathcal{P}$ -可測で $\Omega \times (0, \infty)$ 上の関数を $(\mathcal{F}_t$ に関して) 可予測という。また, Banach 空間 G に対して, $L^2(\mathcal{P}; G) := \{\{f_t\} \mid \text{可予測 } \mathbb{E}[\int_0^t \|f_s\|_G^2 ds] < \infty\}$ とする。

¹ $\lim_{N \wedge \infty} \sup_{t \in \mathbb{T}} \int_{\{|\phi_t| > N\}} |\phi_t(\omega)| P(d\omega) = 0$ 。

² $t \geq s \geq 0$ のとき $A_t \geq A_s$ a.s. である。

Definition 1.29. $f_t = f_t(\omega)$ は $\Omega \times [0, \infty)$ 上の定義された関数とする。このとき, $f \in H_0$ であるとは, 決定論的な点列 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$ が存在して, f_{t_j} は $\mathcal{F}_{t_j}$ -可測かつ $E[f_{t_j}^2] < \infty$ で,

$$f_t = \begin{cases} f_{t_j} & \text{if } t \in [t_j, t_{j+1}) \ (i \leq n) \\ 0 & \text{if } t \geq t_n \end{cases}$$

となることである。

さらに, $f \in H_0$ に対する確率積分を線形作用素 I を用いて,

$$If := \sum_{i=1}^{n-1} f_{t_i}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

とし, $If = \int_0^\infty f_s dW_s$ と書くことにする。さらに, $T > 0$, $f \in H_0$ に対して, $1_{[0,T)}f \in H_0$ となるので,

$$\int_0^T f_s dW_s = \int_0^\infty 1_{[0,T)}(s) f_s dW_s$$

とする。ただし, 1_A は

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

である。

Lemma 1.30. $f \in H_0$ ならば, $E[(If)^2] = E[\int_0^\infty f_t^2 dt]$, $E[If] = 0$ である。

ここで, H_0 を $L^2(\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, \infty)), P \times \text{Leb}; \mathbb{R})$ の部分空間として考える。このとき, H_0 上で I は H_0 から $L^2(\mathcal{F}; P; \mathbb{R})$ への等距離作用素と定義することができる。すると, Lemma 1.27 より, I は $\bar{H}_0$ から $L^2(\mathcal{F}; P; \mathbb{R})$ への等距離作用素に一意に拡張できる。この拡張に対しても, 同じ I を使い, $f \in \bar{H}_0$ に対して, $If = \int_0^\infty f_s dW_s$ により, 確率積分を定義する。

次に

$$\mathcal{L}^2 := \left\{ \{f_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} \mid f_t(\omega) \text{ は } \mathbb{R}\text{-値 } \{\mathcal{F}_t\}\text{-適当な確率過程で, } \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, \infty))\text{-可測, } E \left[\int_0^\infty f_t^2 dt \right] < \infty \right\}$$

とする。このとき, 明らかに $H_0 \subset \mathcal{L}^2$ となり, さらに次のことが分かる。

Proposition 1.31. $f \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$ とする。このとき, ある $g \in \mathcal{L}^2$ が存在して $f = g$, すなわち f と g は区別できない。またこの意味で $L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R}) = \mathcal{L}^2$ となる。

一般に $\bar{H}_0$ 上の過程は可予測ではない。しかし, 左極限を取り, 不連続な点をその点で再定義することで左連続で可予測な過程とすることができる。さらにこれはほとんどすべての t について, 初めのものと一致する。よって, $H_0 \subset L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$ となる。

さらに, $\bar{H}_0$ は $L^2(\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, \infty)), P \times \text{Leb}; \mathbb{R})$ 内の閉包であり, 定義から明らかに $L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R}) \subset L^2(\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, \infty)), P \times \text{Leb}; \mathbb{R})$ となるので, $\bar{H}_0$ は $L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$ 内での閉包でもある。さらに $\mathcal{L}^2 \subset \bar{H}_0$ となることが分かる。

以上から, $\bar{H}_0 = L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$ となることが分かる。

Definition 1.32 (確率積分 $L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$). $f \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$ と $s \geq 0$ に対して,

$$\int_0^t f_s dW_s := I(\mathbf{1}_{[0,t)} f) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t)}(s) f_s dW_s$$

と定義する。

Theorem 1.33. $f \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$ とする。このとき, 過程 $\int_0^t f_s dW_s$ は連続過程としての変形を持つ。

Theorem 1.34 (確率積分の性質). $f, g \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする。このとき, 確率積分は次の性質を持つ。

1. (線形性) 任意の $t > 0$ に対して, P-a.s. に

$$\int_0^t (af_s + bg_s) dW_s = a \int_0^t f_s dW_s + b \int_0^t g_s dW_s$$

が成立する。

2. $E[\int_0^\infty f_s dW_s] = 0$ となる。

3. $\int_0^t f_s dW_s$ は $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ に関してマルチンゲールとなる。

4. (Itô の等距離性)

$$E \left[\left(\int_0^t f_s dW_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t f_s^2 ds \right] \quad \forall t > 0$$

が成立する。

5. (Doob の不等式)

$$E \left[\sup_{0 \leq t < \infty} \left(\int_0^t f_s dW_s \right)^2 \right] \leq 4E \left[\int_0^\infty f_s^2 ds \right]$$

が成立する。

次に, Wiener 過程を $\mathbb{R}^d$ -値だとする。すなわち, $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(d)})$ とする。

Definition 1.35 (多次元の Wiener 過程に対する確率積分). $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(d)}) \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R}^d)$ とする。このとき, f に対する確率積分は

$$\int_0^t \langle f_s, dW_s \rangle := \sum_{j=1}^d \int_0^t f_s^{(j)} dW_s^{(j)}$$

つまり, $\langle f_s, dW_s \rangle$ を f_s と W_s の内積とみる。以下, 特に問題ない場合は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を略して, $\int_0^t f_s dW_s$ と表すことにする。

Proposition 1.36. 多次元の Wiener 過程に対する確率積分は Theorem 1.34 の性質をすべて満たす。ただし, 4 は次の意味である。

$f = (f^{(1)}, \dots, f^{(d)}) \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R}^d)$ に対して,

$$E \left[\int_0^t f_t^{(j)} dW_t^{(j)} \int_0^t f_t^{(k)} dW_t^{(k)} \right] = \delta_{jk} \quad \forall t > 0$$

が成立し, さらに

$$E \left[\left(\int_0^t f_s dW_s \right)^2 \right] = \sum_{j=1}^d E \left[\int_0^t (f_s^{(j)})^2 ds \right] \quad \forall t > 0$$

となる。

1.2.2 基本的な道具

以下, この先の章で使う主な道具について述べる。特に断らない限り, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ をフィルター付き完備確率空間とし, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は usual condition を満たしているとする。

Definition 1.37 (Itô 過程). $\mathbb{R}$ -値連続で $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な過程 ξ が Itô 過程であるとは,

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t b_s ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t a_s^{(j)} dW_s^{(j)} \quad (t \geq 0) \quad (1.3)$$

のときにいう。ただし, $a \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R}^d)$ であり, b は $\mathbb{R}$ -値可予測過程で,

$$P \left(\int_0^t |b_s| ds < \infty, \forall t \geq 0 \right) = 1$$

を満たす。また, ξ_0 は $\mathcal{F}_0$ -可測とする。

Theorem 1.38 (Itô の公式). $\mathbb{R}$ -値連続で $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な過程 ξ が (1.3) で与えられているとする。このとき, $f \in C^2(\mathbb{R})$ に対して, 次の式が成立する。

$$f(\xi_t) = f(\xi_0) + \sum_{j=1}^d \int_0^t f'(\xi_s) a_s^{(j)} dW_s^{(j)} + \int_0^t f'(\xi_s) b_s ds + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \int_0^t f''(\xi_s) (a_s^{(j)})^2 ds$$

Definition 1.39 (確率微分). $\mathbb{R}$ -値連続で $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な過程 ξ が (1.3) で与えられているとする。

1. (1.3) を

$$d\xi_t = \sum_{j=1}^d a_t^{(j)} dW_t^{(j)} + b_t dt$$

と表記する。

2. 確率過程 $\{c_t\}_{t \geq 0}$ が $\{c_t a_t^{(j)}\}_{t \geq 0} \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R}^d)$, $1 \leq j \leq d$, $\{c_t b_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ は $\mathbb{R}$ -値可予測過程で,

$$P \left(\int_0^t |c_s b_s| ds < \infty, \forall t \geq 0 \right) = 1$$

を満たすとき, $c_t d\xi_t$ を

$$c_t d\xi_t = \sum_{j=1}^d c_t a_t^{(j)} dW_t^{(j)} + c_t b_t dt$$

と定義する。

3. 確率微分の積 $d\xi \cdot d\phi$ を, 形式的な積をとり,

$$dW_t^{(j)} \cdot dW_t^{(k)} = \delta_{jk} dt, \quad dW_t^{(j)} \cdot dt = dt \cdot dW_t^{(j)} = dt \cdot dt = 0$$

という規則に基づき整理して得られるものとする。ただし, $\delta_{jk} = 1 (j = k), = 0 (j \neq k)$ である。

Theorem 1.40 (Stochastic Fubini の定理). $\{W_t\}$ は $\mathbb{R}$ -値 Wiener 過程とする。 $T > 0$ を任意に固定する。 $\{\Phi(t, a, \omega); (t, a) \in [0, T] \times [0, T]\}$ は $\mathbb{R}$ -値確率変数として, 次を満たすとする。

1. $((t, \omega), a) \in \{([0, T] \times \Omega) \times [0, T]\} \rightarrow \Phi(t, a, \omega)$ は $\mathcal{P} \times \mathcal{B}([0, T])$ -可測である。
2. $\forall a > 0$ に対して, $\Phi(\cdot, a, \cdot) \in L^2(\mathcal{P}; \mathbb{R})$ とする。
3. $\int_0^t \mathbb{E} \left[\int_0^T \Phi(s, a, \omega)^2 da \right]^{\frac{1}{2}} ds < \infty \quad (\forall t \in [0, T])$ が成立する。

このとき, P-a.s. に

$$\int_0^t \left(\int_0^T \Phi(s, a, \omega) da \right) dW_s = \int_0^T \left(\int_0^t \Phi(s, a, \omega) dW_s \right) da \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成立する。

Theorem 1.41 (Burkholder の不等式). 任意の $p, T > 0$ に対して, 定数 $c_p, C_p > 0$ が存在して, 任意の $M \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[\langle M \rangle_T^p] < \infty$ について,

$$c_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^p] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^{2p} \right] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^p]$$

が成立する。

Theorem 1.42 (Girsanov の定理). $\{W_t\}$ は $\mathbb{R}^d$ -値 Wiener 過程とする。任意に $T \geq 0$ を取っておく。また, $\lambda \in L^2(\mathcal{P}, \mathbb{R}^d)$ で

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^d \int_0^T \lambda_s^{(j)} dW_s^{(j)} - \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda_s\|^2 ds \right) \right] = 1$$

とする。このとき,

$$\widetilde{W}_t^{(j)} = W_t^{(j)} - \int_0^t \lambda_s^{(j)} ds \quad (\forall t \in [0, T], j = 1, \dots, d)$$

は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 上で $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ に関して $\mathbb{R}^d$ -値 Wiener 過程となる。ただし, $\mathbb{Q}$ は次を満たす。

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(\sum_{j=1}^d \int_0^T \lambda_s^{(j)} dW_s^{(j)} - \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda_s\|^2 ds \right)$$

次の定理では $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ は $\mathbb{R}^d$ -値 Wiener 過程とする。フィルトレーションを $\mathcal{F}_t = \mathcal{N} \cup \sigma(W_s; s \leq t)$ とする。ただし, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F}; \mathbb{P}(N) = 0\}$ とする。

Theorem 1.43 (マルチンゲール表現定理). 任意に $T > 0$ を固定する。 $M \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ に対して, ある $f = \{f_t^{(j)}\}_{t \in [0, T]} \in L(\mathcal{P}; \mathbb{R}^d)$ が存在して, P-a.s. に

$$M_t = M_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t f_s^{(j)} dW_s^{(j)} \quad (t \geq 0)$$

と表せる。

1.2.3 確率微分方程式

以下, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ をフィルター付き完備確率空間とし, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は usual condition を満たしているとする。また $\{W_t\}_{t \geq 0}$ を $\mathbb{R}^d$ -値 Wiener 過程とする。

Definition 1.44 (確率微分方程式). $a(t, \omega, \xi)$ と $b(t, \omega, \xi)$ は $(0, \infty) \times \Omega \times \mathbb{R}$ 上で定義された Borel 関数とし, a は $\mathbb{R}^d$ -値, b は $\mathbb{R}$ -値とする。このとき, $\mathbb{R}$ -値確率過程 $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$ が確率微分方程式 (SDE)

$$d\xi_t = b(t, \omega, \xi)dt + a(t, \omega, \xi)dW_t \quad (1.4)$$

の解であるとは, 次を満たされることをいう。

1. ξ_t は $\mathcal{F}_t$ -可測である。
2. $P(t \mapsto \xi_t \text{ は連続}) = 1$ である。
3. ξ_0 は $\mathcal{F}_0$ -可測な $\mathbb{R}$ -値確率変数である。
4. $\xi_t = \xi_0 + \int_0^t b(s, \omega, \xi_s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t a^{(j)}(s, \omega, \xi_s)dW_s^{(j)}$ となる。

また, a を拡散係数, b をドリフト係数と呼ぶことにする。

Theorem 1.45 (解の存在性と一意性). SDE(1.4) において, $\forall T > 0$ に対して, $K_T > 0$ が存在し $\forall t \in [0, T], \forall \omega \in \Omega, \forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 係数 a, b は Lipschitz 条件を満たす。すなわち,

$$\|a(t, \omega, x) - a(t, \omega, y)\|_{\mathbb{R}^d} + |b(t, \omega, x) - b(t, \omega, y)| \leq K_T |x - y|$$

となる。さらに, 係数は緩増大条件,

$$\|a(t, \omega, x)\|_{\mathbb{R}^d} + |b(t, \omega, x)| \leq K_T(1 + |x|)$$

が成立すると仮定する。このとき, (1.4) は一意的な解 $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$ を持つ。

Remark 1.46. ここでの一意性とは“区別できない”(Definition 1.10)の意味である。

ここで, SDE の例を 1 つあげることにする。

Example 1.47 (Ornstein Uhlenbeck 過程).

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (0 \leq t \leq T)$$

を解いてみる。この確率微分方程式は後の章に Vasicek モデルという名前で出てくる。まず,

$$R_t = \alpha(\beta - R_t)dt, \quad R_0 = r_0$$

とする。この常微分方程式を解くと,

$$R_t = \alpha - (\alpha - r_0)e^{-\beta t}$$

となる。

$$Y_t = r_t - R_t$$

とおくと, $Y_0 = 0$ となり,

$$\begin{aligned} dY_t &= dr_t - dR_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t - \alpha(\beta - R_t)dt \\ &= -\alpha Y_t dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

よって, $e^{\alpha t} Y_t$ に Itô の公式を使うと,

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} Y_t) &= \alpha e^{\alpha t} Y_t dt + e^{\alpha t} dY_t + (\alpha e^{\alpha t} dt) dY_t \\ &= \alpha e^{\alpha t} Y_t dt + e^{\alpha t} (-\alpha Y_t dt + \sigma dW_t) + 0 \\ &= \sigma e^{\beta t} dW_t \end{aligned}$$

となる。これを積分形で書いて, r_t の式にすると,

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} Y_t &= \int_0^t \sigma e^{\beta s} dW_s \\ \Leftrightarrow Y_t &= \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s \\ \Leftrightarrow r_t &= \alpha - (\alpha - r_0) e^{-\beta t} + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s \end{aligned}$$

となる。

次にマルコフ性を定義する。

Definition 1.48. 確率過程 $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$ がマルコフ性を持つとは, 任意の有界 Borel 関数 $f(x)$ と $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$ に対して,

$$\mathbb{E}[f(\xi_t) | \sigma(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n})] = \mathbb{E}[f(\xi_t) | \sigma(\xi_{t_n})]$$

となることをいう。

(1.4) の係数に制限を加えることで, SDE の解はマルコフ性を持つ。

Theorem 1.49. Definition 1.2.3 に出てきた係数 a, b がともに, t と ξ_t にしか依存しないとする。すなわち, $\mathbb{R}$ -値確率過程 $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$ が次の SDE を満たすと仮定する。

$$d\xi_t = b(t, \xi_t)dt + a(t, \xi_t)dW_t \quad (1.5)$$

このとき, $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$ はマルコフ性を持つ。

2 無限次元確率解析

2.1 無限次元確率微分方程式

2.1.1 Bochner 積分

まず、可分 Banach 空間値の関数に対する可測性と可積分性を定義しておく。

Definition 2.1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を σ -有限な測度空間³とし、 E を可分 Banach 空間とする。このとき、関数 $f : \Omega \rightarrow E$ について次のように定義する。

1. $\mu(N) = 0$ となる $N \in \mathcal{F}$ が存在して、任意の $e^* \in E^*$ に対して、 $e^*(f(\cdot))$ が $\Omega \setminus N$ 上で可測であるとき、 f は可測であるという。
2. f が可測で $\int_{\Omega} \|f(\omega)\|_E d\mu < \infty$ のとき、 f は Bochner 可積分または単に可積分という。

Remark 2.2. Definition 2.1.1 の『可測』は一般の Banach 空間のとき、『弱可測』であるといい、2 の可積分性は f が Definition 2.1.1 の可測とは別の『強可測』であるときに定義される。しかし、 E が可分であるときは強可測と弱可測が同値であることが知られている。詳しくは [16] にある。

また、 μ が確率測度 P であるとき、その P での積分を E で表す。また、確率測度を明示する必要があるときは E_P と表す。さらに各 $p > 1$ に対し、 $L^p(\mathcal{F}, P; E)$ で $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の P -a.s. に一致するものを同一視する同値関係で同値類別した空間を表す。同値類と代表元は区別せずに同じ関数の記号 ξ で表すものとする。

以下、この節を通じて、 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ をフィルター付き完備確率空間とし、 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は usual condition を満たす。すなわち、 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は右連続で、 $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の P -零集合をすべて含むと仮定する。また、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty} := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ とする。 G を可分 Hilbert 空間とする。また、この双対空間を G^* とし、Riesz の表現定理より、 G と G^* を同一視する。また、 $\mathcal{P}$ を可予測 σ -field (Definition 1.28) とし、 $L^2(\mathcal{P}; G) = \left\{ \{f_t\} : \text{可予測} \left[E \left[\int_0^t \|f_s\|_G^2 ds \right] < \infty \right] \right\}$ とする。

2.1.2 Wiener 過程

$T \in \mathbb{R}_+$ を固定しておく。まず、Definition 1.26 の前に出てきた $\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ を拡張する。

Definition 2.3. $\mathcal{M}_T^2(G)$ は $[0, T]$ 上の G -値マルチンゲール M で

$$\|M\|_{\mathcal{M}_T^2(G)}^2 := E[\|M_T\|_G^2] < \infty \quad (2.1)$$

となるもの全体である。ただし、 G -値マルチンゲールとは、 G -値確率過程 M_t で可積分かつ $\mathcal{F}_t$ -適合であり、さらに、任意の $s \leq t$ に対して、

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{a.s.}$$

をみたすものである。なお、この式は

$$\int_A M_t dP = \int_A M_s dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_s, s \leq t, s, t \in [0, T]$$

と同値である。

³ $\mathcal{F}$ の元からなる列 $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で各 n に対して $\mu(\Omega_n) < \infty$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$ となるものが存在する。

ここで, $\|M_t\|_G$ は $\mathbb{R}$ -値劣マルチンゲールになり, さらに usual conditon を仮定しているので, M_t は右連続かつ, $\forall t \geq 0$ で左極限をもつような変形を持つ。よって $M_T^* := \sup_{t \in [0, T]} \|M_t\|_G$ とすると, これは確率変数となり, Doob の不等式から

$$\mathbb{E}[\|M_T^*\|^2] \leq 4\|M\|_{\mathcal{M}_T^2(G)}^p \quad (M \in \mathcal{M}_T^2(G)) \quad (2.2)$$

となる。さらに, このとき次のことが分かる。

Proposition 2.4. $\mathcal{M}_T^2(G)$ は (2.1) をノルムとして持つ Banach 空間となる。ただし, $M, N \in \mathcal{M}_T^2(G)$ に対して, それぞれの右連続な変形が $P(M_t = N_t, \forall t \in [0, T]) = 1$ のとき, M と N を同一視する。

Proof. $\{M^n = \{M_t^n\}_{t \in [0, T]}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が, $\mathcal{M}_T^2(G)$ の Cauchy 列だと仮定する。すると, (2.2) より,

$$\mathbb{E}[\sup_{t \in [0, T]} \|M_t^m - M_t^n\|_G^2] \leq 4\mathbb{E}[\|M_T^m - M_T^n\|_G^2] \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

である。さらに, 部分列 $\{M^{n_k}\}_k$ が存在して,

$$P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}\|_G \geq 2^{-k}\right) \leq 2^{-k}$$

となる。よって, Borel-Cantelli の第 1 補題より,

$$M_t := \exists \lim_{k \rightarrow \infty} M_t^{n_k} \quad (t \in [0, T] \text{ 一様に}) \quad \text{a.s.}$$

であり, また M は連続となる。さらに $\forall t \in [0, T]$ に対して, 有界収束定理より,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|M_t^{n_k} - M_t\|_G^2] = 0$$

となり, ゆえに $\mathbb{E}[\|M_T\|_G^2] < \infty$ 。また,

$$\mathbb{E}[M_t^{n_k} | \mathcal{F}_s] = M_s^{n_k} \quad \text{a.s.} \quad (2.3)$$

(2.3) の両辺を $k \rightarrow \infty$ とすると,

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{a.s.}$$

よって, $M \in \mathcal{M}_T^2(G)$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_t^n = M_t$ in $\mathcal{M}_T^2(G)$ となることがすぐに分かる。 $\square$

次に, Q を自己共役な非負核型線形作用素とし, Q の全体を $\mathcal{L}_{(1)}(G)$ とする。すなわち, $Q \in \mathcal{L}(G)$ は, $\{\lambda_k \geq 0\}_{k \in \mathbb{N}}$ と G の CONS $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して, Q は $Q\psi_k = \lambda_k \psi_k$ と対角化でき, $\text{tr} Q := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$ を満たしている。このとき, 次のことを定義する。

Definition 2.5 (2 次変分). $M \in \mathcal{M}_T^2(G)$ の 2 次変分 V_t とは, 次の 2 条件を満たす確率過程を呼ぶ。

1. V_t は $\mathcal{L}_{(1)}(G)$ -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合過程で作用素として増大する。つまり, $0 \leq s \leq t$ ならば $0 \leq V_0 \leq V_s \leq V_t$ が成立する。ただし, $V \leq V'$ は $V' - V$ が非負作用素であることを意味する。
2. $\forall \varphi, \psi \in G$ に対して, $\langle \langle M, \varphi \rangle_G, \langle M, \psi \rangle_G \rangle_t = \langle V_t \varphi, \psi \rangle_G$ である。ただし, 左辺は $\mathbb{R}$ -値マルチンゲールの 2 次変分である。

Remark 2.6. V_t は次のように表される。1 章より, $\mathbb{R}$ -値マルチンゲールの 2 次変分から, $\varphi, \psi \in G$ に対して,

$$\langle \langle M, \varphi \rangle_G, \langle M, \psi \rangle_G \rangle_t =: V_t(\varphi, \psi)$$

とし, G の完全正規直交系 (CONS) を $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ とすると,

$$V_t = \sum_{i,j=1}^{\infty} V_t(\psi_i, \psi_j) \psi_i \otimes \psi_j$$

と表せる。

次に G -値 Wiener 過程を定義する。このとき,

Definition 2.7 (G -値 Wiener 過程). G -値連続過程 $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ が共分散作用素 $Q \in \mathcal{L}_{(1)}(G)$ を持つ $\{\mathcal{F}_t\}$ -標準 Wiener 過程であるとは, $\forall \psi \in G$, $Q\psi \neq 0$ に対して, $\frac{\langle W_t, \psi \rangle_G}{\sqrt{\langle Q\psi, \psi \rangle_G}}$ が $\mathbb{R}$ -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -標準 Wiener 過程のときにいう。

次に, 上の G -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程を $\mathbb{R}$ -値 Wiener 過程から構成できることを示す。

Proposition 2.8. $\{w_t^k\}_{k=1}^{\infty}$ を独立な 1 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程の族とする。このとき,

$$W_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} w_t^k \psi_k \quad (2.4)$$

とすれば, 右辺は $\forall t \geq 0$ に対して $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; G)$ 内で収束し, かつ $C([0, T]; G)$ ($\forall T > 0$) に値をとる確率変数として, 確率 1 で収束する。また, このように構成された $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ は共分散作用素 Q を持つ G -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程となる。

Proof. まず, 右辺が $\forall t \geq 0$ に対して $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; G)$ 内で収束することを示す。

$\{W_t^n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} w_t^k \psi_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ とする。このとき, $n \geq m$ に対して,

$$\mathbb{E}[\|W_t^n - W_t^m\|_G^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=m+1}^n \lambda_k (w_t^k)^2\right] = t \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \rightarrow 0 \quad (\text{as } n, m \rightarrow \infty)$$

となる。よって, $\{W_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; G)$ の Cauchy 列となり,

$$W_t^n \rightarrow W_t \quad \text{in } L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; G)$$

である。次に, $\forall T > 0$ に対して, $C = C([0, T]; G)$ に値をとる確率変数として, $\mathbb{P}$ -a.s. に収束することを示す。

まず, C -値確率変数 $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を $\xi_t^j = \sqrt{\lambda_j} w_t^j \psi_j$ ($t \in [0, T]$) とする。Doob の不等式と上の計算から, $n \geq m, r > 0$ に対して,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} \|\xi_t^n + \cdots + \xi_t^m\|_G^2 > r\right) \leq \frac{4}{r^2} \mathbb{E}[\|\xi_t^n + \cdots + \xi_t^m\|_G^2] \leq \frac{4T}{r^2} \sum_{j=m}^n \lambda_j$$

よって, C -値確率変数列 $W_t^n = \sum_{j=1}^n \xi_t^j$ ($n = 1, 2, \dots$) は W に $n \rightarrow \infty$ で確率収束する。後は Borel-Cantelli の第 1 補題より,

$$W_t^n \rightarrow W_t \quad \text{in } C([0, T]; G) \quad \text{a.s.}$$

最後に W が共分散作用素 Q を持つ $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程となることを示す。
 特性汎関数 $E[e^{i\langle W_t, \psi \rangle}]$ ($\forall \psi \in G$) を計算すると,

$$\begin{aligned} E[e^{i\langle W_t, \psi \rangle}] &= E[e^{i\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} w_t^j \langle \psi_j, \psi \rangle_G}] = E\left[\prod_{j=1}^{\infty} e^{i\sqrt{\lambda_j} w_t^j \langle \psi_j, \psi \rangle_G}\right] \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} E\left[e^{i\sqrt{\lambda_j} w_t^j \langle \psi_j, \psi \rangle_G}\right] = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{2} \lambda_j \langle \psi_j, \psi \rangle_G^2} \\ &= e^{-\frac{t}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle \psi_j, \psi \rangle_G^2} = e^{-\frac{t}{2} \langle Q\psi, \psi \rangle} \end{aligned}$$

となる。これより, W_t が共分散作用素 Q を持つ $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程であることが分かる。 $\square$

次に, 共分散作用素として恒等作用素 I の場合を考えたい。しかし, 一般に I は核型作用素ではないため, 上の意味での Wiener 過程は定義できない。そこで次の Proposition により, 共分散作用素 I を持つ過程は G の元とのペアを取ることで, $\mathbb{R}$ -値 Wiener 過程を作ることができ, またこの過程は G をさらに広い Hilbert 空間 G_1 に拡張することにより, G_1 -値 Wiener 過程として実現させることができる。

Proposition 2.9. $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を G の CONS とし, $\{w_t^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を独立 $\mathbb{R}$ -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程とする。また, J を G から G_1 への Hilbert-Schmidt 型の埋め込みとする。また, $W_t := \sum_{j=1}^{\infty} w_t^j \psi_j$ ($t \geq 0$) とする。このとき,

1. $\{\langle \psi, W_t \rangle_G | \forall \psi \in G, t \geq 0\}$ は $L^2(\mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ 内で収束し, また P-a.s. に収束する。また, $\forall \psi \in G, \psi \neq 0$ に対して, $\frac{\langle \psi, W_t \rangle}{\|\psi\|_G^2}$ は $\mathbb{R}$ -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程となる。
2. W_t は G_1 -値の変形 $W_t^* = \sum_{j=1}^{\infty} w_t^j J \psi_j$ を持ち, これは $Q_1 = JJ^*$ を共分散作用素として持つ G_1 -値 Wiener 過程となる。
3. $\text{Im} Q_1^{\frac{1}{2}} = G$ であり, $\|\psi\|_G = \|Q_1^{-\frac{1}{2}} \psi\|_{G_1}$ となる。

Remark 2.10. Proposition 2.9.1 が成り立てば, $w_t^j = \langle \psi_j, W_t \rangle_G$ ($j \in \mathbb{N}$) と書けることがわかる。

また, $\mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ は G から F への Hilbert-Schmidt 型作用素全体⁴とし, これは内積 $\langle \Phi, \Psi \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \langle \Phi \psi_k, \Psi \psi_k \rangle_F$ を持つ可分 Hilbert 空間。ただし, $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は G の CONS。さらに,

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\Phi \psi_k\|_F^2 < \infty$$

を満たす。しかも $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を F の CONS とすると,

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi^* \varphi_j\|_G^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Phi^* \varphi_j, \Phi^* \varphi_j \rangle_G = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Phi \Phi^* \varphi_j, \varphi_j \rangle_F = \text{tr}(\Phi \Phi^*)$$

である。さらに G と G^* を同一視していることに注意し, $A \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ のとき, $A^* \in \mathcal{L}_{(2)}(F; G)$ としておく。このことに注意して, Proposition 2.9 を証明する。

⁴ $A \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ ならば, G の CONS $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ に対して, $\sum_{j \in \mathbb{N}} \|A \psi_j\|_F^2 < \infty$ となる。

Proof of Proposition 2.9. 1.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \psi, \psi_j \rangle_G|^2 \leq \|\psi\|_G^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j\|_G^2 \leq C \|J^*\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G_1; G)}^2 \|\psi\|_G^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|Jg_j\|_{G_1}^2 < \infty$$

より, Proposition 2.8 と同様にして, $L^2(\mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ 内で収束し, P -a.s. で収束する。

また, 特性汎関数を計算すると,

$$\begin{aligned} E[e^{it\langle W_t, \psi \rangle_G}] &= E\left[e^{it\sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi, \psi_j \rangle_G w_t^j}\right] = E\left[\prod_{j=1}^{\infty} e^{it\langle \psi, \psi_j \rangle_G w_t^j}\right] \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} E\left[e^{it\langle \psi, \psi_j \rangle_G w_t^j}\right] = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{2} \langle \psi, \psi_j \rangle_G^2} \\ &= e^{-\frac{t}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi, \psi_j \rangle_G^2} = e^{-\frac{t}{2} \|\psi\|_G^2} \end{aligned}$$

となる。よって, $\{\frac{\langle \psi, W_t \rangle_G}{\|\psi\|_G^2}; \forall \psi \in G, t \geq 0\}$ は $\mathbb{R}$ -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程である。

2.

$$E\left[\left\|\sum_{j=m}^n J\psi_j w_t^j\right\|_{G_1}^2\right] = \sum_{j=m}^n \|J\psi_j\|_{G_1}^2 \quad (n \geq m \geq 1)$$

であり, $J; G \rightarrow G_1$ は Hilbert-Schmidt 型の埋め込みより, $\sum_{j=1}^{\infty} \|J\psi_j\|_{G_1}^2 < \infty$ 。よって, Proposition 2.8 と同様にして, W_t^* が W_t の G_1 -値の変形であることが分かる。さらに $\psi^1, \psi^2 \in G_1$ に対して,

$$\begin{aligned} E[\langle \psi^1, W_t^* \rangle_{G_1} \langle \psi^2, W_t^* \rangle_{G_1}] &= E\left[\langle \psi^1, \sum_{j=1}^{\infty} J\psi_j w_t^j \rangle_{G_1} \langle \psi^2, \sum_{j=1}^{\infty} J\psi_j w_t^j \rangle_{G_1}\right] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^{\infty} (w_t^j)^2 \langle \psi^1, J\psi_j \rangle_{G_1} \langle \psi^2, J\psi_j \rangle_{G_1}\right] = t \sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi^1, J\psi_j \rangle_{G_1} \langle \psi^2, J\psi_j \rangle_{G_1} \\ &= t \langle JJ^* \psi^1, \psi^2 \rangle_{G_1} \end{aligned}$$

となる。ここで $J \in \mathcal{L}_{(2)}(G; G_1)$ であるので, $JJ^* \in \mathcal{L}_{(1)}(G_1)$ となる。よって, $Q_1 = JJ^*$ を共分散として持つ $\{\mathcal{F}_t\}$ -Wiener 過程である。

3. $Q_1 = JJ^* \in \mathcal{L}_{(1)}(G_1)$ より, 実数列 $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ と G_1 の CONS $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ に対して, $Q_1 \varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ となり, これより $Q_1^{\frac{1}{2}} \varphi_j = \sqrt{\lambda_j} \varphi_j$ となる。 $G_1 \ni \varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$ とすると,

$$\begin{aligned} \|J^* \varphi\|_G^2 &= \langle J^* \varphi, J^* \varphi \rangle_G = \langle JJ^* \varphi, \varphi \rangle_G \\ &= \langle Q_1 \varphi, \varphi \rangle_{G_1} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \langle \lambda_j \varphi_j, \varphi_j \rangle_{G_1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \langle \sqrt{\lambda_j} \varphi_j, \sqrt{\lambda_j} \varphi_j \rangle_{G_1} = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sqrt{\lambda_j} \varphi_j, \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sqrt{\lambda_j} \varphi_j \right\rangle_{G_1} \\ &= \langle Q_1^{\frac{1}{2}} \varphi, Q_1^{\frac{1}{2}} \varphi \rangle_{G_1} = \|Q_1^{\frac{1}{2}} \varphi\|_{G_1}^2 \end{aligned}$$

となり, これから, $\text{Im}Q_1^{\frac{1}{2}} = \text{Im}J^* = G$ となる。また, $F = Q_1^{-\frac{1}{2}}J$ は $G \rightarrow G_1$ への有界作用素であり, $F^* = J^*Q_1^{-\frac{1}{2}}$ は $\varphi \in G_1$ に対して,

$$\|J^*Q_1^{-\frac{1}{2}}\varphi\|_G^2 = \langle J^*Q_1^{-\frac{1}{2}}\varphi, J^*Q_1^{-\frac{1}{2}}\varphi \rangle_G = \langle \varphi, \varphi \rangle_{G_1} = \|\varphi\|_{G_1}^2$$

よって, F^* は等距離作用素より, F も等距離作用素である。ゆえに, J が埋め込みであることに注意すると, $\psi \in G_1$ に対して,

$$\|Q_1^{-\frac{1}{2}}\psi\|_{G_1} = \|Q_1^{-\frac{1}{2}}J\psi\|_{G_1} = \|\psi\|_G$$

となり, 以上ですべて示せた。

□

Definition 2.11 (柱状 Wiener 過程). Proposition 2.9 で出てきた W_t を G 上の $\{\mathcal{F}_t\}$ -柱状 Wiener 過程という。

Remark 2.12. G 上の $\{\mathcal{F}_t\}$ -柱状 Wiener 過程 W_t は

$$\mathbb{E}[\|W_t\|_G^2] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\|w_t^j \psi_j\|_G^2] = \sum_{j=1}^{\infty} t = \infty$$

となるため, この級数は確率 1 で発散する。

以下特に断らない限り, $\{\mathcal{F}_t\}$ を略してそれぞれ G -値 Wiener 過程, G 上の柱状 Wiener 過程とする。

2.1.3 確率積分

G 上の柱状 Wiener 過程 $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ に対する確率積分を定義する。

Definition 2.13 (G -値確率過程に対する確率積分). $f \in L^2(\mathcal{P}; G)$ に対して, 確率積分を

$$\int_0^t \langle f_s, dW_s \rangle_G := \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle f_s, \psi_k \rangle_G dw_s^k \quad (2.5)$$

で定義する。ただし, $\{\psi_k\}$ は G の任意の CONS であり, $\{w_t^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は独立な $\mathbb{R}$ -値 Wiener 過程の列で, 右辺は通常の 1 次元確率積分である。以下, $\int_0^t \langle f_s, dW_s \rangle_G$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ を略して, $\int_0^t f_s dW_s$ と書く。

Proposition 2.14. (2.5) の右辺は $\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ 内で収束する。また, これは CONS の取り方に依らない。

Proof.

$$M_t^{(n)} := \sum_{k=1}^n \int_0^t \langle f_s, \psi_k \rangle_G dw_s^k \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$$

とおく。このとき, $n \geq m$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_T^{(n)} - M_T^{(m)}|^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=m+1}^n \int_0^T \langle f_s, \psi_k \rangle_G dw_s^k\right)\left(\sum_{k=m+1}^n \int_0^T \langle f_s, \psi_k \rangle_G dw_s^k\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{k=m+1}^n \langle f_s, \psi_k \rangle_G^2 ds\right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

である。ここで、 $f \in L^2(\mathcal{P}; G)$ より、 $\sum_{k=1}^m \langle f_s, \psi_k \rangle_G^2 < \|f_s\|_G^2 < \infty$ で、 $E \left[\int_0^T \|f_s\|_G^2 ds \right] < \infty$ となるので、Lebesgue の優収束定理より、(2.6) は 0 に収束する。 $\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ は Proposition 2.4 より完備なので、 $M_t := \sum_{k=1}^\infty \int_0^t \langle f_s, \psi_k \rangle_G dw_s^k$ は存在する。あとは、CONS の取り方に依らないことを示す。 $\{\tilde{\psi}_j\}_{j=1}^\infty$ を $\{\psi_k\}$ とは別の CONS とし、 $\tilde{w}_t^i = \langle \tilde{\psi}_i, W_t \rangle_G$ ($i \in \mathbb{N}$) とする。このとき、

$$\psi_k = \sum_{j=1}^\infty c_k^j \tilde{\psi}_j, \quad w_t^i = \sum_{k=1}^\infty c_k^i \tilde{w}_t^i$$

とする。ただし、 $\{c_k^j\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ は、 $\sum_{j=1}^\infty c_k^j c_k^j = \delta_{ij}$ ($i, j \in \mathbb{N}$) を満たす。すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \int_0^t \langle f_s, \psi_k \rangle_G dw_s^k &= \sum_{k=1}^\infty \sum_{i,j=1}^\infty \int_0^t c_k^i c_k^j \langle f_s, \tilde{\psi}_j \rangle_G d\tilde{w}_s^i \\ &= \sum_{i,j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty c_k^i c_k^j \int_0^t \langle f_s, \tilde{\psi}_j \rangle_G d\tilde{w}_s^i \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_0^t \langle f_s, \tilde{\psi}_j \rangle_G d\tilde{w}_s^j \end{aligned}$$

となり、確率積分は CONS の取り方に依らずに定まる。 $\square$

この積分は次のような性質を持っている。

Proposition 2.15 (2 次変分と Itô の等距離性). $f \in L^2(\mathcal{P}; G)$ に対して、 $M_t(f)$ の 2 次変分は

$$\langle \langle M(f), M(g) \rangle \rangle_t = \int_0^t \langle f_s, g_s \rangle_G ds \quad (f, g \in L^2(\mathcal{P}; G))$$

で与えられる。特にこのことから Itô の等距離性

$$E \left[\left(\int_0^t f_s dW_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t \|f_s\|_G^2 ds \right] \quad (2.7)$$

が得られる。

Proof. $M_t^{(n)} = \sum_{k=1}^n \int_0^t \langle f_s, \psi_k \rangle_G dw_s^k \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ とする。このとき、

$$E[|M_T^{(n)}|^2] = E \left[\sum_{k=1}^n \int_0^T \langle f_s, \psi_k \rangle_G^2 ds \right] = E \left[\int_0^T \sum_{k=1}^n \langle f_s, \psi_k \rangle_G^2 ds \right]$$

となる。よって、 $\langle \langle M^{(n)} \rangle \rangle_t = \int_0^t \sum_{k=1}^n \langle f_s, \psi_k \rangle_G^2 ds$ となり、これから $0 \leq \forall s \leq t$ と $\forall A \in \mathcal{F}_s$ に対して、

$$E \left[\left((M_t^{(n)})^2 - (M_s^{(n)})^2 - \int_s^t \sum_{k=1}^n \langle f_r, \psi_k \rangle_G^2 dr \right) \mathbf{1}_A \right] = 0$$

となる。よって、Lebesgue の優収束定理から、 $n \rightarrow \infty$ で、

$$E \left[\left((M_t(f))^2 - (M_t(g))^2 - \int_s^t \|f_r\|_G^2 dr \right) \mathbf{1}_A \right] = 0$$

ゆえに、 $\langle \langle M(f) \rangle \rangle_t = \int_0^t \|f_r\|_G^2 dr$ となり、同様にして、

$$\langle\langle M(g) \rangle\rangle_t = \int_0^t \|g_r\|_G^2 dr, \quad \langle\langle M(f) + M(g) \rangle\rangle_t = \int_0^t \|f_r + g_r\|_G^2 dr$$

となる。以上から、2 次変分は、

$$\langle\langle M(f), M(g) \rangle\rangle_t = \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|f_r + g_r\|_G^2 - \|f_r\|_G^2 - \|g_r\|_G^2 \right) = \int_0^t \langle f_s, g_s \rangle_G ds$$

となり、特に $f = g$ とすると、Itô の等距離性

$$\mathbb{E} [|M_t(f)|^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \|f_s\|_G^2 ds \right]$$

が出てくる。 □

次に、可分 Hilbert 空間 F を取ってきて、 $\Phi \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ に対する確率積分を考える。

Definition 2.16 (HS 作用素に対する確率積分). $\Phi = (\Phi_t(\omega))_{t \in [0, T]} \in L^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}_{(2)}(G; F))$ に対する確率積分 $M_t(\Phi) = \int_0^t \Phi_s dW_s$ は $\forall \varphi \in F$ に対して、

$$\langle M_t(\Phi), \varphi \rangle_F := \int_0^t \Phi_s^* \varphi dW_s \quad (\forall t \geq 0) \text{ a.s.} \quad (2.8)$$

を満たすような M_t と定義する。ここで $(\Phi_s^* \varphi) \in L^2(\mathcal{P}; G)$ であり、右辺は Definition 2.13 の意味での確率積分である。また、 $\Phi_s : G \rightarrow F$ を作用することで、 W_s は G -値ではなく、 F -値確率過程となる。

Proposition 2.17. 確率積分 $M_t(\Phi)$ は次の性質を持っている。

1. (存在と一意性) $M_t(\Phi) \in \mathcal{M}_T^2(F)$ は一意に存在する。
2. (2 次変分) $M_t(\Phi)$ の 2 次変分 V_t は

$$V_t = \int_0^t \Phi_s \Phi_s^* ds \in \mathcal{L}_{(1)}(F)$$

特に

$$\left\| \int_0^t \Phi_s dW_s \right\|_F^2 - \int_0^t \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 ds$$

はマルチンゲールとなる。

Proof. 1. まず、一意性を示す。 M_t と M'_t が共に (2.8) を満たせば、 $\langle M_t, \varphi \rangle_F = \langle M'_t, \varphi \rangle_F$ ($\forall \varphi \in F$) より、 $M_t = M'_t$ となる。よって、 $M_T(\Phi)$ は一意に定まる。

次に存在性を示す。 $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を F の CONS として、

$$M_t^{(n)} := \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \Phi_s^* \varphi_j dW_s \right) \varphi_j \in \mathcal{M}_T^2(F)$$

とおく。このとき, $n \geq m$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| M_T^{(n)} - M_T^{(m)} \right\|_F^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{j=m+1}^n \left(\int_0^T \Phi_s^* \varphi_j dW_s \right) \varphi_j \right\|_F^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=m+1}^n \left| \int_0^T \Phi_s^* \varphi_j dW_s \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{j=m+1}^n \int_0^T \|\Phi_s^* \varphi_j\|_G^2 ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \sum_{j=m+1}^n \|\Phi_s^* \varphi_j\|_G^2 ds \right] \end{aligned}$$

となる。ここで, Remark 2.10 より, $\sum_{j=m+1}^n \|\Phi_s^* \varphi_j\|_G^2 \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2$ であり, $\Phi \in L^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}_{(2)}(G;F))$ なので, Lebesgue の優収束定理より, 上の式は $n, m \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。よって, $\mathcal{M}_T^2(F)$ は完備なので, $M_t := \lim_{n \rightarrow \infty} M_t^{(n)}$ が存在する。さらに $\forall \varphi \in F$ は, F の $\text{CONS}\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ から, $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_j, \varphi \rangle_F \varphi_j$ とできるので, この極限は性質 (2.8) を満たす。

2. 任意の $\varphi^1, \varphi^2 \in F$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \langle M_t, \varphi^1 \rangle_F, \langle M_t, \varphi^2 \rangle_F \rangle_{\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})} &= \left\langle \int_0^t \Phi_s^* \varphi^1 dW_s, \int_0^t \Phi_s^* \varphi^2 dW_s \right\rangle_{\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_0^t \langle \Phi_s^* \varphi^1, \Phi_s^* \varphi^2 \rangle_G ds = \langle V_t \varphi^1, \varphi^2 \rangle_F \end{aligned}$$

よって, M_t の 2 次変分は $V_t = \int_0^t \Phi_s \Phi_s^* ds$ である。特に F の $\text{CONS}\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ に対して,

$$\left\langle \int_0^t \Phi_s dW_s, \varphi_j \right\rangle_F^2 - \langle V_t \varphi_j, \varphi_j \rangle_F$$

はマルチンゲールとなるので, $\left\| \int_0^t \Phi_s dW_s \right\|_F^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \langle V_t \varphi_j, \varphi_j \rangle_F$ はマルチンゲールとなる。しかし, Remark 2.10 より,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle V_t \varphi_j, \varphi_j \rangle_F = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle \Phi_s \Phi_s^* \varphi_j, \varphi_j \rangle_F ds = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \|\Phi_s^* \varphi_j\|_G^2 ds = \int_0^t \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 ds$$

となるので, 示したい式を得る。

□

2.1.4 基本的な道具

この節では, 1 章に出てきた基本的な定理等を無限次元に拡張する。

Definition 2.18 (Itô 過程). F -値連続で $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な過程 X が Itô 過程であるとは,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \Phi_s dW_s \quad (2.9)$$

のときにいう。ただし, $\Phi \in L^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}_{(2)}(G;F))$ であり, b は F -値可予測過程で,

$$\mathbb{P} \left(\int_0^t \|b_s\|_G ds < \infty, \forall t \geq 0 \right) = 1$$

を満たす。また, X_0 は $\mathcal{F}_0$ -可測とする。

まず, Itô の公式を示したい。そのために 1 つ Lemma を与えておく。

Lemma 2.19. $\Phi \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ とし, τ を $\mathcal{F}_t$ -stopping time で $P(\tau \leq T) = 1$ とする。このとき, P-a.s. に

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0, \tau]}(s) \Phi(s) dW_s = \int_0^{t \wedge \tau} \Phi_s dW_s \quad (t \in [0, T]) \quad (2.10)$$

となる。

Proof. まず, 階段過程 $\Phi_t = \Phi_{t_j}$ (if $t \in [t_j, t_{j+1})$) と τ が simple stopping time の場合を考える
と, このとき (2.10) が成り立つのはすぐに分かる。

次に τ が一般の stopping time のときを考える。ある simple stopping time の列 $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して, $\tau_n \searrow \tau$ とする。このとき, $n \rightarrow \infty$ とすると, P-a.s. で

$$\int_0^{\tau_n \wedge t} \Phi_s dW_s \rightarrow \int_0^{\tau \wedge t} \Phi_s dW_s$$

となり, さらに,

$$E \left[\int_0^T \|\mathbf{1}_{[0, \tau]}(s) \Phi_s - \mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(s) \Phi_s\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 ds \right] = E \left[\int_0^T \mathbf{1}_{[\tau, \tau_n]}(s) \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 ds \right] \searrow 0$$

よって, $\{\tau_n\}$ の適当な部分列を取れば, P-a.s. かつ $[0, T]$ 上に

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(s) \Phi_s dW_s \rightarrow \int_0^t \mathbf{1}_{[0, \tau]}(s) \Phi_s dW_s$$

となる。

最後に Φ が一般のときを考える。ある階段過程列 $\{\Phi^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ が存在して,

$$E \left[\int_0^T \|\Phi_s - \Phi_s^m\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 ds \rightarrow 0 \right]$$

とする。このとき, 適当な部分列をとることで, P-a.s. に $\int_0^{t \wedge \tau} \Phi_s^{m_k} dW_s \rightarrow \int_0^{t \wedge \tau} \Phi_s dW_s$ であり,

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0, \tau]}(s) \Phi_s^{m_k} dW_s \rightarrow \int_0^t \mathbf{1}_{[0, \tau]}(s) \Phi_s dW_s$$

よって, 示せた。 □

このことを使って, Itô の公式を示す。

Theorem 2.20 (Itô の公式 (無限次元版)). X は (2.9) で与えられた F -値 Itô 過程とし, $F(\cdot, \cdot)$ は $[0, T] \times F \rightarrow \mathbb{R}$ で偏微分 F_t, F_x, F_{xx} がそれぞれ有界で一様連続であるとする。ただし, F_x, F_{xx} はともに Frechét 微分の意味での偏微分であり, $F_x : [0, T] \times F \rightarrow F, F_{xx} : [0, T] \times F \rightarrow F \otimes F$ であることに注意しておく。このとき, $\forall t \in [0, T]$ に対して,

$$\begin{aligned} F(t, X_t) &= F(0, X_0) + \int_0^t \Phi_s^* F_x(s, X_s) dW_s \\ &\quad + \int_0^t \left(F_t(s, X_s) + \langle F_x(s, X_s), b_s \rangle_F + \frac{1}{2} \text{tr}(\Phi_s^* F_{xx}(s, X_s) \Phi_s) \right) ds \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (2.11)$$

である。

Proof. $\int_0^T \|b_s\|_G ds$ と $\int_0^T \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}(2)(G;F)}^2 ds$ は有界だと仮定できる。なぜならば、任意の定数 $C > 0$ に対して、

$$\tau_C = \inf \left\{ t \in [0, T]; \|X_t\|_F \geq C, \text{ or } \int_0^t \|b_s\|_G ds \geq C, \text{ or } \int_0^t \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}(2)(G;F)}^2 ds \geq C \right\}$$

とすると、これは stopping time であり、

$$b_t^C = \mathbf{1}_{[0, \tau_C]}(t)b_t, \quad \Phi_t^C = \mathbf{1}_{[0, \tau_C]}(t)\Phi_t, \quad X_t^C = X_{t \wedge \tau_C}$$

とすると、このとき Lemma 2.19 より、

$$X_t^C = X_0^C + \int_0^t b_s^C ds + \int_0^t \Phi_s^C dW_s \quad (t \in [0, T])$$

となる。よって、任意の $C > 0$ に対して、(2.11) が成立するならば、 $C \nearrow \infty$ とすることで、一般の場合も成立する。以上から、 $\int_0^T \|b_s\|_G ds$ と $\int_0^T \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}(2)(G;F)}^2 ds$ は有界だと仮定する。次に、 X, b, Φ が階段過程だと仮定する。すなわち、 $0 = t_1 < t_1 < \dots < t_k = t < T$ を任意に固定し、

$$X_s = X_{t_j}, \quad b_s = b_{t_j}, \quad \Phi_s = \Phi_{t_j} \quad (\text{if } s \in [t_j, t_{j+1}))$$

とする。このとき Taylor の定理を用いると、

$$\begin{aligned} & F(t, X_t) - F(0, X_0) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (F(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - F(t_j, X_{t_{j+1}})) + \sum_{j=0}^{k-1} (F(t_j, X_{t_{j+1}}) - F(t_j, X_{t_j})) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} F_t(\tilde{t}_j, X_{t_{j+1}}) \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} (\langle F_x(t_j, X_{t_j}), \Delta X_{t_j} \rangle_F + \frac{1}{2} \langle F_{xx}(t_j, \tilde{X}_{t_j}) \Delta X_{t_j}, \Delta X_{t_j} \rangle_F) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} F_t(t_j, X_{t_{j+1}}) \Delta t_j + \sum_{j=1}^{k-1} \langle F_x(t_j, X_{t_j}), \Delta X_{t_j} \rangle_F + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \langle F_{xx}(t_j, X_{t_j}) \Delta X_{t_j}, \Delta X_{t_j} \rangle_F \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} (F_t(\tilde{t}_j, X_{t_{j+1}}) - F_t(t_j, X_{t_{j+1}})) \Delta t_j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \langle (F_{xx}(t_j, \tilde{X}_{t_j}) - F_{xx}(t_j, X_{t_j})) \Delta X_{t_j}, \Delta X_{t_j} \rangle_F \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\{\theta_{ij}\}_{j=0, \dots, k-1}^{i=0,1}$ は $[0, 1]$ -値の確率変数列で、 $\Delta t_j := t_{j+1} - t_j$, $\Delta X_{t_j} := X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$ であり、さらに $\tilde{t}_j = t_j + \theta_{0j}(t_{j+1} - t_j)$, $\tilde{X}_{t_j} = X_{t_j} + \theta_{1j}(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) とする。

このとき、 $k \rightarrow \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} I_1 &\rightarrow \int_0^t F_t(s, X_s) ds \quad \text{P-a.s.} \\ I_2 &\rightarrow \int_0^t \langle F_x(s, X_s), b_s \rangle_F ds + \int_0^t \Phi_s^* F_x(s, X_s) dW_s \end{aligned}$$

また、仮定から F_t は一様連続なので、 $I_4 \rightarrow 0$ となり、さらに F_{xx} も一様連続であり、

$$\sum_{j=0}^{k-1} \|X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\|_F^2$$

は有界となるような部分列を持つので, $I_5 \rightarrow 0$ P-a.s. となる。よって, I_3 のみを考える。

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \langle F_{xx}(t_j, X_{t_j}) \Delta X_{t_j}, \Delta X_j \rangle_F \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \Phi_{t_j} \Delta W_{t_j}, \Delta W_{t_j} \rangle_F + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \langle F_{xx}(t_j, X_{t_j}) b_{t_j}, b_{t_j} \rangle_F (\Delta t_j)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \langle F_{xx}(t_j, X_{t_j}) \Phi_{t_j} \Delta W_{t_j}, b_{t_j} \rangle_F \Delta t_j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \langle F_{xx}(t_j, X_{t_j}) b_{t_j}, \Phi_{t_j} \Delta W_{t_j} \rangle_F \Delta t_j \\
&=: I_{3,1} + I_{3,2} + I_{3,3} + I_{3,4}
\end{aligned}$$

とする。 $F_{xx}(t, X_t)$ は有界で Wiener 過程は連続より,

$$\begin{aligned}
|I_{3,3}| &\leq \frac{1}{2} \|F_{xx}(t_j, X_{t_j})\| \cdot \|\Phi_{t_j}\|_{\mathcal{L}(2)(G;F)} \sum_{j=0}^{k-1} \|W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\|_F \sup_k \|b_{t_j}(t_{j+1} - t_j)\|_G \\
&\rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

となり, $I_{3,4}$ も同様 0 に収束する。また,

$$|I_{3,2}| \leq \frac{1}{2} \|F_{xx}(t, X_t)\| \cdot \|b_t\|_G \sum_{j=0}^{k-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty$$

となる。よって, あとは $I_{3,1}$ のみである。P-a.s. に

$$I_{3,1} \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr}(\Phi_s^* F_{xx}(s, X_s) \Phi_s) ds \text{ as } k \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

となることを示したい。 $\xi_j = \Phi_{t_j}^* F_{xx}(t_j, X_{t_j}) \Phi_{t_j}$ とすると, このとき,

$$\begin{aligned}
J &:= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \langle \xi_j \Delta W_{t_j}, \Delta W_{t_j} \rangle_G - \sum_{j=0}^{k-1} \text{tr}(\xi_j) \Delta t_j \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \langle \xi_j \Delta W_{t_j}, \Delta W_{t_j} \rangle_G \right)^2 \right] \\
&\quad - 2\mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \langle \xi_j \Delta W_{t_j}, \Delta W_{t_j} \rangle_G \right) \left(\sum_{j=0}^{k-1} \text{tr}(\xi_j) \Delta t_j \right) \right] + \sum_{i,j=0}^{k-1} (\text{tr} \xi_j)(\text{tr} \xi_i) \Delta t_j \Delta t_i \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} [\langle \xi_j \Delta W_{t_j}, \Delta W_{t_j} \rangle_G^2] - \sum_{i,j=0}^{k-1} (\text{tr} \xi_j)(\text{tr} \xi_i) \Delta t_j \Delta t_i
\end{aligned}$$

ここで, ある定数 M が存在して, $\|\xi_j\|_{\mathcal{L}(2)(G)} \leq M$ となるので,

$$J \leq M^2 \left(\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} [\|W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\|_G^4] + \sum_{j=0}^{k-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \right) \rightarrow 0$$

よって, 適当な部分列をとることで, (2.12) は成立。よって, 示せた。 $\square$

次に Stochastic Fubini の定理を示したい。そのために次の Lemma をまず証明しておく。

Lemma 2.21. F を実可分 Hilbert 空間とし, μ を F 上の有限測度とする。また,

$$\Phi : ([0, T] \times \Omega \times F, \mathcal{P} \times \mathcal{B}(F)) \rightarrow (\mathcal{L}_{(2)}(G; F), \mathcal{B}(\mathcal{L}_{(2)}(G; F))) \quad (2.13)$$

は可測関数とし, さらに

$$\int_F \left(\int_0^T \int_{\Omega} \|\Phi(\cdot, \cdot, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 P(d\omega) dt \right)^{\frac{1}{2}} \mu(dx) < \infty \quad (2.14)$$

とする。

このとき, ある可測関数の列 $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} : ([0, T] \times \Omega \times F, \mathcal{P} \times \mathcal{B}(F)) \rightarrow (\mathcal{L}_{(2)}(G; F), \mathcal{B}(\mathcal{L}_{(2)}(G; F)))$ が

$$\Phi_n(t, \omega, x) = \sum_{j=1}^{J_n} \sum_{k=1}^{K_n} \sum_{l=1}^{L_n} \alpha_{k,l}^n H_j \varphi_{j,k}^n(x) \mathbf{1}_{(s_{k,l}^n, t_{k,l}^n]}(t) \mathbf{1}_{F_{k,j}^n}(\omega) \quad (2.15)$$

で与えられ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_F \left(\int_0^T \int_{\Omega} \|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_n(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 P(d\omega) dt \right)^{\frac{1}{2}} \mu(dx) = 0 \quad (2.16)$$

となる。ただし, $\alpha_{k,l}^n$ は定数, $H_j \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$, $\varphi_{j,k}^n$ は有界な $\mathbb{R}$ -値 $\mathcal{B}(F)$ -可測関数, $(s_{k,l}^n, t_{k,l}^n]$ は $[0, T]$ の部分区間, $F_{k,j}^n \in \mathcal{F}_{s_{k,l}^n}$ とする。

Proof. Theorem 2.20 のときと同様に, stopping time を考えることで $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ は有界な写像と仮定しておく。

$\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ は $\mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ の CONS, $\{\varepsilon_k(\cdot, \cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ を $L^2(\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}, \text{Leb} \times P; \mathbb{R})$ の CONS とする。このとき,

$$\Phi_J^1(t, \omega, x) = \sum_{j=1}^J H_j \varphi_j(t, \omega, x)$$

とする。ただし, $\varphi_j(t, \omega, x) = \langle \Phi(t, \omega, x), H_j \rangle_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}$ となる。次に,

$$\Phi_{J,K}^2(t, \omega, x) = \sum_{j=1}^J H_j \left(\sum_{k=1}^K \varepsilon_k(t, \omega) \varphi_{j,k}(x) \right)$$

ただし, $\varphi_{j,k}(t, \omega, x) = \langle \varphi_j(\cdot, \cdot, x), \varepsilon_k(\cdot, \cdot) \rangle_{L^2(\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}, \text{Leb} \times P; \mathbb{R})}$ となる。さらに,

$$\Phi_{J,K,L}^3(t, \omega, x) = \sum_{j=1}^J H_j \left(\sum_{k=1}^K \varphi_{j,k}(x) \sum_{l=1}^L \alpha_{k,l} \varphi_{j,k}(x) \mathbf{1}_{(s_{k,l}, t_{k,l}]}(t) \mathbf{1}_{F_{k,j}}(\omega) \right)$$

とする。このとき, $\|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_J^1(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2$ は J に関して単調減少なので, 単調収束定理より,

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \int_F \left(\int_0^T \int_{\Omega} \|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_J^1(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 P(d\omega) dt \right)^{\frac{1}{2}} \mu(dx) = 0 \quad (2.17)$$

となる。また J を止めるごとに $\|\Phi_J^1(t, \omega, x) - \Phi_{J,K}^2(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2$ は J に関して単調減少なので, 同じく単調収束定理より,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_F \left(\int_0^T \int_{\Omega} \|\Phi_J^1(t, \omega, x) - \Phi_{J,K}^2(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 P(d\omega) dt \right)^{\frac{1}{2}} \mu(dx) = 0 \quad (2.18)$$

となる。さらに,

$$\begin{aligned}
& \|\Phi_J^1(t, \omega, x) - \Phi_{J,K}^2(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 \\
& \leq \left\| \sum_{j=1}^J H_j \sum_{k=1}^K \varphi_{j,k}(x) \left(\varepsilon_k(t, \omega) - \sum_{l=1}^L \alpha_{k,l} \varphi_{j,k}(x) \mathbf{1}_{(s_{k,l}, t_{k,l}]}(t) \mathbf{1}_{F_{k,j}}(\omega) \right) \right\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 \\
& \leq \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |\varphi_{j,k}(x)|^2 \left| \varepsilon_k(t, \omega) - \sum_{l=1}^L \alpha_{k,l} \varphi_{j,k}(x) \mathbf{1}_{(s_{k,l}, t_{k,l}]}(t) \mathbf{1}_{F_{k,j}}(\omega) \right|^2 \\
& \leq JKC |\varepsilon_K(t, \omega)|^2
\end{aligned}$$

なので, J, K を止めることに Lebesgue の優収束定理より,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_F \left(\int_0^T \int_{\Omega} \|\Phi_{J,K}^2(t, \omega, x) - \Phi_{J,K,L}^3(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 P(d\omega) dt \right)^{\frac{1}{2}} \mu(dx) = 0 \quad (2.19)$$

となる。よって, (2.17) と (2.18), (2.19) から, J, K, L の適当な部分列をとることで, (2.16) を得られる。□

このことを使って, Stochastic Fubini の定理を示す。

Theorem 2.22 (Stochastic Fubini の定理). F を実可分 Hilbert 空間とし, μ を F 上の有限測度とする。また, 可測関数 Φ は (2.13), (2.14) を満たす。このとき, P-a.s. で

$$\int_F \left(\int_0^T \Phi(t, \omega, x) dW_t \right) \mu(dx) = \int_0^T \left(\int_F \Phi(t, \omega, x) \mu(dx) \right) dW_t \quad (2.20)$$

Proof. (2.14) より, $\forall x \in F$ に対して, 可予測過程 $\Phi(\cdot, \cdot, x)$ は μ -a.e. に確率積分可能である。このとき, $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(F)$ -可測な変形 $\xi(\omega, x) = \int_0^T \Phi(t, \omega, x) dW_t(\omega)$ ($(\omega, x) \in \Omega \times F$) が存在し, P-a.s. に μ -可積分である。すなわち,

$$\int_F \xi(\omega, x) \mu(dx) = \int_0^T \eta(t, \omega) dW_t \quad \text{P-a.s.}$$

ただし, $\eta(\cdot, \cdot)$ は Bochner 積分 $\eta(t, \omega) = \int_F \Phi(t, \omega, x) \mu(dx)$ ($(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$) である。このことを示せばよい。

(2.15) で定まる階段過程列 $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して,

$$\int_F \left(\int_0^T \Phi_n(t, \omega, x) dW_t \right) \mu(dx) = \int_0^T \left(\int_F \Phi_n(t, \omega, x) \mu(dx) \right) dW_t \quad (2.21)$$

であることはすぐに分かる。さらに, $\Phi(t, \omega, x)$ は可予測過程より, $\eta(t, \omega)$ は可予測な過程となる。

今, $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(F)$ -可測な $\xi(\cdot, \cdot)$ の変形が存在することを示す。

$$\xi_n(\omega, x) = \int_0^T \Phi_n(t, \omega, x) dW_t(\omega) \quad (\omega \in \Omega, x \in F)$$

は $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(F)$ -可測である。ここで, (2.16) から, ある部分列 $\{\Phi_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ が存在して,

$$\int_F \left(\int_0^T \int_{\Omega} \|\Phi_{n_m}(t, \omega, x) - \Phi(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 P(d\omega) dt \right)^{\frac{1}{2}} \mu(dx) \leq \frac{1}{2^m}$$

とできる。よって, Chebyshev の不等式から,

$$\mu \left(\left\| \int_0^T (\Phi_{n_m} - \Phi) dW_t \right\|_F \geq \frac{1}{m^2} \right) \leq \frac{m^4}{2^m}$$

となる。よって, $\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m^2} < \infty$ より, Borel-Cantelli の第 1 補題から, ある $F_0 \in \mathcal{B}(F)$, $\mu(F \setminus F_0) = 0$ が存在して, $x \in F_0$ に対して,

$$\left\| \int_0^T (\Phi(\cdot, \cdot, x) - \Phi_{n_m}(\cdot, \cdot, x)) dW_t \right\|_F < \frac{1}{m^2}$$

となる。 $\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m^2} < \infty$ なので,

$$\xi(\omega, x) = \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \Phi_{n_m}(t, \omega, x) dW_t & (\text{極限が存在するとき}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とすると, $\xi(\omega, x)$ は $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(F)$ -可測で

$$\xi(\omega, x) = \int_0^T \Phi(t, \omega, x) dW_t \quad (x \in F_0, \text{ P-a.s.})$$

となる。よってあとは,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left\| \int_F \int_0^T \Phi(t, \omega, x) dW_t \mu(dx) - \int_F \int_0^T \Phi_{n_m}(t, \omega, x) dW_t \mu(dx) \right\|^2 \right] \\ & \leq \int_F \left(\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T (\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)) dW_t \right\|^2 \right] \right) \mu(dx) \\ & \stackrel{\text{H\"older}}{\leq} \int_F \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \right) \mu(dx) \\ & \stackrel{\text{It\^o の等距離性}}{\rightarrow} 0 \text{ as } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

である。さらに,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \int_F \Phi(t, \omega, x) \mu(dx) dW_t - \int_0^T \int_F \Phi_{n_m}(t, \omega, x) \mu(dx) dW_t \right\|^2 \right] \\ & \stackrel{(2.21)}{=} \mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \int_F (\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)) \mu(dx) dW_t \right\|^2 \right] \\ & = \mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \int_F (\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)) \mu(dx) dW_t \right\|^2 \right] \\ & \stackrel{\text{H\"older}}{\leq} \left(\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \int_F (\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)) \mu(dx) dW_t \right\|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \stackrel{\text{It\^o の等距離性}}{\leq} \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| \int_F (\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)) \mu(dx) \right\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 dt \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \stackrel{\text{H\"older}}{\leq} \mu(F) \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T \int_F \|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 \mu(dx) dt \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \mu(F) \left(\int_F \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 dt \right] \mu(dx) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \mu(F) \int_F \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_{n_m}(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \mu(dx) \\ & \stackrel{(2.15)}{\rightarrow} 0 \quad (\text{as } m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。以上から，適当な部分列を取ることで，P-a.s. に (2.20) が成立する。 $\square$

次に HS 作用素に対する確率積分のモーメント評価を証明しておく。

Lemma 2.23 (Burkholder の不等式). $\forall p \geq 1$ に対して， C_p が存在して，次の不等式が成立する。

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t \Phi_s dW_s \right\|_F^{2p} \right] \leq C_p \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \|\Phi_t\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 dt \right)^p \right]$$

Proof. $\tilde{U}_t = \|M_t(\Phi)\|_F^2$, $\tilde{V}_t = \int_0^t \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 ds$ ($t \geq 0$) とする。このとき，Itô の公式の証明の際と同様に stopping time を使うことで，それぞれ有界だと仮定しておく。さらに Proposition 2.17.2 より， $\tilde{M}_t := \tilde{U}_t - \tilde{V}_t$ はマルチンゲールとなる。 $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を F の CONS とし， $\tilde{U}_t$ に，Itô の公式 (無限次元版) を適用すると，

$$\tilde{U}_t = \tilde{U}_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle M_s(\Phi), \varphi_j \rangle_F \Phi_s^* \varphi_j dW_s \quad \text{a.s.}$$

であるので， $\tilde{M}_0 = \tilde{V}_0 - \tilde{U}_0 = 0$ a.s. 及び Remark 2.10 に注意すると，

$$\begin{aligned} \tilde{M}_t &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle M_s(\Phi), \varphi_j \rangle_F \Phi_s^* \varphi_j dW_s + \int_0^t \text{tr}(\Phi \Phi^*) ds - \int_0^t \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 ds \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle M_s(\Phi), \varphi_j \rangle_F \Phi_s^* \varphi_j dW_s \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。よって，2 次変分は

$$\begin{aligned} \langle \tilde{M} \rangle_t &= 4 \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_0^t \langle M_s(\Phi), \varphi_i \rangle_F \langle M_s(\Phi), \varphi_j \rangle_F \langle \Phi_s^* \varphi_i, \Phi_s^* \varphi_j \rangle_G ds \\ &= 4 \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle M_s(\Phi), \varphi_j \rangle_F|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi_s^* \varphi_j\|_G^2 \right) ds \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} 4 \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \langle M_s(\Phi), \varphi_j \rangle_F^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi_s^*\|_G^2 ds \\ &\stackrel{(2.22)}{\leq} 4 \tilde{V}_t \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} \tilde{U}_s \end{aligned}$$

となる。また，

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|M_t(\Phi)\|_F^{2p} \right] &= \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{U}_t^p \right] \leq 2^{p-1} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{M}_t|^p + \tilde{V}_T^p \right] \\ &\leq 2^{p-1} \left(c_p \mathbb{E} \left[\langle \tilde{M} \rangle_T^{\frac{p}{2}} \right] + \mathbb{E} \left[\tilde{V}_T^p \right] \right) \leq 2^{p-1} \left(c_p \mathbb{E} \left[2^p \tilde{V}_T^{\frac{p}{2}} \sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{U}_t^{\frac{p}{2}} \right] + \mathbb{E} \left[\tilde{V}_T^p \right] \right) \end{aligned}$$

である。ただし, 3 行目はマルチンゲールに対する Burkholder の不等式を用いた。ここで, $2ab \leq 2a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ($\forall a, b \geq 0$) より,

$$2\mathbb{E} \left[\tilde{V}_T^{\frac{p}{2}} \sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{U}_t^{\frac{p}{2}} \right] \leq 2\mathbb{E} [\tilde{V}_T^p] + \frac{1}{2}\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{U}_t^p \right]$$

となっている。よって,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|M_t(\Phi)\|_F^{2p} \right] \leq (2c_p + 2^{p-1}) \mathbb{E} [\tilde{V}_T^p] + \frac{1}{2}\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{U}_t^p \right]$$

となり, 右辺第 2 項を移項して両辺に 2 を掛ければ, 求めたい式を得られる。□

次に $\{S_t\}_{t \geq 0}$ を F 上強連続な半群とする。この時, $\Phi_s \in L^2(\mathcal{P}, \mathcal{L}_{(2)}(G; F))$ に対して, 畳み込み (Convolution) $\int_0^t S_{t-s} \Phi_s dW_s$ のモーメント評価を考えたい。ただし, この確率積分が well-defined だと仮定する。この畳み込みは一般に Itô 過程ではないためマルチンゲールであるとは限らない。よって, Doob の不等式など, マルチンゲールに関する不等式は使えない。しかし, 適当な条件下で次の評価を得られる。

Proposition 2.24. $\{S_t\}_{t \geq 0}$ を F 上強連続な半群とし, $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ を $\mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ -値可予測過程で, 各 $p > 2$ に対して,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^p ds \right] < \infty$$

とする。このとき, $\exists C > 0$ が存在して,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S_{t-s} \Phi_s dW_s \right\|_F^p \right] \leq C \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^p ds \right]$$

ただし, C は p と T に依存する。

Proof. まず, $0 < \alpha < 1$, $0 < u < t$ に対して, ベータ関数の計算から,

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{-\alpha} ds &= \int_0^1 v^{(1-\alpha)-1} (1-v)^{\alpha} dv \quad (\because s = (t-u)v + u \text{ と変数変換}) \\ &= B(1-\alpha, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \\ &= \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (\because \Gamma \text{ 関数の相補公式}) \end{aligned}$$

とできる。また,

$$Y_s = \int_0^s (s-u)^{-\frac{2}{p+2}} S_{s-u} \Phi_u dW_u$$

として, $\alpha = \frac{2}{p+2}$ として上の式と Stochastic Fubini の定理を使うと

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{-\frac{p}{p+2}} S_{t-s} Y_s ds &= \int_0^t (t-s)^{-\frac{p}{p+2}} \int_0^s (s-u)^{-\frac{2}{p+2}} S_{s-u} \Phi_u dW_u ds \\ &= \int_0^t \int_0^u (t-s)^{-\frac{p}{p+2}} (s-u)^{-\frac{2}{p+2}} S_{t-u} \Phi_u ds dW_u \\ &= \int_0^t \frac{\pi}{\sin \left(\frac{2\pi}{p+2} \right)} S_{t-u} \Phi_u dW_u \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\int_0^t S_{t-u} \Phi_u dW_u = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{p+2}\right)}{\pi} \int_0^t (t-s)^{-\frac{p}{p+2}} S_{t-s} Y_s ds$$

とできる。ゆえに,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S_{t-u} \Phi_u dW_u \right\|_F^2 &= \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{p+2}\right)}{\pi} \int_0^t (t-s)^{-\frac{p}{p+2}} S_{t-s} Y_s ds \right\|_F^2 \\ &\leq \pi^{-p} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t (t-s)^{-\frac{p}{p+2}} S_{t-s} Y_s ds \right\|_F^2 \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} M^p \pi^{-p} \left(\int_0^T s^{-\frac{p^2}{(p+2)(p-2)}} ds \right)^{p-1} \int_0^T \|Y_s\|_F^p ds \\ &= M^p \pi^{-p} \left(\frac{(p+2)(p-1)}{p-2} T^{\frac{p-2}{(p+2)(p-1)}} \right)^{p-1} \int_0^T \|Y_s\|_F^p ds \end{aligned}$$

を得る。さらに Burkholder の不等式を使うと,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|Y_s\|_F^p] &= \mathbb{E} \left[\left\| \int_0^s (s-u)^{-\frac{2}{p+2}} S_{s-u} \Phi_u dW_u \right\|_F^p \right] \\ &\stackrel{\text{Burkholder}}{\leq} C_p M^p \mathbb{E} \left[\left(\int_0^s (s-u)^{-\frac{4}{p+2}} \|\Phi_u\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] \end{aligned}$$

となるので, あとは Hölder の不等式から,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\int_0^s (s-u)^{-\frac{4}{p+2}} \|\Phi\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^2 du \right)^{\frac{p}{2}} ds \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_0^T \left(\int_0^s \|\Phi_u\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^p du \right) \left(\int_0^s (s-u)^{\frac{2(p-2)}{p+2}} du \right)^{\frac{p-2}{2}} ds \\ &\leq \int_0^T \|\Phi_u\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G;F)}^p du \int_0^T \left(\int_0^s (s-u)^{\frac{2(p-2)}{p+2}} du \right)^{\frac{p-2}{2}} ds \\ &= \left(\frac{p+2}{3p-2} \right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{2(p+2)}{3p^2-6p+8} T^{\frac{3p^2-6p+8}{2(p+2)}} \end{aligned}$$

以上から, あとは Fubini の定理で積分の順序交換をすると, 求めたい不等式を得る。□

次の Theorem では, フィルトレーションを $\mathcal{F}_t = \mathcal{N} \cup \sigma\{W_s; s \leq t\}$ とする。ただし, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F}; P(N) = 0\}$ である。また, この $\mathcal{F}_t$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &= \mathcal{N} \cup \sigma\{\langle \psi, W_s \rangle_G; \psi \in G, 0 \leq s \leq t\} \\ &= \mathcal{N} \cup \sigma\{w_s^j = \langle \psi_j, W_s \rangle_G; \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ は } G \text{ の CONS}, 0 \leq s \leq t\} \end{aligned}$$

となる。

Theorem 2.25 (マルチンゲール表現定理). F を実可分 Hilbert 空間とし, $M = \{M_t\}_{t \in [0, T]} \in \mathcal{M}_T^2(F)$ とする。このとき, $\mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ に値を取る 2 乗可積分な可予測過程 $\sigma = \{\sigma_t\}_{t \in [0, T]}$ が存在して,

$$M_t = M_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad (t \geq 0) \quad (2.23)$$

と表せる。

Proof. M_t が仮定を満たすとき, $M'_t = M_t - M_0$ も同様の仮定を満たすので, $M_0 = 0$ としても, 一般性を失わない。さらに, フィルトレーションは右連続なので, 各 $T > 0$ と 2 乗可積分な F -値 $\mathcal{F}_T$ -可測な確率変数 M_T に対して, $t = T$ のときに (2.23) を満たす 2 乗可積分な $\mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ -値可予測過程 $\{\sigma_t\}_{0 \leq t \leq T}$ を存在することを示せば十分である。

まず, $F = \mathbb{R}$ のときを示す。 $T > 0$ を任意に固定しておく。

$$\mathcal{I}_T = \left\{ \int_0^T \lambda_s dW_s; \lambda = \{\lambda_t\}_{0 \leq t \leq T} \text{ は 2 乗可積分な } G\text{-値可予測過程} \right\} \quad (2.24)$$

とする。このとき, $\mathcal{I}_T = L_0^2(\mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$ を証明する。ただし, $L_0^2(\mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$ は $L^2(\mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$ の中で平均 0 の確率変数の部分空間である。

$\mathcal{I}_T$ は Itô の等距離性から $L^2(\mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$ 内の閉部分空間となるので,

$$\xi \in L_0^2(\mathcal{F}_T, P; \mathbb{R}), \quad \xi \perp \mathcal{I}_T \Rightarrow \xi = 0 \quad (2.25)$$

を示せば十分である。また, 任意の定数 $C > 0$ に対して,

$$\tau_C := \inf \left\{ t \in [0, T]; \int_0^t \|\lambda_s\|_G^2 ds > C \right\}$$

とすれば, これは stopping time となり, 任意の $C > 0$ に対して, $\lambda_{s \wedge \tau_C}$ で (2.23) が成り立つことを示せば, あとは $C \nearrow \infty$ とすることで一般の場合も示せる。よって, $\int_0^T \|\lambda\|_G^2 ds$ が有界だと仮定しておくと,

$$N_t := \int_0^t \lambda_s dW_s = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle \lambda_s, \psi_k \rangle_G dw_s^k$$

は 2 乗可積分な連続マルチンゲールとなる。ただし, $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は G の CONS で, $w_t^k = \langle \psi_k, W_t \rangle_G$ である。

$\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ を

$$\begin{cases} dM_t = M_t dN_t \\ M_0 = 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

の解とすると, (2.26) の解は, $M_t = \exp \left(\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s\|_G^2 ds \right)$ とできる。

λ は有界なので, M_t は明らかに 2 乗可積分で, さらに, $M_T = C^{-1} \exp \left(\int_0^T \lambda_s dW_s \right)$ となる。ただし, C は定数である。すると,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\xi \exp \left(\int_0^T \lambda_s dW_s \right) \right] &= \mathbb{E}[\xi M_T] \\ &= \mathbb{E} \left[\xi \left(1 + \int_0^T M_s \lambda_s dW_s \right) \right] \\ &= 0 \quad \left(\because \left(1 + \int_0^T M_s \lambda_s dW_s \right) \in \mathcal{I}_T \right) \end{aligned}$$

となる。ここで $\exp \left(\int_0^T \lambda_s dW_s \right)$ は $\mathcal{F}_T$ -可測なので, ξ と独立ではない。よって, $\xi = 0$ となる。ゆえに, $F = \mathbb{R}$ のときは示せた。あとは F が一般のときを考えると, $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を F の CONS としたとき,

$$M_T = \sum_{j=1}^{\infty} \langle M_T, \varphi_j \rangle_F \varphi_j, \quad \int_0^T \sigma_s dW_s = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^T \sigma_s^* \varphi_j dW_s \right) \varphi_j$$

となので, 各 j に対して, $\lambda_s^j = \sigma_s^* \varphi_j$ とすれば $F = \mathbb{R}$ の結果から,

$$\langle M_T, \varphi_j \rangle_F = \int_0^T \sigma_s^* \lambda_j dW_s$$

である。よって, F が一般の場合も成立する。 $\square$

最後に Girsanov の定理を考える。 $\lambda \in L^2(\mathcal{P}; G)$ とする。このとき, $M := \{M_t = \int_0^t \lambda_s dW_s; \forall t \geq 0\} \subset \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$ となる。この 2 次変分は $\langle\langle M \rangle\rangle_t = \int_0^t \|\lambda_s\|_G^2 ds$ であり, 結果として, $Z = \{Z_t\}_{t \geq 0}$ を

$$Z_t = e^{M_t - \frac{1}{2} \langle\langle M \rangle\rangle_t} = \exp \left(\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s\|_G^2 ds \right)$$

とすると, これは $\mathbb{R}^d$ のときと同様の議論で局所マルチンゲールとなる。さらに, $E[Z_T] = 1$ と仮定すれば, Z_t はマルチンゲールとなる。この Z_t を M_t の指数マルチンゲールという。このとき, $\mathcal{F}_t$ での制限により, P と同値な確率測度 Q を定義できる。

Theorem 2.26 (Girsanov の定理). 任意に $T \geq 0$ を取っておく。また, $\lambda \in L^2(\mathcal{P}, G)$ で

$$E \left[\exp \left(\int_0^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda_s\|_G^2 ds \right) \right] = 1$$

とする。このとき,

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \lambda_s ds \quad (\forall t \in [0, T])$$

は $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上で $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ に関して柱状 Wiener 過程となる。ただし, Q は次を満たす。

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left(\int_0^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda_s\|_G^2 ds \right)$$

Proof. 示すべきことは $\forall \psi \in G$ に対して, $\langle \psi, \widetilde{W}_t \rangle_G$ が Q 上の Wiener 過程となることである。

これを言い換えると, $\psi \in G$ に対して, $\exp(\langle \psi, \widetilde{W}_t \rangle_G - \frac{1}{2} \|\psi\|_G^2)$ が Q がマルチンゲールであればよい。

さらにここで Q の作り方より, これは $\exp(\langle \psi, \widetilde{W}_t \rangle_G - \frac{1}{2} \|\psi\|_G^2) Z_t$ が P 上のマルチンゲールとなればよい。ここで,

$$\exp \left(\langle \psi, \widetilde{W}_t \rangle_G - \frac{1}{2} \|\psi\|_G^2 \right) Z_t = \exp \left(\int_0^t (\psi + \lambda_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\psi + \lambda_s\|_G^2 ds \right)$$

となり, $\int_0^t (\psi + \lambda_s) dW_s$ の 2 次変分は $\int_0^t \|\psi + \lambda_s\|_G^2 ds$ なので, これは P 上のマルチンゲールである。よって, 示せた。 $\square$

2.1.5 確率偏微分方程式

$\{S_t\}_{t \geq 0}$ は F 上の強連続半群とする。つまり次の 3 つを満たすと仮定する。

1. $S_0 = I$ (ただし, I は F 上の恒等作用素とする)
2. $S_t \circ S_s = S_{t+s}$ ($\forall s, t \geq 0$)
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \|S_t f - f\|_F = 0$ ($\forall f \in F$)

強連続半群 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ が与えられたとき, 生成作用素 A は定義域 $\text{Dom}(A)$ を

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in F \mid \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_t f - f}{t} \right\}$$

として, $Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_t f - f}{t}$ ($f \in \mathcal{D}(A)$) で定義される。ただし, 仮定の 3 番目から $\text{Dom}(A)$ は F の dense な部分集合となる。

F 上に値を取る確率偏微分方程式 (SPDE)

$$dX_t = (AX_t + a(t, \omega, X_t))dt + b(t, \omega, X_t)dW_t \quad (2.27)$$

の解 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ について考える。ただし,

$$\begin{aligned} a &: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times F \rightarrow F \\ b &: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times F \rightarrow \mathcal{L}_{(2)}(G; F) \end{aligned}$$

とし, 以下では a と b は Lipschitz 条件と緩増大条件を持つと仮定する (詳しくは後述する)。このとき A が有界ならば, $\text{Dom}(A) = F$ となり, (2.27) は強解 (strong solution)

$$X_t = X_0 + \int_0^t (AX_s + a(s, \omega, X_s))ds + \int_0^t b(s, \omega, X_s)dW_s$$

を持つ。しかし, ここでは 4 章以降のために A が非有界の場合を考える。すると, このとき上の積分方程式はとたんに意味を持たなくなる。そこで, (2.27) の A を定数, X_t を $\mathbb{R}$ -値だと思い, 形式的に計算すると Itô の公式から,

$$\begin{aligned} d(e^{-At}X_t) &= -Ae^{-At}X_t dt + e^{-At}dX_t \\ &= e^{-At}a(t, \omega, X_t)dt + e^{-At}b(t, \omega, X_t)dW_t \end{aligned}$$

よって,

$$e^{-At}X_t = X_0 + \int_0^t e^{-As}a(s, \omega, X_s)ds + \int_0^t e^{-As}b(s, \omega, X_s)dW_s$$

となる。さらに $S_t = e^{At}$ とすると,

$$X_t = S_t X_0 + \int_0^t S_{t-s}a(s, \omega, X_s)ds + \int_0^t S_{t-s}b(s, \omega, X_s)dW_s \quad (2.28)$$

となる。これを (2.27) の mild solution という。 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が mild solution ならば, (2.28) の右辺が well-defined であるために,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t \|S_{t-s}b(s, \omega, X_s)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 ds \right] &< \infty \\ \int_0^t \|S_{t-s}a(s, \omega, X_s)\|_F ds &< \infty \text{ P-a.s.} \end{aligned}$$

を満たしていなければならない。また, mild solution は一般に Itô 過程ではないことに注意しておく。次の定理では適当な条件の下で SPDE の mild solution が一意に存在することを示す。その前に次の不等式を与えておく。

Lemma 2.27 (Gronwall の不等式). $T > 0, a, b \geq 0$ とする。 $g; [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ は連続かつ

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds \quad t \in [0, T]$$

を満たすとする。このとき,

$$g(t) \leq ae^{bt} \leq ae^{bT} \quad \forall t \in [0, T]$$

Theorem 2.28.

$$dX_t = (AX_t + a(t, \omega, X_t))dt + b(t, \omega, X_t)dW_t \quad (2.29)$$

とする。ただし, X_0 は決定論的に与えられており, $a: \mathbb{R} \times \Omega \times F \rightarrow F$ と $b: \mathbb{R} \times \Omega \times F \rightarrow \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ は Lipschitz 条件

$$\|a(t, \omega, x) - a(t, \omega, y)\|_F + \|b(t, \omega, x) - b(t, \omega, y)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)} \leq K\|x - y\|_F$$

を満たし, また緩増大条件

$$\|a(t, \omega, x)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)} + \|b(t, \omega, x)\|_F \leq K(1 + \|x\|_F)$$

を満たす。ただし, K は正定数, $t \geq 0, x, y \in F$ である。このとき, F -値 mild solution $\{X_t\}_{t \geq 0}$ は一意に存在する。

ただし, ここでの「一意」とは $\{X_t\}_{t \geq 0}, \{Y_t\}_{t \geq 0}$ が (2.29) の解であるとき, それぞれの右連続な変形が $P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$ という意味である。また, 任意に $T \geq 0, p > 2$ を止めるごとに

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} \|X_t\|^p \right] < C_p(1 + \|X_0\|^p)$$

ただし, $C_{p, T}$ は p, T に依存する正定数である。

Proof. Picard の逐次近似法を使って証明する。 $T > 0, p > 2$ を固定しておく。

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &:= S_t X_0 + \int_0^t S_{t-s} a(s, \cdot, X_s) ds + \int_0^t S_{t-s} b(s, \cdot, X_s) dW_s \\ \tilde{Y}_t &:= S_t X_0 + \int_0^t S_{t-s} a(s, \cdot, Y_s) ds + \int_0^t S_{t-s} b(s, \cdot, Y_s) dW_s \end{aligned}$$

とする。このとき,

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{X}_t - \tilde{Y}_t\|_F^p \right] &\leq 2^p E \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S_{t-s} (a(s, \cdot, X_s) - a(s, \cdot, Y_s)) ds \right\|_F^p \right] \\ &\quad + 2^p E \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S_{t-s} (b(s, \cdot, X_s) - b(s, \cdot, Y_s)) ds \right\|_F^p \right] \\ &=: 2^p I_1 + 2^p I_2 \end{aligned}$$

となる。すると,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq E \left[\sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t \|S_{t-s} (a(s, \cdot, X_s) - a(s, \cdot, Y_s))\|_F ds \right)^p \right] \\ &\leq E \left[\sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t \|S_{t-s}\|_{\frac{p}{p-1}}^{\frac{p}{p-1}} ds \right)^{p-1} \left(\int_0^t \|a(s, \cdot, X_s) - a(s, \cdot, Y_s)\|_F^p ds \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq T^{p-1} \sup_{t \in [0, T]} \|S_t\|^p \mathbb{E} \left[\int_0^T \|a(s, \cdot, X_s) - a(s, \cdot, Y_s)\|_F^p ds \right] \\
&\leq T^{p-1} M_{p,T} K \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{u \in [0, s]} \|X_u - Y_u\|_F^p \right] ds \quad \left(\because M_{p,T} := \sup_{t \in [0, T]} \|S_t\|^p \right)
\end{aligned}$$

となる。また,

$$I_2 \stackrel{\text{Prop. 2.24}}{\leq} C \mathbb{E} \left[\int_0^T \|b(s, \cdot, X_s) - b(s, \cdot, Y_s)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^p ds \right] \leq CK \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, s]} \|X_u - Y_u\|_F^p \right] ds$$

となる。よって,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{X}_t - \tilde{Y}_t\|_F^p \right] \leq C_{p,T} \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{u \in [0, s]} \|X_u - Y_u\|_F^p \right] du \quad (2.30)$$

を得られる。よって, 一意性は $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq 0}$ と $\{\tilde{Y}_t\}_{t \geq 0}$ が (2.29) の解とすると, このとき, $\tilde{X}_t = X_t$, $\tilde{Y}_t = Y_t$ であるから, (2.30) より,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|X_t - Y_t\|_F^p \right] \leq C_{p,T} \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{u \in [0, s]} \|X_u - Y_u\|_F^p \right] du$$

T は任意なので, Gronwall の不等式より, $\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|X_t - Y_t\|_F^p \right] = 0$ となる。

また, 存在性は $\tilde{X}_t = X_t^{(n+1)}$, $X_t = \tilde{Y}_t = X_t^{(n)}$, $Y_t = X_t^{(n-1)}$, $X_t^{(0)} = S_t X_0$ とすると, (2.30) から

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\|_F^p \right] \leq C_{p,T} \int_0^T \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\|_F^p \right] ds$$

となる。よって, 帰納法から,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\|_F^p \right] \leq \frac{C_{p,T}^{n-1} T^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \|X_s^{(1)} - X_s^{(0)}\|_F^p \right]$$

を得ることができ, $m \geq n$ に対して,

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \|X_s^{(m)} - X_s^{(n)}\|_F^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|_F^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{C_{p,T}^{\frac{k-1}{p}} T^{\frac{k-1}{p}}}{\sqrt[p]{(k-1)!}} \left(\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \|X_s^{(1)} - X_s^{(0)}\|_F^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

となる。よって, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が存在して,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \|X_s^{(n+1)} - X_s\|_F^p \right] \rightarrow 0 \quad (\forall T > 0, p > 2)$$

を得る。定義より,

$$X_t^{(n+1)} = S_t X_0 + \int_0^t a(s, \cdot, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t b(s, \cdot, X_s^{(n)}) dW_s$$

であるから, $n \rightarrow \infty$ として,

$$X_t = S_t X_0 + \int_0^t a(s, \cdot, X_s) ds + \int_0^t b(s, \cdot, X_s) dW_s$$

となり, これが (2.29) の解となる。

あとは, $E[\sup_{t \in [0, T]} \|X_t\|^p]$ に対して, 上の I_1, I_2 と同様の計算を行い, 緩増大条件に注意すると,

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{t \in [0, T]} \|X_t\|_F^p \right] \\ & \leq C_1^{p, T} \|X_0\|_F^p + C_2^{p, T} \left(1 + \int_0^T E \left[\sup_{u \in [0, s]} \|X_s\|_F^p \right] ds \right) + C_3^{p, T} \left(1 + \int_0^T E \left[\sup_{u \in [0, s]} \|X_s\|_F^p \right] ds \right) \\ & \leq \tilde{C}_1^{p, T} (1 + \|X_0\|_F^p) + \tilde{C}_2^{p, T} \int_0^T E \left[\sup_{u \in [0, s]} \|X_s\|_F^p \right] ds \end{aligned}$$

となる。ただし, $\tilde{C}_j^{p, T}$ ($j = 1, 2$), $C_i^{p, T}$ ($i = 1, 2, 3$) は p, T に依存した定数である。これより Gronwall の不等式を使うと,

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} \|X_t\|_F^p \right] \leq \tilde{C}_1^{p, T} e^{\tilde{C}_2^{p, T} T} (1 + \|X_0\|_F^p)$$

よって, 示せた。 $\square$

2.2 Malliavin 解析

初めに可分 Hilbert 空間 F と G に対して, $\mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ を $G \otimes F$ と表す。そのとき, $G \otimes F$ は $f \in F, g \in G$ に対して, $g \otimes f$ で $G \ni g_1 \mapsto \langle g, g_1 \rangle_G f \in F$ となる作用素全体 $\mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ で稠密となる。

2.2.1 Itô-Wiener カオス分解

$(\Omega, \mathcal{G}, P)$ を完備確率空間とし, H を可分 Hilbert 空間とする。このとき, この上のガウス場を次で定義する。

Definition 2.29 (H 上のガウス場). $\mathbb{R}$ -値確率過程 $\{W(h)\}_{h \in H}$ が次の 2 つを満たすとする。

1. $W(h_1), \dots, W(h_n)$ ($h_1, \dots, h_n \in H$) が平均 0 の結合正規分布に従う。
2. 共分散を $E[W(g)W(h)] = \langle g, h \rangle_H$ で与えられる。

このとき, $\{W(h)\}_{h \in H}$ は H 上のガウス場であるという。

以下, Ω 上の σ -field $\mathcal{F}$ を $\sigma(W(h); h \in H)$ を完備化したものとし, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とする。

Definition 2.30 (Hermite 多項式). $H_n(\xi)$ ($n \in \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R}$) を

$$H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (2.31)$$

としたとき, $H_n(\xi)$ を Hermite 多項式という。

Proposition 2.31. Hermite 多項式は次のような性質を持っている。

1. $\sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(\xi) = e^{t\xi - \frac{\xi^2}{2}}$
2. $\sum \frac{d}{d\xi} H_n(\xi) = H_{n-1}(\xi)$
3. $(n+1)H_{n+1}(\xi) - \Phi H_n(\xi) + H_{n-1}(\xi) = 0$
4. $\int_{\mathbb{R}} H_n(\xi) H_m(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \delta_{m,n} \frac{1}{n!}$
5. $\int_{\mathbb{R}} e^{i\eta\xi} H_n(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = e^{-\frac{\eta^2}{2}} \frac{i^n}{n!} \eta^n$

ただし, i は虚数単位である。

次に, 多重指数の集合を $\Lambda := \{a = (a_1, a_2, \dots) \mid a_j \in \mathbb{Z}_+ \text{ で, 有限個を除いて } a_j = 0\}$ とし, $a \in \Lambda$ に対して, $a! := \prod_{j=1}^{\infty} (a_j!)$, $|a| = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ とする。さらに, $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を H の CONS とし, $a \in \Lambda$ に対して,

$$\mathbb{H}_a := \prod_{j=1}^{\infty} H_{a_j}(W(h_j)) \quad (2.32)$$

とする。(2.32) を Fourier-Hermite 多項式といい, $H_0(\Phi) = 1$ なので, 実際は有限積となることを注意しておく。このとき,

Definition 2.32. $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $\{\mathbb{H}_a; |a| = n\}$ で張られる $L^2(\mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ での閉部分空間を n 次の Itô-Wiener カオスといい, $\mathcal{H}_n$ と表す。また, $\mathcal{H}_n$ への直交射影を J_n と表す。

Proposition 2.33. 次のことが成立する。

1. $\{\sqrt{a!} \mathbb{H}_a; a \in \Lambda\}$ は $L^2(\mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ の CONS である。
2. $\{\sqrt{a!} \mathbb{H}_a; a \in \Lambda, |a| = n\}$ は $\mathcal{H}_n$ の CONS である。
3. $L^2(\mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ は次のように直和分解される。また, この分解を Itô-Wiener カオス分解という。

$$L^2(\mathcal{F}, P; \mathbb{R}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n \quad (2.33)$$

4. F を可分 Hilbert 空間とする。このとき, $L^2(\mathcal{F}, P; F)$ の Itô-Wiener カオス分解は

$$L^2(\mathcal{F}, P; F) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n \otimes F \quad (2.34)$$

となる。

以下, $L^2(\mathcal{F}, P; F)$ の n 次の Itô-Wiener カオス $\mathcal{H}_n \otimes F$ への直交射影も同じ J_n を使うことにする。

2.2.2 Malliavin 微分

まず, 多項式の空間を定義する。

Definition 2.34 (多項式). $\mathcal{P}_{\mathcal{OL}}$ を次のような関数 $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ の全体とする。

ある $n \in \mathbb{N}$, $h_1, \dots, h_n \in H$ と多項式 $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, $\Phi = \phi(W(h_1), \dots, W(h_n))$ と表される。さらに $\Phi \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ であるとは, $f_j \in F$, $\Phi_j \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}$ ($j = 1, \dots, n$) に対して, $\Phi := \sum_{j=1}^n \Phi_j f_j$ と表わされることをいう。

Proposition 2.35. 任意の $p \geq 1$ に対して, $\mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F) \stackrel{\text{dense}}{\subset} L^p(\mathcal{F}, P; F)$ である。

次に Malliavin 微分を定義する。

Definition 2.36 (Malliavin 微分). $\mathcal{P}_{\mathcal{OL}} \ni \Phi = \phi(W(h_1), \dots, W(h_n))$ に対して, $D\Phi \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(H)$ を

$$D\Phi := \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_j$$

と定義する。さらに, $\Phi = \sum_{i=1}^m \Phi_i f_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ に対して, $D\Phi \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(H \otimes F)$ を

$$D\Phi := \sum_{i=1}^m D\Phi_i \otimes f_i$$

とする。また, $h \in H$ を固定するごとに, $\Phi = \sum_{i=1}^m \Phi_i f_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ に対して,

$$D_h \Phi := \sum_{i=1}^m \langle D\Phi_i, h \rangle_H f_i$$

と定義する。

次に D の定義域を $L^2(\mathcal{F}, P; F)$ に拡張していく。そのために, D が $L^2(\mathcal{F}, P; F)$ 上で可閉であることを示したい。そのためにまず簡単な場合を示す。

Lemma 2.37. $h \in H$ とし, $\Phi \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}$ とする。このとき,

$$\mathbb{E}[\langle D\Phi, h \rangle_H] = \mathbb{E}[\Phi W(h)] \quad (2.35)$$

となる。

Proof. $\Phi \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}$ より, ある $n \in \mathbb{N}$ と多項式 $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し,

$$\Phi = \psi(W(h_1), \dots, W(h_n))$$

とでき, さらに Gram-Schmidt の直交化法から, 一般性を失うことなく, $h = h_1$ で $h_1, h_2, \dots, h_n$ は直交すると仮定できる。このとき, 通常の部分積分の公式より,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle D\Phi, h \rangle_H] &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \psi(W(h_1), \dots, W(h_n)) \right] (\because \langle h, h_j \rangle_H = 1 (j = 1), = 0 (j \neq 1)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(x_1, \dots, x_n) e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} x_1 \psi(x_1, \dots, x_n) e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx \\ &= \mathbb{E}[\Phi W(h)] (\because \text{仮定より } h = h_1) \end{aligned}$$

よって, 示せた。 □

Corollary 2.38. $h \in H$ とし, $\Phi, \eta \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ とする。このとき,

$$E[\langle \eta, (D\Phi)h \rangle_F] = E[\langle \Phi, \eta \rangle_F W(h) - \langle \Phi, (D\eta)h \rangle_F]$$

となる。

Proof. Lemma2.37 の Φ の部分に $\langle \Phi, \eta \rangle_F$ を代入すると,

$$E[\langle D\langle \Phi, \eta \rangle_F, h \rangle_H] = E[\langle \Phi, \eta \rangle_F W(h)]$$

となる。さらに,

$$(D\langle \Phi, \eta \rangle_F)h = ((D\Phi)h, \eta)_F + \langle \Phi, (D\eta)h \rangle_F$$

となり, これを上のに代入すると求めたい式が出てくる。 $\square$

Proposition 2.39. $\mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ に対して定義された Malliavin 微分 D は, $L^2(\mathcal{F}, P; F)$ 上で可閉作用素である。

Proof. $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ が存在して, $\Phi_n \rightarrow 0$ in $L^2(\mathcal{F}, P; F)$ かつ $\Psi := \lim_{n \rightarrow \infty} D\Phi_n$ in $L^2(\mathcal{F}, P; H \otimes F)$ が存在したとき, $\Psi = 0$ P-a.s. となることを示せば十分である。

$\forall h \in H$ と $\eta \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ に対して, Corollary2.38 より,

$$\begin{aligned} |E[\langle \eta, (D\Phi_n)h \rangle_F]| &= |E[\langle \Phi_n, \eta \rangle_F W(h) - \langle \Phi_n, (D\eta)h \rangle_F]| \\ &\leq E[|\Phi_n|_F (|\eta|_F |W(h)| + |(D\eta)h|_F)] \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} 2(E[|\eta|_F^2 W(h)^2 + |(D\eta)h|_F^2])^{\frac{1}{2}} (E[|\Phi_n|_F^2])^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで, $2(E[|\eta|_F^2 W(h)^2 + |(D\eta)h|_F^2])^{\frac{1}{2}}$ は有限であり, 仮定より $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|\Phi_n|_F^2] = 0$ となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\langle \eta, (D\Phi_n)h \rangle_F] = 0$$

となる。また,

$$|E[\langle \eta, (D\Phi_n)h \rangle_F - \langle \eta, \Psi h \rangle_F]| \leq E[|\eta|_F^2 |h|_H^2]^{\frac{1}{2}} E[|D\Phi - \Psi|_{H \otimes F}^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

となり,

$$E[\langle \eta, \Psi h \rangle_F] = 0$$

となる。 η と h は任意なので, $\Psi = 0$ P-a.s. となる。よって, 示せた。 $\square$

Definition 2.40 (Sovolev 空間). $\|\Phi\|_{1,2}^2 := \int_B \|\Phi\|^2 dP + \int_B \|D\Phi\|^2 dP$ ($\Phi \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$) とする。このとき, $\mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ の $\|\cdot\|_{1,2}$ に関する完備化を $\mathbb{H}(F)$ とし, $\|\cdot\|_{1,2}$ を $\|\cdot\|_{\mathbb{H}(F)}$ と表す。さらに, $D; \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(H \otimes F)$ の $\mathbb{H}(F)$ への拡張も同じ D で表す。また, 閉作用素 $D: L^2(\mathcal{F}, P; F) \rightarrow L^2(\mathcal{F}, P; H \otimes F)$ の共役作用素を D^* と表す。

D^* についてコメントしておく。 D^* は D の共役作用素のため,

$$E[\langle D\Phi, \eta \rangle_{H \otimes F}] = E[\langle \Phi, D^* \eta \rangle_F] \quad (\Phi \in \mathbb{H}(F), \eta \in H \otimes F)$$

となる, また D^* は有界ではなく, 定義域は

$$\text{Dom}(D^*) = \left\{ \eta \in L^2(\mathcal{F}, P; H \otimes F) \mid \exists C \geq 0 \text{ s.t. } |E[\langle D\Phi, \eta \rangle_{H \otimes F}]| \leq CE[|\Phi|_F^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\Phi \in \mathbb{H}(F)) \right\}$$

で与えられる。また, D は gradient の形をしているため, 共役作用素である D^* は divergence と解釈することもできる。また, Skorohod が [31] で導入した確率積分の拡張と D^* は一致するため, この D^* を Skorohod 積分ということもある。

Proposition 2.41. $X \in \mathbb{H}(F)$ を F -値の確率変数とし, $h \in H$ に対して, $\eta = h \otimes X$ とする。このとき,

$$D^*(h \otimes X) = XW(h) - (DX)h$$

となる。さらに, X と $W(h)$ は独立であるという仮定を付け加えると,

$$D^*(h \otimes X) = XW(h)$$

となる。

Proof. Proposition 2.35 より, ある列 $\{X_n\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F)$ が存在して, $X_n \rightarrow X$ in $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; F)$ となる。 X_n に対して, Corollary 2.38 より,

$$\mathbb{E}[\langle D\Phi, h \otimes X_n \rangle_{H \otimes F}] = \mathbb{E}[\langle (D\Phi)h, X_n \rangle_F] = \mathbb{E}[\langle \Phi, X_n W(h) - (DX_n)h \rangle_F] \quad (\forall \Phi \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F))$$

となる。よって, $n \rightarrow \infty$ とすることで, X についても同様の式が成り立つ。ゆえに, $D^*(h \otimes X) = XW(h) - (DX)h$ を得る。

また, 2 つ目の式は, X が $\mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(F) \ni X_n = \psi(W(h_1), \dots, W(h_n))$ ($h \perp h_j$ ($j = 1, \dots, n$)) によって, $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; F)$ 内で収束するので, Malliavin 微分の定義から,

$$(DX_n)h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(W(h_1), \dots, W(h_n)) \langle h_j, h \rangle_H = 0$$

となり, ゆえに

$$D^*(h \otimes X) = XW(h) - (DX)h = XW(h)$$

となる。 □

2.2.3 連鎖律

この節では, 連鎖律について述べる。まず次の Lemma を示しておく。

Lemma 2.42. $\{\Phi_n\}$ は $\mathbb{H}(F)$ 内の確率変数列とし, $\Phi_n \rightarrow \Phi$ in $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; F)$ とする。また, ある $C > 0$ が存在して, 任意の n に対して,

$$\mathbb{E}[\|D\Phi_n\|_{H \otimes F}^2] < C \tag{2.36}$$

とする。このとき, Φ は $\mathbb{H}(F)$ の元である。

Proof. $\{\Phi_n \in \mathbb{H}(F)\}$ と (2.36) より, $\|\Phi_n\|_{\mathbb{H}(F)} < C'$ となる。よって, ある部分列 $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して, Φ_{n_k} は $\tilde{\Phi}$ に $\mathbb{H}(F)$ の弱位相で収束する。また, 同じく (2.36) からある $\Psi \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; H \otimes F)$ が存在して, $\{D\Phi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ は Ψ に $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; H \otimes F)$ の弱位相で収束する。ここで, 仮定から $\Phi_{n_k} \rightarrow \Phi$ in $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; F)$ なので, 任意の $\eta \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(H \otimes F)$ に対して,

$$\mathbb{E}[\langle \Psi, \eta \rangle_{H \otimes F}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle D\Phi_{n_k}, \eta \rangle_{H \otimes F}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle \Phi_{n_k}, D^* \eta \rangle_F] = \mathbb{E}[\langle \Phi, D^* \eta \rangle_H] = \mathbb{E}[\langle D\Phi, \eta \rangle_{H \otimes F}]$$

より, $\{D\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Ψ に $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; H \otimes F)$ の弱位相で収束する。以上から, $\Phi = \tilde{\Phi}$ かつ $\Psi = D\tilde{\Phi}$ となり, $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Φ は $\mathbb{H}(F)$ の弱位相で収束する。ゆえに, $\Phi \in \mathbb{H}(F)$ となる。 □

Proposition 2.43. F と G を可分 Hilbert 空間とし, $\kappa : F \rightarrow G$ が存在して,

$$\|\kappa(x) - \kappa(y)\|_G \leq C\|x - y\|_F \quad (x, y \in F)$$

とする。このとき, 任意の確率変数 $\xi \in \mathbb{H}(F)$ に対して, $\kappa(\xi) \in \mathbb{H}(G)$, すなわち Malliavin 微分可能である。また, $\mathcal{L}(F; G)$ -値確率変数 Z が存在して, $\|Z\|_{\mathcal{L}(F; G)} \leq C$ a.s. かつ

$$D\kappa(\xi) = ZD\xi$$

となる

Remark 2.44. κ は Frechét 微分可能であるとき, $Z = \kappa'(\xi)$ a.s. となる。

Proof of Proposition 2.43. Lemma 2.42 より, $\kappa(\xi) \in \mathbb{H}(G)$ を示すためには, ある $\{\kappa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して, $\kappa_n(\xi) \rightarrow \kappa(\xi)$ in $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; G)$ と $\{D\kappa_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; H \otimes G)$ で有界であることを示せばよい。

$\{f^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を F の CONS とし, $\{r_i\}_{i=1}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準座標とし, $l_n \in \mathcal{L}_{(2)}(\mathbb{R}^n; F)$ で $\mathbb{R}^n$ から F への射影 $l_n \in \sum_{i=1}^n r^i \otimes f^i$ とする。また, $l_n^* \in \mathcal{L}_{(2)}(F; \mathbb{R}^n)$ を $l_n^* = \sum_{i=1}^n f^i \otimes r^i$ とする。また, 任意の n に対して, $j_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を有界, 2 階微分可能で $\text{supp } j_n = B^n$ であり, $\int_{\mathbb{R}^n} j_n(x) dx = 1$ とする。ただし, B^n は $\mathbb{R}^n$ の単位球である。さらに $\varepsilon > 0$ に対して, $j_n^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} l_n(\frac{x}{\varepsilon})$ とする。

ここで, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ とし, さらに κ_n を

$$\kappa_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_n^\varepsilon(y - l_n^* x) \kappa(l_n y) dy$$

とする。このとき変数変換より,

$$\kappa_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_n^\varepsilon(y) \kappa(l_n y + l_n l_n^* x) dy$$

となる。これより,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\kappa(\xi) - \kappa_n(\xi)\|_G^2] &= \mathbb{E}\left[\left\|\int_{\mathbb{R}^n} j_n^\varepsilon(y) (\kappa(\xi) - \kappa(l_n y + l_n l_n^* \xi)) dy\right\|_G^2\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|j_n^\varepsilon(y) (\kappa(\xi) - \kappa(l_n y + l_n l_n^* \xi))\|_G dy\right)^2\right] \\ &\leq C^2 \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|j_n^\varepsilon(y) (\xi - l_n y + l_n l_n^* \xi)\|_F dy\right)^2\right] \\ &\leq C^2 \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |j_n^\varepsilon(y)| (\|\xi + l_n l_n^* \xi\|_F + \|l_n y\|_F) dy\right)^2\right] \\ &\leq C^2 \mathbb{E}\left[\left(\|l_n l_n^* \xi - \xi\|_F \int_{\mathbb{R}^n} \|j_n^\varepsilon(y)\| dy + \int_{\mathbb{R}^n} |j_n^\varepsilon(y)| \|y\| dy\right)^2\right] \\ &\leq 2C^2 K \mathbb{E}[\|l_n l_n^* \xi - \xi\|_F^2] + 2C^2 \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |j_n^\varepsilon(y)| \|y\| dy\right)^2\right] \quad (2.37) \end{aligned}$$

ここで,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |j_n^\varepsilon(y)| \|y\| dy = \int_{\mathbb{R}^n} n^n |j_n(ny)| \|y\| dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left\| j_n(z) \frac{z}{n} \right\| dz = \frac{1}{n} \int_{B^n} \|j_n(z)\| dz = \frac{K}{n}$$

であり、また、

$$\|(l_n l_n^* - I)\xi\|_F^2 \leq \|l_n l_n^* - I\|^2 \|\xi\|_F^2 \leq M \|\xi\|_F^2$$

$\xi \in \mathbb{H}(F)$ より、 $M \|\xi\|_F^2$ は可積分である。よって、Lebesgue の優収束定理より、(2.37) $\rightarrow 0$ となる。ゆえに、 $\kappa_n(\xi) \rightarrow \kappa(\xi)$ in $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; G)$ となる。

さらに

$$\begin{aligned} D\kappa_n(\xi) &= D \int_{\mathbb{R}^n} j_n^\varepsilon(y - l_n^* \xi) \kappa(l_n y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \kappa(l_n y) \otimes (D j_n^\varepsilon(y - l_n^* \xi)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \kappa(l_n y) \otimes (\nabla j_n^*(y - l_n^* \xi) D l_n^* \xi) dy \end{aligned}$$

となり、 κ_n は Lipschitz 条件を持つので、

$$\mathbb{E}[\|D\kappa_n(\xi)\|_{H \otimes G}^2] \leq C^2 \mathbb{E}[\|D\xi\|_{H \otimes F}^2] < \infty$$

となる。よって、 $D\kappa_n(\xi)$ は $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; H \otimes G)$ で有界となる。ゆえに、Lemma 2.42 より、 $\kappa(\xi) \in \mathbb{H}(G)$ となる。さらに、 $D\kappa_n(\xi)$ は $D\kappa(\xi)$ に $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; H \otimes G)$ の弱位相で収束する。

最後に、 κ_n は Lipschitz 条件を持つので、 $\nabla \kappa_n(\xi)$ は $L^\infty(\mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{L}(F; G))$ で有界となる。よって、ある部分列 $\{\nabla \kappa_{n_k}(\xi)\}_{k \in \mathbb{N}}$ と確率変数 Z が存在して、 $\nabla \kappa_{n_k} D\xi$ は $ZD\xi$ に $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; G)$ の弱位相で収束する。よって、 $D\kappa_n(\xi) = \nabla \kappa_n(\xi) D\xi$ より、 $D\kappa(\xi) = ZD\xi$ となる。よって、示せた。 $\square$

2.2.4 微分作用素 D_t と Clark-Ocone Formula

以下、 G を可分 Hilbert 空間とし、 $H = L^2([0, T]; G)$ とする。このとき、 $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ を G 上の柱状 Wiener 過程とすると、 H 上の Gauss 場は $W(h) = \int_0^T h(t) dW_t$ となる。以下、 $\mathcal{F}$ を $\sigma(W_t; t \in [0, T])$ を完備化したものとし、フィルトレーションを $\mathcal{F}_t = \mathcal{N} \cup \sigma(W_s; s \leq t)$ とする。ただし、 $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} | \mathbb{P}(N) = 0\}$ である。

ここで、 $\{\Phi_i\}_{i=1, \dots, m} \in \mathcal{P}_{\mathcal{O}\mathcal{L}}$ と $\{f_i\}_{i=1, \dots, m} \in F$ に対して、 $\Phi = \sum_{i=1}^m \Phi_i f_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{O}\mathcal{L}}(F)$ とする。このとき、 $D\Phi = \sum_{i=1}^m D\Phi_i \otimes f_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{O}\mathcal{L}}(H \otimes F)$ となり、また $h \in H$ に対して、 $D_h \Phi = \sum_{i=1}^m \langle D\Phi_i, h \rangle_H f_i$ であった。ここで、 $H = L^2([0, T]; G)$ であるので、

$$\begin{aligned} D_h \Phi &= \sum_{i=1}^m \left(\int_0^T \langle D\Phi_i(s), h(s) \rangle_G ds \right) f_i = \int_0^T \left\langle \sum_{i=1}^m D\Phi_i(s), h(s) \right\rangle_G f_i ds \\ &= \int_0^T \left(\sum_{i=1}^m D\Phi_i(s) \otimes f_i \right) h(s) ds \end{aligned}$$

となり、 $D_s \Phi := \sum_{i=1}^m D\Phi_i(s) \otimes f_i$ とし、 D のときと同様に D_t の定義域を $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; F)$ に拡張できる。また、 D の共役作用素 D^* について、次のことが分かる。

Theorem 2.45. $\alpha \in L^2(\mathcal{P}; G \otimes F)$ とする。このとき $\alpha \in \text{Dom}(D^*)$ で

$$D^* \alpha = \int_0^T \alpha_s dW_s$$

となる。ただし、この確率積分は Definition 2.16 の意味である。

Proof. まず, $\alpha_t = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \alpha_{t_i}$ とする。ただし, $\alpha_{t_i} = \sum_{j=1}^M g^{(j)} \otimes \alpha_{t_i}^{(j)}$ とし, これは $\mathcal{F}_{t_i}$ -可測で, $\{g^{(j)}\}_j$ は G の決定論的な直交ベクトルである。 F -値確率変数 $\alpha_{t_i}^{(j)}$ は $\int_{t_i}^{t_{i+1}} g^i dW_s$ と独立であるので,

$$\begin{aligned} D^*(\alpha) &= \sum_{i=0}^{N-1} D^*(\mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \alpha_{t_i}) = \sum_{i=0}^{N-1} D^*\left(\mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \sum_{j=1}^M g^{(j)} \otimes \alpha_{t_i}^{(j)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M D^*\left(g^{(j)} \otimes \alpha_{t_i}^{(j)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M \alpha_{t_i}^{(j)} W\left(g^{(j)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M \alpha_{t_i}^{(j)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g^{(j)} dW_s = \int_0^T \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M g^{(j)} \otimes \alpha_{t_i}^{(j)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) dW_s = \int_0^T \alpha_s dW_s \end{aligned}$$

となる。今, D^* は閉作用素で, 上のような α は $L^2(\mathcal{P}; G \otimes F)$ 上で稠密に存在するので, 定義域を拡張できる。よって, 示せた。 $\square$

次に, この節の主題である Clark-Ocone Formula を導出する際に使う式を示す。

Theorem 2.46. $\{\beta_t\}_{t \in [0, T]} \in L^2(\mathcal{P}; G \otimes F)$ とし, $\xi \in \mathbb{H}(F)$ とする。このとき,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \langle D_t \xi, \beta_t \rangle_{G \otimes F} dt \right] = \mathbb{E} \left[\left\langle \xi, \int_0^T \beta_t dW_t \right\rangle_F \right]$$

となる。

Proof.

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \langle D_t \xi, \beta_t \rangle_{G \otimes F} dt \right] = \mathbb{E} [\langle D\xi, \beta \rangle_{H \otimes F}] = \mathbb{E} [\langle \xi, W(\beta) \rangle_F] = \mathbb{E} \left[\left\langle \xi, \int_0^T \beta_t dW_t \right\rangle_F \right]$$

$\square$

次に, この節の主題である Clark-Ocone Formula を示す。この公式はマルチンゲール表現定理 (Theorem 2.25) における積分核を Malliavin 微分を使って, 具体的に表せるというものである。

Theorem 2.47 (Clark-Ocone Formula). $\xi \in \mathbb{H}(F)$ を $\mathcal{F}_T$ 可測な確率変数とすると, このとき,

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T \mathbb{E}[D_t \xi | \mathcal{F}_t] dW_t$$

となる。

Proof. $\xi \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; F)$ なので, マルチンゲール表現定理 (Theorem 2.25) より, 確率過程 $\{\alpha_t\}_{t \in [0, T]} \in L^2(\mathcal{P}; G \otimes F)$ が存在して, $\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T \alpha_t dW_t$ とできる。また, $\mathbb{E}[\xi] = 0$ としても, 一般性を失わない。このとき, $\{\beta_t\}_{t \in [0, T]} \in L^2(\mathcal{P}; G \otimes F)$ を取ってくると,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle D_t \xi, \beta_t \rangle_{G \otimes F} dt \right] &= \mathbb{E} \left[\left\langle \xi, \int_0^T \beta_t dW_t \right\rangle_F \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left\langle \int_0^T \alpha_t dW_t, \int_0^T \beta_t dW_t \right\rangle_F \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \alpha_t, \beta_t \rangle_{G \otimes F} dt \right] \end{aligned}$$

となる。よって, $\lambda_t := D_t \xi - \alpha_t$ とすると, $E[\int_0^T \langle \lambda_t, \beta_t \rangle_{G \otimes F} dt] = 0$ となる。さらに, $\beta_t = E[\lambda_t | \mathcal{F}_t]$ とすると,

$$\begin{aligned} 0 &= E \left[\int_0^T \langle \lambda_t, E[\lambda_t | \mathcal{F}_t] \rangle_{G \otimes F} dt \right] \\ &= E \left[\int_0^T \|E[\lambda_t | \mathcal{F}_t]\|_{G \otimes F}^2 dt \right] + E \left[\int_0^T \langle \lambda_t - E[\lambda_t | \mathcal{F}_t], E[\lambda_t | \mathcal{F}_t] \rangle_{G \otimes F} dt \right] \\ &= E \left[\int_0^T \|E[\lambda_t | \mathcal{F}_t]\|_{G \otimes F}^2 dt \right] \quad (\because \langle \lambda_t - E[\lambda_t | \mathcal{F}_t], E[\lambda_t | \mathcal{F}_t] \rangle_{G \otimes F} = 0) \end{aligned}$$

となる。よって, $\alpha_t = E[D_t \xi | \mathcal{F}_t]$ $P \times \text{Leb-a.e.}$ となる。 $\square$

2.2.5 mild solution と Malliavin 微分

次に mild solution の Malliavin 微分可能性について述べる。その前に Proposition をいくつか与える。 F, G, H は可分 Hilbert 空間とする。

Proposition 2.48. $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(H \otimes F)$ とする。このとき,

$$D(D^* \alpha) = \alpha + D^* D \alpha \quad (2.38)$$

が成立する。

Proof. $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}(H \otimes F)$ より,

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j(h_j \otimes f_j) \quad (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathcal{OL}}, h_j \in H, f_j \in F, j = 1, \dots, n)$$

と表せる。このとき,

$$D^* \alpha = \sum_{j=1}^n D^*(\alpha_j(h_j \otimes f_j)) = \sum_{j=1}^n (W(h_j) \alpha_j f_j - D(\alpha_j f_j) h_j)$$

となるので,

$$\begin{aligned} DD^* \alpha &= \sum_{j=1}^n (D(W(h_j) \alpha_j f_j) - D(D(\alpha_j f_j) h_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j(h_j \otimes f_j) + \sum_{j=1}^n (W(h_j) D(\alpha_j f_j) h_j - D(D(\alpha_j f_j) h_j)) \\ &= \alpha + \sum_{j=1}^n (W(h_j) D(\alpha_j f_j) h_j - D(D(\alpha_j f_j) h_j)) \\ &= \alpha + D^* D \alpha \end{aligned}$$

となる。よって, 示せた。 $\square$

次に $H = L^2([0, T]; G)$ とする。このとき, D_t についても (2.38) が成り立つことがすぐに分かる。以下 Proposition として, 与えておく。

Proposition 2.49. $\{\alpha_t\}_{t \in [0, T]} \in L^2(\mathcal{P}; G \otimes F)$ とし, さらに任意の $t \in [0, T]$ に対して, $\alpha_t \in \mathbb{H}(G \otimes F)$ とする。このとき,

$$D_t \int_0^T \alpha_s dW_s = \alpha_t + \int_0^T D_t \alpha_s dW_s \quad (2.39)$$

となる。

Proof. まず, $\alpha_t = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \alpha_{t_i}$ とする。ただし, $\alpha_{t_i} = \sum_{j=1}^M g^{(j)} \otimes \alpha_{t_i}^{(j)}$ とし, これは $\mathcal{F}_{t_i}$ -可測で, $\{g^{(j)}\}_j$ は G の決定論的な直交ベクトルである。 F -値確率変数 $\alpha_{t_i}^{(j)}$ は $\int_{t_i}^{t_{i+1}} g^i dW_s$ と独立であるので,

$$\int_0^T \alpha_s dW_s = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M \alpha_{t_i}^{(j)} W \left(g^{(j)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) \right)$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} D_t \left(\int_0^T \alpha_s dW_s \right) &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M \left(D_t \alpha_{t_i}^{(j)} W \left(g^{(j)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) \right) + \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \left(g^{(j)} \otimes \alpha_{t_i}^{(j)} \right) \right) \\ &= \alpha_t + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M D_t \alpha_{t_i}^{(j)} W \left(g^{(j)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) \right) \\ &= \alpha_t + \int_0^T \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M (D_t \alpha_{t_i}^{(j)}) \otimes g^{(j)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) dW_s \\ &= \alpha_t + \int_0^T D_t \alpha_s dW_s \end{aligned}$$

となる。あとは D_t は閉作用素であり, 上のような α は $L^2(\mathcal{P}; G \otimes F)$ 上で稠密に存在するので, 定義域を拡張できる。よって, 示せた。 $\square$

このことを使って, F -値確率変数 $\xi := X_T$ の Malliavin 微分を考える。ただし, $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ は, SPDE

$$dX_t = (AX_t + a(t, X_t))dt + b(t, X_t)dW_t$$

の mild solution とし, $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ は G 上の柱状 Wiener 過程とし, A は F 上の強連続半群 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ の生成作用素とし, $a : \mathbb{R}_+ \times F \rightarrow F$ と $b : \mathbb{R}_+ \times F \rightarrow G \otimes F$ は Lipschitz 条件と緩増大条件を満たしている。

このとき, Theorem 2.28 から, 唯一の F -値 mild solution が存在して,

$$X_t = S_t X_0 + \int_0^t S_{t-s} a(s, X_s) ds + \int_0^t S_{t-s} b(s, X_s) dW_s \quad (2.40)$$

を満たす。また, a と b は t と X_t にのみ依存しているため, $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ はマルコフ型となる。次の Theorem で (2.40) の Malliavin 微分の存在を示す。

Theorem 2.50. 任意の $T \geq 0$ に対して, $X_T \in \mathbb{H}(F)$ となる。

Proof. Lemma 2.42 より, Malliavin 微分可能な列 $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ で, X_t に $L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P}; F)$ 内で収束し, $\{DX_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $L^2(\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}, \text{Leb} \times \mathbb{P}; G \otimes F)$ で一様に有界な列を見つけられればよい。Picard の逐次近似法での列を使うことにする。すなわち, $X_t^{(0)} = S_t X_0$ とし, $n \geq 1$ に対して,

$$X_t^{(n+1)} = S_t X_0 + \int_0^t S_{t-u} a(u, X_u) du + \int_0^t S_{t-u} a(u, X_u^{(n)}) du + \int_0^t S_{t-u} b(u, X_u^{(n)}) dW_u$$

とする。これは Theorem 2.28 から , X_t に $L^2(\mathcal{F}, P; F)$ 内で収束することがすぐに分かる。さらに , Proposition 2.49 を使うと ,

$$\begin{aligned} D_s X_t^{(n+1)} &= S_{t-s} b(s, X_s^{(n)}) + \int_0^t S_{t-u} D_s a(u, X_u^{(n)}) du + \int_0^t S_{t-u} b(u, X_u^{(n)}) dW_u \\ &= S_{t-s} b(s, X_s^{(n)}) + \int_0^t S_{t-u} Z_a D_s X_u^{(n)} du + \int_0^t S_{t-u} Z_b D_s X_u^{(n)} dW_u \end{aligned}$$

となる。ここで , $M := \sup_{t \in [0, T]} \|b(s, X_s^{(n)})\|$ とし , a と b の Lipschitz 係数を K とすると ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\|D_s X_t^{(n+1)}\|_{G \otimes F}^2] \\ & \leq 9\mathbb{E}[\|S_{t-s} b(s, X_s^{(n)})\|_{G \otimes F}^2] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \|S_{t-u} Z_a D_s X_u^{(n)}\|_{G \otimes F}^2 du \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\left\| \int_0^t S_{t-u} Z_b D_s X_u^{(n)} dW_u \right\|_{G \otimes F}^2 \right] \\ & \leq 9\mathbb{E}[\|S_{t-s} b(s, X_s^{(n)})\|_{G \otimes F}^2] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \|S_{t-u} Z_a D_s X_u^{(n)}\|_{G \otimes F}^2 du \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t \|S_{t-u} Z_b D_s X_u^{(n)}\|^2 du \right] \\ & \leq 9M^2 \mathbb{E}[\|b(s, X_s^{(n)})\|_{G \otimes F}^2] + 9M^2 K^2 \int_0^t \mathbb{E}[\|D_s X_u^{(n)}\|_{G \otimes F}^2] du \\ & \quad + 9M^2 K^2 \int_0^t \mathbb{E}[\|D_s X_u^{(n)}\|_{G \otimes F}^2] du \\ & =: C \mathbb{E}[\|b(s, X_s^{(n)})\|_{G \otimes F}^2] + C' \int_0^t \mathbb{E}[\|D_s X_u^{(n)}\|_{G \otimes F}^2] du \end{aligned} \tag{2.41}$$

となる。ここで , $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|X_t^{(n)}\|^2] < \infty$ であり , $D_s X_t^{(0)} = 0$ となるので , $\sup_s \mathbb{E}[\|D_s X_t^{(n)}\|^2] < \infty$ ($\forall n$) となる。よって , (2.41) と Gronwall の不等式から

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\|D_s X_t^{(k)}\|^2] &\leq C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\|b(s, X_s^{(n)})\|_{G \otimes F}^2] + C' \int_0^t \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\|D_s X_u^{(n)}\|_{G \otimes F}^2] du \\ &\leq C e^{C'T} \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\|b(s, X_s^{(n)})\|_{G \otimes F}^2] \end{aligned}$$

となる。さらに , b は緩増大条件を満たしているので ,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\int_0^T \|D_s X_T^{(k)}\|_{G \otimes F}^2 ds \right] < \infty$$

となる。よって , 示せた。 $\square$

ここで , 一度 Malliavin 解析から離れて , ランダムオペレーターについて考える。ここまで , ある Hilbert 空間から別の Hilbert 空間へのランダム作用素を扱ったが , さらに一般のランダム作用素について定義する。

Definition 2.51. H_1 から H_2 への強ランダム作用素とは , H_1 によりパラメータ付けられた H_2 -値確率過程 $\{Y(h)\}_{h \in H_1}$ で h について線形である。すなわち $Y(f+g) = Y(f) + Y(g)$ a.s. となるものをいう。

例えば, $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ -値確率変数は強ランダム作用素となる。次に強ランダム作用素の共役作用素を考えたい。しかし, 多くの場合, 強ランダム作用素の共役作用素は強ランダム作用素とならない。そのために弱ランダム作用素を定義する。

Definition 2.52. Z が H_1 から H_2 への弱ランダム作用素であるとは, $\mathbb{R}$ -値確率過程 $Z = \{Z(f, g); f \in H_1, g \in H_2\}$ で f と g の両方について, 線形となるものをいう。さらに, このとき強ランダム作用素 Y の共役作用素は, 弱ランダム作用素 Y^* により, $Y^*(f, g) = \langle Y(f), g \rangle_{H_2}$ で定義される。

さらに, 強ランダム作用素として, 確率積分を考えたい。 H_1, H_2, G は可分 Hilbert 空間とする。このとき, $G \otimes H_2$ も可分 Hilbert 空間となり, さらに $G \otimes H_2$ 上への強ランダム作用素 $\{Y(h)\}_{h \in H_1}$ を定義できる。今, 確率過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ に値をとる強ランダム作用素を考える。ただし, Y_t は各 $t \geq 0$ に対して, H_1 から $G \otimes H_2$ への強ランダム作用素である。このとき, $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ が可予測過程で, $h \in H_1$ に対して $\int_0^t \|Y_s(h)\|_{G \otimes H_2}^2 ds < \infty$ ならば,

$$\left(\int_0^t Y_s \cdot dW_s \right) (h) = \int_0^t Y_s(h) dW_s$$

とする。このとき, $\int_0^t Y_s \cdot dW_s$ は H_1 から H_2 への強ランダム作用素でとなる。ただし, $\{W_t\}_{t \geq 0}$ は G 上の柱状 Wiener 過程とする。

ここで, SPDE の mild solution $\{X_t\}_{t \geq 0}$ に対する Malliavin 微分に戻る。 $X_t \in \mathbb{H}(F)$ ($\forall t \geq 0$) なので, Proposition 2.49 より, $\{D_s X_t\}_{t \in [s, T]}$ は

$$D_s X_t = S_{t-s} b(s, X_s) + \int_0^t S_{t-s} D_s a(u, X_u) du + \int_0^t S_{t-s} D_s b(u, X_u) dW_u$$

となり, さらに, Proposition 2.43 より, $a(t, X_t), b(t, X_t)$ が Frechét 微分可能であるとき, $a(t, x)$ の x に対する F 上の Frechét 微分を $\nabla a(t, x)$ と書くことにする。このとき,

$$D_s X_t = S_{t-s} b(s, X_s) + \int_0^t S_{t-s} \nabla a(u, X_u) D_s X_u du + \int_0^t S_{t-s} \nabla b(u, X_u) D_s X_u dW_u$$

となる。この方程式は線形であるので, その解は次の方程式の解 $\{Y_{s,t}\}_{0 \leq s \leq t \leq T}$ から得られる。

$$Y_{s,t} = S_{t-s} + \int_0^t S_{t-u} \nabla a(u, X_u) Y_{s,u} du + \int_0^t S_{t-u} \nabla b(u, X_u) Y_{s,u} \cdot dW_u \quad (2.42)$$

この方程式 (2.42) は, Theorem 2.28 のときと同様に Picard の逐次近似法を用いて, 強ランダム作用素の意味で解が存在することが分かり, さらに, このとき

$$D_s X_t = Y_{s,t} b(s, X_s)$$

を得る。

3 数理ファイナンス

この章を通じて, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とし, $\{W_t\}_{t \geq 0}$ を $\mathbb{R}^d$ -値 Wiener 過程, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ を Wiener 過程からなるフィルトレーションとし, 右連続で $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の P -零集合をすべて含むと仮定する。また, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ とする。

さらに

$$\mathcal{L}^2 := \left\{ \{f_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} \mid f_t(\omega) \text{ は } \mathbb{R}\text{-値 } \{\mathcal{F}_t\}\text{-適当な確率過程で, } \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, \infty))\text{-可測, } E \left[\int_0^\infty f_t^2 dt \right] < \infty \right\}$$

とする。

3.1 ポートフォリオ

Definition 3.1 (市場モデル). $T > 0$ とする。 $\mathbb{R}^{d+1}$ -値確率過程 $\{(B_t, P_t^{(1)}, \dots, P_t^{(d)})\}_{t \in [0, T]}$ が市場モデルであるとは, $\mathcal{F}_t$ -可測な確率過程 $\{r_t\}_{t \in [0, T]}$, $\{\mu_t^i\}_{t \in [0, T]}$, $\{\sigma_t^{i,n}\}_{t \in [0, T]}$ が

$$\sup_{t \geq 0, \omega \in \Omega} |r_t(\omega)| < \infty, \quad P \left(\int_0^T |\mu_t^i| dt < \infty \right) = 1, \quad \{\sigma_t^{i,n}\}_{t \in [0, T]} \in \mathcal{L}^2 \quad 0 \leq i \leq N, \quad 1 \leq n \leq d$$

を満たし, $B_t, P_t^{(i)}$ が次のように表現されるときにいう。

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B_0 = 1, \quad dP_t^{(i)} = \sum_{n=1}^d \sigma_t^{i,n} dW_t^n + \mu_t^i dt, \quad P_0^{(i)} = x^{(i)}$$

ここでは, B_t を安全資産といい, 特に銀行預金とする。

Definition 3.2. (i) $\mathcal{F}_t$ -適当な $\mathbb{R}^{d+1}$ -値確率過程 $\{\psi_t, \phi_t^{(1)}, \dots, \phi_t^{(d)}\}_{t \in [0, T]}$ をポートフォリオといい, 時点 $t \geq 0$ での資産を

$$X_t = \psi_t B_t + \langle \phi_t, P_t \rangle = \psi_t B_t + \sum_{j=1}^d \phi_t^{(j)} P_t^{(j)} \quad (3.1)$$

とおく。

(ii) ポートフォリオが市場に対して, self-financing であるとは,

$$P \left(\int_0^T \left| \psi_t r_t B_t + \sum_{i=1}^N \phi_t^{(i)} \mu_t^i \right| dt < \infty \right) = 1, \quad \{\sigma_t^{i,n}\}_{1 \leq n \leq d, 1 \leq i \leq N} \in \mathcal{L}^2$$

$$dX_t = \psi_t dB_t + \langle \phi_t, dP_t \rangle = \psi_t dB_t + \sum_{j=1}^d \phi_t^{(j)} dP_t^{(j)}$$

が成立する時にいう。これを経済的に説明すると, ポートフォリオを保有する投資家は特別な支出や収入を持たず, 資産の変化は証券価格の変動にのみ依存しているということである。

ここで, ポートフォリオ戦略について考える。まず最初に可予測な取引戦略を考える。すなわち, $\{(B_t, P_t^{(1)}, \dots, P_t^{(d)})\}_{0 \leq t \leq T}$ で各成分を $\phi_t^{(j)} = \sum_{i=1}^m \phi_{t_i}^{(j)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$ とする。ただし, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ は決定論的で, $\phi_{t_i}^{(j)}$ は $\mathcal{F}_{t_i}$ -可測とする。これより, self-financing 条件は

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \psi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \langle \phi_{t_i}, P_{t_{i+1}} - P_{t_i} \rangle \quad (3.2)$$

となる。ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積である。ここで、 B_t を基本財とし、割引資産を $\tilde{X}_t = \frac{X_t}{B_t}$ 、割引証券価格を $\tilde{P}_t = \frac{P_t}{B_t}$ としたとき、(3.1) より、

$$\psi_t = \tilde{X}_t - \langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle$$

となる。これを (3.1) に代入して、計算すると

$$\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i} = \langle \phi_t, \tilde{P}_{t_i} \rangle \quad (3.3)$$

となる。

(3.3) において、間隔を 0 に持っていくことで、連続取引として表すことができる。つまり、割引資産は確率微分方程式 $d\tilde{X}_t = \langle \phi_t, d\tilde{P}_t \rangle$ を満たす。これを積分表示すると、

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle$$

となる。さらに取引戦略を経済的に意味のあるものにするために次の定義を与える。

Definition 3.3 (許容可能). 取引戦略 $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ が許容可能であるとは、 $\int_0^t \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle$ が $t \geq 0, \omega \in \Omega$ で一様に下から有界のときである。

4 章の中での債券ポートフォリオの議論の中では、ここで定義した self-financing な戦略とは違った定義を使う。しかし、いずれの場合も上の定義が基本にある。次に、理論の最も中心的な概念を定義する。

Definition 3.4 (裁定機会). 裁定機会とは、許容可能な取引戦略 $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ 存在して、

$$P \left(\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle \geq 0 \right) = 1 \text{ かつ } P \left(\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle > 0 \right) > 0 \quad (T > 0)$$

となることである。このような取引戦略が存在しないとき、無裁定であるという、

Theorem 3.5 (数理ファイナンスの第一基本定理). P が同値な確率測度 Q が存在し、割引証券価格過程 $\{\tilde{P}_t\}_{t \geq 0}$ は Q に対して、局所マルチンゲールするとき裁定機会は存在しない。

Proof. 裁定機会が存在すると、仮定して矛盾を導く。

$\{\tilde{P}_t\}_{t \geq 0}$ が局所マルチンゲールとなるような同値な測度 Q が存在するとし、 $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ は許容可能な戦略で、 $\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle \geq 0$ P -a.s. ($T > 0$) とする。 Q は P と同値より上は Q -a.s. でも成り立つ。

また、 $\{\tilde{P}_t\}_{t \geq 0}$ は、 Q に対して局所マルチンゲールで $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ は許容可能なので、 $\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle$ は下に有界な局所マルチンゲールとなる。よって、ある stopping time の増大列 $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在し、Fatou の補題から、

$$\begin{aligned} E_Q \left[\int_0^t \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle \right] &= E_Q \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \sigma_n} \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle \right] \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_Q \left[\int_0^{t \wedge \sigma_n} \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここで、裁定機会が存在するという仮定から、

$$P \left(\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle \geq 0 \right) = 1, \quad P \left(\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle > 0 \right) > 0$$

であるので, $P \sim Q$ から,

$$Q\left(\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle \geq 0\right) = 1, \quad Q\left(\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle > 0\right) > 0$$

よって,

$$E_Q\left[\int_0^T \langle \phi_s, d\tilde{P}_s \rangle\right] > 0$$

これは矛盾。よって, 示せた。 □

3.2 HJM Model

3.2.1 記号の導入

$\tau > 0$ ですべての債券の満期が $T < \tau$ とする。

Definition 3.6. 満期 T , 額面 1 のゼロクーポン債の時点 t での価格を $P(t, T)$ ($\forall t \in [0, T]$) とし, 時点 t でのフォワードレート $f(t, T)$ を

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.4)$$

とする。また, 時点 t でのイールド (最終利回り) $Y(t, T)$ を

$$Y(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T - t} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.5)$$

とする。さらに (3.4) と (3.5) より,

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s)ds\right) \quad (3.6)$$

$$Y(t, T) = \frac{\int_t^T f(t, u)du}{T - t} \quad (3.7)$$

となる。また, 時点 t でのスポットレートを下記のように定義する。

$$r(t) = f(t, t) \quad (3.8)$$

Remark 3.7. ゼロクーポン債とは期中にクーポン支払が無い債券である。またこの修士論文内では信用リスクが無い, 即ち債務不履行とならない債券のみを考える。一方, フォワードレート $f(t, T)$ は時点 t における T での瞬間的な利子率を表しており, 一方スポットレート $r(t)$ は現時点 t での瞬間的な利子率, イールドは時点 t から満期 T までの平均利子率を表している。

また, $P(t, T)$ を t を止めるごとに T の関数として見たものを時点 t における $P(t, T)$ の期間構造といい, 特に $P(t, T)$ の時は割引関数という。同様に $Y(t, T)$ の時点 t での期間構造をイールドカーブといい, $f(t, T)$ の時点 t での期間構造をフォワードカーブという。

一般に満期が遠いほうが不確実性が増すため, イールドカーブは「右上がり」になる。しかし, 現在の金利が高く将来的に金利が下がると予想される場合, イールドカーブは逆転し, 「右下がり」となる。このようなイールドカーブを逆イールドカーブというときもある。

Definition 3.8 (HJM). 任意に $T \in [0, \tau]$ を固定しておく。このとき, $f(t, T)$ は次を満たすとする。

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sum_{n=1}^d \sigma_n(t, T)dW_t^{(n)}, (0 \leq t \leq T) \quad (3.9)$$

ただし, 上の式は次のような意味である。

1. $f(0, T) = f_0(T)$ は決定論的な関数で, 以下固定しておく。
2. $\alpha : \{(t, s); 0 \leq t \leq s \leq T\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}\{(t, s); 0 \leq t \leq s \leq T\} \times \mathcal{F}$ -可測で, $\mathcal{F}_t$ -適合である。また, $\int_0^T |\alpha(t, T)|dt < \infty$ (a.e.) とする。
3. $\sigma_n \in \mathcal{L}^2$ ($1 \leq n \leq d$) とする。

(3.8), (3.9) より,

$$dr(t) = \alpha(t, t)dt + \sum_{n=1}^d \sigma_n(t, t)dW_t^{(n)}, (0 \leq t \leq T) \quad (3.10)$$

また, 無リスク預金を $B_t = \exp(\int_0^t r(y)dy)$ ($\forall t \in [0, \tau]$) とする。このとき, $0 < B_t < \infty$ である。これは次を仮定することで保障される。

Assumption 3.9. $\int_0^\tau |f(0, v)|dv < \infty$ と $\int_0^\tau \left\{ \int_0^t |\alpha(v, t)|dv \right\} dt < \infty$ a.e. が成立する。

3.2.2 債券価格過程の算出

ここでは, フォワードレートが (3.9) を満たすときに, これから算出される債券価格がどのような確率微分方程式を満たしているかを考える。まず, 債券価格過程が良い動きをするための十分条件を与えておく。

Assumption 3.10. 1. $\int_0^t E[(\int_v^t \sigma_n(v, y)dy)^2]^{\frac{1}{2}} dv < \infty \quad \forall t \in [0, \tau]$ and $n = 1 \cdots d$

2. $\int_0^t E[(\int_t^T \sigma_n(v, y)dy)^2]dv < \infty \quad \forall t \in [0, T], T \in [0, \tau]$ and $n = 1 \cdots d$

3. $t \longrightarrow \int_t^T [\int_0^t \sigma_n(v, y)dW_v^{(n)}]dy < \infty$ は P-a.s. に連続である。

次の定理で, 相対価格 $\tilde{P}(t, T) = \frac{P(t, T)}{B_t}$ を満たす方程式を考える。

Theorem 3.11. Assumption 3.9 および Assumption 3.10 を仮定しておく。フォワードレートが (3.9) の形で与えられたとき, 割引債券価格は次の確率微分方程式を満たす。

$$\frac{d\tilde{P}(t, T)}{\tilde{P}(t, T)} = b(t, T)dt + \sum_{n=1}^d a_n(t, T)dW_t^{(n)} \quad (3.11)$$

ただし, $a_n(t, T) = -\int_t^T \sigma_n(t, u)du$, $b(t, T) = -\int_t^T \alpha(t, u)du + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^d a_n^2(t, T)$ とする。

Proof. (3.6) より, $\log P(t, T) = -\int_t^T f(t, u)du$ である。この右辺に (3.9) の積分形を代入する。

$$\begin{aligned} & \log P(t, T) \\ = & -\int_t^T f(0, u)du - \int_t^T \left[\int_0^t \alpha(v, u)dv \right] du - \int_t^T \left[\sum_{n=1}^d \int_0^t \sigma_n(v, u)dW_v^{(n)} \right] du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_t^T f(0, u) du - \int_0^t \left[\int_t^T \alpha(v, u) du \right] dv - \sum_{n=1}^d \int_0^t \left[\int_t^T \sigma_n(v, u) du \right] dW_v^{(n)} \\
&= - \int_0^T f(0, u) du - \int_0^t \left[\int_v^T \alpha(v, u) du \right] dv - \sum_{n=1}^d \int_0^t \left[\int_v^T \sigma_n(v, u) du \right] dW_v^{(n)} \\
&\quad + \int_0^t f(0, u) du + \int_0^t \left[\int_v^t \alpha(v, u) du \right] dv + \sum_{n=1}^d \int_0^t \left[\int_v^t \sigma_n(v, u) du \right] dW_v^{(n)} \\
&= \log P(0, T) - \int_0^t \left[\int_v^T \alpha(v, u) du \right] dv - \sum_{n=1}^d \int_0^t \left[\int_v^T \sigma_n(v, u) du \right] dW_v^{(n)} \\
&\quad + \int_0^t f(0, u) du + \int_0^t \left[\int_0^u \alpha(v, u) dv \right] du + \sum_{n=1}^d \int_0^t \left[\int_0^u \sigma_n(v, u) dW_v^{(n)} \right] du \\
&= \log P(0, T) - \int_0^t \left[\int_v^T \alpha(v, u) du \right] dv - \sum_{n=1}^d \int_0^t \left[\int_v^T \sigma_n(v, u) du \right] dW_v^{(n)} + \int_0^t r(u) du
\end{aligned}$$

となる。ただし 4 行目から 5 行目は、通常の Fubini の定理および Stochastic Fubini の定理を用いた。また、5 行目から 6 行目は (3.10) を用いた。

ここで、 $a_n(t, T) = - \int_v^T \sigma_n(v, u) du$ を代入し、また $d \log B_t = r(t) dt$ であるから、Itô の公式から

$$\begin{aligned}
d\tilde{P}(t, T) &= \tilde{P}(t, T) d \log P(t, T) - \tilde{P}(t, T) d \log B_t + \frac{1}{2} \tilde{P}(t, T) d \log P(t, T) d \log P(t, T) \\
\frac{d\tilde{P}(t, T)}{\tilde{P}(t, T)} &= r(t) dt + \left(- \int_t^T \alpha(t, u) du \right) dt + \sum_{n=1}^d a_n(t, T) dW_t^{(n)} - r(t) dt + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^d a_n(t, T)^2 dt \\
&= b(t, T) dt + \sum_{n=1}^d a_n(t, T) dW_t^{(n)} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

ただし、 $b(t, T) = - \int_t^T \alpha(t, u) du + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^d a_n^2(t, T)$ とした。よって、示せた。 $\square$

3.2.3 無裁定債券価格と期間構造

この節ではただ 1 つの同値マルチンゲール測度が存在する必要十分条件を考える。まずは記号の準備をする。

$T_1, \dots, T_k \in [0, \tau]$ を $0 < T_1 < \dots < T_k \leq \tau$ を満たすようにとる。また、 $\mathcal{T} = (T_1, \dots, T_k)$ とする。さらに、

$$\begin{aligned}
A(t) &= \begin{pmatrix} a_1(t, T_1) & \cdots & a_d(t, T_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(t, T_k) & \cdots & a_d(t, T_k) \end{pmatrix} \\
b(t) &= (b(t, T_1), \dots, b(t, T_k))^T \\
\tilde{p}(t) &= (\tilde{p}(t, T_1), \dots, \tilde{p}(t, T_k))^T \\
P_D(t) &= \begin{pmatrix} \tilde{p}(t, T_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{p}(t, T_k) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とすると、前の定理の中の式は

$$d\tilde{p}(t) = P_D(t)(b(t)dt + A(t)dW_t) \quad (3.13)$$

となる。ここで、相対価格 $\tilde{P}(t, T)$ がマルチンゲールとなる確率測度を考える。次を仮定する。

Assumption 3.12. 1. $\text{rank} A(t) = k \wedge d$ a.e.

2. 期間 $T_i (i = 1, \dots, k)$ の債券価格に対して共通に $\mathcal{F}_t$ 可測な市場リスク価格過程 $\lambda(t)$ が存在して、条件

$$\begin{aligned} A(t)\lambda(t) &= -b(t) \\ \int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt &< \infty \\ \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T \lambda(t)dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt \right) \right] &= 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

を満足する。

このとき、Girsanov の定理から $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \lambda(s)ds$ が $\mathbb{R}^d$ -値 Wiener 過程となるような確率測度 $\mathbb{Q}$ が存在する。このような $\mathbb{Q}$ をリスク中立な確率測度という。すると、(3.13) と (3.14) から、

$$\begin{aligned} A(t)d\tilde{W}_t &= A(t)dW_t - A(t)\lambda(t)dt \\ &= A(t)dW_t + b(t) \\ d\tilde{p}(t) &= \tilde{P}_D(t)A(t)d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

となり、成分ごとに書くと、

$$\frac{d\tilde{P}(t, T_i)}{\tilde{P}(t, T_i)} = \sum_{n=1}^d a_n(t, T_i) d\tilde{W}_t^{(n)} \quad (i = 1, \dots, k) \quad (3.15)$$

となる。

これをフォワードレートの方で考えると、

$$\begin{aligned} df(t, T_i) &= \alpha(t, T_i)dt + \sum_{n=1}^d \sigma_n(t, T_i) dW_t^{(n)} \\ &= \alpha(t, T_i)dt + \sum_{n=1}^d \sigma_n(t, T_i) (d\tilde{W}_t^{(n)} + \lambda(t)) \end{aligned}$$

となる。ここで、Assumption 3.12 より、 $\lambda(t)$ は T に依存しないので、(3.14) の第 i 行目を $T = T_i$, $\lambda(t) = \lambda_i(t)$ として、 T で微分すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial T} a_n(t, T) \lambda(t) + a_n(t, T) \frac{\partial}{\partial T} \lambda(t) \right) &= - \frac{\partial}{\partial T} b(t, T) \\ \sum_{n=1}^d (-\sigma_n(t, T) \lambda(t)) &= \alpha(t, T) + \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{n=1}^d a_n(t, T) \sigma_n(t, T) \end{aligned}$$

となり、

$$\alpha(t, T) = \sum_{n=1}^d \sigma_n(t, T) \left(\int_t^T \sigma_n(t, u) du - \lambda_n(t) \right) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.16)$$

となる。なお、Heath, Jarrow and Morton[15] によると、(3.16) が成立することと次の2つはそれぞれ同値である。

1. Q が一意の同値マルチンゲール測度である。
2. $\lambda(t)$ が一意に存在して、満期に依存しない。

以上より、

$$\begin{aligned}
df(t, T) &= \sum_{n=1}^d \sigma_n(t, T)(-\lambda_n(t) - a_n(t, T))dt + \sum_{n=1}^d \sigma_n(t, T)d\widetilde{W}_t^{(n)} + \sum_{n=1}^d \lambda_n(t)\sigma_n(t, T)dt \\
&= \sum_{n=1}^d \left((-\sigma_n(t, T)a_n(t, T))dt + \sigma_n(t, T)d\widetilde{W}_t^{(n)} \right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。

3.3 スポットレートモデル

この節を通じて、前の節で定義したリスク中立な確率測度 Q の下ですべて考え、その上の 1 次元標準 Wiener 過程を $\{W_t\}_{t \geq 0}$ とする ($\sim$ を省略)。また Q 上の期待値 E_Q は Q を省略して E と書く。以下、1 ファクターモデルのみを考える。さらに、 $\{r_t\}_{t \geq 0}$ が

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t \quad (0 \leq t \leq T) \tag{3.18}$$

を満たすと仮定する。ただし、 $\mu(t, r_t)$ と $\sigma(t, r_t)$ は t と r_t にのみ依存する関数とする。

(3.15) より、 Q 上で $\tilde{P}(t, T)$ は t について、マルチンゲールとなるので、 $t \leq r$ に対して、

$$\tilde{P}(t, T) = E \left[\tilde{P}(r, T) | \mathcal{F}_t \right]$$

となる。特に $r = T$ のとき、 $P(T, T) = 1$ より、

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(t, T) &= E \left[\tilde{P}(T, T) | \mathcal{F}_t \right] \\
&\Leftrightarrow \frac{P(t, T)}{B_t} = E \left[B_T^{-1} | \mathcal{F}_t \right] \\
&\Leftrightarrow P(t, T) = E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

よって、スポットレート r_t とゼロクーポン債価格 $P(t, T)$ の関係式が分かった。このことを使って、(3.18) の形のスポットレートモデルが HJM モデルの枠組みに入ることを示す。

まず、Theorem 1.49 から r_t はマルコフ過程となり、(3.19) は

$$P(t, T) = g(t, T, r) := E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | r_t = r \right] \tag{3.20}$$

となる。ここで、 $g(t, T, r)$ は C^2 -級関数と仮定する。このとき、Itô の公式より、

$$\begin{aligned}
\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= \frac{1}{P(t, T)} \left(\frac{\partial g(t, T, r_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, T, r_t)}{\partial r} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, T, r_t)}{\partial t^2} dr_t dr_t \right) \\
&= \frac{1}{P(t, T)} \left(\frac{\partial g(t, T, r_t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, T, r_t)}{\partial r} \mu(t, r_t) + \frac{1}{2} (\sigma(t, r_t))^2 \frac{\partial^2 g(t, T, r_t)}{\partial t^2} \right) dt \\
&\quad + \sigma(t, r_t) \frac{\partial g(t, T, r_t)}{\partial r} dW_t
\end{aligned}$$

今，リスク中立な確率測度 Q の下で計算しているため，無リスク金利とゼロクーポン債価格過程のドリフト係数を価格過程で割ったものは一致する。よって， $P(T, T) = 1$ なので (3.20) の $g(t, T, r)$ は，

$$\begin{cases} \frac{\partial g(t, T, r)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(t, r)^2 \frac{\partial^2 g(t, T, r)}{\partial r^2} + \mu(t, r) \frac{\partial g(t, T, r)}{\partial r} = r g(t, T, r) \\ g(T, T, r) = 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

を満たす。

Theorem 3.13. $\{r_t\}_{t \geq 0}$ は (3.18) に従うとする。このとき，スポットレートモデルは HJM モデルの枠組みに入る。すなわち， $P(t, T) = e^{-h(t, T, r)}$ とするとき， $\tilde{\sigma}(t, T) := \sigma(t, r_t) \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t)$ とすると，

$$f(t, T) = \left(\tilde{\sigma}(t, T) \int_t^T \tilde{\sigma}(t, s) ds \right) dt + \tilde{\sigma}(t, T) dW_t$$

となる。

Proof. 仮定から r_t はマルコフ過程なので，(3.20) から，ゼロクーポン債価格は

$$P(t, T) = g(t, T, r) := E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | r_t = r \right]$$

と書ける。さらに $g(t, T, r) =: e^{-h(t, T, r)}$ と置きなおす。このとき (3.4) よりフォワードレートは，

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} = \frac{\partial h}{\partial T}(t, T, r_t)$$

となるので，Itô の公式より，

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \frac{\partial}{\partial r} f(t, T) dr_t + \frac{\partial}{\partial t} f(t, T) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(t, T) dr_t dr_t \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t) dr_t + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial T}(t, T) + \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial T} h(t, T, r_t) dr_t dr_t \\ &= \sigma(t, r_t) \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t) dW_t \\ &\quad + \left(\mu(t, r_t) \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t) + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial T}(t, T, r_t) + \frac{\sigma(t, r_t)^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial r^2 \partial T}(t, T, r_t) \right) dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで，

$$\tilde{\sigma}(t, T) = \sigma(t, r_t) \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t) \quad (3.23)$$

とし， $a(t, T)$ は

$$\begin{aligned} a(t, T) &= -\int_t^T \tilde{\sigma}(t, T) dT = -\int_t^T \sigma(t, r_t) \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t) dT \\ &= -\left[\sigma(t, r_t) \frac{\partial h}{\partial r}(t, T, r_t) \right]_{T=t}^{T=T} = -\sigma(t, r_t) \frac{\partial h}{\partial r}(t, T, r_t) \end{aligned}$$

となる。ゆえに，フォワードレートのドリフト係数は

$$-\tilde{\sigma}(t, T) a(t, T) = \sigma(t, r_t)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t) \frac{\partial h}{\partial r}(t, T, r_t) \quad (3.24)$$

となるので、後は (3.17) と (3.22) から、

$$\begin{aligned} \mu(t, r_t) \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t) + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial T}(t, T, r_t) + \frac{\sigma(t, r_t)^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial r^2 \partial T}(t, T, r_t) \\ = \sigma(t, r_t)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial T}(t, T, r_t) \frac{\partial h}{\partial r}(t, T, r_t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

となれば良い。ここで、(3.21) に $g(t, T, r) = e^{-h(t, T, r)}$ を代入すると、

$$\frac{\partial e^{-h(t, T, r)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(t, r)^2 \frac{\partial^2 e^{-h(t, T, r)}}{\partial r^2} + \mu(t, r) \frac{\partial e^{-h(t, T, r)}}{\partial r} = r e^{-h(t, T, r)}$$

となり、これを整理し、両辺を $e^{-h(t, T, r)}$ で割ると

$$\frac{\partial h(t, T, r)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(t, r)^2 \frac{\partial^2 h(t, T, r)}{\partial r^2} + \mu(t, r) \frac{\partial h(t, T, r)}{\partial r} = \frac{1}{2} \sigma(t, r)^2 \left(\frac{\partial h(t, T, r)}{\partial r} \right)^2 - r$$

となる。ゆえに、両辺を T で微分すれば、(3.25) となる。よって、示せた。□

この節で出てくるスポットレートモデルはすべて次のような形のモデルである。

Definition 3.14 (アフィンモデル). リスク中立な確率測度 Q の下でスポットレート r_t が従う確率微分方程式を

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.26)$$

とする。ただし、 $\mu(t, r_t)$ と $\sigma(t, r_t)$ が次の形とする。

$$\begin{cases} \mu(t, r) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)r \\ \sigma^2(t, r) = \beta_1(t) + \beta_2(t)r \end{cases} \quad (3.27)$$

ただし、 $\alpha_i(t)$ と $\beta_i(t)$ ($i = 1, 2$) は r には依らず、 t にのみ依存する関数である。また、 σ については 2 乗に対しての式であることに注意しておく。このようなモデルをアフィンモデルという。

よって、(3.27) を代入すると、

$$\begin{cases} \frac{\partial g(t, T, r)}{\partial t} + \frac{1}{2}(\beta_1(t) + \beta_2(t)r) \frac{\partial^2 g(t, T, r)}{\partial r^2} + (\alpha_1(t) + \alpha_2(t)r) \frac{\partial g(t, T, r)}{\partial r} = rg(t, T, r) \\ g(T, T, r) = 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

今、ゼロクーポン債価格を

$$g(t, T, r) = e^{a_T(t) + b_T(t)r} \quad (3.29)$$

と書けると仮定する。ただし、 $a_T(t)$ 、 $b_T(t)$ は r には依らない。また、 $g(T, T, r) = 1$ より、 $a_T(T) = b_T(T) = 0$ となる。すると、

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial g(t, T, r)}{\partial t} &= (a_T(t)' + b_T(t)'r)g(t, T, r) \\ \bullet \quad \frac{\partial g(t, T, r)}{\partial r} &= b_T(t)g(t, T, r) \\ \bullet \quad \frac{\partial^2 g(t, T, r)}{\partial r^2} &= b_T(t)^2 g(t, T, r) \end{aligned}$$

これらを (3.28) に代入すると、

$$\begin{aligned} (a_T(t)' + b_T(t)'r)g(t, T, r) + \frac{1}{2}(\beta_1(t) + \beta_2(t)r)b_T(t)^2 g(t, T, r) \\ + (\alpha_1(t) + \alpha_2(t)r)b_T(t)g(t, T, r) - rg(t, T, r) = 0 \end{aligned}$$

となり、両辺を $g(t, T, r)$ で割って、 r についてまとめると、

$$\left(b_T(t)' + \frac{\beta_2(t)b_T(t)^2}{2} + \alpha_2(t)b_T(t) - 1 \right) r + \left(a_T(t)' + \frac{\beta_1(t)b_T(t)^2}{2} + \alpha_1(t)b_T(t) \right) = 0$$

これは r についての恒等式なので、 $0 \leq t \leq T$ に対して、

$$\begin{cases} b_T(t)' + \frac{\beta_2(t)b_T(t)^2}{2} + \alpha_2(t)b_T(t) - 1 = 0 \\ a_T(t)' + \frac{\beta_1(t)b_T(t)^2}{2} + \alpha_1(t)b_T(t) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

が成立するように $a_T(t), b_T(t)$ を定めればよい。このことを以下の定理でまとめておく。

Theorem 3.15. リスク中立な確率測度 Q の下でスポットレートがアフィンモデルだとする。このとき、 $a_T(t) = b_T(t) = 0$ を満たす連立微分方程式 (3.30) を満たす $a_T(t)$ と $b_T(t)$ により、ゼロクーポン債価格は

$$P(t, T) = e^{a_T(t) + b_T(t)r_t} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.31)$$

で与えられる。

このことを踏まえて、以下具体的なスポットレートモデルについて考える。

3.3.1 Vasicek モデル

スポットレートの実際の動きを見てみると、平均的なレベル β が存在して、このレベルの周辺をレベル β へ回帰するように動いていることが見える。このような性質を平均回帰性といい、この平均回帰性を持っているモデルでシンプルなものが次の式で与えられる Vasicek モデル [34] である。

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.32)$$

ただし、 α, β, σ はそれぞれ平均回帰率、平均回帰水準、ボラティリティと呼ばれる正定数である。

これは、 $\alpha_1(t) = \alpha\beta, \alpha_2(t) = -\alpha, \beta_1(t) = \sigma^2, \beta_2(t) = 0$ のアフィンモデルである。よって、これらを (3.30) に代入すると、

$$\begin{cases} b_T(t)' = \alpha b_T(t) + 1 \\ a_T(t)' = -\alpha\beta b_T(t) - \frac{\sigma^2 b_T(t)^2}{2} \\ a_T(T) = b_T(T) = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} a_T(t)' = -\alpha\beta b_T(t) - \frac{\sigma^2 b_T(t)^2}{2} \\ a_T(T) = b_T(T) = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

となる。よって、まず (3.33) を解くと、

$$b_T(t) = \frac{e^{-\alpha(T-t)} - 1}{\alpha} \quad (3.35)$$

となり、これを (3.34) に代入すると、

$$a_T(t)' = -\alpha\beta \frac{e^{-\alpha(T-t)} - 1}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{e^{-\alpha(T-t)} - 1}{\alpha} \right)^2$$

となり、この常微分方程式を解き、 $b_T(t)$ を使って表すと、

$$a_T(t) = (b_T(t) + (T - t)) \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha^2} - \beta \right) - \frac{\sigma^2}{4\alpha} b_T(t)^2 \quad (3.36)$$

以上から ,

$$P(t, T) = e^{a_T(t) + b_T(t)r_t}$$

という表示の $a_T(t)$ と $b_T(t)$ は (3.36) と (3.35) で表わされる。ここで ,

$$\frac{\partial}{\partial T} b_T(t) = -e^{-\alpha(T-t)}$$

に注意すると , (3.4) より , $r_t = r$ に対して , フォワードレートは

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} (a_T(t) + b_T(t)r) \\ &= e^{-\alpha(T-t)}r + \beta \left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)^2 \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(t, T) = e^{-\alpha(T-t)}r_t + \beta \left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)^2 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.37)$$

となる。Theorem3.13 から Vasicek モデルが HJM モデルの枠組みに入ることが分かるが , ここで
は Example1.47 より ,

$$r_t = \beta + e^{-\alpha t}(r_0 - \beta) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

と具体的に r_t を表せるので , 計算で HJM モデルの枠組みに入ることを見ていく。

初期フォワードレートは (3.37) に $t = 0$ を代入すればいいので ,

$$f(0, T) = e^{-\alpha T}r_0 + \beta(1 - e^{-\alpha T}) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-\alpha T})^2$$

よって , これらを (3.37) に代入すると ,

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma e^{-\alpha(T-s)} dW_s - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} (2e^{-\alpha T}(1 - e^{\alpha t}) - e^{-2\alpha T}(1 - e^{2\alpha t})) \quad (3.38)$$

となる。よって , 拡散係数が $\sigma(t, T) = \sigma e^{-\alpha(T-s)}$ で与えられることが分かる。ここで (3.16) より ,
ドリフト係数 $\tilde{\sigma}(t, T)$ は拡散係数を用いて ,

$$\tilde{\sigma}(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du \quad (3.39)$$

となる。なので , この $[0, t]$ での積分を考えると

$$\begin{aligned} \int_0^t a(s, T) ds &= \int_0^t \sigma(s, T) \int_s^T \sigma(s, u) du ds \\ &= \int_0^t \sigma e^{-\alpha(T-s)} \int_s^T \sigma e^{-\alpha(u-s)} du ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{\alpha} \int_0^t e^{-2\alpha(T-s)} - e^{-\alpha(T-s)} ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2\alpha^2} (2e^{-\alpha T}(1 - e^{\alpha t}) - e^{-2\alpha T}(1 - e^{2\alpha t})) \end{aligned}$$

となる。これは , (3.38) の右辺第 3 項と同じなので , Vasicek モデルが HJM モデルの枠組みに入ることが分かる。

3.3.2 Cox-Ingersoll-Ross モデル

Vasicek モデルは平均回帰性はあるが，その一方で r_t が負になる確率が正となってしまうという短所がある。そこで，Vasicek モデルのように平均回帰性があり，さらに r_t が負にならないモデルがこの CIR モデル [6] である。

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (3.40)$$

ただし，ここでも α, β, σ は正定数とする。この方程式は Lipschitz ではない平方根関数を持つため，Theorem 1.45 は使えないが r_t が非負値確率過程となることが知られている。

ここで CIR モデルは $\alpha_1(t) = \alpha\beta, \alpha_2(t) = -\alpha, \beta_1(t) = 0, \beta_2(t) = \sigma^2$ のアフィンモデルなので，Theorem 3.13 より， $P(t, T) = e^{a_T(t) + b_T(t)r_t}$ である。よって，(3.30) から $a_T(t)$ と $b_T(t)$ を求める。

$$\begin{cases} b_T(t)' + \frac{\sigma^2 b_T(t)^2}{2} - \alpha b_T(t) - 1 = 0 \\ a_T(t)' + \alpha\beta b_T(t) = 0 \\ a_T(T) = b_T(T) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} a_T(t)' + \alpha\beta b_T(t) = 0 \\ a_T(T) = b_T(T) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

となり，これを解けば良い。

$\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \alpha u - 1 = 0$ とし，この 2 解 c, d を

$$c = \frac{b + \gamma}{\sigma^2}, \quad d = \frac{b - \gamma}{\sigma^2}$$

とする。ただし， $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}$ 。

このとき，(3.41) から，

$$\frac{b_T(t)'}{(b_T(t) - c)(b_T(t) - d)} = -\frac{\sigma^2}{2} \quad (3.43)$$

となり，両辺を $[t, T]$ で積分すると， $b_T(T) = 0$ より，

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{c - d} \log \left(\left| \frac{d}{c} \right| \left| \frac{b_T(t) - c}{b_T(t) - d} \right| \right)$$

となり，これより，ふたたび $b_T(T) = 0$ に注意すると，(3.43) は

$$\frac{d(b_T(t) - c)}{c(b_T(t) - d)} = \exp \left(\frac{\sigma^2(T - t)(c - d)}{2} \right)$$

となる。ここで $c - d = \frac{2\gamma}{\sigma^2}$ に注意して， c, d を代入し計算すると，

$$b_T(t) = \frac{-2(1 - e^{(T-t)\gamma})}{\alpha(1 - e^{(T-t)\gamma}) - \gamma(1 + e^{(T-t)\gamma})} \quad (3.44)$$

となる。これは $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ を使うと，

$$b_T(t) = -\frac{2}{\alpha + \gamma \coth \left(\frac{\gamma(T-t)}{2} \right)}$$

と表せる。また，(3.42) から

$$a_T(t) = \alpha\beta \int_t^T b_T(s)ds$$

となり, これは $V(s) := \coth(\frac{s\gamma}{2})$ とすると,

$$a_T(t) = \frac{2\alpha\beta}{\gamma(\gamma^2 - \alpha^2)} \log \left(\frac{\gamma^{2\gamma}(1 + V(T-t))^{\alpha+\gamma}(-1 + V(T-t))^{\gamma-\alpha}}{(\alpha + \gamma V(T-t))^{2\gamma}} \right)$$

となる。よって, (3.23) より,

$$\tilde{\sigma}(t, T) = \sigma\sqrt{r_t} \frac{\partial^2}{\partial r \partial T} (-a_t(t) - b_T(t)r_t) = -\sigma\sqrt{r_t} \frac{\partial}{\partial T} b_T(t)$$

ゆえに, $\operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$ を使うと

$$\tilde{\sigma}(t, T) = \frac{2\sigma\gamma^2\sqrt{r_t}\operatorname{cosech}^2\left(\frac{\gamma^2(T-t)}{2}\right)}{\left(\alpha + \gamma \coth\left(\frac{\gamma^2(T-t)}{2}\right)\right)^2}$$

と表せる。

3.3.3 Hull-White モデル

次に, Vasicek モデルの平均回帰レベルを時間 t に依存するようにした次のモデルを考える。

$$dr_t = (\beta_t - \alpha r_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.45)$$

ただし, α, σ は正定数。このモデルを Hull-White モデル [19], または拡張 Vasicek モデルという。このモデルは r_t が負になる確率が正となることに注意しておく⁵。

このモデルは $\alpha_1(t) = \beta_t$, $\alpha_w(t) = -\alpha$, $\beta_1(t) = \sigma^2$, $\beta_2(t) = 0$ のアフィンモデルである。よって, Theorem 3.13 より, $P(t, T) = e^{a_T(t) + b_T(t)r_t}$ で (3.30) から,

$$\begin{cases} b_T(t)' - \alpha b_T(t) - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} a_T(t)' + \frac{\sigma^2 b_T(t)^2}{2} \beta_t b_T(t) = 0 \\ a_T(T) = b_T(T) = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

これを解くと (3.46) から,

$$b_T(t) = \frac{e^{-\alpha(T-t)} - 1}{\alpha} \quad (3.48)$$

となり, これと (3.47) から,

$$a_T(t) = \int_t^T \frac{\sigma^2 b_T(s)^2}{2} ds + \int_t^T \beta_s b_T(s) ds \quad (3.49)$$

よって, フォワードレート of 拡散係数は (3.23) より,

$$\tilde{\sigma}(t, T) = \sigma \frac{\partial^2}{\partial r \partial T} (-a_t(t) - b_T(t)r_t) = -\sigma \frac{\partial}{\partial T} b_T(t) = \sigma e^{-\alpha(T-t)}$$

となり, ドリフト係数 $\mu(t, T)$ は (3.24) から,

$$\mu(t, T) = -\tilde{\sigma}(t, T) \int_t^T \tilde{\sigma}(t, s) ds = \sigma^2 e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T \sigma e^{-\alpha(T-s)} ds = \frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha(T-t)} (1 - e^{-\alpha(T-t)})$$

⁵ r_t が負にならないようにするために, CIR モデルをこの場合と同様に拡張することも可能である。

となり,

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha(T-t)} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) dt + \sigma e^{-\alpha(T-t)} dW_t \quad (3.50)$$

となる。ここで, (3.5) から初期イールドカーブ $Y(0, T)$ は

$$Y(0, T) = -\frac{a_T(0) + b_T(0)r_0}{T} = -\frac{1}{T} \left(\int_0^T \frac{\sigma^2 b_T(s)^2}{2} ds + \int_0^T \beta_s b_T(s) ds + \frac{r_0 (e^{-\alpha T} - 1)}{\alpha} \right) \quad (3.51)$$

となる。つまり, このモデルは β_t を適当に決めることで, 任意の期間構造のカーブを表現することができる。しかし, 実際に現時点で観測されたイールドカーブと一致させるべきである。そのために, そのような β_t の条件を次の Proposition で与える。

Proposition 3.16. (3.51) が, 観測された初期イールドカーブと一致するとき,

$$\beta_t = \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \Big|_{T=t} + \alpha f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (3.52)$$

ただし, $f(0, t)$ は初期フォワードカーブである。

Proof. 初期フォワードカーブを求める。(3.4) から,

$$f(0, T) = -\frac{\partial}{\partial T} (b_T(0)r_0 + a_T(0)) \quad (3.53)$$

となる。(3.48) から,

$$\frac{\partial}{\partial T} b_T(t) = \frac{\partial}{\partial T} \frac{e^{-\alpha(T-t)} - 1}{\alpha} = -e^{-\alpha(T-t)} \quad (3.54)$$

となり, また (3.49) より,

$$\begin{aligned} a_T(0) &= \int_0^T \frac{\sigma^2 b_T(s)^2}{2} ds + \int_0^T \beta_s b_T(s) ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \left(-\frac{3}{2\alpha} + T - \frac{e^{-2\alpha T}}{2\alpha} + \frac{2e^{-\alpha T}}{\alpha} \right) + \frac{e^{-\alpha T}}{\alpha} \int_0^T \beta_s e^{\alpha s} ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \beta_s ds \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial T} a_T(0) = \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} (1 - e^{-\alpha T})^2 - \int_0^T \beta_s e^{-\alpha(T-s)} ds \quad (3.55)$$

ゆえに, (3.53) に (3.54) と (3.55) を代入すると

$$f(0, T) = -\frac{\sigma^2}{2\alpha^2} (1 - e^{-\alpha T})^2 + \int_0^T \beta_s e^{-\alpha(T-s)} ds + r_0 e^{-\beta(T-t)}$$

となり, 両辺を T で微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial T} f(0, T) = -\frac{\sigma^2 e^{-\alpha T}}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) - \alpha \int_0^T \beta_s e^{-\alpha(T-s)} ds + \beta_T - r_0 \alpha e^{-\alpha T}$$

となる。よって, $\alpha f(0, T) + \frac{\partial}{\partial T} f(0, T)$ を計算すると,

$$\alpha f(0, T) + \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) = \beta_T - \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha T})$$

となる。よって, 示せた。 $\square$

3.4 Musiela の記号

ふたたび, HJM モデルを見直してみることにする。

$$f(t, \cdot) = f(0, \cdot) + \int_0^t \alpha(s, \cdot) ds + \sum_{n=1}^d \int_0^t \sigma^{(n)}(s, \cdot) dW_s^{(n)} \quad (\text{積分形}) \quad (3.56)$$

$$df(t, \cdot) = \alpha(t, \cdot) dt + \sum_{n=1}^d \sigma^{(n)}(t, \cdot) dW_t^{(n)}, (0 \leq t \leq T) \quad (\text{微分形式}) \quad (3.57)$$

である。

この形では T の方程式としても解釈できる。このとき, 各 t ごとに関数 $f(t, \cdot)$ は違う定義域を持っていることになる。そこで $x = T - t$ として, パラメータ付けする。このとき,

$$f_t(x) := f(t, t+x) \quad (t, x \geq 0) \quad (3.58)$$

とし, 時点 t と独立な定義域 χ をもつ関数 $f_t: x \mapsto f_t(x)$ となる。これら x についての関数空間を F とする。ここでは $C(\chi)$ の部分空間として考えることにする。(詳しくは 4 章で定義する。)

このとき, (3.58) を使って, (3.56) を書きなおすと,

$$\begin{aligned} f_t &= f(0, t+\cdot) + \int_0^t \alpha(s, t+\cdot) ds + \sum_{n=1}^d \int_0^t \sigma^{(n)}(s, t+\cdot) dW_s^{(n)} \\ &= S_t f_0 + \int_0^t S_{t-s} \alpha_s ds + \sum_{n=1}^d \int_0^t S_{t-s} \sigma_s^{(n)} dW_s^{(n)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

ただし, $\alpha_t: x \mapsto \alpha_t(x) = \alpha(t, t+x)$, $\sigma_t^{(n)}: x \mapsto \sigma_t^{(n)}(x) = \sigma^{(n)}(t, t+x)$, $(S_t f)(x) = f(x+t)$ とする。このことから, (3.56) は関数空間内の SDE によって与えられる無限次元拡散方程式となる。ここで t に関して (形式的に) 両辺を微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, t+x)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} f(t, t+x) + \partial f(t, t+x) \\ df_t &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f_t + \alpha_t \right) dt + \sum_{n=1}^d \sigma_t^{(n)} dW_t^{(n)} \end{aligned}$$

となる。このように最初に表したのが Musiela[26] である。

Example 3.17. Musiela の変形を Hull-White モデルで行ってみる。(3.50) から, これを積分形で書くと,

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha(T-s)} (1 - e^{-\alpha(T-s)}) ds + \int_0^t \sigma e^{-\alpha(T-s)} dW_s \quad (3.60)$$

であった。ここで $T = t+x$ を代入すると,

$$f(t, t+x) = f(0, t+x) + \int_0^t \frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha(t+x-s)} (1 - e^{-\alpha(t+x-s)}) ds + \int_0^t \sigma e^{-\alpha(t+x-s)} dW_s \quad (3.61)$$

となる。ここで, $f_t(x) = f(t, t+x)$ とし, $(S_t f)(x) = f(x+t)$ とすると, (3.61) は

$$f_t(x) = S_t f_0(x) + \int_0^t S_{t-s} \left(\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha(x)} (1 - e^{-\alpha(x)}) \right) ds + \int_0^t S_{t-s} (\sigma e^{-\alpha(x)}) dW_s \quad (3.62)$$

となることが分かる。

4 抽象 HJM モデル

この章を通じて、特に断らない限り、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とし、 $\{W_t\}$ を d 次元の標準 Wiener 過程、 $\{\mathcal{F}_t\}$ を Wiener 過程からなるフィルトレーションとし、右連続で $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の P -零集合をすべて含むと仮定する。また、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$ とする。また、Musielà の記号に従うとする。すなわち、現時点を t 、満期を T としたとき、現時点から満期までの時間を $x = T - t$ とし、債券価格を $P_t(x) := P(t, t+x)$ 、フォワードレートを $f_t(x) := f(t, t+x)$ ($t, x \geq 0$) とする。

4.1 HJM 発展方程式

この章での目標は下の HJM モデルを解析することである。

$$df_t(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f_t(x) + \alpha_t(x) \right) dt + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_t^i(x) dW_t^i \quad (4.1)$$

ここで無裁定条件より、

$$\alpha_t(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_t^i(x) \int_0^x \sigma_t^i(u) du \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4.2)$$

である。

ここでは関数空間 F 上に値をとる $\mathcal{F}_t$ -可測な確率ベクトルとして、フォワードカーブ $x \rightarrow f_t(x)$ を考えたい。また、Wiener 過程としては、実可分 Hilbert 空間 G 上で定義された柱状 Wiener 過程を考える。また、 G の双対空間を G^* とし、 G と G^* を同一視する。(4.1) を解析するために、フォワードカーブに対する状態空間 F を選ぶ必要がある。この章を通して、 F に必要に応じて、随時仮定を付け加えていくことにする。まず最初に次のことを仮定しておく。

Assumption 4.1. 1. F を可分 Hilbert 空間とし、その元を $\mathbb{R}$ -値連続関数で、定義域 χ は $[0, x_{\max}]$ もしくは $\mathbb{R}_+$ である。また、 $x \in \chi$ に対して、汎関数 $\delta_x(f) = f(x)$ は well-defined で、 F^* の元とする。

2. $\{S_t\}_{t \geq 0}$ は F 上で強連続で、 $(S_t f)(x) = f(t+x)$ となる半群とする。また、 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ の生成作用素を A とする。このとき、一般に A は有界であるとは限らない。

3. F_{HJM} は $D(\neq \phi) \subset \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ から F への可測写像で、 $F_{\text{HJM}}(\sigma)(x) := \langle \sigma^* \delta_x, \sigma^* I_x \rangle_G$ (各 $\sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$) とする。ただし、 G は実可分 Hilbert 空間とし、 $I_x(f) := \int_0^x f(s) ds$ とする。

これらの仮定にいくつか注意を与えておく。

まずは $F \subset \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\chi)$ ⁶ でなければならない。これは、 $P(t, T) = \exp(-\int_0^{T-t} f_t(s) ds)$ が意味を持たないといけなためである。しかし、一般に金利の期間構造が動くところではフォワードカーブは満期までの時間 x の関数として、滑らかである。よって、Assumption 4.1.1 は意味を持ち、明らかに $F \subset \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\chi)$ である。

また、次のことが分かる。

Proposition 4.2. $I_x(f) = \int_0^x f(s) ds$ は、各 $x \in \chi$ に対して、 F 上連続である。

⁶ $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1 := \left\{ \{f_t\}_{t \in [0, \infty)} \mid f_t(\omega) \text{ は } F\text{-値 } \{\mathcal{F}_t\}\text{-適当な確率過程で, } \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, \infty))\text{-可測, } \int_0^T \|f_t\| dt < \infty \ \forall T > 0 \right\}$

Proof.

$$\left| \int_0^x f(s)ds \right| \leq x \sup_{s \in [0,x]} |f(s)| \leq x \sup_{s \in [0,x]} \|\delta_s\|_{F^*} \|f\|_F$$

ここで, $\delta_x \in F^*$ より, $\sup_{s \in [0,x]} |\delta_s(f)| < \infty$ である。Banach-Steinhaus の定理⁷より, $\|f\|_F \leq 1$, $\delta_x \in F^*$ ならば, $\exists M < \infty$ s.t. $\|\delta_x\| \leq M$ となる。よって, $f \in F$, $\delta_x \in F^*$ ならば, $|\delta_x f| \leq M \|f\|_F$ となり, $\sup_{s \in [0,x]} \|\delta_s\|_{F^*} \leq M$ となる。

ゆえに,

$$\left| \int_0^x f(s)ds \right| \leq \exists C$$

となり, I_x は F 上連続となる。 $\square$

Assumption4.1. より, スポットレート $r_t = f_t(0) = \delta_0(f_t)$ が, well-defined である。スポットレートが定義されたら, 無リスク預金は通常の数理ファイナンスの議論と同じように,

$$B_t = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right)$$

と定義される。またこれを基本財として, 割引債券価格を

$$\tilde{P}_t(x) = \frac{P_t(x)}{B_t} = \exp \left(- \int_0^t r_s ds - \int_0^x f_t(y) dy \right) \quad (4.3)$$

と定義する。

また, Assumption4.1.3 について, Assumption4.1.1. より F の元は連続なので, 任意の $\sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ に対して, $x \rightarrow F_{\text{HJM}}(\sigma)(x)$ は連続である。しかし, $\sigma \rightarrow F_{\text{HJM}}(\sigma)$ は必ずしも F の元ではなく $\sigma \in D$ でなければならない。Assumption4.1.3. はたいていチェックするのは難しい。そのため, 具体例を扱う中で使いやすい十分条件を後に与える。

Assumption 4.3. F が Assumption4.1.1. と Assumption4.1.2. を満たしているとする。

さらに, $\exists F^0 \subset F$ が存在して, 2 項演算子 $\star$ を $(f \star g)(x) = f(x) \int_0^x g(s) ds : F^0 \times F^0 \rightarrow F$ とし, $f, g \in F^0$ に対して,

$$\|f \star g\|_F \leq C \|f\|_F \|g\|_F \quad (4.4)$$

とする。ただし, $C > 0$ は定数である。

Proposition 4.4. F が Assumption4.3. を満たしているとする。このとき写像 F_{HJM} は局所 Lipschitz 条件を満たす。すなわち,

$$\|F_{\text{HJM}}(\sigma_1) - F_{\text{HJM}}(\sigma_2)\|_F \leq C \|\sigma_1 + \sigma_2\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)} \quad (\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F^0))$$

とする。特に F_{HJM} は $D = \mathcal{L}_{(2)}(G; F^0)$ から F への写像として可測である。

Proof.

$$\|f \star f - g \star g\| = \frac{1}{2} \|(f - g) \star (f + g) + (f + g) \star (f - g)\| \leq C \|f - g\| \|f + g\| \quad (4.5)$$

⁷ X を完備距離空間, Y を位相空間とし, Γ を X から Y への連続線形写像全体とし, さらに $\Gamma(x) = \{\Lambda x \mid \Lambda \in \Gamma\}$ は Y 上有界とする。このとき Γ は同程度連続となる。証明は [29] を参照。

である。次に, $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を完全正規直交系とする。このとき, $\sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F^0)$ に対して

$$\begin{aligned}
F_{\text{HJM}}(\sigma)(\cdot) &= \langle \sigma^* \delta, \sigma^* I \rangle_G \\
&\stackrel{\text{Parseval}}{=} \sum_n \langle \sigma^* \delta, g_n \rangle_G \langle g_n, \sigma^* I \rangle_G \\
&= \sum_n \langle \delta, \sigma g_n \rangle_F \langle g_n, \sigma I \rangle_F \\
&= \sum_n \sigma g_n(\cdot) \int_0^\cdot \sigma g_n(s) ds \\
&= \sum_n (\sigma g_n) \star (\sigma g_n)
\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
\|F_{\text{HJM}}(\sigma_1) - F_{\text{HJM}}(\sigma_2)\|_F &\stackrel{\text{三角不等式}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \|(\sigma_1 g_n) \star (\sigma_1 g_n) - (\sigma_2 g_n) \star (\sigma_2 g_n)\|_F \\
&\stackrel{(4.5)}{\leq} C \sum_{n=1}^{\infty} \|(\sigma_1 - \sigma_2) g_n\|_F \|(\sigma_1 + \sigma_2) g_n\|_F \\
&\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)} \|\sigma_1 + \sigma_2\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}
\end{aligned}$$

ここで, $A \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ に対して, $\|A\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|A g_n\|_F^2$ であることに注意しておく。また, $F_{\text{HJM}}(\sigma) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sigma g_n) \star (\sigma g_n)$ は仮定より $D \rightarrow F$ として可測である。さらに, $\sigma \rightarrow (\sigma g_i) \star (\sigma g_i) (\forall i \in \mathbb{N})$ は $\mathcal{L}_{(2)}(G; F^0) \rightarrow F$ として可測である。よって, $F_{\text{HJM}}(\sigma)$ は $\mathcal{L}_{(2)}(G; F^0) \rightarrow F$ として可測である。□

スポットレートを $f_t(0)$ で定義するのと同じ方法で, ロングレートを χ の右端の点での値として定義する。つまり, $\chi = [0, x_{\max}]$ のとき, $l_t = f_t(x_{\max})$, $\chi = \mathbb{R}_+$ のときは, $l_t = f_t(\infty)$ とする。そのため, $\chi = \mathbb{R}_+$ のとき, 任意の $f \in F$ に対して, $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ が存在するかを確認しなければならない。

4.2 抽象 HJM モデル

この節では関数空間 F 上の HJM モデルの正確な定義を与える。 F は Assumption 4.1 を満たすとする。また, $\mathcal{P}$ を可予測 σ -加法族とする。

Definition 4.5. F 上の HJM モデルは次を満たす (λ, σ) のペアである。

1. $\lambda : (\mathbb{R}_+ \times \Omega \times F, \mathcal{P} \times \mathcal{B}(F)) \rightarrow (G, \mathcal{B}(G))$ は可測である。
2. $\sigma : (\mathbb{R}_+ \times \Omega \times F, \mathcal{P} \times \mathcal{B}(F)) \rightarrow (D, \mathcal{B}(\mathcal{L}_{(2)}(G; F)))$ である。

また,

$$\begin{cases} df_t = (A f_t + \alpha(t, \cdot, f_t)) dt + \sigma(t, \cdot, f_t) dW_t \\ f_0 = f(0, \cdot) \end{cases} \quad (4.6)$$

を満たすただ 1 つの連続な F -値 mild solution $\{f_t\}$ が存在する。ただし, $\alpha(t, \omega, f) = F_{\text{HJM}} \circ \sigma(t, \omega, f) + \sigma(t, \omega, f) \lambda(t, \omega, f)$ とする。

(σ, λ) は初期条件 $f_0 \in F$ を持つ抽象 HJM モデルであるならば, フォワードレート過程 $\{f_t\}_{t \geq 0}$ は

$$f_t = S_t f_0 + \int_0^t S_{t-s} \alpha(s, \cdot, f_s) ds + \int_0^t S_{t-s} \sigma(s, \cdot, f_s) dW_s \quad (4.7)$$

を満たしている。次に Proposition 4.4 を用いて, HJM モデルが存在する十分条件を与える。

Proposition 4.6. 状態空間 F は Assumption 4.3 を満たすとする。閉部分空間 $F^0 \subset F$ を $\|f \star g\|_F \leq C \|f\|_F \|g\|_F (f, g \in F^0)$ となるようにとる。

また, $\forall (t, \omega, f) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times F$ に対して, $\sigma(t, \omega, f)$ の値域が F^0 に含まれるように仮定する。

さらに, σ は有界で, Lipschitz 条件及び緩増大条件を満たす。すなわち

$$\begin{aligned} \|\sigma(t, \omega, f) - \sigma(t, \omega, g)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)} &\leq C \|f - g\|_F \\ \|\sigma(t, \omega, f) \lambda(t, \omega, f) - \sigma(t, \omega, g) \lambda(t, \omega, g)\|_F &\leq C \|f - g\|_F \\ \|\sigma(t, \omega, f)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)} + \|\alpha(t, \omega, f)\|_F &< C(1 + \|f\|_F) \\ (C > 0 : \text{定数}, \forall t \geq 0, \omega \in \Omega, f, g \in F) \end{aligned}$$

とする。このとき, (λ, σ) は F 上の HJM モデルである。

また, 任意の初期フォワードカーブ $f_0 \in F$ に対して, 有限な $T > 0$ と $p > 2$ を止めるごとに,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|f_t\|_F^p \right] < \infty$$

となる。

Proof. Theorem 2.28 を使いたい。

$$\begin{aligned} &\|\alpha(t, \omega, f) - \alpha(t, \omega, g)\|_F \\ &= \|F_{\text{HJM}} \circ \sigma(t, \omega, f) + \sigma(t, \omega, f) \lambda(t, \omega, f) - F_{\text{HJM}} \circ \sigma(t, \omega, g) + \sigma(t, \omega, g) \lambda(t, \omega, g)\|_F \\ &\leq \|F_{\text{HJM}} \circ \sigma(t, \omega, f) - F_{\text{HJM}} \circ \sigma(t, \omega, g)\|_F + \|\sigma(t, \omega, f) \lambda(t, \omega, f) - \sigma(t, \omega, g) \lambda(t, \omega, g)\|_F \\ &\leq \tilde{C} \|\sigma(t, \omega, f) - \sigma(t, \omega, g)\|_{\mathcal{L}_{(2)}(G; F)} + C \|f - g\|_F \\ &\leq \tilde{C} \cdot K \cdot C \|f - g\|_F + C \|f - g\|_F \quad (\because \sigma \text{ は有界だから}) \\ &=: \hat{C} \|f - g\|_F \end{aligned}$$

よって, Theorem 2.28 の条件を満たすので, (λ, σ) は F 上の HJM モデルである。また, $p > 2$ のとき, $\mathbb{E}[\sup_{t \in [0, T]} \|f_t\|_F^p] \leq C_p [1 + \|f_0\|_F^p] < \infty$ となる。よって, すべて示せた。 $\square$

4.2.1 ドリフト条件と無裁定

HJM モデル (σ, λ) , 初期条件 $f_0 \in F$ を固定しておく。 $\{f_t\}_{t \geq 0}$ を (4.6) の唯一の解とする。また, 簡単のために, この節では $\lambda_t = \lambda(t, \omega, f_t)$, $\sigma_t = \sigma(t, \omega, f_t)$, $\alpha_t = \alpha(t, \omega, f_t)$ とする。

Theorem 4.7.

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s\|_G^2 ds - \int_0^t \lambda_s dW_s \right) \right] = 1$$

かつ

$$\int_0^t \mathbb{E} \left[\int_0^u \|\sigma_s^* \delta_{t-u}\|_G^2 du \right]^{\frac{1}{2}} ds < \infty \quad (\forall t \geq 0)$$

とする。このとき, HJM モデル (σ, λ) によって与えられた市場は無裁定である。

Proof. 割引債券価格 $\tilde{P}(t, T) = \frac{P(t, T)}{B_t}$ について考える。まず, $g \in F$ に対して,

$$(S_\alpha^* I_u)g = \langle S_\alpha^* I_u, g \rangle_F = \int_0^u (S_\alpha g)(s) ds = \int_0^u g(s + \alpha) ds = \int_\alpha^{u+\alpha} g(s) ds = (I_{u+\alpha} - I_\alpha)g$$

である。これから,

$$S_\alpha^* I_u = I_{u+\alpha} - I_\alpha \quad (4.8)$$

となる。

次に債券価格の挙動について考える。

$$\begin{aligned} & -\log P(t, T) \\ &= I_{T-t} f_t \\ &= I_{T-t} \left(S_t f_0 + \int_0^t S_{t-s} \alpha_s ds + \int_0^t S_{t-s} \sigma_s dW_s \right) \\ &= I_{T-t} S_t f_0 + I_{T-t} \left(\int_0^t S_{t-s} \alpha_s ds \right) + I_{T-t} \left(\int_0^t S_{t-s} \sigma_s dW_s \right) \\ &= I_{T-t} S_t f_0 + \int_0^t I_{T-t} S_{t-s} \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s^* S_{t-s}^* I_{T-s} dW_s \\ &\stackrel{(4.8)}{=} I_T f_0 - I_t f_0 + \int_0^t I_{T-s} \alpha_s ds - \int_0^t I_{t-s} \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s^* I_{T-s} dW_s - \int_0^t \sigma_s^* I_{t-s} dW_s \\ &= I_T f_0 + \int_0^t I_{T-s} \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s^* I_{T-s} dW_s - \left(I_t f_0 + \int_0^t I_{T-s} \alpha_s ds + \int_0^t \sigma_s^* I_{T-s} dW_s \right) \end{aligned}$$

ここで, 3 行目において, 次のことを用いたことに注意しておく。 $I_{T-t} \circ S_{t-s} \circ \sigma_s : G \rightarrow \mathbb{R}$ であり, $\sigma_s^* \circ S_{t-s}^* : F^* \rightarrow G^*$ である。これより, $(\sigma_s^* \circ S_{t-s}^*)(I_{T-t}) \in G^*$ となる。よって, $g \in G$ に対して,

$$\langle (\sigma_s^* \circ S_{t-s}^*)(I_{T-t}), g \rangle_{G^*} = \langle I_{T-t}, (S_{t-s} \circ \sigma_s)g \rangle_F = I_{T-t}(S_{t-s} \circ \sigma_s)(g)$$

となる。次に, 最後の行のアンダーライン部分について考える。

まず 1 項目は

$$I_t f_0 = \int_0^t f_0(u) du = \int_0^t S_u f_0(0) du = \int_0^t \delta_0(S_u f_0) du$$

となる。2 項目は通常の積分の順序交換を用いて,

$$\begin{aligned} \int_0^t I_{t-s} \alpha_s ds &= \int_0^t \int_0^{t-s} \alpha_s(u) du ds = \int_0^t \int_0^{t-u} \alpha_s(u) ds du \\ &= \int_0^t \int_0^v \alpha_s(v-s) ds dv = \int_0^t \int_0^u S_{u-s} \alpha_s(0) ds du \\ &= \int_0^t \delta_0 \int_0^u S_{u-s} \alpha_s ds du \end{aligned}$$

となり, 最後に 3 項目は, 仮定の 2 つ目から Stochastic Fubini の定理 (Theorem 2.22) を使えるので,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma_s^* I_{T-s} dW_s &= \int_0^t \sigma_s^* \int_0^{t-s} \delta_u du dW_s \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \int_0^{t-u} \sigma_s^* \delta_u dW_s du \\ &= \int_0^t \int_0^u \sigma_s^* \delta_{u-s} dW_s du = \int_0^t \int_0^u \sigma_s^* S_{u-s}^* \delta_0 dW_s du \end{aligned}$$

となる。以上のことから ,

$$— = \int_0^t \delta_0 \left(S_u f_0 + \int_0^u S_{u-s} \alpha_s ds + \int_0^u S_{u-s} \sigma_s dW_s \right) du = \int_0^t r_s ds$$

となり ,

$$\log P(t, T) = \log P(0, T) + \int_0^t (r_s - I_{T-s} \alpha_s) ds - \int_0^t \sigma_s^* I_{t-s} dW_s$$

となる。

また , $\log B_t = \int_0^t r(y) dy$ であるので , Itô の公式 (無限次元版) (Theorem 2.20) を用いて計算すると ,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t, T) &= e^{\log P(t, T) - \log B_t} \\ &= \tilde{P}(0, T) + \int_0^t \tilde{P}(s, T) (r_s - I_{T-s} \alpha_s) ds \\ &\quad - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \sigma_s^* I_{T-s} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{P}(s, T) \|\sigma_s^* I_{T-s}\|_G^2 ds \\ &= \tilde{P}(0, T) + \int_0^t \tilde{P}(s, T) \left(-I_{T-s} \alpha_s + \frac{1}{2} \|\sigma_s^* I_{T-s}\|_G^2 \right) ds - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \sigma_s^* I_{T-s} dW_s \end{aligned}$$

となる。ここで , $\alpha_s = F_{\text{HJM}}(\sigma_s) + \sigma_s \lambda_s$ を代入

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t, T) &= \tilde{P}(0, T) + \int_0^t \tilde{P}(s, T) \left(-I_{T-s} F_{\text{HJM}}(\sigma_s) + \sigma_s \lambda_s + \frac{1}{2} \|\sigma_s^* I_{T-s}\|_G^2 \right) ds \\ &\quad - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \sigma_s^* I_{T-s} dW_s \\ &= \tilde{P}(0, T) - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \sigma_s^* I_{T-s} \lambda_s ds - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \sigma_s^* I_{T-s} dW_s \\ &\quad + \int_0^t \tilde{P}(s, T) \left(-I_{T-s} F_{\text{HJM}}(\sigma_s) + \frac{1}{2} \|\sigma_s^* I_{T-s}\|_G^2 \right) ds \end{aligned}$$

さらに前の式から ,

$$I_{T-s} F_{\text{HJM}}(\sigma_s) = \int_0^{T-s} \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_s g_n) \star (\sigma_s g_n)(u) du$$

である。 $\|(\sigma_s g_n) \star (\sigma_s g_n)\|_F \leq C \|\sigma_s g_n\|_F^2$ なので ,

$$\int_0^{T-s} \sum_{n=1}^{\infty} \|(\sigma_s g_n) \star (\sigma_s g_n)(u)\| du \leq C \int_0^{T-s} \sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma_s g_n\|_F^2 du = C \int_0^{T-s} \|\sigma_s^* \delta_u\|_G^2 du \underset{\text{仮定}}{<} \infty$$

となる。

よって , 無限級数と積分は交換可能で ,

$$\begin{aligned} I_{T-s}(F_{\text{HJM}}(\sigma_s)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T-s} (\sigma_s g_n)(u) \int_0^u (\sigma_s g_n)(v) dv du \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T-s} \int_0^{T-s} (\sigma_s g_n)(u) (\sigma_s g_n)(v) dv du \\ &= \frac{1}{2} \|\sigma_s^* I_{T-s}\|_G^2 \end{aligned}$$

となる。ゆえに,

$$\tilde{P}(t, T) = \tilde{P}(0, T) - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \sigma_s^* I_{T-s} \lambda_s ds - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \sigma_s^* I_{T-s} dW_s$$

である。

仮定から,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s\|_G^2 ds - \int_0^t \lambda_s dW_s \right) \right] = 1$$

なので, Girsanov の定理から, $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 上で G 上の柱状 Wiener 過程となるような $\mathbb{P}$ と同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在する。このとき,

$$\tilde{P}(t, T) = \tilde{P}(0, T) - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \sigma_s^* I_{T-s} d\hat{W}_s$$

であり, 仮定から $\mathbb{Q}$ 上で $\tilde{P}(t, T)$ は $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ に関して, マルチンゲールとなる。よって, Theorem 3.5 より, 無裁定戦略が存在する。よって, 示せた。 $\square$

4.2.2 ロングレート

有界領域 $[0, x_{\max}]$ と $\mathbb{R}_+$ では, その上での関数としてのフォワードレートのモデリングにはいくつか違いがある。特に半直線上を動く時は, ロングレートは極限 $l_t = \lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x)$ で定義される。実はこのときロングレートは小さくならない。この節ではこのことを示す。

この節を通して, Assumption 4.1 を仮定しておく。さらに次の仮定を加える。

Assumption 4.8. 任意の $f \in F$ は $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ が存在する。また, $\delta_\infty : f \mapsto f(\infty)$ は F^* の元である。

$\{f_t\}_{t > 0}$ を抽象 HJM モデルによって与えられたフォワードレート過程とし, $l_t = f_t(\infty)$ をロングレートとする。このときロングレートは $\mathbb{P}$ -a.s. に小さくならないことを証明する。

Theorem 4.9. $0 \leq s \leq t$ に対して, $l_s \leq l_t$ は a.s. に成立する。

Proof. 以下のことを使う。 (t, ω) を固定しておくとして,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{P}(t, T)^{\frac{1}{T}} = e^{-l_t} \quad (4.9)$$

が成立する。ただし, $\tilde{P}(t, T) = \exp(-\int_0^t f_s(0) ds - \int_0^{T-t} f_t(x) dx)$ であった。

与えられた測度 $\mathbb{P}$ に対して, 同値なマルチンゲール $\mathbb{Q}$ を考える。Theorem 4.7 から, $\mathbb{P}$ と同値な測度 $\mathbb{Q}$ が存在して, $\{\tilde{P}(t, T)\}_{t \in [0, T]}$ は $\forall T > 0$ に対して, 局所マルチンゲールとなる。

このとき, ξ を正值で有界な確率変数として任意に取ってくると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-l_t} \xi] &= \mathbb{E}[\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{P}(t, T)^{\frac{1}{T}} \xi] \stackrel{\text{mart.}}{=} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{P}(t, T)^{\frac{1}{T}} \xi \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \mathbb{E} \left[\liminf_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\tilde{P}(t, T)^{\frac{1}{T}} \xi \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \mathbb{E} \left[\liminf_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\tilde{P}(s, T) | \mathcal{F}_s]^{\frac{1}{T}} \mathbb{E}[\xi^{\frac{T}{T-1}} | \mathcal{F}_s]^{\frac{T-1}{T}} \right] \\ &\stackrel{\text{supremart.}}{\leq} \mathbb{E} \left[\liminf_{T \rightarrow \infty} \tilde{P}(s, T)^{\frac{1}{T}} \mathbb{E}[\xi^{\frac{T}{T-1}} | \mathcal{F}_s]^{\frac{T-1}{T}} \right] \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \mathbb{E} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{P}(s, T)^{\frac{1}{T}} \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_s] \right] \\ &= \mathbb{E}[e^{-l_s} \xi] \end{aligned}$$

ξ は正で任意だったので, $e^{-l_t} \leq e^{-l_s}$ すなわち, $l_s \leq l_t$ となる。 $\square$

この証明において，抽象 HJM モデルの構造はほとんど必要としない。実際，この結果はジャンプを持つモデルや離散時間のモデルでもロングレートの存在を仮定しておけば，成立する。また，Visicek や CIR のような有名なスポットレートモデルは定数のロングレートを持つ。例えば，Visicek モデルについて考えることにする。

Example 4.10. Vasicek モデルは確率微分方程式

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

であるが，スポットレート $\{r_t\}_{t \geq 0}$ がこれを満たすとき，フォワードレート $\{f_t\}_{t \geq 0}$ は 3 章より，

$$f_t(x) = e^{-\alpha x} r_t + \beta(1 - e^{-\alpha x}) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-\alpha x})^2$$

となる。よって， $x \rightarrow \infty$ で $l_t = \beta - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}$ となり，これは (t, ω) と独立である。

Example 4.11. また，ロングレートが真に増加するモデルも存在する。1 ファクターの HJM モデルで， $\sigma(x) = \sigma_0(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ とする。ただし， σ_0 は正定数とする。このとき，

$$\begin{aligned} F_{\text{HJM}} \circ \sigma(x) &= \sigma_0(x+1)^{-\frac{1}{2}} \int_0^x \sigma_0(t+1)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \sigma_0^2(x+1)^{-\frac{1}{2}} \left[2(t+1)^{\frac{1}{2}} \right]_0^x \\ &= 2\sigma_0^2(x+1)^{-\frac{1}{2}} \left((x+1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) dW_s \\ &= 2\sigma_0^2 \{1 - (1+x)^{-\frac{1}{2}}\} \end{aligned}$$

である。よって， $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 上で

$$\begin{aligned} f_t(x) &= S_t f_0(x) + \int_0^t S_{t-s} \alpha(s, x, f_s) ds + \int_0^t S_{t-s} \sigma(s, x, f_s) dW_s \\ &= f_0(x+t) + \int_0^t 2\sigma_0^2 S_{t-s} \left[1 - (1+x)^{-\frac{1}{2}} \right] ds + \int_0^t S_{t-s} (\sigma_0(1+x)^{-\frac{1}{2}}) dW_s \\ &= f_0(T) + 2\sigma_0^2 \int_0^t \left(1 - \{1 + (T-s)\}^{-\frac{1}{2}} \right) ds + \sigma_0 \int_0^t (T-s+1)^{-\frac{1}{2}} dW_s \end{aligned}$$

ここで両辺を $T \rightarrow \infty$ としたい。まず定義より，(左辺) $\rightarrow l_t$ である。さらに，(右辺第 1 項) $\rightarrow l_0$ となる。また，右辺第 2 項は有界収束定理より，(右辺第 2 項) $\rightarrow 2\sigma_0 t$ となる。また，右辺第 3 項は Itô の公式を使うことで，

$$\begin{aligned} \int_0^t (T-s+1)^{-\frac{1}{2}} dw_s &= -2(T+1-t)^{\frac{1}{2}} + 2(T+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^t (T+t-s)^{-\frac{3}{2}} ds \\ &= \frac{2t}{\sqrt{T+1} + \sqrt{T+1-t}} + \frac{1}{4} \int_0^t (T+t-s)^{-\frac{3}{2}} ds \\ &\rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

なお，最後は有界収束定理を使った。以上より， $l_t = l_0 + 2\sigma_0 t$ となり，真に増加する。

4.2.3 F の具体的な例

HJM モデルを解析するための状態空間 F の具体例として, $\{H_\omega\}_\omega$ を考える。

Definition 4.12. $\omega; \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ は増加関数で

$$\int_0^\infty \omega(x)^{-1} dx < \infty \quad (4.10)$$

を満たす。このとき,

$$H_\omega = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は絶対連続で } \int_0^\infty f'(x)^2 \omega(x) dx < \infty \right\}$$

とする。ただし, f' は f の超関数の意味での微分で, 内積を

$$\langle f, g \rangle_{H_\omega} := f(0)g(0) + \int_0^\infty f'(x)g'(x)\omega(x)dx$$

で定義する。

ここで, $\omega(x)$ としては例えば, e^x や $(1+x)^4$ などを考えている。また, $\{H_\omega\}_\omega$ は以下の Proposition が示すとおり, 良い性質を持っている。

Proposition 4.13. ウェイト関数 ω が (4.10) を満たしているとする。

このとき, 内積空間 H_ω は可分 Hilbert 空間で, δ_x と I_x はそれぞれ $\delta_x(f) = f(x)$ と $I_x(f) = \int_0^x f(s)ds$ で定義され, $\forall x \geq 0$ に対して, H_ω 上で連続である。さらに, H_ω 上の半群 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ を $(S_t f)(x) = f(t+x)$ は強連続である。

Proof. まず, H_ω が可分 Hilbert 空間であることを示す。

H_ω のノルムは

$$\|h\|_\omega^2 = |h(0)|^2 + \int_0^\infty |h'(x)|^2 \omega(x) dx$$

である。ここで, 可分 Hilbert 空間 $\mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}_+)$ を考える。このノルムは $(|\cdot|^2 + \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2)^{\frac{1}{2}}$ である。 $T; H_\omega \rightarrow \mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}_+)$ を $Th = (h(0), h'\omega)$ ($h \in H_\omega$) によって与えると,

$$\|Th\|_{\mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}_+)} = (|h(0)|^2 + \|h'\omega^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2)^{\frac{1}{2}} = \|h\|_\omega$$

となり, T は等距離作用素である。また

$$T^{-1}(u, f)(x) = u + \int_0^x f(\eta)\omega^{\frac{1}{2}}(\eta)d\eta \quad (u, f) \in \mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}_+)$$

より, T^{-1} も等距離作用素になる。よって, H_ω と $\mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}_+)$ は同型となり, H_ω は可分 Hilbert 空間となる。

次に δ_x と I_x が H_ω 上で連続であることを示す。

$$\begin{aligned} |\langle \delta_x, f \rangle| &= |f(x)| \\ &= \left| f(0) + \int_0^x f'(u)\omega^{\frac{1}{2}}(u)\omega^{-\frac{1}{2}}(u)du \right| \\ &\leq |f(0)| + \left(\int_0^x \frac{du}{\omega(u)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x f'(u)^2 \omega(u) du \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|f\|_\omega \end{aligned}$$

となる。よって, $\|\delta_x\|_{H_\omega^*} \leq C$ となり, δ_x は H_ω 上で連続。また, I_x については

$$|\langle I_x, f \rangle| = \left| \int_0^x f(s) ds \right| \leq x \sup_{s \in [0, x]} |f(s)| \leq x \sup_{s \in [0, x]} \|\delta_s\|_{H_\omega^*} \|f\|_\omega \leq C' \|f\|_\omega$$

となり, 以下 δ_x のときと同様にできる。

最後に $\{S_t\}_{t \geq 0}$ が H_ω 上で強連続であることを示す。まず, $h \in H_\omega, \varphi \in C_c^1((0, \infty))^8$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} S_t h(x) \varphi'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+} h(x) \varphi'(x-t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+} h'(x) \varphi(x-t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+} h'(x+t) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

ここでは, $\varphi(\cdot - t) \in C_c^1((t, \infty))$ ということを使った。上より, $(S_t h)'$ が存在して, $(S_t h)' = S_t h'$ となる。ここで, ω は正の値しかとらない増加関数なので,

$$\begin{aligned} \|S_t h\|_\omega^2 &= |h(t)|^2 + \int_{\mathbb{R}_+} |h'(x+t)|^2 \omega(x) dx \\ &\leq |h(t)|^2 + |h(0)|^2 + \int_{\mathbb{R}_+} |h'(x)|^2 \omega(x) dx \\ &= |h(t)|^2 + \|h\|_\omega^2 \end{aligned}$$

となり, さらに,

$$\begin{aligned} |h(t)|^2 &= \left| h(0) + \int_0^t h'(s) ds \right|^2 \\ &\leq 2|h(0)|^2 + 2 \left(\int_0^t |h'(s)| \omega^{\frac{1}{2}}(u) \omega^{-\frac{1}{2}}(u) ds \right)^2 \\ &\leq 2|h(0)|^2 + 2 \left(\int_0^\infty |h'(t)|^2 \omega(t) dt \right) \left(\int_0^\infty \omega^{-1}(t) dt \right) \\ &\leq 2|h(0)|^2 + 2 \left(\int_0^\infty |h'(t)|^2 \omega(t) dt \right) \|\omega^{-1}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq 2\hat{C} \|h\|_\omega^2 \quad (\because \text{仮定}) \end{aligned}$$

となる。よって, $\|S_t h\|_\omega \leq C_1 \|h\|_\omega$ ($t \geq 0$) となる。次に

$$\mathcal{D}_0 = \{f \in C^2(\mathbb{R}_+) | f' \in C_c^1(\mathbb{R}_+)\}$$

とすると, $\mathcal{D}_0$ は H_ω 内で dense である。よって, $g \in \mathcal{D}_0$ に対して, 有界収束定理を使うと

$$\|S_t g - g\|_\omega = |g(t) - g(0)|^2 + \int_0^\infty |g'(x+t) - g'(x)|^2 \omega(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

となる。また, $\mathcal{D}_0 \underset{\text{dense}}{\subset} H_\omega$ より,

$$\forall h \in H_\omega, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists g \in \mathcal{D}_0 \text{ が存在して, } \|h - g\|_\omega < \varepsilon$$

⁸ $C_c^1((t, \infty))$ は $\mathbb{R}_+$ 上のコンパクトな台を持つ C^1 -級関数全体

とできる。以上から

$$\begin{aligned} \|S_t h - h\|_\omega &\leq \|S_t(h - g)\|_\omega + \|S_t g - g\|_\omega + \|g - h\|_\omega \\ &\leq C_1 \|h - g\|_\omega + \|S_t g - g\|_\omega + \|g - h\|_\omega \\ &\leq C_1 \varepsilon + \|S_t g - g\|_\omega + \varepsilon \rightarrow 0 \quad (t, \varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

よって, S_t は H_ω 上で強連続となる。以上ですべて示せた。 $\square$

Proposition 4.14. $f \in H_\omega$ に対して, $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ は $f(\infty) = f(0) + \int_0^\infty f'(x) dx$ として, well-defined となる。

Proof.

$$\int_0^\infty |f'(x)| dx \leq \left(\int_0^\infty f'(x)^2 \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \omega(x)^{-1} dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$\square$

また, δ_∞ は Proposition 4.13 の証明と同様にすることで, H_ω 上で連続となる。

状態空間として H_ω を選ぶことの一番良い点は, H_ω が (ω が十分早く増加するならば), HJM の無裁定条件に適合する。なので, 次に H_ω が Assumption 4.3 を満たすことを示す。

Proposition 4.15. $H_\omega^0 \subset H_\omega$ を次で定義する。

$$H_\omega^0 = \{f \in H_\omega | f(\infty) = 0\}$$

ウエイト ω が $\int_0^\infty x^2 \omega(x)^{-1} dx < \infty$ を満たすとき, $\star; H_\omega^0 \times H_\omega^0 \rightarrow H_\omega^0$ を

$$(f \star g)(x) = f(x) \int_0^x g(s) ds$$

と定義し, $\|f \star g\|_\omega \leq C \|f\|_\omega \|g\|_\omega$ を満たす。また, 特に写像 F_{HJM} は $\mathcal{L}_{(2)}(G, H_\omega^0)$ から H_ω^0 で局所 Lipschitz 条件を満たす。

Proof. $f, g \in H_\omega^0$ に対して,

$$((f \star g)(x))' = \left(f(x) \int_0^x g(s) ds \right)' = f'(x) \int_0^x g(s) ds + f(x) g(x)$$

となる。これから,

$$\begin{aligned} \|(f \star g)\|_\omega &= \int_0^\infty \left(f'(x) \int_0^x g(s) ds + f(x) g(x) \right)^2 \omega(x) dx \\ &\leq 2 \int_0^\infty (f'(x) \|I_x\|_{H_\omega^0}^2 \|g\|_\omega^2 + \|\delta_x\|_{H_\omega^{0*}} \|f\|_\omega^2 \|g\|_\omega^2) \omega(x) dx \\ &\leq 2 \|f\|_\omega^2 \|g\|_\omega^2 \left(\sup_{x \geq 0} \|I_x\|_{H_\omega^{0*}}^2 + \int_0^\infty \omega(x) \|\delta_x\|_{H_\omega^{0*}}^4 dx \right) \end{aligned}$$

である。今 $f \in H_\omega^0$ に対して,

$$\begin{aligned} |\langle I_x, f \rangle| &= \left| \int_0^x f(s) ds \right| \leq \int_0^x |f(s)| ds \leq \int_0^x \int_s^\infty |f'(t)| dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^{x \wedge t} |f'(s)| ds dt = \int_0^\infty (x \wedge t) |f'(t)| dt \leq \left(\int_0^\infty t^2 \omega(t)^{-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_\omega \end{aligned}$$

となる。よって, $\sup_{x \geq 0} \|I_x\|_{H_\omega^{0*}}$ は有限である。また, $f \in H_\omega^0$ に対して,

$$|f(x)| \leq \int_x^\infty |f'(s)| ds \leq \left(\int_x^\infty \omega(s)^{-1} ds \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_\omega$$

なので,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \omega(x) \|\delta_x\|^4 dx &\leq \int_0^\infty \omega(x) \left(\int_x^\infty \omega(s)^{-1} ds \right)^2 dx \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty \int_0^\infty \omega(x) \omega(t)^{-1} \omega(s)^{-1} ds dt dx \\ &= 2 \int_0^\infty ds \int_0^s dt \int_0^t \omega(x) \omega(t)^{-1} \omega(s)^{-1} dx \\ &\leq 2 \int_0^\infty ds \int_0^s t \omega(s)^{-1} dt \\ &= \int_0^\infty s^2 \omega(s)^{-1} ds \end{aligned}$$

よって,

$$\|f \star g\|_\omega^2 \leq 4 \left(\int_0^\infty s^2 \omega(s)^{-1} ds \right) \|f\|_\omega^2 \|g\|_\omega^2 = C^2 \|f\|_\omega^2 \|g\|_\omega^2$$

となる。ただし, $C = 2 \left(\int_0^\infty s^2 \omega(s)^{-1} ds \right)^{\frac{1}{2}}$ である。後は Proposition 4.4 より成立する。 $\square$

§4.2.2 の議論に戻ると, F_{HJM} は $\mathcal{L}_{(2)}(G; H_\omega^0)$ から H_ω^0 への写像より, $\sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; H_\omega^0)$ に対して,

$$F_{\text{HJM}}(\sigma)(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \delta_\infty, (\sigma g_n) \star (\sigma g_n) \rangle_F = 0$$

よって, $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上で, $\{W_t\}$ を Q 上の標準 Wiener 過程とする。このとき, (4.7) より,

$$f_t(x) = S_t f_0(x) + \int_0^t S_{t-s} F_{\text{HJM}}(\sigma(s, \omega, f_s))(x) ds + \int_0^t S_{t-s} \sigma(s, \omega, f_s)(x) dW_s$$

$x \rightarrow \infty$ とすると, (左辺) $\rightarrow l_t$, (右辺第 1 項) $\rightarrow S_t(\infty) = f(\infty)$, 上より, (右辺第 2 項) $\rightarrow 0$, さらに $\sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; H_\omega^0)$ なので, (右辺第 3 項) $\rightarrow 0$ となる。以上より, l_t は $\forall t \geq 0$ に対して定数となる。

4.3 抽象 HJM モデルに従う場合の債券ポートフォリオのヘッジ戦略

この節では抽象 HJM モデルに従う場合の債券ポートフォリオについて考える。特にここでは投資家が無限個の債券への投資を許すと仮定する。時点 t で満期までの時刻が $x_1, x_2, \dots, x_N$ の債券の保有量をそれぞれ $c_1, \dots, c_N$ とする。このとき, このポートフォリオを保有する投資家の資産は $X_t = \sum_{i=1}^N c_i P_t(x_i)$ である。さらに δ_x を使うと, $X_t = \left(\sum_{i=1}^N c_i \delta_{x_i} \right) (P_t)$ となる。つまり, 汎関数 δ_x の有限個の線形結合として考えることができる。

ここで δ_x はポイントマス $\delta_x(A) = 1_A(x)$ と同一視できるので, 単純ポートフォリオは有限個のアトムによる $\mathbb{R}_+$ 上のアトミック測度となる。この節で考え “一般化されたポートフォリオ” とは, この “単純ポートフォリオの極限” である。つまり, このポートフォリオのフレームワークは例え

ば, $\mathbb{R}_+$ 上の連続有限測度として与えられる。証明を簡単にするために, $f_t(\cdot)$ の代わりに $\tilde{P}_t(\cdot)$ についての HJM モデルで書き直す。実際, この 2 つは次の関係のように 1 対 1 に対応している。

$$\begin{aligned}\tilde{P}_t(x) &= \exp\left(-\int_0^t f_s(0)ds - \int_0^x f_t(s)ds\right) \\ f_t(x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \log(\tilde{P}_t(x))\end{aligned}\quad (4.11)$$

4.3.1 債券価格のモデル

割引債券価格カーブのモデルを定式化する。抽象 HJM モデルと同様の扱いで, ゼロクーポン債券価格関数の状態空間 F を選ぶ。つまり F は Assumption 4.1.1. と 4.1.2. を満たすと仮定する。また節を通じて, 確率過程は完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上で定義されると仮定する。また, E_Q は Q を省略して, E と表す。 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ の状態空間はこれと関係無いので, $\{W_t\}_{t \geq 0}$ は可分 Hilbert 空間 G 上の柱状 Wiener 過程とする。 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は Wiener 過程によって生成されたフィルトレーションで, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ とする。 $\mathcal{P}$ は可予測 σ 加法族とする。このとき, リスク中立な抽象債券価格モデルを定義したい。

Definition 4.16. F 上のリスク中立なゼロクーポン債券価格モデルは可測関数 $\sigma; (\mathbb{R}_+ \times \Omega \times F, \mathcal{P} \times \mathcal{B}(F)) \rightarrow (\mathcal{L}_{(2)}(G; F), \mathcal{B}(\mathcal{L}_{(2)}(G; F)))$ で次を満たすものである。 $\forall (t, \omega, f) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times F$ に対して,

$$\sigma(t, \omega, f)^* \delta_0 = 0 \quad (4.12)$$

であり, かつ $\{\tilde{P}_t(x)\}_{t \geq 0}$ が $\tilde{P}_t(x) > 0$ (a.s.) で,

$$d\tilde{P}_t = A\tilde{P}_t dt + \sigma(t, \omega, \tilde{P}_t) dW_t \quad (4.13)$$

の唯一つの連続な F -値 mild solution となるような初期条件 $\tilde{P}_0 \in F$ の空でない集合が存在する。

初期条件 $\tilde{P}_0 \in F$ を固定する。このとき, 割引債券価格は

$$\tilde{P}_t = S_t \tilde{P}_0 + \int_0^t S_{t-s} \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s) dW_s \quad (4.14)$$

を満たす。割引債券価格のモデルが与えられたら, 各 $T > 0$ に対して, $\{\tilde{P}_t(T-t)\}_{t \in [0, T]}$ は局所マルチンゲールとなる。さらに,

$$\tilde{P}_t(T-t) = \tilde{P}_0(T) + \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* S_{t-s}^* \delta_0 dW_s \quad (4.15)$$

となる。また, $\sigma(t, \omega, f)^* \delta_0 = 0$ は満期において割引債のボラティリティが 0 になることを示している。

この先の議論はこのゼロクーポン債モデルから始める。このとき, 実際の債券価格は, $\tilde{P}_t(0) = \frac{P_t(0)}{B_t} = B_t^{-1}$ より,

$$P_t(x) = \frac{\tilde{P}_t(x)}{\tilde{P}_t(0)}$$

となる。また次のことが分かる。

Proposition 4.17. 割引債券価格が正であることの十分条件は

$$\|\sigma(t, \omega, f)^* \delta_x\|_G \leq C|f(x)|$$

である。ただし, C は正定数である。

Proof. (4.15) より, $\log x$ に対して, Itô の公式 (無限次元版) (Theorem 2.20) を用いると,

$$\log \tilde{P}_t(T-t) = \log \tilde{P}_0(T) + \int_0^t \frac{\sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* S_{T-s}^* \delta_0}{\tilde{P}_s(T-s)} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\|\sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* S_{T-s}^* \delta_0\|_G^2}{\tilde{P}_s(T-s)^2} ds$$

ここで, $\|\log \tilde{P}_0(T)\|_F$ は有限より, $E[\|\log \tilde{P}_0(T)\|_F^2] < C'$ (C' は定数) である。

また, $\tau_n = \inf\{t \geq 0 \mid \tilde{P}_t(T-t) \leq n-1\}$ とすると, これは単調増加な stopping time となる。

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{t \leq \tau_n \wedge T} \left| \log \tilde{P}_t(T-t) \right|^4 \right] \\ & \leq 81E \left[\sup_{t \leq \tau_n \wedge T} \left| \log \tilde{P}_0(T) \right|^4 \right] + 81E \left[\sup_{t \leq \tau_n \wedge T} \left| \int_0^t \frac{\sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* S_{T-s}^* \delta_0}{\tilde{P}_s(T-s)} dW_s \right|^4 \right] \\ & \quad + \frac{81}{4} E \left[\sup_{t \leq \tau_n \wedge T} \left| \int_0^t \frac{\|\sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* S_{T-s}^* \delta_0\|_G^2}{\tilde{P}_s(T-s)^2} ds \right|^4 \right] \\ & \leq 81C' + 81K \sup_{t \leq \tau_n \wedge T} E \left[\int_0^t \frac{\|\sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* S_{T-s}^* \delta_0\|_G^4}{\tilde{P}_s(T-s)^4} ds \right] \\ & \quad + \frac{81}{4} E \left[\int_0^{\tau_n \wedge T} \frac{\|\sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* S_{T-s}^* \delta_0\|_G^8}{\tilde{P}_s(T-s)^8} ds \right] \\ & \leq 81C' + 81K \sup_{t \leq \tau_n \wedge T} E \left[\int_0^t \frac{\|\sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* S_{T-s}^* \delta_0\|_G^4}{\tilde{P}_s(T-s)^4} ds \right] + \frac{81}{4} C^8 (\tau_n \wedge T) \\ & \leq 81C' + 81KC^4 (T \wedge \tau_n) + \frac{81}{4} C^8 (T \wedge \tau_n) < \infty \end{aligned}$$

よって, $n \rightarrow \infty$ とすることで, $\log \tilde{P}_t(T-t) > -\infty$ (a.s.)。つまり, $\tilde{P}_t(T-t) > 0$ (a.s.) となる。□

4.3.2 取引戦略

この節では, Definition 4.16 で導入した債券価格モデルでの取引戦略の概念について考える。 ϕ_t を時点 $t \geq 0$ でのポートフォリオのウェイトとする。

また, 各 $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ に対して, ゼロクーポン債ベクトルは F の元である。そのため実際の債券価格のベクトルも F の元である。これから, 投資家の資産 $X_t = \langle \phi_t, P_t \rangle_F$ を計算したいので, $\phi_t \in F^*$ を仮定する。仮定より, 双対空間 F^* を $\mathbb{R}_+$ 上の有限測度を含む超関数の空間である。特に F^* 上で ϕ_t は $\phi_t \approx \sum_{i=1}^N c_i \delta_{x_i}$ によって近似できる。ただし, $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は前と同様に定義する。

投資家は時点 $t \geq 0$ でポートフォリオ ϕ_t を持っているとき, 割引資産は $\tilde{X}_t = \langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle_F$ によって与えられる。一般に $\{\tilde{P}_t\}_{t \geq 0}$ はセミマルチンゲールであるとは限らないので, self-financing の概念を定式化する際に注意が必要となる。

そこで記号として一時的にはあるが, F 上有界で強連続な作用素 $\{S_{-t}\}_{t \geq 0}$ を導入する。これは次で定義される。

$$(S_{-t}f(x)) := \begin{cases} f(x-t) & (x \geq t) \\ f(0) & (x < t) \end{cases}$$

上の定義では, $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は半群にはならないことに注意しておく。 $\{S_{-t}\}_{t \geq 0}$ を用いると, 投資家割引資産は $\tilde{X}_t = \langle S_t^* \phi_t, S_{-t} \tilde{P}_T \rangle_F$ で与えられる。また, 過程 $\{S_{-t} \tilde{P}_t\}_{t \geq 0}$ は

$$S_{-t} \tilde{P}_t = S_{-t} \left\{ S_t \tilde{P}_0 + \int_0^t S_{t-s} \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s) dW_s \right\} = \tilde{P}_0 + \int_0^t S_{-t} \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s) dW_s$$

である。ここで形式的には self-financing 条件は $d\tilde{X}_t = \langle S_t^* \phi_t, dS_{-t} \tilde{P}_t \rangle_F$ とすべきである。これを計算すると,

$$d\tilde{X}_t = \langle S_t^* \phi_t, dS_t \tilde{P}_t \rangle_F = \langle S_t^* \phi_t, S_{-t} \sigma(t, \omega, \tilde{P}_t) dW_t \rangle_F = \sigma(t, \omega, \tilde{P}_t)^* \phi_t dW_t$$

今上の式より, 半群 $\{S_{-t}\}_{t \geq 0}$ についての議論が不要となる。以上のことをまとめると次のようになる。

Definition 4.18 (self-financing). ある戦略 $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ は, F^* -値過程で

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \|\sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \phi_s\|_G^2 ds \right] < \infty \text{ a.s. } (t \geq 0)$$

を満たす。このとき, 戦略 $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ が self-financing であるとは, ある定数 $X_0 \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$\langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle_F - \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \phi_s dW_s = X_0 \quad (\forall t \geq 0)$$

となることである。また, $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ が self-financing であるとき, 時点 $t \geq 0$ で対応する割引資産を

$$\tilde{X}_t^\phi = \langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle_F = X_0 + \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \phi_s dW_s$$

と表記できる。

ここで, 初期条件 X_0 を固定すること, すなわち初期投資の額を決めることで任意の取引戦略から銀行預金を使って, self-financing な戦略を構成できることを示す。

Proposition 4.19. 初期条件 X_0 を固定する。

任意の戦略 $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ に対して, $\varphi_t = \phi_t + \psi_t B_t \delta_0$ とする。このとき, $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ は self-financing である。ただし, $\psi_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \phi_s dW_s - \langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle_F$ は投資家の資産のうち, 銀行預金の保有量である。

Proof. まず, $\eta_t = B_t \delta_0 = \tilde{P}_t(0)^{-1} \delta_0$ という戦略を考える。これは時点 t でちょうど満期の債券を保有し, 償還金をすぐに再投資するという戦略である。これは次で分かる通り, $X_0 = 1$ の self-financing な戦略となる。

$$\begin{aligned} & \langle \eta_t, \tilde{P}_t \rangle_F - \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \eta_s dW_s \\ &= \langle B_t \delta_0, \tilde{P}_t \rangle_F - \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* B_s \delta_0 dW_s \\ &= B_t \tilde{P}_t(0) - \int_0^t B_s \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \delta_0 dW_s \\ &\stackrel{(4.12)}{=} 1 = X_0 \quad (\forall t \geq 0) \end{aligned}$$

これを使って, Proposition を証明する。

$$\begin{aligned}
& \langle \varphi_t, \tilde{P}_t \rangle_F - \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \varphi_s dW_s \\
&= \langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle_F + \langle \psi_t B_t \delta_0, \tilde{P}_t \rangle - \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \phi_s dW_s - \int_0^t \psi_s B_s \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \delta_0 dW_s \\
&= \langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle_F + \psi_t - \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \phi_s dW_s \quad (\because \text{上の結果}) \\
&= X_0
\end{aligned}$$

となる。よって, 示せた。 $\square$

4.3.3 ヘッジ戦略の一意性

この節では, 無限次元モデルのとき, ある条件のもとで, ヘッジ戦略が一意であることを示す。
(4.12) より, 任意の $(t, \omega, f) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times F$ に対して,

$$\text{range}(\sigma(t, \omega, f)) \subset \{g \in F; g(0) = 0\}$$

これと同値なものとして,

$$\text{span}\{\delta_0\} \subset \ker(\sigma(t, \omega, f)^*)$$

この包含関係が “=” のとき, 以下の一意性の結果を得る。

Proposition 4.20. 任意の $(t, \omega, f) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times F$ に対して, $\text{span}\{\delta_0\} = \ker(\sigma(t, \omega, f)^*)$ と仮定する。このとき, $T \geq 0$ に対して, self-financing な戦略 $\{\phi_t^1\}_{t \in [0, T]}$ と $\{\phi_t^2\}_{t \in [0, T]}$ が存在して, $\tilde{X}_T^{\phi^1} = \tilde{X}_T^{\phi^2}$ ならば, ほとんどすべての (t, ω) に対して, $\phi_t^1 = \phi_t^2$ である。

Proof. $\psi_t = \phi_t^1 - \phi_t^2$ とすると, 仮定より $X_T^\psi = 0$ となるような self-financing な戦略とする。このとき, $E[\tilde{X}_T^\psi] = X_0^\psi = 0$ であり, $\int_0^T \sigma(t, \omega, \tilde{P}_t)^* \psi_t dW_t = 0$ a.s. である。よって,

$$E \left[\int_0^T \|\sigma(t, \omega, \tilde{P}_t)^* \psi_t\|_G^2 dt \right] = 0$$

これより, ほとんどすべての (t, ω) に対して, $\sigma(t, \omega, \tilde{P}_t)^* \psi_t = 0$ となる。

よって, 仮定よりほとんどすべての (t, ω) に対して, 汎関数 ψ_t は δ_0 はスカラー倍となる。つまり, $\psi_t = c_t \delta_0$ となる。ただし, c_t は 1 次元の確率変数である。

$X_0^\psi = 0$ で $\{\psi_t\}_{t \in [0, T]}$ は self-financing なので, ほとんどすべての (t, ω) に対して,

$$\langle \psi_t, \tilde{P}_t \rangle_F = \int_0^t \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \psi_s dW_s = \int_0^t c_s \sigma(s, \omega, \tilde{P}_s)^* \delta_0 dW_s = 0$$

よって,

$$\langle c_t \delta_0, \tilde{P}_t \rangle_F = c_t \tilde{P}_t(0) = 0$$

Definition 4.16 より, $\tilde{P}_t(0) > 0$ なので, $c_t = 0$ 。よって示せた。 $\square$

4.3.4 債券オプションに対するヘッジ戦略

この節ではヨーロピアン債券オプション，すなわち満了日 $T > 0$ に対して， $T < T_1 < \dots < T_n$ の満期を持つ債券で作られるオプションに対するヘッジ戦略を考える。ここでオプションとは，将来の一定期間内に約束した金額で証券を売ったり買ったりする権利のことで，“買う権利”のことをコールオプション，“売る権利”のことをプットオプションという。このオプションのペイオフを ξ とすると，これは関数 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を使って，

$$\begin{aligned}\xi &= g(P(T, T_1), \dots, P(T, T_n)) \\ &= g(P_T(T_1 - T), \dots, P_T(T_n - T))\end{aligned}$$

で与えられる。また， $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{B_T}$ とすると，

$$\tilde{\xi} = \tilde{P}_T(0)g\left(\frac{\tilde{P}_T(T_1 - T)}{\tilde{P}_T(0)}, \dots, \frac{\tilde{P}_T(T_n - T)}{\tilde{P}_T(0)}\right) =: \tilde{g}(\tilde{P}_T)$$

と書ける。ただし， $\tilde{g}: F \rightarrow \mathbb{R}$ を割引ペイオフ関数といい，次で定義する。

$$\tilde{g}(f) = f(0)g\left(\frac{f(T_1 - T)}{f(0)}, \dots, \frac{f(T_n - T)}{f(0)}\right)$$

この $\tilde{g}$ について，次の仮定を付け加えておく。

Assumption 4.21. 条件付請求権は満了日 T のヨーロピアン型で， $\tilde{\xi} = \tilde{g}(\tilde{P}_T)$ で与えられる割引ペイオフ関数を持つ。また，ペイオフ関数 $\tilde{g}(\tilde{P}_T): F \rightarrow \mathbb{R}$ は Lipschitz 条件を持つ。すなわち，

$$|\tilde{g}(f_1) - \tilde{g}(f_2)| \leq \|f_1 - f_2\|_F \quad (f_1, f_2 \in F, C \text{ は正定数})$$

実はこの仮定は $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が Lipschitz 条件を持つことから出てくる。

Proposition 4.22. $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は Lipschitz 条件を持つとする。すなわち，

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq C\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, C \text{ は正定数})$$

また， $T > 0$ を固定し， $T < T_1 < \dots < T_n$ をとってくる。このとき $f \in F, f(0) > 0$ に対して $\tilde{g}: F \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\tilde{g}(f) = f(0)g\left(\frac{f(T_1 - T)}{f(0)}, \dots, \frac{f(T_n - T)}{f(0)}\right)$$

で定義すると $\tilde{g}$ は Lipschitz 条件を満たす。すなわち，

$$|\tilde{g}(f_1) - \tilde{g}(f_2)| \leq C'\|f_1 - f_2\|_F \quad (f_1, f_2 \in F, C' \text{ は正定数})$$

Proof. $x_j = \left(\frac{f_j(T_1 - T)}{f_j(0)}, \dots, \frac{f_j(T_n - T)}{f_j(0)}\right) \quad (j = 1, 2)$ とする。

このとき，

$$\begin{aligned}|\tilde{g}(f_1) - \tilde{g}(f_2)| &= |f_1(0)g(x_1) - f_2(0)g(x_2)| \\ &\leq \tilde{C}|g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq \tilde{C}C\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= \tilde{C}C\left(\sum_{j=1}^n \left|\frac{f_1(T_j - T)}{f_1(0)} - \frac{f_2(T_j - T)}{f_2(0)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \hat{C}n^{\frac{1}{2}} \sup_{1 \leq j \leq n} |f_1(T_j - T) - f_2(T_j - T)| \\ &\leq C'\|f_1 - f_2\|_F\end{aligned}$$

□

この仮定は経済学的に無理がある仮定ではないことを確認するために、次のような例を考える。

Example 4.23. 満期 $T_1(> T)$ の債券によるヨーロッパコールオプションを考える。すなわち、満期 T_1 の債券を時刻 T で価格 K で買うことができるという契約である。

このときペイオフ g は、 $f(0) > 0$ に注意すると、

$$\tilde{g}(f) = f(0) \left(\frac{f(T_1 - T)}{f(0)} - K \right)_+ = (f(T_1 - T) - Kf(0))_+ = (\delta_{T_1-T}(f) - K\delta_0(f))_+$$

となり、これは δ_0 と δ_{T_1-T} が有界であることから、 $\tilde{g}$ は Lipschitz 条件を持つ。ただし、 $x_+ = \max\{x, 0\}$ である。実際、 $x, y \in \mathbb{R}$ と正定数 $K, K' > 0$ に対して、

$$(x - K)_+ - (y - K')_+ \leq (x - y - (K - K'))_+$$

となることに注意すると、 $f_1, f_2 \in F$ に対して、

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(f_1) - \tilde{g}(f_2)| &= |(\delta_{T_1-T}(f_1) - K\delta_0(f_1))_+ - (\delta_{T_1-T}(f_2) - K\delta_0(f_2))_+| \\ &\leq |((\delta_{T_1-T}(f_1 - f_2)) - K\delta_0(f_1 - f_2))_+| \\ &\leq |(\delta_{T_1-T}(f_1 - f_2)) - K\delta_0(f_1 - f_2)| \\ &= (|\delta_{T_1-T}|_{F^*} + K|\delta_0|_{F^*})\|f_1 - f_2\|_F \\ &\leq C\|f_1 - f_2\|_F \end{aligned}$$

この先、次のマルコフ性を仮定しておく。

Assumption 4.24. 割引債価格は $\sigma(t, \omega, f) = \bar{\sigma}(t, f)$ ($\bar{\sigma} : \mathbb{R}_+ \times F \rightarrow \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$) を満たすとする。つまり、ランダム性は $f \in F$ のみに依存してする。また、 $\bar{\sigma}$ は f に関して、 F 上で Frechét 微分可能だとする。以下、簡単のために $\sigma = \bar{\sigma}$ と書きなおし、また、 $\forall f \in F$ に対して連続で Lipschitz 条件を持つとする。

Theorem2.50 から、Lipschitz 条件を持つ SPDE の mild solution は Malliavin 微分可能である。とくに $\tilde{P}_T \in \mathbb{H}(F)$ で、さらに強ランダム作用素 $\{Y_{t,T} : F \rightarrow F\}_{t \in [0, T]}$ が存在して、割引債価格は

$$D_t \tilde{P}_T = Y_{t,T} \sigma(t, \tilde{P}_t)$$

となり、仮定から $\tilde{g}$ が Lipschitz 条件を持つので、連鎖律 (Proposition2.43) より、

$$D_t \tilde{g}(\tilde{P}_T) = \nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T) D_t \tilde{P}_T$$

となる。よって、Clark-Ocone Formula(Theorem2.47) より

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{P}_T) &= \mathbb{E}[\tilde{g}(\tilde{P}_T)] + \int_0^T \mathbb{E}[D_t \tilde{g}(\tilde{P}_T) \mathcal{F}_t] dW_t \\ &= \mathbb{E}[\tilde{g}(\tilde{P}_T)] + \int_0^T \sigma(t, \tilde{P}_t)^* \mathbb{E}[Y_{t,T}^* \nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T) | \mathcal{F}_t] dW_t \end{aligned} \quad (4.16)$$

と書き直せる。このことは以下の望ましい結果を導く。

Proposition 4.25. 各 $t \in [0, T]$ に対して, $\varphi_t = \phi_t + \psi_t B_t \delta_0$ とする。ただし, $\phi_t = E[Y_{t,T}^* \nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T) | \mathcal{F}_t]$, $\psi_t = E[\tilde{g}(\tilde{P}_T) | \mathcal{F}_t] - \langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle_F$ であり, $\{Y_{s,t}\}_{0 \leq s \leq t}$ は方程式

$$dY_{s,t} = AY_{s,t}dt + \nabla \sigma(t, \tilde{P}_t) Y_{s,t} \cdot dW_t \quad (4.17)$$

の (F から F への) 強ランダム作用素としての解である。ただし, $Y_{s,s} = I$ ($s \geq 0$) とする。このとき, $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ は ξ を複製する self-financing な戦略である。

Proof. ψ_t に (4.16) を代入すると

$$\psi_t = E[\tilde{g}(\tilde{P}_T)] + \int_0^t \sigma(s, \tilde{P}_s)^* \phi_s dW_s - \langle \phi_t, \tilde{P}_t \rangle_F$$

となり, $X_0 = E[\tilde{g}(\tilde{P}_T)]$ とすれば, Proposition 4.19 より, あとは $\phi_t \in F^*$ であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} \|\phi_t\|_{F^*} &= \sup_{\|f\|_F \leq 1} E[\langle \nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T), Y_{t,T} f \rangle_F | \mathcal{F}_t] \\ &\leq \sup_{\|f\|_F \leq 1} E[\langle \nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T), Y_{t,T} f \rangle_F^2 | \mathcal{F}_t]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{\|f\|_F \leq 1} E[\|\nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T)\|_F^2 \|Y_{t,T} f\|_F^2 | \mathcal{F}_t]^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{Lipschitz}}{\leq} C \sup_{\|f\|_F \leq 1} E[\|Y_{t,T} f\|_F^2 | \mathcal{F}_t]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで $f \in F$ に対して,

$$Y_{t,T} f = S_{T-t} f + \int_0^T S_{T-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) Y_{t,u} f dW_u$$

である。 $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ なので,

$$\|Y_{t,T} f\|_F^2 \leq 2\|S_{T-t} f\|_F^2 + 2 \left\| \int_0^T S_{T-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) Y_{t,u} f dW_u \right\|_F^2$$

となり, これから,

$$\sup_{\|f\|_F \leq 1} E[\|Y_{t,T} f\|_F^2 | \mathcal{F}_t] \leq \sup_{\|f\|_F \leq 1} E[2\|S_{T-t} f\|_F^2 | \mathcal{F}_t] + \sup_{\|f\|_F \leq 1} E \left[2 \left\| \int_0^T S_{T-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) Y_{t,u} f dW_u \right\|_F^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (4.18)$$

となる。ここで, $M := \sup_{t \in [0, T]} \|S_t\| < \infty$ であり, $\|\nabla \sigma(t, \tilde{P}_t)\|_F \leq C$ である。また, $\beta_u := S_{T-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) Y_{t,u} f$ とすると, $A \in \mathcal{F}_t$ に対して,

$$E \left[\left\| \int_0^T \beta_u dW_u \right\|_F^2 \mathbf{1}_A \right] = E \left[\left\| \int_0^T \beta_u \mathbf{1}_A dW_u \right\|_F^2 \right] = E \left[\int_0^T \|\beta_u \mathbf{1}_A\|_F^2 du \right] = E \left[\int_0^T \|\beta_u\|_F^2 du \mathbf{1}_A \right]$$

よって,

$$E \left[\left\| \int_0^T \beta_u dW_u \right\|_F^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] = E \left[\int_0^T \|\beta_u\|_F^2 du \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

ゆえに, (4.18) は

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|_F \leq 1} \mathbb{E}[\|Y_{t,T}f\|_F^2 | \mathcal{F}_t] &\leq 2M^2 + 2 \sup_{\|f\|_F \leq 1} \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\beta_u\|_F^2 du | \mathcal{F}_t \right] \\ &\leq 2M^2 + 2M^2 C^2 \int_0^T \sup_{\|f\|_F \leq 1} \mathbb{E}[\|Y_{t,u}f\|_F | \mathcal{F}_t] du \end{aligned}$$

以上から Gronwall の不等式より,

$$\sup_{\|f\|_F \leq 1} \mathbb{E}[\|Y_{t,T}f\|_F | \mathcal{F}_t] \leq 2M^2 e^{2M^2 C^2 T} < \infty$$

よって, ϕ_t は $t \in [0, T]$ で一様に有界となる。つまり, $\phi_t \in F^*$ である。 $\square$

時点 T で満了日となる条件付請求権に対して, この請求権を作る債券の満期の中で最長のものを $T_{\max}(> T)$ とする。また, $x_{\max} = T_{\max} - T$ とする。

以下の Theorem では無限個のファクターによる HJM モデルの場合に適当な仮定の下で, この請求権に対するヘッジ戦略の中の債券の満期は $T_{\max}$ と同じかそれよりも小さいことを示す。この直観的な結果は下の局所 Lipschitz な HJM モデル

$$df_t = (Af_t + F_{\text{HJM}} \circ \tau(t, f_t))dt + \tau(t, f_t)dW_t$$

に影響する。ただし, 任意の $x \geq 0$ に対して, ボラティリティ関数は決定論的な関数 $\kappa : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow G$ により,

$$\tau(\cdot, f)\delta_x = \kappa(x, f(x))$$

とする。この式から, 割引債価格モデルは Theorem 4.7 より,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t, T) &= \tilde{P}(0, T) - \int_0^t \tilde{P}(s, T) \tau(s, f_s)^* I_{T-s} dW_s \\ \tilde{P}_t(T-t) &= \tilde{P}_0(T) - \int_0^t \tilde{P}_s(T-s) \tau(s, f_s)^* I_{T-s} dW_s \\ \tilde{P}_t(x) &= S_t \tilde{P}_0(x) - \int_0^t S_{t-s} (\tilde{P}_s(x)) \tau(s, f_s)^* I_x dW_s \quad (x = T-t) \end{aligned}$$

最後の式を mild solution として持つ SPDE は

$$d\tilde{P}_t = A dt + (-\tilde{P}_t \tau(t, f_t)^* I) dW_t$$

となる。よって, このモデルのボラティリティ関数 $\sigma(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times F \rightarrow \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ を τ を使って表すと, 任意の $t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma(t, \tilde{P}_t)^* \delta_x &= -\tilde{P}_t(x) \int_0^x \tau(t, f_t)^* \delta_s ds \\ &= -\tilde{P}_t(x) \int_0^x \kappa(s, f_t(s)) ds \\ &\stackrel{(4.11)}{=} -\tilde{P}_t(x) \int_0^x \kappa \left(s, -\frac{\partial}{\partial s} \log \tilde{P}_t(s) \right) ds \end{aligned}$$

となる。以上から次のことを示す。

Theorem 4.26. 次を仮定する。

1. 定数 $x_{\max} \geq 0$ が存在して、割引ペイオフ関数 $\tilde{g}(\cdot) : F \rightarrow \mathbb{R}$ は $\forall x \in [0, x_{\max}]$ に対して、 $f_1(x) = f_2(x)$ となるとき、常に $\tilde{g}(f_1) = \tilde{g}(f_2)$ を満たす。
2. ボラティリティ関数 $\sigma(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times F \rightarrow \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ は $\forall t \geq 0, \forall x \geq 0$ に対して、 $\forall y \in [0, x]$ で $f_1(y) = f_2(y)$ となるとき、常に $\sigma(t, f_1)^* \delta_x = \sigma(t, f_2)^* \delta_x$ を満たす。
3. $\forall f \in F, \forall t \geq 0$ に対して、 $\ker(\sigma(t, f)^*) = \text{span}\{\delta_0\}$ となる。

このとき、戦略 $\phi_t = E[Y_{t,T}^* \nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T) | \mathcal{F}_t]$ によって与えられる戦略 $\varphi_t = \phi_t + \psi_t B_t \delta_0$ は唯一つの self-financing な戦略であり、

$$\text{supp}\{\varphi_t\} \subset [0, x_{\max} + T - t] \text{ a.s. } (\forall t \geq 0) \quad (4.19)$$

となる。

Proof. Proposition 4.25 から、 φ_t は self-financing な戦略であり、Assumption 3 と Proposition 4.20 からこれが一意であると分かる。よって、あとは (4.19) を示せばよい。 F^* の閉部分空間として、

$$\mathcal{I}_x = \{\mu \in F^* | \text{supp}\{\mu\} \subset [0, x]\} \subset F^*$$

を取ってくる。このとき直交成分は F の閉部分空間で、

$$\mathcal{I}_x^\perp = \{f \in F | f(s) = 0 \text{ for all } s \in [0, x]\} \subset F$$

となる。このとき、 $\mathcal{I}_x^{\perp\perp} = \mathcal{I}_x$ である。

Step1.

まず、 $Y_{t,T}$ が各 $x \geq 0$ に対して、 $\mathcal{I}_{x+T-t}^\perp$ から $\mathcal{I}_x^\perp$ への強ランダム作用素であることを示す。ここで、 $\{Y_{t,T}\}_{T \geq t}$ は

$$Y_{t,T} = S_{T-t} + \int_0^T S_{T-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) Y_{t,u} \cdot dW_u$$

を満たしている。

Step1.1.

$\nabla \sigma(t, \tilde{P}_t)$ が $\mathcal{I}_x^\perp$ を $\mathcal{L}_{(2)}(G; \mathcal{I}_x^\perp)$ へ写すことを示す。

$s \geq t, x \geq 0$ とする。 $f_1, f_2 \in F, y \leq x$ に対して、 $[0, y]$ 上で $f_1 = f_2$ のとき、仮定より、

$$\sigma(t, f_1)^* \delta_y = \sigma(t, f_2)^* \delta_y$$

$g \in G$ をとってくると、 $(\sigma(t, f_1)g)(y) = (\sigma(t, f_2)g)(y)$ である。

$\forall \varepsilon > 0, k \in \mathcal{I}_x^\perp$ を取ってきて、 $f_2 := f_1 + \varepsilon k$ とすると、 $[0, x]$ 上で $f_1 = f_2$ となる。仮定より

$$(\sigma(t, f_1)g)(y) = (\sigma(t, f_1 + \varepsilon k)g)(y) \quad (\forall y \in [0, x])$$

これより、

$$\left(\frac{\sigma(t, f_1 + \varepsilon k) - \sigma(t, f_1)}{\varepsilon} g \right)(y) = 0$$

$\varepsilon \searrow 0$ とすると、 $(\nabla \sigma(t, f_1)g)[k](y) = 0 \quad (y \in [0, x])$ となる。よって、示せた。

Step1.2.

$t \in [0, T]$ を固定しておく。このとき, $s \geq t$ に対して, $\{Y_{t,s}^{(n)}\}$ が $\mathcal{T}_{x+s-t}^\perp$ から $\mathcal{T}_x^\perp$ への強ランダム作用素であることを示す。

まず, Picard の逐次近似法に従って, $\{Y_{t,s}\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} Y_{t,s}^{(0)} &= S_{s-t} \\ Y_{t,s}^{(n+1)} &= S_{s-t} + \int_0^s S_{s-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) Y_{t,u}^{(n)} \cdot dW_u \end{aligned}$$

とする。帰納法を用いて示す。明らかに $Y_{t,s}^{(0)}$ は各 $x \leq 0$ で $\mathcal{T}_{x+s-t}^\perp$ を $\mathcal{T}_x^\perp$ に写す。今, $Y_{t,s}^{(n)}$ は各 $x \geq 0$ で $\mathcal{T}_{x+s-t}^\perp$ を $\mathcal{T}_x^\perp$ に写すと仮定して, $Y_{t,s}^{(n+1)}$ について示す。

$f \in \mathcal{T}_x^\perp$ に対して, $Y_{t,s}^{(n)} f \in \mathcal{T}_x^\perp$ であり, $S_{t-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) f \in \mathcal{L}_{(2)}(G; \mathcal{T}_x^\perp)$ である。また, $S_{t-s} f \in \mathcal{T}_x^\perp$ であるので, $Y_{t,s}^{(n+1)}$ は $\mathcal{T}_{x+s-t}^\perp$ を $\mathcal{T}_{x+s-t}^\perp$ へ写す作用素である。

Step.1.3.

$Y_{t,s}^{(n)}$ が $Y_{t,s}$ に P-a.s. で収束することを示す。 $p > 2$ とする。

$f \in F$ に対して,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} \|(Y_{t,s}^{(n+1)} - Y_{t,s}^{(n)})f\|_F^p \right] \\ = & \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} \left\| \int_0^s S_{s-t} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) (Y_{t,s}^{(n)} - Y_{t,s}^{(n-1)}) f dW_u \right\|_F^p \right] \\ \leq & \tilde{C} \int_0^s \sup_{t \leq s \leq T} \mathbb{E} [\|(Y_{t,s}^{(n)} - Y_{t,s}^{(n-1)})f\|_F^p] du \\ \stackrel{\text{Prop.2.24}}{\leq} & \tilde{C} \int_0^s \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq u \leq s} \|(Y_{t,s}^{(n)} - Y_{t,s}^{(n-1)})f\|_F^p \right] du \\ \dots & \\ \leq & \frac{\tilde{C}^{p(n+1)}}{n!} (s-t)^{n+1} \|f\|_F^p \end{aligned}$$

となる。このことから, $m \geq n$, $f \in F$ に対して, Minkowski の不等式より,

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq u \leq s} \|(Y_{t,s}^{(m)} - Y_{t,s}^{(n)})f\|_F^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} & \leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq u \leq s} \|(Y_{t,s}^{(k)} - Y_{t,s}^{(k-1)})f\|_F^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k!}} \tilde{C}^{k+1} (s-t)^{\frac{k+1}{p}} \|f\|_F^{\frac{1}{p}} \\ & \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。よって, Cauchy 列が収束するので, $L^p(\mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{L}(F; F))$ の意味で, 極限 $\{Y_{t,s}\}$ が存在して,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq u \leq s} \|(Y_{t,s}^{(n+1)} - Y_{t,s})f\|_F^p \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

定義より,

$$Y_{t,s}^{n+1} f = S_{s-t} f + \int_0^T S_{s-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) Y_{t,u}^n f dW_u$$

であるから, $n \rightarrow \infty$ で,

$$Y_{t,s} f = S_{t-s} f + \int_0^T S_{s-u} \nabla \sigma(u, \tilde{P}_u) Y_{t,u} f dW_u$$

となる。

以上から, $Y_{t,s}^{(n)} \rightarrow Y_{t,s}$ a.s. で, また $Y_{t,T}$ は各 $x \geq 0$ に対して, $\mathcal{T}_{x+T-t}^\perp$ から $\mathcal{T}_x^\perp$ への強ランダム作用素である。

Step.2.

(4.19) を示す。

Step.2.1.

まず, $\nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T)$ が $\mathcal{T}_{x_{\max}}$ に値をとることを示す。

$f_1 \in F$ に対して, $\forall \varepsilon > 0, k \in \mathcal{T}_{x_{\max}}^\perp \subset F$ を取ってきて, $f_2 = f_1 + \varepsilon k$ とする。 $\forall x \in [0, x_{\max}]$ に対して, $f_1 = f_2$ 。 よって, Assumption 1 より $\tilde{g}(f_1) = \tilde{g}(f_1 + \varepsilon k)$ であり,

$$\frac{\tilde{g}(f_1 + \varepsilon k) - \tilde{g}(f_1)}{\varepsilon} = 0$$

となる。 よって, $\varepsilon \searrow 0$, とすれば, $\langle \nabla f_1, k \rangle_F = 0$ 。 よって, $\nabla \tilde{g}(\tilde{P}_t)$ は $\mathcal{T}_{x_{\max}}$ に値を取る。

Step.2.2.

$\phi_t \in \mathcal{T}_{x_{\max}+T-t}$ を示す。

任意の $f \in \mathcal{T}_{x_{\max}+T-t}^\perp$ に対して, Step.1. より, $Y_{t,T}f \in \mathcal{T}_{x_{\max}}^\perp$ である。 よって, Step.2.1. より, $\langle \nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T), Y_{t,T}f \rangle_F = 0$ となる。 特に,

$$\mathbb{E}[\langle \nabla \tilde{g}(\tilde{P}_T), Y_{t,T}f \rangle_F | \mathcal{F}_t] = 0$$

である。 ゆえに, $\phi_t \in \mathcal{T}_{x_{\max}+T-t}$ である。

また, $\forall s > 0$ に対して, $f \in \mathcal{T}_s^\perp$ ならば, $\langle B_t \psi_t \delta_0, f \rangle_F = B_t \psi_t f(0) = 0$ となるので,

$$\varphi_t = \phi_t + B_t \psi_t \delta_0 \in \mathcal{T}_{x_{\max}+T-t}$$

となる。 よって, 示せた。 □

5 特別な場合のモデル

第4章では主に一般のHJMモデルに対する性質に対して考察した。この章では第4章でも後半で述べたが、ドリフト係数とボラティリティがマルコフの場合やそれ以上に制限を加えた場合について考察する。

この章を通じて、特に断らない限り、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間とし、 $\{W_t\}$ を d 次元の標準 Wiener 過程、 $\{\mathcal{F}_t\}$ を Wiener 過程からなるフィルトレーションとし、右連続で $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の P -零集合をすべて含むと仮定する。また、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$ とする。また、Musiela の記号に従うとする。すなわち、現時点を t 、満期を T としたとき、現時点から満期までの時間を $x = T - t$ とし、債券価格を $P_t(x) := P(t, t+x)$ 、フォワードレートを $f_t(x) := f(t, t+x)$ ($t, x \geq 0$) とする。

5.1 マルコフモデル

5.1.1 問題設定

まず最初にドリフト項とボラティリティが共に決定論的であると仮定する。特にここでは2つの係数が共にフォワードレートや時刻に依存しないマルコフモデルを考える。すなわち、

$$df_t = (Af_t + \alpha)dt + \sigma dW_t \quad (5.1)$$

の mild solution であり、積分形で書くと、

$$f_t = S_t f_0 + \int_0^t S_{t-s} \alpha ds + \int_0^t S_{t-s} \sigma dW_s \quad (5.2)$$

となる。これは、Musiela の記号による HJM モデルの方程式 (4.6), (4.7) と同じように見えるが、係数が決定論的であるため、違うものである。このノンランダム性と初期値 f_0 と Wiener 過程 W が独立であると仮定すると、(5.2) は完全にフォワードレート過程を決定してしまう。さらに、 f_0 が正規分布に従うか決定論的であるとき、 $\{f_t\}_{t \geq 0}$ はガウス過程となる。

また、 μ_t は f_t の分布関数で、 $\tilde{\alpha}_t = \int_0^t S_{t-s} \alpha ds$ とし、 γ_t は $\int_0^t S_{t-s} \sigma dW_s$ の分布関数とすると、(5.2) は、

$$\mu_t = (S_t^* \mu_0) * (\tilde{\alpha}_t + \gamma_t)$$

を与える。

μ_t の $t \rightarrow \infty$ での極限を制御することで、HJM の積分形のエルゴートの振舞いを理解したい。特に、(5.2) の不変測度を求めたい。ここで、言葉の定義等しておく。

Definition 5.1. $\{f_t\}_{t \geq 0}$ をマルコフ型とする。すなわち

$$f_t = S_t f_0 + \int_0^t S_{t-s} \alpha(s, f_s) ds + \int_0^t S_{t-s} \sigma(s, f_s) dW_s$$

で与えられるとする。また $\{P_t\}_{t \geq 0}$ を有界 Borel 可測関数 φ に対して、

$$P_t \varphi(x) = E[\varphi(f_t(x))] \quad (t \geq 0, x \in F) \quad (5.3)$$

となる半群とする。このとき、 μ が (5.3) の不変測度であるとは、 $P_t^* \mu = \mu$ ($t \geq 0$) が成立するときという。また、 $\{P_t\}_{t \geq 0}$ を推移半群という。

Remark 5.2. $\{f_t\}_{t \geq 0}$ が (5.2) の時や、後で定義する係数が時間的一様でマルコフのときは上の特別な場合なので、同様に定義できる。

Proposition 5.3. 初期条件 $f_0 = x$ に対して,

$$\mu_t \rightarrow \mu_\infty \quad \text{weakly as } t \rightarrow \infty$$

ならば, μ_∞ は (5.2) に対して, 不変測度である。

Proof. $\varphi \in C_b(F)$ とする。このとき, 定義より,

$$\int_F \mathbb{E}[\varphi(f_t(x))] \mu(df) = \int_F P_t \varphi(x) \mu_0(dx) = \langle P_t \varphi, \mu_0 \rangle = \langle \varphi, P_t^* \mu_0 \rangle$$

となり, $P_t^* \mu_0 = \mu_t$ となる。また, $r \geq 0$ に対して,

$$\langle \varphi, P_{t+r}^* \rangle = \langle P_r \varphi, P_t^* \mu_0 \rangle$$

$P_r \varphi \in C_b(F)$ より, 両辺の $t \rightarrow \infty$ とすると,

$$\langle \varphi, \mu_\infty \rangle = \langle P_r \varphi, \mu_\infty \rangle = \langle \varphi, P_r^* \mu_\infty \rangle$$

ゆえに, $\mu_\infty = P_r^* \mu_\infty$ となり, μ_∞ は不変測度となる。 $\square$

5.1.2 状態空間に対する仮定

再び $\{f_t\}_{t \geq 0}$ は (5.2) で与えられているとする。この節では, 状態空間 F に対する仮定を書き並べておく。

Assumption 5.4. 1. F は可分 Hilbert 空間で, F の元は $\mathbb{R}_+$ 上の $\mathbb{R}$ -値連続関数とする。また, $\delta_x(f) = f(x)$ とすると, $\delta_x \in F^*$ である。

2. 任意の $f \in F$ に対して, $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ が存在し, $\delta_\infty : f \rightarrow f(\infty)$ は F^* の元である。さらに, $F^0 := \{f \in F | f(\infty) = 0\}$ は δ_∞ と直交する F の閉部分空間である。

3. $\{S_t\}_{t \geq 0}$ は F 上の強連続半群で, $S_t f(x) = f(t+x)$ ($f \in F$) とする。さらに, 定数 $\beta > 0$ と $M > 0$ が存在して,

$$\|S_t f\|_F \leq M e^{-\beta t} \|f\|_F \quad (f \in F^0) \quad (5.4)$$

となる。

4. 2項演算子 $\star$ を

$$(f \star g)(x) = f(x) \int_0^x g(s) ds \quad (f, g \in F^0)$$

と定義して, $\|(f \star g)\|_F \leq C \|f\|_F \|g\|_F$ となる。(C は正定数)

Assumption 5.4.4 と Proposition 4.4 より, F_{HJM} は $\mathcal{L}_{(2)}(G; F^0)$ から F への Lipschitz 条件を持つ写像となる。

しかも, $f, g \in F^0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\left| f(x) \int_0^x g(s) ds \right| &= \left| f(x) \right| \left| \int_0^x \delta_0(S_s g) ds \right| \\
&\leq |f(x)| \|\delta_0\|_{F^*} \int_0^x \|S_s g\|_F ds \\
&\leq |f(x)| \|\delta_0\|_{F^*} \|g\|_F \int_0^x M e^{-\beta s} ds \\
&= |f(x)| \|\delta_0\|_{F^*} \|g\|_F \frac{M}{\beta} (1 - e^{-\beta x}) \\
&\leq |f(x)| \|\delta_0\|_{F^*} \|g\|_F \frac{M}{\beta} \\
&\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

であり, これから $F_{\text{HJM}}(\sigma)(\infty) = 0 \quad (\forall \sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F^0))$ となる。

Remark 5.5. §4.2.3 で出てきた H_ω はウエイト ω が十分早く増加するとき, Assumption5.4 を満たす。特に次のことが分かる。

Proposition 5.6. ω が

$$\log \frac{\omega(x+t)}{\omega(x)} \geq \beta t > 0 \quad (\forall t, x \geq 0) \quad (5.5)$$

を満たすとき, H_ω は Assumption5.4 を満たす。ただし, β は, $\beta = \inf_{x \geq 0} \frac{\omega'(x)}{2\omega(x)} > 0$ で与えられる。

Proof. (5.5) より, $x = 0$ の場合を考えると, $\frac{1}{\omega(t)} \leq \frac{1}{\omega(0)} e^{-\beta t}$ となり, 両辺を $[0, \infty)$ で積分すると,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega(t)} dt \leq \int_0^\infty \frac{1}{\omega(0)} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta \omega(0)} < \infty$$

となり, Definition4.12 より, H_ω は定義できる。また, Assumption5.4.1 は Proposition4.13 より, 示している。

次に, Assumption5.4.2 の前半は Proposition4.14 より分かり, 後半は上と同様に (5.5) より, $x = 0$ の場合を考えると, $\frac{1}{\omega(t)} \leq \frac{1}{\omega(0)} e^{-\beta t}$ となり, 両辺に t^2 を掛けて $[0, \infty)$ で積分すると,

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{\omega(t)} dt \leq \int_0^\infty \frac{1}{\omega(0)} t^2 e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta^3 \omega(0)} < \infty$$

となり, Proposition4.15 から, Assumption5.4.4 と共に成立する。よって, あとは Assumption5.4.3 を満たすかを考えればよい。

$f \in H_\omega^0$ に対して,

$$\|S_t f\|_F^2 = f(t)^2 + \int_0^\infty \omega(x) f'(x+t)^2 dx$$

であり, 右辺の各項を計算すると,

$$\begin{aligned}
|f(t)|^2 &= \left| \int_t^\infty f'(s) ds \right|^2 \\
&\leq \left(\int_t^\infty |f'(s)| \omega^{\frac{1}{2}}(s) \omega^{-\frac{1}{2}}(s) ds \right)^2 \\
&\leq \left(\int_t^\infty |f'(s)|^2 \omega(s) ds \right) \left(\int_t^\infty \omega^{-1}(s) ds \right) \\
&\leq \|f\|_\omega^2 \left(\int_t^\infty \omega^{-1}(s) ds \right)
\end{aligned} \quad (5.6)$$

となる。また,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \omega(x) f'(x+t)^2 dx &= \int_0^\infty |f'(x+t)|^2 \omega(x+t) \frac{\omega(x)}{\omega(x+t)} dx \\
&\leq \sup_{x \geq 0} \left(\frac{\omega(x)}{\omega(x+t)} \right) \left(\int_0^\infty |f'(x+t)|^2 \omega(x+t) dx \right) \\
&\leq \sup_{x \geq 0} \left(\frac{\omega(x)}{\omega(x+t)} \right) \|f\|_\omega^2
\end{aligned} \tag{5.7}$$

である。ここで, (5.6) については, (5.5) の $x = 0$ の場合を考えると, $\frac{1}{\omega(s)} \leq \frac{1}{\omega(0)} e^{-\beta s}$ となり, 両辺を $[t, \infty]$ で積分すると,

$$\int_t^\infty \frac{1}{\omega(s)} ds \leq \int_t^\infty \frac{1}{\omega(0)} e^{-\beta s} ds = \frac{e^{-\beta t}}{\beta \omega(0)} < \infty$$

となる。また, (5.7) については, (5.5) より,

$$\sup_{x \geq 0} \left(\frac{\omega(x)}{\omega(x+t)} \right) \leq e^{-\beta t}$$

とすぐに分かる。以上より, $\|S_t f\|_\omega^2 \leq \|f\|_\omega^2 e^{-\beta t} \left(\frac{1}{\beta \omega(0)} + 1 \right)$ となり, Assumption 5.4.3 を満たす。よって, すべて示せた。□

5.1.3 ガウス・マルコフ HJM モデルに対する不変測度

主たる結果を示すため, 必要なことを与えておく。

Definition 5.7. H を可分 Hilbert 空間とし, $\mathcal{M}(H)$ を H 上のすべての確率測度の族とする。このとき, 任意の $\mu \in \mathcal{M}(H)$ に対して, その特性関数 $\hat{\mu}(y)$ ($y \in H$) を次で定義する。

$$\hat{\mu}(y) = \int_H e^{i\langle x, y \rangle_H} d\mu(x)$$

可分 Hilbert 空間上の特性関数の基本的な性質を以下の 2 つの Proposition で与えておく。証明は共に [28] にある。

Proposition 5.8. 1. $\hat{\mu}; H \rightarrow \mathbb{C}$ は, ノルム位相で一様連続である。

2. $\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y)$ ($\forall y \in H$) ならば, $\mu_1 = \mu_2$ となる。

3. $(\widehat{\mu * \lambda})(y) = \hat{\mu}(y) \hat{\lambda}(y)$ ($\forall y \in H, \mu, \lambda \in \mathcal{M}(F)$)。

4. $\hat{\bar{\mu}}(y) = \overline{\hat{\mu}(y)}$ 。

Proposition 5.9. $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(H)$ が conditionally compact で, 各 $y \in H$ に対して,

$$\hat{\mu}_n(y) \rightarrow \varphi(y) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

とする。このとき, ある $\mu \in \mathcal{M}(H)$ が存在して, $\hat{\mu}(y) = \varphi(y)$ かつ μ_n は μ に弱収束する。

また, 次の Proposition を証明しておく。

Proposition 5.10. X を可分な Banach 空間とする。このとき, $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の測度 μ について次は同値。

1. μ がガウス測度である。すなわち, 任意の $f \in X^*$ に対して, $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ が $\mathbb{R}$ 上の正規分布となる。
2. $m \in X$ と正の対称作用素 $R: X^* \rightarrow X$ が存在して,

$$\hat{\mu}(f) := \int_X e^{i\langle x, f \rangle} d\mu(x) = \exp \left(i\langle m, f \rangle - \frac{1}{2} \langle Rf, f \rangle \right) \quad f \in X^*$$

このとき, μ の平均ベクトルが m で共分散作用素が R である。したがって, ガウス測度 μ が平均ベクトル m と共分散作用素 R で一意に定まる。

Proof. $X = \mathbb{R}$ のときは有名な結果であるため, このことを使って, 証明する。

(1 $\Rightarrow$ 2) μ を $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のガウス測度とし, 平均ベクトルを m , 共分散作用素を R とする。このとき, 任意の $f \in X^*$ に対して, $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ は $\mathbb{R}$ 上の正規分布である。 $\mu(f)$ の平均 $\mu(f)$ と分散 $v(f)$ を求めると,

$$\begin{aligned} m(f) &= \int_{\mathbb{R}} y d\mu_f(y) = \int_X \langle x, f \rangle d\mu(x) = \langle m, f \rangle \\ v(f) &= \int_{\mathbb{R}} (y - m(f))^2 d\mu_f(y) = \int_X \langle x - m, f \rangle^2 d\mu(x) = \langle Rf, f \rangle \end{aligned}$$

となる。よって, $\mathbb{R}$ のときの結果より,

$$\hat{\mu}_f(y) = \exp \left(i\langle m, f \rangle y - \frac{1}{2} \langle Rf, f \rangle y^2 \right) \quad y \in \mathbb{R}$$

である。ところが,

$$\hat{\mu}_f(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{izf} d\mu_f(z) = \int_X e^{i\langle x, f \rangle y} d\mu(x) = \hat{\mu}(yf)$$

となるので, 2 を得られる。

(2 $\Rightarrow$ 1) $f \in X^*$ を任意に固定すると,

$$\hat{\mu}_f(y) = \hat{\mu}(yf) = \exp \left(i\langle m, f \rangle y - \frac{1}{2} \langle Rf, f \rangle y^2 \right) \quad y \in \mathbb{R}$$

となるので, $\mathbb{R}$ のときの結果から, μ_f は平均 $\langle m, f \rangle$, 分散 $\langle Rf, f \rangle$ の $\mathbb{R}$ 上の正規分布となる。よって, μ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のガウス測度となる。ここで, μ の平均ベクトルを m_0 とし, 共分散作用素を R_0 とすると, (1 $\Rightarrow$ 2) の証明から, μ_f の平均ベクトルが $\langle m_0, f \rangle$, 分散が $\langle R_0 f, f \rangle$ である。よって, 任意の $f \in X^*$ に対して, $\langle m, f \rangle = \langle m_0, f \rangle$, $\langle Rf, f \rangle = \langle R_0 f, f \rangle$ 。これより, $m = m_0$, $R = R_0$ となり, 最後の部分も示せた。□

さらに, Bochner の定理の Hilbert 空間への拡張を与えておく。証明は [8] の p.49 ~ にある。

Theorem 5.11 (Hilbert 空間上の Bochner の定理). H を可分 Hilbert 空間とする。 $\kappa; H \rightarrow \mathbb{C}$ を $(H, \mathcal{B}(H))$ 上の確率測度 ν の特性関数とする。このとき,

1. κ が $\kappa(0) = 1$ となるような正定値連続関数である。

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 非負核型作用素 S_ε が存在し, $\langle S_\varepsilon \lambda, \lambda \rangle \leq 1$ を満たすすべての λ に対して, $1 - \operatorname{Re} \kappa(\lambda) \leq \varepsilon$ となる。

逆に任意の関数 $\kappa : H \rightarrow \mathbb{C}$ が 1 と 2 を満足するならば, κ は F 上の確率測度 μ の特性関数となる。

では, 主たる結果を与える。

Theorem 5.12. $\lambda \in G, \sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F^0)$ は決定論的であるとする。さらに $S_t^* \mu_0$ の $t \rightarrow \infty$ での弱収束先を ν とする。このとき, 方程式

$$f_t = S_t f_0 + \int_0^t S_{t-s}(F_{\text{HJM}}(\sigma) + \sigma \lambda) ds + \int_0^t S_{t-s} \sigma dW_s \quad (5.8)$$

によって与えられた HJM モデルは F 上の不変測度の族 $\{\mu^\nu\}_\nu$ を持つ。また ν を固定することに $(F, \mathcal{B}(F), \mu^\nu)$ 上の確率変数 $f(x) = \delta_x(f)$ は以下の性質を満たす。

1. ロングレート $f(\infty)$ の分布は ν である。
2. ロングレートによって与えられたフォワードレート $f(x)$ の条件付分布 $\mu^\nu(\{f \in H | \delta_x(f) \in A, A \in \mathbb{R}\} | \sigma(\delta_\infty))$ は $x \geq 0$ に対して, 正規分布に従う。
3. $\int_F \|c\|_F \nu(dc) < \infty$ かつ $\lambda = 0$ ならば,

$$E_{\mu^\nu}[f(0)] \geq E_{\mu^\nu}[f(x)] \quad (\forall x \geq 0)$$

となる。

4. $\int_F \|c\|_F^2 \nu(dc) < \infty$ かつ $\lambda = 0$ ならば,

$$\operatorname{Var}_{\mu^\nu}[f(0)] \geq \operatorname{Var}_{\mu^\nu}[f(x)] \quad (\forall x \geq 0)$$

となる。

Proof. F の元は極限を持つので, $F \cong F^0 \oplus \mathbb{R}$ と分解できる。 $f_t^0 := \operatorname{Proj}_{F^0}(f_t)$ とすると, 任意の f_0 に対して, $S_t f_0 = S_t f_0^0 + f_0(\infty) \mathbf{1}$ となる。ただし, $\mathbf{1}(x) = 1 \quad (\forall x \geq 0)$ である。このとき, $f_0(\infty) \mathbf{1} = S_t f_0 - S_t f_0^0 \in F$ となり,

$$\begin{aligned} \|S_t f_0 - f_0(\infty) \mathbf{1}\|_F &= \|S_t f_0^0\|_F \\ &\leq M e^{-\beta t} \|f_0^0\|_F \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となるので, $S_t f_0$ は $f_0(\infty) \mathbf{1}$ に P-a.s. で収束する。これより $S_t f_0$ の分布 $S_t^* \mu_0$ は $f_0(\infty) \mathbf{1}$ の分布 ν に弱収束する。また,

$$A = \{f \in F | f \text{ は定数関数}\}$$

とすると, $\nu(A) = 1$ となる。

次に Banach-Steinhaus の定理より, 正定数 N が存在して, $\sup_{x \in [0, \infty)} \|\delta_x\|_{F^*} \leq N$ となる。 $\alpha = F_{\text{HJM}}(\sigma) + \sigma(\lambda)$ すると, $\sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F^0)$ で $F_{\text{HJM}} : \mathcal{L}_{(2)}(G; F^0) \rightarrow F^0$ なので, $\alpha \in F^0$ となる。また, $t \geq 0$ に対して,

$$|S_{t-s} \alpha(x)| \leq \|\delta_x\|_{F^*} \|S_{t-s} \alpha\|_F \leq N M e^{-\beta(t-s)} \|\alpha\|_F$$

となり, Lebesgue の優収束定理より, $x \rightarrow \infty$ で $\int_0^t S_{t-s}\alpha(x)ds \rightarrow 0$ である。

また, $\int_0^t S_{t-s}\sigma dW_s \in F^0$ より, $x \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。ゆえに, (5.8) の両辺に x をいれて, $x \rightarrow \infty$ とすると,

$$f_t(\infty) = f_0(\infty) \quad \forall t \geq 0$$

よって, ロングレート $f(\infty)$ の分布は ν である。よって, 1 は示せた。

また, $\int_0^t S_{t-s}\sigma ds = \int_0^t S_u\sigma du$ であり,

$$\int_0^\infty \|S_u\alpha\|_F du \leq M \int_0^\infty e^{-\beta u} \|\alpha\|_F du \leq \frac{M}{\beta} \|\alpha\|_F$$

となる。これより,

$$\tilde{\alpha} = \int_0^\infty S_u\alpha du = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S_{t-s}\alpha ds$$

が存在し, 特に

$$|\delta_x(S_u\alpha)| \leq \|\delta_x\|_{F^*} \|S_u\alpha\|_F \leq N M e^{-\beta u} \|\alpha\|_F$$

なので, Lebesgue の優収束定理より, $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}(x) = 0$ となる。つまり, $\tilde{\alpha} \in F^0$ 。

$\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を G の CONS とすると, 上と同様の評価式より,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|S_u\sigma\|_{\mathcal{L}(2)(G;F)}^2 du &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \|s_u\sigma\psi_k\|_F^2 du = \sum_{k=1}^\infty \|S_u\sigma\psi_k\|_F^2 du \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty \int_{k=1}^\infty \int_0^\infty M^2 e^{-2\beta u} \|\sigma\psi_k\|_F^2 du = \frac{M^2}{2\beta} \sum_{k=1}^\infty \|\sigma\psi_k\|_F^2 \\ &= \frac{M^2}{2\beta} \|\sigma\|_{\mathcal{L}(2)(G;F)}^2 \end{aligned}$$

よって, $\mathcal{N}(m, Q)$ を平均ベクトル m , 共分散作用素 Q の正規分布とし, $\int_0^t S_{t-s}\sigma dW_s$ の分布を γ_t とすると, $\gamma_t = \mathcal{N}(0, \int_0^t S_u\sigma\sigma^* S_u^* du)$ なので, Lemma 5.10 より, この測度に対する特性関数 $\hat{\gamma}_t(f)$ は

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_t(f) &= \int_F e^{i\langle f, x \rangle_F} \gamma_t(dx) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \left\langle \int_0^t S_u\sigma\sigma^* S_u^* f du, f \right\rangle_F \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \left\langle \int_0^\infty S_u\sigma\sigma^* S_u^* f du, f \right\rangle_F \right) \end{aligned}$$

よって, γ_t は $\gamma = \mathcal{N}(0, \int_0^\infty S_u\sigma\sigma^* S_u^* du)$ に弱収束する。また, $\gamma_t(F_0) = 1$ より, $\gamma(F_0) = 1$ となる。ここで, P_t を推移半群とし, $\kappa = \mathcal{N}(\tilde{\alpha}, \int_0^\infty S_u\sigma\sigma^* S_u^* du)$ とする。このとき, $\hat{\kappa}(S_t^* y)$ ($y \in F, t \geq 0$) を計算すると,

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}(S_t^* y) &= \exp \left(i\langle \tilde{\alpha}, S_t^* y \rangle_F - \frac{1}{2} \left\langle \int_0^\infty S_u\sigma\sigma^* S_u^* du S_t^* y, S_t^* y \right\rangle_F \right) \\ &= \exp \left(i\langle \tilde{\alpha} - \alpha_t, y \rangle_F - \frac{1}{2} \left\langle \int_0^\infty S_u\sigma\sigma^* S_u^* y du - \int_0^t S_u\sigma\sigma^* S_u^* y du, y \right\rangle_F \right) \\ &= \hat{\kappa}(y) \exp \left(-i\langle \alpha_t, y \rangle_F + \frac{1}{2} \left\langle \int_0^t S_u\sigma\sigma^* S_u^* y du, y \right\rangle_F \right) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\hat{\kappa}(y) = \hat{\kappa}(S_t^* y) \exp \left(i \langle \alpha_t, y \rangle_F - \frac{1}{2} \left\langle \int_0^t S_u \sigma \sigma^* S_u^* y du, y \right\rangle_F \right) \quad (5.9)$$

となる。ここで, $\hat{\gamma} := \mathcal{N} \left(S_t x + \alpha_t, \int_0^t S_u \sigma \sigma^* S_u^* du \right)$ とすると,

$$(\text{右辺}) = \int_F \int_F e^{i \langle y, x \rangle_F} \hat{\gamma}(dy) \kappa(dx) = \int_F P_t(e^{i \langle y, x \rangle_F}) \kappa(dx) = (\widehat{P_t^* \kappa})(y)$$

となり, Proposition 5.9.2 より, $\kappa = P_t^* \kappa$ である。つまり, κ は初期条件 $f_0 = x$ に対して不変測度となり, (5.8) は不変測度を持つ。

さらに (5.9) の両辺を $t \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} \exp \left(i \langle \alpha_t, y \rangle - \frac{1}{2} \left\langle \int_0^t S_u \sigma \sigma^* S_u^* y du, y \right\rangle_F \right) &\rightarrow \exp \left(i \langle \tilde{\alpha}, y \rangle - \frac{1}{2} \left\langle \int_0^\infty S_u \sigma \sigma^* S_u^* y du, y \right\rangle_F \right) \\ &=: (\widehat{\tilde{\alpha} + \gamma})(y) \end{aligned}$$

となる。ただし, $\tilde{\alpha} + \gamma = \mathcal{N}(\tilde{\alpha}, \int_0^\infty S_u \sigma \sigma^* S_u^* du)$ である。また, $\hat{\phi}(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\kappa}(S_t^* y)$ とする。このとき, Theorem 5.11 より, $\varepsilon > 0$ に対して, 正值核型作用素 S が存在して, $\langle Sy, y \rangle \leq 1$ ならば, $\text{Re}\{\hat{\kappa}\} \geq 1 - \varepsilon$ となる。これより, $y \in F$ が $\langle Sy, y \rangle \leq 1$ を満たすならば,

$$\text{Re}\{\hat{\phi}(y)\} = \text{Re}\{\hat{\kappa}(y)\} \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle \int_0^\infty S_u \sigma \sigma^* S_u^* y du, y \right\rangle_F \right) \geq 1 - \varepsilon$$

となる。 $\hat{\phi}(0) = 1$ となるような正定値連続関数であるのはすぐに分かるので, 再び Theorem 5.11 から, $\hat{\psi}(\cdot) = \hat{\nu}(\cdot)$ となるような $(F, \mathcal{B}(F))$ 上の測度 $\tilde{\nu}$ が存在する。これより, $S_t^* \mu_0$ は $\tilde{\nu}$ に弱収束する。しかし, 前の議論から $S_t^* \mu_0$ は ν に弱収束するので, $\nu = \tilde{\nu}$ である。

以上から, Proposition 5.9.3 を使うと,

$$\hat{\kappa}(y) = \hat{\nu}(y)(\widehat{\tilde{\alpha} + \gamma})(y) = (\nu * (\widehat{\tilde{\alpha} + \gamma}))(y)$$

なので, $\mu^\nu := \kappa = \nu * (\widehat{\tilde{\alpha} + \gamma})$ となる。特に ν は $f_0(\infty)1$ の分布で, $f_t(\infty) = f_0(\infty)$ ($t \geq 0$) であったので, 上の式からロングレートによって与えられたフォワードレート $f(x)$ の条件付分布 $\mu^\nu(\{f \in H | \delta_x(f) \in A, A \in \mathbb{R}\} | \sigma(\delta_\infty))$ は $x \geq 0$ に対して, 正規分布に従うことが分かる。よって, 2 が示せた。

あとは 3 と 4 を示せば良い。(5.8) より,

$$f_t(x) - f_0(t+x) = \int_0^t S_{t-s} \alpha(x) ds + \delta_x \int_0^t S_{t-s} \sigma dW_s \quad (5.10)$$

となる。このとき,

$$\int_0^x \langle \sigma^* \delta_s, \sigma^* I_s \rangle_G ds = \frac{1}{2} \|\sigma^* I_x\|_G^2$$

に注意して, (5.8) の両辺の P による平均をとると,

$$\begin{aligned} E[f_t(x)] - E[f_0(t+x)] &= \int_0^t S_{t-s} \alpha(x) ds \\ &= \int_0^t \delta_{t-s+x} \alpha ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \langle \sigma^* \delta_{t-s+x}, \sigma^* I_{t-s+x} + \lambda \rangle_G ds \\
&= \int_t^{t+x} \langle \sigma^* \delta_s, \sigma^* I_s + \lambda \rangle_G ds \\
&= \int_0^{t+x} \langle \sigma^* \delta_s, \sigma^* I_s + \lambda \rangle_G ds - \int_0^t \langle \sigma^* \delta_s, \sigma^* \delta_x + \lambda \rangle_G ds \\
&= \frac{1}{2} \|\sigma^* I_{t+x}\|_G^2 + \langle \sigma^* I_{t+x}, \lambda \rangle_G - \frac{1}{2} \|\sigma^* I_x\|_G^2 - \langle \sigma^* I_x, \lambda \rangle_G \\
&= \frac{1}{2} (\|\sigma^* I_{t+x}\|_G^2 + 2 \langle \sigma^* I_{t+x}, \lambda \rangle_G + \|\lambda\|_G^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\|\sigma^* I_x\|_G^2 + 2 \langle \sigma^* I_x, \lambda \rangle_G + \|\lambda\|_G^2) \\
&= \frac{1}{2} (\|\sigma^* I_{t+x} + \lambda\|_G^2 - \|\sigma^* I_x + \lambda\|_G^2) \tag{5.11}
\end{aligned}$$

となる。ここで、任意の $f \in F$ に対して、

$$\delta_{t+x}(f) \rightarrow \delta_\infty(f) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

であり、任意の $f^0 \in F^0$ に対して、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |f^0(s)| ds &= \int_0^\infty |S_s f^0(0)| ds \leq \|\delta_0\|_{F^*} \int_0^\infty \|S_s f^0\|_F ds \\
&\leq \|\delta\|_{F^*} M \|f^0\|_F \int_0^\infty e^{-\beta s} ds = M \|\delta_0\|_{F^*} \|f^0\|_F < \infty
\end{aligned}$$

なので、 $I_{t+x}(f^0) \rightarrow I_\infty(f^0)$ as $t \rightarrow \infty$ である。このことに注意すると、

$$|\delta_{t+x} f_0| \leq \|\delta_{t+x}\|_{F^*} \|f_0\|_F < N \|f_0\|_F$$

となり、仮定から $\|f_0\|_F$ は可積分なので、Lebesgue の優収束定理より、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\delta_{t+x} f_0] = E[\delta_\infty f_0]$$

となる。また、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\sigma^* I_{t+x} + \lambda\|_G^2 = \|\sigma^* I_\infty + \lambda\|_G^2$$

となる。よって、(5.11) の両辺を $t \rightarrow \infty$ とすると、

$$\begin{aligned}
E_{\mu^\nu}[f(x)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[f_t(x)] \\
&= E_{\mu^\nu}[f(\infty)] + \frac{1}{2} (\|\sigma^* I_\infty + \lambda\|_G^2 - \|\sigma^* I_x + \lambda\|_G^2)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\lambda = 0$ とすると、

$$\begin{aligned}
E_{\mu^\nu}[f(x)] &= E_{\mu^\nu}[f(\infty)] + \frac{1}{2} (\|\sigma^* I_\infty\|_G^2 - \|\sigma^* I_x\|_G^2) \\
&\leq E_{\mu^\nu}[f(\infty)] + \frac{1}{2} \|\sigma^* I_\infty\|_G^2 \\
&= E_{\mu^\nu}[f(\infty)] + \int_0^\infty F_{\text{HJM}}(\sigma)(\infty) ds \\
&= E_{\mu^\nu}[f(0)]
\end{aligned}$$

最後は (5.10) の $x = 0$ の場合を使った。よって, 3 はできた。

また, 4 については

$$\text{Var}_{\mu^\nu}[f(x)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_{\mu^\nu}[f_t(x)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\text{Var}[f_0(t+x)] + \text{Var} \left[\delta_x \int_0^t S_{t-s} \sigma dW_s \right] \right)$$

となり, 右辺の第 1 項は Lebesgue の優収束定理から,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_{\mu^\nu}[f_0(t+x)] = \text{Var}_{\mu^\nu}[f(\infty)]$$

となる。また第 2 項は

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mu^\nu} \left[\delta_x \int_0^t S_{t-s} \sigma dW_s \right] &= \text{E}_{\mu^\nu} \left[\left(\delta_x \int_0^t S_{t-s} \sigma dW_s \right)^2 \right] \\ &= \text{E}_{\mu^\nu} \left[\left(\int_0^t S_{t-s+x} \sigma dW_s \right)^2 \right] \\ &= \text{E}_{\mu^\nu} \left[\int_0^t \|S_{t-s+x} \sigma\|_F^2 ds \right] \\ &= \int_0^t \|S_{t-s+x} \sigma\|_F^2 ds \\ &= \int_x^{t+x} \|S_s \sigma\|_F^2 ds \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_x^\infty \|\sigma^* \delta_s\|_G^2 ds \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\text{Var}_{\mu^\nu}[f(x)] = \text{Var}_{\mu^\nu}[f(\infty)] + \int_x^\infty \|\sigma^* \delta_s\|_G^2 ds$$

よって, (左辺) は $x \geq 0$ で減少関数となる。以上ですべて示せた。 $\square$

上の定理の 3 の結果は, スポットレートが他のフォワードカーブに対して, 平均的に最大であることを示している。これは, 適当な条件の下で $\{f_t\}_{t \geq 0}$ がマルコフの時も成り立つ。このことを以下の 2 つの Proposition で示す。ただし, 以下出てくる HJM モデルはゼロクーポン債価格がリスク中立な確率測度 Q 上でマルチンゲールとする。また,

$$\exp \left(- \int_0^x f_t(s) ds \right) = \text{E} \left[\exp \left(- \int_t^{x+t} r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

$r_s = f_s(0)$ が成立する。

Proposition 5.13. μ は係数がマルコフ型の HJM モデル $\{f_t\}_{t \geq 0}$ に対する不変測度とし, $\bar{f}(x) = \int_F f(x) \mu(df)$ はこの測度に対して, 満期までの時間 x での“平均フォワードレート”とする。さらに, $\bar{f}$ は連続であると仮定する。このとき, “平均スポットレート”が最大である。すなわち,

$$\bar{f}(0) \geq \bar{f}(x) \quad \forall x \geq 0$$

が成立する。

Proof. $\varepsilon > 0$ を任意に固定しておく。このとき,

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\int_0^{x+\varepsilon} f_0(s)ds\right) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^{x+\varepsilon} r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_0\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^\varepsilon r_s ds\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_\varepsilon^{x+\varepsilon} r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_\varepsilon\right] \middle| \mathcal{F}_0\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^\varepsilon r_s ds\right) \exp\left(-\int_0^x f_\varepsilon(s)ds\right) \middle| \mathcal{F}_0\right] \\
&\stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \exp\left(-\mathbb{E}\left[\int_0^\varepsilon r_s ds \middle| \mathcal{F}_0\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^x f_\varepsilon(s)ds \middle| \mathcal{F}_0\right]\right)
\end{aligned}$$

ここで, e^x は単調増加関数なので,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\varepsilon r_s ds \middle| \mathcal{F}_0\right] \geq \int_0^{x+\varepsilon} f_0(s)ds - \mathbb{E}\left[\int_0^x f_\varepsilon(s)ds \middle| \mathcal{F}_0\right]$$

ここで, $\{f_t\}_{t \geq 0}$ がマルコフ型であることを注意して, 両辺を μ で積分し, Fubini の定理を使うと

$$(\text{左辺}) = \int_F \mathbb{E}\left[\int_0^\varepsilon f_s(0)ds \middle| \mathcal{F}_0\right] \mu(df) = \int_0^\varepsilon \mathbb{E}_{f_0}\left[\int_F \delta_0(f_s) \mu(df)\right] ds = \int_0^\varepsilon \mathbb{E}_{f_0}[\bar{f}(0)] ds = \varepsilon \bar{f}(0)$$

であり,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \int_F \left(\int_0^{x+\varepsilon} f_0(s)ds - \mathbb{E}\left[\int_0^x f_\varepsilon(s)ds \middle| \mathcal{F}_0\right]\right) \mu(df) \\
&= \int_0^{x+\varepsilon} \int_F f_0(s) \mu(df) ds - \int_0^x \mathbb{E}_{f_0}\left[\int_F f_\varepsilon(s) \mu(df)\right] ds \\
&= \int_0^{x+\varepsilon} \bar{f}(s)ds - \int_0^x \bar{f}(s)ds \\
&= \int_x^{x+\varepsilon} \bar{f}(s)ds
\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\bar{f}(0) \geq \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \bar{f}(s)ds$$

仮定から, $\bar{f}$ は連続なので, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると, $\bar{f}(0) \geq \bar{f}(x)$. □

次の Proposition のために, 時間的一様なマルコフ型を定義する。

Definition 5.14. フォワードレート過程 $\{f_t\}_{t \geq 0}$ が時間的一様なマルコフ型とは,

$$f_t = S_t f_0 + \int_0^t S_{t-s} \alpha(f_s) ds + \int_0^t S_{t-s} \sigma(f_s) dW_s \quad (t \geq 0)$$

で与えられるときにいう。ただし, $\alpha(f_t) = F_{\text{HJM}}(\sigma(f_t)) + \lambda \sigma(f_t)$ とする。

Proposition 5.15. $\{f_t\}_{t \geq 0}$ は時間的一様なマルコフ型で, $\lambda = 0$ で $\sigma \in \mathcal{L}_{(2)}(G; F)$ は有界とする。また, F 上の測度 μ が $\{f_t\}_{t \geq 0}$ の不変測度とする。さらに,

$$\langle \sigma(f)^* \delta_x, \sigma(f) \delta_x \rangle_G \geq 0 \quad (\forall f \in F, x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (5.12)$$

と仮定する。このとき, 平均フォワードカーブは減少する, すなわち, $\bar{f}(x) \leq \bar{f}(x+t)$ ($\forall t \geq 0$) となる。

Proof. HJM モデルを次のように書き直す。

$$f_t(x) = f_0(t+x) + \int_0^t \langle \sigma(f_u)^* \delta_{t-u+x}, \sigma(f_u) I_{t-u+x} \rangle_G du + \int_0^t \sigma(f_u)^* \delta_{t-u+x} dW_u$$

ここで，両辺を不変測度 μ で積分すると，

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(x+t) + E_\mu \left[\int_0^t \langle \sigma(f_u)^* \delta_{t-u+x}, \sigma(f_u) I_{t-u+x} \rangle_G du \right]$$

となり，右辺の第 2 項は

$$\begin{aligned} (\text{右辺第 2 項}) &= E_\mu \left[\int_0^t \langle \sigma(f_{t-s})^* \delta_{s+x}, \sigma(f_{t-s})^* I_{s+x} \rangle_G ds \right] \\ &= E_\mu \left[\int_0^t \int_0^{s+x} \langle \sigma(f_{t-s})^* \delta_{s+x}, \sigma(f_{t-s})^* \delta_u \rangle_G duds \right] \\ &\geq 0 \quad (\forall s, x, u \geq 0) \quad (\because (5.12)) \end{aligned}$$

ゆえに， $\bar{f}(x) \leq \bar{f}(x+t)$ ($\forall t \geq 0$) となる。 □

Remark 5.16. Theorem 5.12.3 や Proposition 5.15 の時のように時間的一様るとき，平均フォワードレートはイールドを表している。つまりこれらの主張はイールドカーブが右下がり，すなわち“逆イールドカーブ”を描くことを意味している。

謝辞

最後となりましたが，本研究を行うにあたり，長期間に渡り，時には優しく時には厳しく，終始丁寧な御指導，御支援，御助言を頂いた谷口説男教授に深く感謝します。

また，本論文において最も参考にした [5] を私に紹介して下さった岡山大学の河備浩司准教授に感謝と共に深くお礼申し上げます。

最後になりましたが，同じセミナーの原啓輔君，自主セミナーを一緒にしてくれた塩塚喬君，井上志摩君，堀内智明君，また 1414 号室の皆さんに深く感謝します。

参考文献

- [1] F, Black. and P, Karasinski, “Bond and option pricing when short rates are lognormal”, *Financial Analysis Journal*, (1991), 52 - 59
- [2] F, Black. and M., Scholes., “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy* , **81**(1973), 637 - 654
- [3] A, Brace. and M, Musiela., ”A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow and Morton”, *Mathematical Finance*, **4**(1994), 259 - 283
- [4] R, Carmona. and M, Tehranchi., “A characterization of hedging portfolios for interest rate contingent claims”, *The Annals of Applied Probability*, **14**(2004), 1267 -1294
- [5] R, Carmona. and M, Tehranchi., “*Interest Rate Models:an Infinite Dimensional Stochastic Analysis Perspective*”, *Springer Finance Series*, Springer, Berlin, 2006
- [6] J, Cox. J. Ingersoll. and S, Ross., “A theory of the term structure of interest rates”, *Econometrica*, **53** (1985), 385 - 407
- [7] Ju, L, Daletskii., “Differential equations with functional derivatives and stochastic equations for generalized random processes.” *Soviet mathematics - doklady* , **7**(1966), 220 - 223.
- [8] G, Da Prato. and J, Zabczyk., “*Stochastic Equations in Infinite Dimension*”, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Application*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [9] G, Da Prato. and J, Zabczyk., “*Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*”, volume 229 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996
- [10] E, B, Dawson., Stochastic evolution equations ,*Mathematical Biosciences*, **15**(1972), 287 -316
- [11] E, B, Dawson., Stochastic evolution equations and related measures processes, *Journal of Multivariate Analysis*, **5**(1975), 1 - 52
- [12] D, Filipović., “*Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models*”, volume 1760 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2001
- [13] 舟木直久, 『確率微分方程式』, 岩波講座 現代数学の基礎 **9**, 岩波書店, 東京, 1998
- [14] L, Gross., “Potential theory on Hilbert space”, *Journal of Functional Analysis*, **1**(1967), 123 - 181
- [15] D, Heath. R, Jarrow. and A, Morton., “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation”, *Econometrica*, **60**(1992), 77 - 105
- [16] 日合文雄, 柳研二郎, 『ヒルベルト空間と線形作用素』, 数理情報科学シリーズ **10** , 牧野書店 , 東京 , 1995

- [17] T, Ho. and S. Lee., “Term structure movements and pricing interest ratescontingent claims”, *Review of Finacial Studies*, **41**(1986), 1011 -1029
- [18] J, Hull., “*Options, Futures and Others Derivatives*”, 5th Edition, Prentice Hall, Eaglewood Cliff, New Jersey, 2003(邦訳：三菱証券商品開発本部訳, 『フィナンシャルエンジニアリング デリバティブ取引とリスク管理の総体系』, 金融財政事情研究会, 東京, 2005)
- [19] J, Hull. and A.White., “Pricing interest rate derivatives securities”, *Review of Financial Studies*, **3**(1990), 573 - 592
- [20] N, Ikeda. and S, Watanabe., “*Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*”, 2th Edition, North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, 1988
- [21] I, Karazas. and S, E, Shreve., “*Brownian Motion and Stochastic Calculus*”, 2th Edition, Springer-Verlag ,New York ,1991(邦訳：渡邊壽夫訳, 『ブラウン運動と確率積分』, シュプリ ンガー・フェアラーク東京, 東京, 2001)
- [22] 木島正明, 『期間構造モデルと金利デリバティブ』, シリーズ<現代金融工学> 3, 朝倉書店, 東京, 1999
- [23] N, V, Krylov., “*Introduction to the Theory of Random Processes*”, volume 43 of *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002
- [24] P, Malliavin. and A, Thalmaier., “*Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Fi- nance*”, *Springer Finance Series*, Springer, Berlin, 2005
- [25] 三浦良造, “数理ファイナンスと金融工学：小史”, *数学*, **58**(2006), 288 - 314
- [26] M, Musiela., “Stochastic PDEs and Term Structure Models”, *In: Jorneées Internatinales de Finance*, IGR-AFFI, La Baule, 1993
- [27] 中山季之, “金利モデルにおける整合性に関する話題”, *数学*, **58**(2006), 388 - 399
- [28] K, Pathasarathy., “*Probability Measures on Metric Spaces*”, *A series of Monographs and Textbooks*, Academic Press ,New York/San Francisco/London, 1967
- [29] W, Rudin., “*Functional Analysis*”, McGraw-Hill ,New York, 1973
- [30] M, Sanz-Solé., “*Malliavin Calculus with Applications to Stochastic Partial Differential Equations*”, EPFL Press, Lausanne; distributed by CRC Press, Boca Raton, FL, 2005
- [31] A, V, Skorohod., “On a generalization of a stochastic integral”, *Theory of Probability and its Applications*, **20**(1975) 219 -233
- [32] 重川一郎, 『確率解析』, 岩波講座 現在数学の展開 **9**, 岩波書店, 東京, 1998
- [33] M, Tehranchi., “A note on invariant measures for HJM models”, *Finance and Stochastics*, **9**(2005), 389 - 398
- [34] O, Vasicek., “An equilibrium characterization of the term structure”, *Journal of Financial Econometric*, **5**(1997), 177 -188

- [35] D, Williams., “*Probability with Martingales*”, Cambridge University Press, Cambridge, 1991(邦訳：赤堀次郎，原啓介，山田俊雄 共訳，『マルチンゲールによる確率論』，培風館，2004)