

d次元アルキメディアンコピュ ラについて

九州大学大学院
数理学府数理学専攻
修士課程二年
川副 謙士郎
指導教員：谷口説男 教授

修士論文

2011年2月3日提出

目 次

1	序文	2
2	コピュラの定義と Sklar の定理	3
3	アルキメディアンコピュラ	10
3.1	諸定義	10
3.2	アルキメディアンジェネレーターと d 単調性の関係	10
3.3	d 単調性に関する諸性質	13
4	l_1 ノルム対称分布と d 単調性	21
5	アルキメディアンジェネレーターの具体的構成	35
5.1	正項級数型	35
5.2	ウィリアムソン d 変形	38
5.3	その他のジェネレーター	39

1 序文

保険数理の分野において、保険事故の損害額や事故件数など様々なものが確率変数として扱われている。ここで、例えば物損事故では対物賠償だけではなく事故と同時に搭乗者が怪我をする場合などが考えられるため、対物賠償保険における支払保険金総額と搭乗者保険における支払保険金総額の間に一定の依存関係を仮定することが自然であると言える。上記のように、何らかの依存関係を仮定することが自然な組み合わせは多様に存在するため、それぞれの確率変数の依存関係を知ることは非常に重要であるといえる。

最近の研究では、依存関係を表す一つの指標としてコピュラ関数 (定義は次章による) が使われている。まず、Sklar の定理により d 個の確率変数の組 $\mathbf{X} = (X_i)_{i=1}^d$ とその結合分布関数 H 、周辺分布関数 F_i に対して

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

を満たすコピュラ関数 C が一意に定まることが示される。一方で、命題 2.1 により元の確率変数の組 $\mathbf{X}$ を、各変数が $[0, 1]$ 上一様分布に従い、結合分布関数として前述のコピュラ関数 C を持つ d 個の確率変数の組 $\mathbf{U} = (U_i)_{i=1}^d$ に構成しなおすことが可能である。(この $\mathbf{U}$ に対して Sklar の定理を適用した際に見つかるコピュラ関数は当然 C である。) つまり、Sklar の定理により見つかったコピュラ関数 C はもともとの確率変数各々の分布には全く影響されずに定まっていると考えられるため、この C は確率変数の間の依存関係のみを表すものとして見ることができる。

この論文ではコピュラ関数として、一定の条件を満たす一変数関数 ψ を用いて

$$C(u_1, \dots, u_d) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d))$$

により表されるアルキメディアンコピュラと呼ばれるものを考察していく。まず、このコピュラを扱ううえで重要なことの一つに、関数 ψ として選択可能な関数がどの程度存在するかということがあるが。これは後述の命題 4.1 により非負確率変数とほぼ同数であることが示される。

また、 ψ の構成方法も非常に重要である。この論文では、特に定理 5.1 の正項級数関数

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$$

を用いた ψ の構成方法を紹介する。この構成方法を用いると、正項級数の微分、積分などにおける諸性質から非常に多くの ψ が容易に構成できることが分かる。更に、アルキメディアンコピュラの代表的なものとしてよく知られている Clayton コピュラ、Frank コピュラ、Joe コピュラ、Ali-Mikhail-Haq コピュラのいずれもが上記の正項級数を用いて構成されたものであることが明らかになる。

2 コピュラの定義と Sklar の定理

定義 2.1

関数 $H: [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ が、 d 増加とは 集合 $B = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \subseteq [0, 1]^d$ に対して

$$V_H(B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in \{B \text{ の頂点} \}} \text{sgn}(x) H(x) \geq 0$$

が成り立つことを言う。ただし、 $x = (x_i)_{i=1}^d$ に対して

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & (x_i = a_i \text{ となる } i \text{ が偶数個}) \\ -1 & (x_i = a_i \text{ となる } i \text{ が奇数個}) \end{cases}$$

とする。

注

${}_i \Delta_{a_i}^{b_i} H(x_1, \dots, x_d) = H(x_1, \dots, b_i, \dots, x_d) - H(x_1, \dots, a_i, \dots, x_d)$ として、 $V_H(B)$ は符号に注意すれば

$$V_H(B) = {}_1 \Delta_{a_1}^{b_1} \dots {}_d \Delta_{a_d}^{b_d} H(x_1, \dots, x_d)$$

と表すこともできる。また矩形 B が $B = \prod_{i=1}^d (x_i, x_i + h_i]$ の形の際には

$$V_H(B) = {}_1 \Delta_{h_1} \dots {}_d \Delta_{h_d} H(x_1, \dots, x_d)$$

と表すこともある。

定義 2.2

関数 $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ が d 次元コピュラであるとは以下の三つの条件を満たすことである。

$u = (u_i)_{i=1}^d \in [0, 1]^d$ に対し

1. ある i に対して $u_i = 0$ ならば $C(u) = 0$ となる。
2. ただ一つの番号 i を除く全ての番号 j に対して $u_j = 1$ ならば $C(u) = u_i$ となる。
3. C は d 増加である。

定理 2.1 (Sklar の定理)

$\mathbb{X} = (X_i)_{i=1}^d$ を連続型確率分布に従う d 次元確率変数として、その結合分布関数を H 、1 次元周辺分布関数を F_i とする。この時、次の式を満たすコピュラ C が一意的に存在する。

$$H(x) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$$

証明

$F_i^{-1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x : F_i(x) = t\}$ とする。各 F_i が分布関数であることから非減少で $\lim_{x \rightarrow \infty} F_i(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F_i(x) = 0$ を満たし、かつ連続であるので、中間値の定理より $0 < \forall t < 1$ に対して $\{x : F_i(x) = t\} \neq \emptyset$ が成り立つ。よって $\{x : F_i(x) = 0\} = \emptyset$ ならば $F_i^{-1}(0) = -\infty, \{x : F_i(x) = 1\} = \emptyset$ ならば $F_i^{-1}(1) = +\infty$ で定義すれば F_i^{-1} は $[0, 1]$ 上で定義されたことになる。

次に、 F_i^{-1} の非減少性と

$$F_i(F_i^{-1}(t)) = t$$

及び

$$x \leq F_i^{-1}(t) \Leftrightarrow F_i(x) \leq t$$

を示すことにする。

$F_i^{-1}(t) = x$ と置くと、上限の定義より

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_0 \in \{x : F_i(x) = t\} \quad x - \frac{1}{n} < x_0 < x$$

が成り立つ。今 F_i は非減少なので

$$F_i(x - \frac{1}{n}) \leq F_i(x_0) = t \leq F_i(x)$$

更に F_i は連続なので $n \rightarrow \infty$ とすれば、 $F_i(x) = t$ が言える。

また $s < t$ とした時に、もし $F_i^{-1}(s) > F_i^{-1}(t)$ なら、両辺に F_i を作用させれば F_i の非減少性と先のことから $s \geq t$ となり矛盾するため非減少性も導かれる。

以上のことから、もし $x \leq F_i^{-1}(t)$ とすれば両辺に F_i を作用させれば $F_i(x) \leq t$ が言え、 $F_i(x) \leq t$ とすれば両辺に F_i^{-1} を作用させれば $F_i^{-1}(F_i(x)) \leq F_i^{-1}(t)$ 、更に F_i^{-1} の定義から $x \leq F_i^{-1}(F_i(x))$ も成り立つので同値性まで示せた。

ここで $u = (u_i)_{i=1}^d \in [0, 1]^d$ に対して

$$\begin{aligned} C(u) &\stackrel{\text{def}}{=} H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \\ &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_d \leq F_d^{-1}(u_d)) \end{aligned}$$

と定義すると、 $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = P(X_1 \leq F_1^{-1}(F_1(x_1)), \dots, X_d \leq F_d^{-1}(F_d(x_d))) \quad \dots (*)$$

となるが、 $\{X_i \leq x\} \subseteq \{X_i \leq F_i^{-1}(F_i(x))\}$ であることと

$$P(X_i \leq x) = F_i(x) = F_i(F_i^{-1}(F_i(x))) = P(X_i \leq F_i^{-1}(F_i(x)))$$

であることから、(*) 式の (右辺) = $H(x)$ となる。後は、今作った C がコピュラであることを確認すればよい。

(i) $u_i = 0$ となる i が存在 すれば $P(X_i \leq F_i^{-1}(0)) = F_i(F_i^{-1}(0)) = 0$ となるので $C(u) = 0$ となる。

(ii) $u = (1, \dots, u_j, \dots, 1)$ とすると、 $P(X_i \leq F_i^{-1}(1)) = F_i(F_i^{-1}(1)) = 1$ となるので $C(u) = u_j$ となる。

(iii) $B = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ に対して、 $B' = \prod_{i=1}^d [F_i^{-1}(a_i), F_i^{-1}(b_i)]$ とすれば

$$\begin{aligned} V_C(B) &= \sum_{u \in \{B \text{ の頂点} \}} \text{sgn}(u) C(u) = \sum_{x \in \{B' \text{ の頂点} \}} \text{sgn}(x) H(x) \\ &= P(F_1^{-1}(a_1) < X_1 \leq F_1^{-1}(b_1), \dots, F_d^{-1}(a_d) < X_d \leq F_d^{-1}(b_d)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となり、 C は d-増加である。以上より C はコピュラとなる。

一方で C' も定理の式を満たすコピュラであるとする

$$C'(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$$

が成り立つ。しかし各 F_i は連続であることから $\text{Image} F_i = [0, 1]$ となり、 $[0, 1]^d$ 上において $C' = C$ となるため、 C は一意である。

(証明終)

命題 2.1

$\mathbb{X} = (X_i)_{i=1}^d$ 、 H 、 F_i をそれぞれ定理 2.1 と同様のものとして、 C をそれらに対して定まったコピュラとする。このとき次の二つの条件を満たす d 次元確率変数 $\mathbb{U} = (U_i)_{i=1}^d$ が構成できる。

- 各確率変数 U_i は $[0, 1]$ 上一様分布に従う。
- $\mathbb{U}$ は結合分布関数として C を持つ。

証明

U_i を

$$U_i \stackrel{\text{def}}{=} F_i(X_i)$$

と定義する。すると U_i の分布関数 F_{U_i} は任意の $0 \leq x \leq 1$ に対して

$$F_{U_i}(u) = P(F_i(X_i) \leq u) = P(X_i \leq F_i^{-1}(u)) = F(F_i^{-1}(u)) = u$$

が成り立つので前半の主張は示された。更にコピュラ C の定義式において $X_i \leq F_i^{-1}(x_i)$ の両辺に F_i を作用させれば、後半の主張も得られる。

(証明終)

定義 2.3

$\mathbb{X} = (X_i)_{i=1}^d$ を d 次元確率変数とする。

$$\begin{aligned} \overline{H}(x) &= P(X_1 > x_1, \dots, X_d > x_d) \\ \overline{F}_i(x_i) &= P(X_i > x_i) \end{aligned}$$

上記で定義された $\bar{H}$ 及び $\bar{F}_i$ をそれぞれ $\mathbb{X}$ の 結合生存関数、一次元周辺生存関数と呼ぶ。

補題 2.1

関数 $\bar{H} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ に対して以下の二つは同値となる。

(1) ある d 次元確率変数 $\mathbb{X}$ が存在して、 $\bar{H}$ は $\mathbb{X}$ の結合生存関数となる。

(2) $\bar{H}$ は次の 3 つを満たす。

1. $\bar{H}(-\infty, \dots, -\infty) = 1$ かつ $\bar{H}(x_1, \dots, \infty, \dots, x_d) = 0$
2. 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ において $\bar{H}$ は右連続である。
3. $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{H}(-x)$ と定めたとき、 G は d 増加である。

証明

まず (1) $\Rightarrow$ (2) について示す。

• 性質 1 について

$\bar{H}$ が性質 1 を満たすことは生存関数の定義より自明である。

• 性質 2 について

$y = (y_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}$ を $y_i \geq x_i$ を満たすものとする。このとき

$$\begin{aligned}
|\bar{H}(x) - \bar{H}(y)| &\leq |\bar{H}(y_1, \dots, y_d) - \bar{H}(x_1, y_2, \dots, y_d)| \\
&\quad + |\bar{H}(x_1, y_2, \dots, y_d) - \bar{H}(x_1, x_2, y_3, \dots, y_d)| \\
&\quad \vdots \\
&\quad + |\bar{H}(x_1, \dots, x_{d-1}, y_d) - \bar{H}(x_1, \dots, x_d)| \\
&= P(x_1 < X_1 \leq y_1, X_2 > y_2, \dots, X_d > y_d) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + P(X_1 > x_1, \dots, x_d < X_d \leq y_d)
\end{aligned}$$

ここで $y_i \downarrow x_i$ とすれば 測度の単調性から (右辺) $\rightarrow 0$ となり $\bar{H}$ は右連続となる。

• 性質 3 について

$$G(x) = P(-X_1 < x_1, \dots, -X_d < x_d)$$

なので $B = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$V_G(B) = P(a_1 \leq -X_1 < b_1, \dots, a_d \leq -X_d < b_d) \geq 0$$

となることから G は d -増加となる。

次に (2) $\Rightarrow$ (1) を示す。

(2) の各性質から後述の定理 2.4 と同様の手順で G を用いて $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上に測度を構成し、確率変数も同様に構成する。このとき $(-X_1, \dots, -X_d)$ の結合生存関数は

$$\begin{aligned} P(-X_1 > x_1, \dots, -X_d > x_d) &= P(X_1 < -x_1, \dots, X_d < -x_d) \\ &= G(-x) = \overline{H}(x) \end{aligned}$$

となり (1) の主張が満たされる。

(証明終)

定理 2.2

C をコピュラとする。また $i = 1, \dots, d$ において各 $\overline{F}_i$ をある確率変数の一次元周辺生存関数とする。このとき C が連続であるなら $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\overline{H}(x) \stackrel{\text{def}}{=} C(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_d(x_d))$$

と定めれば、 $\overline{H}$ はある d 次元確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_d)$ の結合生存関数であり、一次元周辺生存関数として $\overline{F}_i$ を持ち、生存コピュラとして C を持つ。

証明

$\overline{H}$ が 補題 2.2 の 3 条件を満たすことを示す。条件 1 を満たすことは $\overline{H}$ の定義から分かる。条件 2 を満たすことは C が連続であること及び $\overline{F}_i$ が右連続であることよりわかる。また $G(x) = \overline{H}(-x)$ の d 増加性については C の d 増加性よりわかる。以上より $\overline{H}$ はある確率変数の結合生存関数となる。

更に

$$\overline{H}(-\infty, \dots, x_i, \dots, -\infty) = C(1, \dots, \overline{F}_i(x_i), \dots, 1) = \overline{F}_i(x_i)$$

となるので、一次元周辺生存関数として $\overline{F}_i$ を持ち、生存 copula として C を持つことになる。

(証明終)

定理 2.3(Sklar の定理)

$\mathbb{X} = (X_i)_{i=1}^d$ を連続型確率分布に従う d 次元確率変数として、その結合生存関数を $\overline{H}$ 、1 次元周辺生存関数を $\overline{F}_i$ とする。この時、次の式を満たすコピュラ $\overline{C}$ が存在する。

$$\overline{H}(x) = \overline{C}(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_d(x_d)) \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$$

この $\overline{C}$ のことを生存コピュラと呼ぶ。

証明

$\overline{F}_i = 1 - F_i$ であること及び定理 2.1 から

$$\begin{aligned}\overline{H}(x) &= \sum_{y \in \prod_{i=1}^d (x_i, \infty] \text{ の頂点}} \text{sgn}(y) H(y) \\ &= \sum_{u \in \prod_{i=1}^d (F_i(x_i), 1] \text{ の頂点}} \text{sgn}(u) C(u) \\ &= V_C \left(\prod_{i=1}^d (1 - \overline{F}_i(x_i), 1] \right)\end{aligned}$$

が成り立つ。あとは

$$\overline{C}(u) \stackrel{\text{def}}{=} V_C \left(\prod_{i=1}^d (1 - u_i, 1] \right)$$

と定めれば、 C がコピュラであることから $\overline{C}$ もコピュラであることがわかる。

(証明終)

定理 2.4

C を d -次元コピュラとする。 C が 任意の $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ について右連続である、つまり任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して、 $y_i \geq x_i$ を満たす $y = (y_i)_{i=1}^d$ に対して

$$\sum_{i=1}^d |y_i - x_i| \leq \delta \Rightarrow |C(x) - C(y)| < \epsilon$$

が成り立つとする。このとき、連続型分布に従う d -次元確率変数 $\mathbb{X} = (X_i)_{i=1}^d$ で

$$H(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$$

を満たすものが存在する。ただし H と F_i はそれぞれ $\mathbb{X}$ の結合分布関数及び周辺分布関数とする。

証明

まず、 C を用いて $\mathcal{B}([0, 1]^d)$ 上に測度を構成する。

$$B = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \subseteq [0, 1]^d \text{ に対して } P(B) = V_C(B)$$

と定義すれば V_C の定義から B に適当な分割を行っても P の値は変わらないことが確認できる。よって

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{F : F \text{ は上記の } B \text{ の形の集合の有限個の和集合}\}$$

とすれば、 P は $\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度に拡張できる。特に C の右連続性から P は $\mathcal{F}$ 上の σ -加法的関数となる。更に $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}([0, 1]^d)$ であり $P([0, 1]^d) = 1$ で

あることからCaratheodoryの拡張定理により P は $\mathcal{B}([0, 1]^d)$ 上に一意的に拡張される。

ここで確率変数として

$$X_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_i \quad x = (x_i)_{i=1}^d \in [0, 1]^d \quad i = 1, 2, \dots, d$$

とにおいて、 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ について考えると、

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) = C(1, \dots, x_i, \dots, 1) = x_i$$

であり

$$H(x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = C(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

となるので、題意が満たされた。

(証明終)

3 アルキメディアンコピュラ

ここまでは一般のコピュラに関する性質を論じてきた。以下では、より具体的に構成ができるアルキメディアンコピュラについて考察する。

3.1 諸定義

定義 3.1

(1) $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とする。関数 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ が d 単調であるとは、 f は $d-2$ 回微分可能であり次の 2 条件を満たすことである。

1. 任意の $x \in (a, b)$ に対して $k = 0, 1, \dots, d-2$ で $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ が成り立つ。
2. $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}$ は (a, b) 上で非増加かつ凸である。

ただし $d = 1$ の時は f が非負かつ非増加のことを意味する。

(2) f が区間 I 上で d 単調であるとは、 I の内包 I° 上で d 単調であり I 上で連続であることをいう。

(3) f が完全単調であるとは、 f が C^∞ 級であり $k \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$ で

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0 \quad x \in (a, b)$$

を満たすことである。

定義 3.2

連続非増加関数 $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ が以下の条件を満たすとき、 ψ をアルキメディアンジェネレーターと呼ぶ。

- $\psi(0) = 1$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$ となる。
- ψ は $[0, \psi^{-1}(0))$ において単調減少である。

ただし、これ以降 $\psi^{-1}(t)$ と書くときは

$$\psi^{-1}(t) = \inf\{x : \psi(x) = t\}$$

のこととする。

3.2 アルキメディアンジェネレーターと d 単調性の関係

定理 3.1

関数 ψ をアルキメディアンジェネレーターとする。また $u = (u_i)_{i=1}^d \in [0, 1]^d$ に対して

$$C(u) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d))$$

とする。この時以下の二つは同値

(a) C は copula である。

(b) ψ は $[0, \infty)$ 上で d 単調である。

またこのときの C を ψ をジェネレーターとする アルキメディアンコピュラと呼ぶ。

証明

(b) $\Rightarrow$ (a) について

ψ が d 単調かつアルキメディアンジェネレーターであることから命題 3.2(次節を参照) より

$$\overline{H}(x) = \psi(\|\max(x, 0)\|_1)$$

はある d 次元確率変数の結合生存関数となる。また、特に一次元周辺生存関数 F_i として

$$F_i(x) = \overline{H}(-\infty, \dots, x, \dots, -\infty)$$

$$= \begin{cases} \psi(x) & (0 \leq x) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$$

を持つ。このことから $u \geq 0$ に対して

$$F_i^{-1}(u) = \begin{cases} \psi^{-1}(u) & (0 \leq u < 1) \\ -\infty & (u = 1) \end{cases}$$

となる。一方、 $\overline{H}$ が結合生存関数であることから $u = (u_i)_{i=1}^d \in [0, 1]^d$ に対して

$$C'(u) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{H}(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$$

とすれば C' はコピュラとなる。この C' を計算していくと

$$\begin{aligned} C'(u) &= \psi\left(\sum_{i=1}^d \max(F_i^{-1}(u_i), 0)\right) \\ &= \psi\left(\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i)\right) = C(u) \end{aligned}$$

となり、 C はコピュラになる。上の式において、第一の等号は $\overline{H}$ の定義から、第二の等号は

$$\max(F_i^{-1}(u), 0) = \begin{cases} \psi^{-1}(u) & (0 \leq u < 1) \\ \max(-\infty, 0) = 0 = \psi^{-1}(1) & (u = 1) \end{cases}$$

より成り立つ。

(a) $\Rightarrow$ (b) について

C がコピュラであるとする。 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \psi(x) & (0 \leq x) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$$

とすると、 ψ が $[0, \infty)$ 上で連続であることから F は $\mathbb{R}$ 上で連続となる。更に $F(-\infty) = 1$ かつ $F(\infty) = 0$ かつ F は非増加であることから、 F はある確率変数の一次元周辺生存関数となる。また、 ψ が連続であり、 ψ^{-1} も連続であることから、 C も連続となる。よって定理 2.2 から $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\overline{H}(x) = C(F(x_1), \dots, F(x_d))$$

と定めれば、この $\overline{H}$ はある d 次元確率変数の結合生存関数となる。この $\overline{H}$ を計算すると

$$\overline{H}(x) = \psi \left(\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(F(x_i)) \right)$$

となる。ここで $x_i < 0$ とすると $\psi^{-1}(F(x_i)) = \psi^{-1}(1) = 0$ となるので

$$\overline{H}(x) = \overline{H}(\max(x, 0))$$

と表せる。 $0 \leq x_i < \psi^{-1}(0)$ の時は $F(x_i) = \psi(x_i)$ であり、 ψ は $[0, \psi^{-1}(0))$ 上で単調減少なので $\psi^{-1}(\psi(x_i)) = x_i$ となる。よって任意の i について $x < \psi^{-1}(0)$ なる x に対しては

$$\overline{H}(x) = \psi(\| \max(x, 0) \|_1)$$

となる。 $x_i \geq \psi^{-1}(0)$ の時は $F(x_i) = \psi(x_i) = 0$ となるので $\psi^{-1}(F(x_i)) = \psi^{-1}(0)$ となる。しかしこのとき

$$\begin{aligned} \| x \|_1 &\geq \psi^{-1}(0) \\ \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(F(x_i)) &\geq \psi^{-1}(0) \end{aligned}$$

であるから

$$\psi(\| x \|_1) = 0 = \psi \left(\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(F(x_i)) \right)$$

以上より任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\overline{H}(x) = \psi(\| \max(x, 0) \|_1)$$

となる。また、この $\overline{H}$ が生存関数であったことから命題 3.2 より ψ は d 単調となる。

(証明終)

3.3 d 単調性に関する諸性質

補題 3.1

d を自然数、 h を正の数とする。 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ と定める。 f が非負かつ、 $k = 1, 2, \dots, d$ に対して

$$x + kh < b \Rightarrow (\Delta_h)^k f(x) \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

を満たす時、以下の 4 つが成り立つ。

1. f は (a, b) 上単調非減少である。
2. $d \geq 2$ ならば f は (a, b) 上で連続かつ凸である。
3. $d \geq 2$ ならば (a, b) 上で左微分、右微分 f'_-, f'_+ がそれぞれ存在して、 $a < x < y < b$ となる x, y に対して $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y)$ となる。
4. 任意の $k = 1, \dots, d-1$ と $a < x \leq y < b$ となる任意の x, y に対して、 $h > 0$ が $y + kh < b$ を満たすならば $(\Delta_h)^k f(x) \leq (\Delta_h)^k f(y)$ となる。

証明

• 1 について

$k = 1$ として (A.1) を適用すれば良い。

• 2 について

まず連続性を示す。 f は非減少なので、 $f(x_0-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ 、 $f(x_0+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ とおくと $f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+)$ を満たす。一方 $k = 2$ として (A.1) 式を考えると

$$\begin{aligned} 2f(x_0 + h) &\leq f(x_0) + f(x_0 + 2h) \\ 2f(x_0) &\leq f(x_0 + h) + f(x_0 - h) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $h \downarrow 0$ とすれば、 $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$ となり連続性が言える。

凸性に関しては連続性より $a < \forall x < \forall y < b$ に対して

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

を示せば十分である。これは (A.1) を $k = 2, h = (y-x)/2$ として適用すれば導かれる。

・ 3 について

凸性、非減少性から $0 < \delta_1 < \delta_2$ とすると

$$0 \leq \frac{f(x + \delta_1) - f(x)}{\delta_1} \leq \frac{f(x + \delta_2) - f(x)}{\delta_2} \quad (1)$$

$$\frac{f(x) - f(x - \delta_2)}{\delta_2} \leq \frac{f(x) - f(x - \delta_1)}{\delta_1} \leq \frac{f(x + \delta_1) - f(x)}{\delta_1} \quad (2)$$

が成り立つ。(1) 式より $(f(x + \delta) - f(x))/\delta$ は $\delta \downarrow 0$ について非増加かつ下に有界なので、 f には右微分が存在することになる。(2) でも同様に考えれば左微分も存在して、 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ も成り立つ。更に $x < y$ に対して $\delta < |x - y|/3$ ととれば

$$f'_+(x) \leq \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} \leq \frac{f(y) - f(y - \delta)}{\delta} \leq f'_-(y)$$

となる。

・ 4 について

Δ_h の定義から $\Delta_h f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{\frac{h}{n}} f\left(x + \frac{ih}{n}\right)$ が成り立つので

$$\begin{aligned} (\Delta_h)^k f(x) &= (\Delta_h)^{k-1} \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta_{\frac{h}{n}} f\left(x + \frac{i_1 h}{n}\right) \\ &= \sum_{i_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{n-1} (\Delta_{\frac{h}{n}})^k f\left(x + (i_1 + \cdots + i_k) \frac{h}{n}\right) \end{aligned}$$

となる。上式に $\Delta_{\frac{h}{n}}$ を作用させると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (\Delta_h)^k f\left(x + \frac{h}{n}\right) - (\Delta_h)^k f(x) \\ (\text{右辺}) &= \sum_{i_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{n-1} (\Delta_{\frac{h}{n}})^{k+1} f\left(x + (i_1 + \cdots + i_k) \frac{h}{n}\right) \end{aligned}$$

となる。(右辺) の f の中身がとり得る最大の値 $x + kh + h/n$ は n を十分に大きくとれば $x + kh + h/n < b$ とできるので仮定 (A.1) から

$$(\Delta_{\frac{h}{n}})^{k+1} f\left(x + (i_1 + \cdots + i_k) \frac{h}{n}\right) \geq 0$$

となり、 $(\Delta_h)^k f(x) \leq (\Delta_h)^k f(x + h/n)$ となる。繰り返し考えると、十分大きな n に対して m が $x + kh + mh/n < b$ であれば

$$(\Delta_h)^k f(x) \leq (\Delta_h)^k f\left(x + m \frac{h}{n}\right) \quad (3)$$

となる。ここで $m = [(y-x)n/h]$ とすれば

$$\frac{(y-x)n}{h} \leq m < \frac{(y-x)n}{h} + 1$$

更に

$$\frac{y-x}{h} \leq \frac{m}{n} < \frac{y-x}{h} + \frac{1}{n}$$

となり $n \rightarrow \infty$ とすれば $x + mh/n \rightarrow y$ となるので、 f の連続性を考えれば (3) 式より

$$(\Delta_h)^k f(x) \leq (\Delta_h)^k f(y)$$

が成り立つ。

(証明終)

命題 3.1

関数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、関数 $\bar{f} : (-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\bar{f}(x) = f(-x)$ と定義する。 $d \in \mathbb{Z}$ に対して以下の 3 つは同値である。

1. f は (a, b) 上で d 単調である。
2. f は非負であり、任意の $k = 1, \dots, d$ と任意の $x \in (-b, -a)$ に対して各 $h_i > 0 (i = 1, \dots, k)$ が $x + h_1 + \dots + h_k \in (-b, -a)$ を満たすならば

$$\Delta_{h_k} \dots \Delta_{h_1} \bar{f}(x) \geq 0$$

が成り立つ。

3. f は非負であり、任意の $k = 1, \dots, d$ と任意の $x \in (-b, -a)$ に対して $h > 0$ が $x + kh \in (-b, -a)$ を満たすならば

$$(\Delta_h)^k \bar{f}(x) \geq 0$$

が成り立つ。

証明

[2 $\Leftrightarrow$ 3 について]

2 $\Rightarrow$ 3 は自明なので 3 $\Rightarrow$ 2 を示す。 $d = 1$ の時は自明であるので $d \geq 2$ とする。 $k \leq d$ 、として $x \in (-b, -a)$, $h_i > 0, (i = 1, \dots, k)$ を $x + h_1 + \dots + h_k \in (-b, -a)$ となるように固定しておく。

$$\bar{f}_l(x) = \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_l} \bar{f}(x) \quad l = 1, \dots, d$$

と定める。 $\bar{f}$ に対して補題 3.1 の主張 4 を $y = x + h_1$ として適用すると任意の $k = 1, \dots, d-1$ に対して $h > 0$ が $y + h_1 + kh \in (-b, -a)$ を満たすなら $(\Delta_h)^k \bar{f}(y) \leq (\Delta_h)^k \bar{f}(y + h_1)$ 、つまり $(\Delta_h)^k \bar{f}(y + h_1) - (\Delta_h)^k \bar{f}(y) = (\Delta_h)^k \bar{f}_1(y) \geq 0$ が成り立つ。帰納的に $\bar{f}_1(y), \dots, \bar{f}_k(y)$ も補題 3.1 の仮定

を x や k の範囲を取り直した形で満たすことになるので、上記の手順をそれらに繰り返して行えば示される。

[1 $\Leftrightarrow$ 3 について]

・ $d = 1$ の時は $\Delta_h \bar{f}(y) = \bar{f}(y+h) - \bar{f}(y) = f(-y-h) - f(-y)$ と f の非増加性は同値であるので $1 \Leftrightarrow 3$ である。

・ $d = 2$ の時は「 f が凸」 $\Leftrightarrow$ 「 $\bar{f}$ が凸」 $\Leftrightarrow$ 「 $(\Delta_h)^2 \bar{f}(x) \geq 0$ 」であることから成り立つ。

・ 以下 $d > 2$ の場合を考える。

・ $3 \Rightarrow 1$ について

補題 3.1 の主張 4 より任意の $k = 1, \dots, d-1$ と $-b < x-l < x < -a$ となる任意の $x \in (-b, -a)$ 及び $l > 0$ に対して $h > 0$ が $x+kh \in (-b, -a)$ を満たすならば

$$(\Delta_h)^k \bar{f}(x) \geq (\Delta_h)^k \bar{f}(x-l)$$

が成り立つ。上式の両辺を l で割って整理すれば

$$(\Delta_h)^k \left\{ \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(x-l)}{l} \right\} \geq 0$$

となり、 $l \downarrow 0$ とすれば、 $k = 1, \dots, d-1$ に対し

$$(\Delta_h)^k \bar{f}_-^{(1)}(x) \geq 0 \quad (4)$$

が成り立つことになる。更に $d > 2$ であったから $\bar{f}_-^{(1)}(x)$ に補題 2.1 の主張 2 を適用すれば $\bar{f}_-^{(1)}(x)$ は $(-b, -a)$ 上で連続となる。また補題 2.1 の主張 3 を使えばその連続性から $\bar{f}_-^{(1)}(x) = \bar{f}_+^{(1)}(x)$ が言え、 $\bar{f}$ は微分可能となる。

以下 (4) 式から帰納的に $\bar{f}^{(n)}(x), n = 1, \dots, d-2$ が存在することが言えて n 階導関数について

$$k = 1, 2, \dots, d-n \text{ で } (\Delta_h)^k \bar{f}^{(n)}(x) \geq 0$$

が成り立つ。このことから $\bar{f}^{(d-2)}(x)$ は非負、非減少、凸の性質を満たすことになるので、 $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}(x) = (\bar{f}(-x))^{(d-2)}$ は非負、凸、非増加となり f は d 単調となる。

・ $1 \Rightarrow 3$ について

f が d 単調なので f は非負である。更に 任意の $x \in (-b, -a)$ と任意の $k = 0, \dots, d-2$ に対し

$$\bar{f}^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(-x) \geq 0$$

が成り立つ。また $\bar{f}^{(d-2)}(x) = (-1)^{d-2} f^{(d-2)}(-x)$ は凸かつ非減少である。ここで $k = 0, \dots, d-3$ に対し $\bar{f}^{(k)}$ は $(-b, -a)$ 内の閉区間 I 上で連続かつ微分可能なので平均値の定理を適用していく。

$k \leq d-2$ のとき、各 $i = 1, \dots, k$ に対して順次以下を満たす $h_i \in (x, x+ih)$ が見つかり主張 3 の式が満たされる。

$$\begin{aligned}
(\Delta_h)^k \bar{f}(x) &= (\Delta_h)^{k-1} (\bar{f}(x+h) - \bar{f}(x)) \\
&= (\Delta_h)^{k-1} h \bar{f}^{(1)}(y_1) \\
&\vdots \\
&= h^k \bar{f}^{(k)}(y_k) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$k = d-1$ の時は、 $\bar{f}^{(d-2)}$ の非減少性より

$$(\Delta_h)^{d-1} \bar{f}(x) = h^{d-2} \Delta_h \bar{f}^{(d-2)}(y_{d-2}) \geq 0$$

$k = d$ の時は、 $\bar{f}^{(d-2)}$ の凸性より

$$(\Delta_h)^d \bar{f}(x) = h^{d-2} (\Delta_h)^2 \bar{f}^{(d-2)}(y_{d-2}) \geq 0$$

となるので、主張 3 の性質が満たされたことになる。

(証明終)

命題 3.2

関数 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ と $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ 及び $p \in [0, 1]$ に対して

$$\bar{H}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\| \max(x, 0) \|_1) + (1-p) I_{\mathbb{R}_-^d}(x)$$

と定める。ただし

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^d |x_i| \\
\max(x, 0) &= (\max(x_i, 0))_{i=1}^d \\
\mathbb{R}_-^d &= \{x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d; \text{任意の } i \text{ に対して } x_i < 0\}
\end{aligned}$$

$$I_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \notin A) \\ 1 & (x \in A) \end{cases}$$

とする。

このとき以下の 2 つは同値である。

1. $\bar{H}$ を結合生存関数とする確率変数 $\mathbb{X}$ が存在する。
2. f は $[0, \infty)$ 上で d 単調であり $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ かつ $f(0) = p$ となる。

証明

・ 1 $\Rightarrow$ 2 について

$\overline{H}$ を結合生存関数とする $\mathbb{R}^d$ 上の確率変数を $\mathbb{X}$ とおく。このとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \overline{H}(x, 0, \dots, 0) = 0$$

より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ が成り立つ。さらに

$$1 = \overline{H}(-\infty, \dots, -\infty) = f(0) + 1 - p$$

より $f(0) = p$ も成り立つ。また $\overline{H}$ は右連続であることから

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} f(x) &= \lim_{x \downarrow 0} \overline{H}(x, 0, \dots, 0) \\ &= \overline{H}(0, \dots, 0) = f(0) \end{aligned}$$

が成り立つので、 $f(x)$ は $x = 0$ で右連続となる。

あとは f が $(0, \infty)$ 上で d 単調であることを示せばよい。よって $x \in (-\infty, 0)$ に対して

$$\overline{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(-x)$$

とにおいて、命題 3.1 の主張 3 を示せば十分である。 $(\Delta_h)^k \overline{f}(x)$ に対して

$$\begin{aligned} (\Delta_h)^k \overline{f}(x) &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} {}_k C_l \overline{f}(x + lh) \\ &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ \#J=l}} f\left(-(k-l)\frac{x}{k} - l\left(\frac{x}{k} + h\right)\right) \\ &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ \#J=l}} P\left(\bigcap_{i \in J} \left\{X_i > -\frac{x}{k} - h\right\} \cap \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{i \notin J} \left\{X_i > -\frac{x}{k}\right\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{-X_i \in \left[\frac{x}{k}, \frac{x}{k} + h\right)\right\}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つので f は $(0, \infty)$ 上で d 単調となる。(上の式変形において第一の等号は k に関する帰納法から、第二の等号は組み合わせの書き換え及び $\overline{f}$ の定義から、第三の等号は $\overline{H}$ の定義及び $\overline{H}$ が $\mathbb{X}$ の結合生存関数であることから成り立つ。第四の等号は $G(x) = \overline{H}(-x)$ 及び $B = \prod_{i=1}^d (x/k, h + x/k]$ といったときの $V_G(B)$ に一致することから、定義 1.1 の注の書き換えを行えば成り立つことがわかる。)

・ 2 $\Rightarrow$ 1 について

f が $[0, \infty)$ 上で d 単調であることから f は $[0, \infty)$ 上で右連続となる。よって $x \in \mathbb{R}_+^d$ のときは

$$\overline{H}(x) = f(\|\max(x, 0)\|_1)$$

となることから、 $y_i \downarrow x_i$ とすれば

$$\|\max(y, 0)\|_1 \searrow \|\max(x, 0)\|_1$$

となり、 f の右連続性から

$$f(\|\max(y, 0)\|_1) \rightarrow f(\|\max(x, 0)\|_1)$$

が成り立ち、 $\overline{H}$ は $x \in \mathbb{R}_+^d$ において右連続となる。

$x \in \mathbb{R}_+^d$ では $\overline{H}$ は定数関数となるので右連続であることは自明。以上より $\overline{H}$ は $\mathbb{R}^d$ 上で右連続である。また $\overline{H}$ の定義より

$$\begin{aligned} \overline{H}(-\infty, \dots, -\infty) &= f(0) + 1 - p = p + 1 - p = 0 \\ \overline{H}(x_1, \dots, \infty, \dots, x_d) &= f(\infty) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。あとは補題 2.1 の主張 3 が成り立つことを示せば十分である。
 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$G(x) = \overline{H}(-x) = f(\|\max(-x, 0)\|_1) + (1 - p)I_{\mathbb{R}_+^d}(x)$$

である。ただし

$$\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{任意の } i \text{ に対して } x_i > 0\}$$

とする。上記の $f(\|\max(-x, 0)\|_1)$ 及び $I_{\mathbb{R}_+^d}(x)$ がそれぞれ d 増加であることを示す。

・ $I_{\mathbb{R}_+^d}(x)$ について

$a = (a_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ として $b = (b_i)_{i=1}^d$ を $b_i \geq a_i$ 、 B を $B = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i]$ とする。 $x \in \mathbb{R}_+^d$ に対して

$$I_{\mathbb{R}_+^d}(x) = 0$$

となることから $x \in \mathbb{R}^d$ において

$$I_{\mathbb{R}_+^d}(x) = I_{\mathbb{R}_+^d}(\max(x, 0))$$

が成り立つので a 及び b の各成分が非負のときのみを考えれば十分である。
 $b \in \mathbb{R}_+^d$ の時は I の定義より

$$V_{\mathbb{R}_+^d}(B) = 0$$

また、任意の i に対して $a_i = 0$ かつ $b \in \mathbb{R}_+^d$ の時は I の定義より

$$V_{I_{\mathbb{R}_+^d}}(B) = 1$$

が成り立つ。一方で、ある i で $a_i > 0$ となるような a に対しては上記の場合の B の形の集合による分割を考えれば

$$V_{I_{\mathbb{R}_+^d}}(B) = 0$$

となるので、 $I_{\mathbb{R}_+^d}(x)$ は d 増加である。

• $f(\|\max(-x, 0)\|_1)$ について

上記の関数を $K(x)$ とおいておく。このとき $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$K(x) = K(\min(x, 0))$$

となる。このことから $B \subset ((-\infty, 0)^d)^c$ となるような矩形 B に対しては

$$V_K(B) = 0$$

が成り立つ。よって $B \subset (-\infty, 0)^d$ となる矩形 B に対して $V_K(B) \geq 0$ を示せば十分である。(一般の矩形に対しては上記二種類の矩形の分割として考えればよい)

任意の $x = (x_i)_{i=1}^d \in (-\infty, 0)^d$ と任意の $h = (h_i)_{i=1}^d \in (0, \infty)^d$ に対して $B = \prod_{i=1}^d (x_i, x_i + h_i]$ としたときに

$$x + h \in (-\infty, 0)^d \Rightarrow V_K(B) \geq 0$$

を示す。

$$\begin{aligned} V_K(B) &= {}_1\Delta_{h_1} \cdots {}_d\Delta_{h_d} K(x) \\ &= {}_1\Delta_{h_1} \cdots {}_d\Delta_{h_d} f(\|x\|_1) \\ &= {}_1\Delta_{h_1} \cdots {}_d\Delta_{h_d} f\left(-\sum_{i=1}^d x_i\right) \\ &= \Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_d} \bar{f}\left(\sum_{i=1}^d x_i\right) \end{aligned}$$

となるが、今 f は d 単調であることから命題 3.1 主張 2 より

$$\Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_d} \bar{f}\left(\sum_{i=1}^d x_i\right) \geq 0$$

が成り立つ。以上より $\overline{H}$ は補題 2.1 の 3 条件を満たすのでこの命題の性質 2 が成り立つことになる。

(証明終)

4 l_1 ノルム対称分布と d 単調性

定義 4.1

$\mathbb{X} = (X_i)_{i=1}^d$ を各成分が非負の一次元確率変数からなる d 次元確率変数とする。また $\mathcal{S}_d$ を

$$\mathcal{S}_d \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d : \text{任意の } i \text{ に対して } x_i \geq 0 \text{ かつ } \|x\|_1 = 1\}$$

とおく。 $\mathbb{S}_d$ を $\mathcal{S}_d$ 上一様分布に従う確率変数とする。 $\mathbb{X}$ が以下の条件を満たすとき、 $\mathbb{X}$ は l_1 ノルム対称分布に従うという。

- $\mathbb{S}_d$ と独立な非負確率変数 R が存在して $\mathbb{X} \stackrel{d}{=} R\mathbb{S}_d$ 、つまり $\mathbb{X}$ と $R\mathbb{S}_d$ は同分布となる。

この表示における R を $\mathbb{X}$ の偏角部分と呼ぶ。

定義 4.2

d を 2 以上の整数、 X を一次元非負確率変数、 F をその分布関数とする。このとき

$$\mathcal{M}_d F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(x, \infty)} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1} dF(t) = \begin{cases} E \left[\left(1 - \frac{x}{X}\right)_+^{d-1} \right] & (x > 0) \\ 1 - F(0) & (x = 0) \end{cases}$$

を X のウィリアムソン d 変形と呼ぶ。ただし、ここで

$$x_+ = \max(x, 0)$$

とする。また

$$\mathcal{W}_d \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{M}_d F : F \text{ は非負確率変数の分布関数}\}$$

とおく。

注

この $\mathcal{M}_d F$ は優収束定理より $x = 0$ において右連続である。

補題 4.1

d を 2 以上の整数とする。また関数 f を d 単調とする。このとき任意の $k = 0, \dots, d-1$ に対して以下の二つが成り立つ。

(a) 任意の $a > 0$ に対して $\int_a^\infty t^{k-1} f^{(k)}(t) dt < \infty$ となる。

(b) $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k f^{(k)}(t) = 0$ となる。

証明

まず $(-1)^{d-2}f^{(d-2)}(t)$ が凸なので高々加算個の点を除いて $f^{(d-1)}(t)$ が存在する。また $(-1)^{d-2}f^{(d-2)}(t)$ の非減少性と凸性から $(-1)^{d-1}f^{(d-1)}(t)$ は非増加かつ非負となる。このことから任意の N に対して

$$\begin{aligned}\int_{\frac{N}{2}}^N (-1)^k f^{(k)}(x) x^{k-1} dx &\geq (-1)^k f^{(k)}(N) \int_{\frac{N}{2}}^N x^{k-1} dx \\ &= (-1)^k f^{(k)}(N) N^k \left(\frac{1-2^{-k}}{k} \right) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

となる。ある k において (a) が成り立つと仮定すると、上の式において $N \rightarrow \infty$ とすれば (左辺) $\rightarrow 0$ となるので、はさみうちの原理から

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^k f^{(k)}(N) = 0$$

となり、その k に対して (b) が成り立つ。これから更に $R > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\int_a^R x^k f^{(k+1)}(x) dx &= \left[x^k f^{(k)}(x) \right]_a^R - k \int_a^R x^{k-1} f^{(k)}(x) dx \\ (R \rightarrow \infty) &\rightarrow -a^k f^{(k)}(a) - k \int_a^\infty x^{k-1} f^{(k)}(x) dx < \infty\end{aligned}$$

となり、 $k+1$ においても (a) が成り立つことになる。あとは $k=1$ のときに (a) が成り立つことを見れば十分である。 f は非増加かつ非負なので

$$\int_a^\infty f'(x) dx = f(\infty) - f(a) < \infty$$

となり $k=1$ においても (a) は成り立つ。

(証明終)

定理 4.1

関数 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次の二つは同値である。

- (a) f は $(0, \infty)$ 上に d 単調である。
- (b) ある非減少かつ下に有界な関数 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$f(t) = \int_0^\infty \{(1-ut)_+\}^{d-1} d\gamma(u)$$

となる。

証明

・ (b) $\Rightarrow$ (a) について

$f(t)$ の両辺を t で微分すればルベーグの優収束定理より微分と積分の交換ができて、 $k=0, \dots, d-2$ において

$$f^{(k)}(t) = (-1)^k \int_0^\infty (d-1) \cdots (d-k) \{(1-ut)_+\}^{d-k-1} u^k d\gamma(u)$$

つまり

$$(-1)^k f^{(k)}(t) \geq 0$$

が成り立つ。また $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}(t)$ の上記の積分表示における被積分関数は t に関して凸になっており、積分をリーマン和として考えればこれは凸関数の極限として表されることになるので凸関数になる。また非増加であることは積分の表示式から自明である。以上より $f(t)$ は d -単調となる。

• (a) $\Rightarrow$ (b) について

まず $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}(t)$ が凸であることから、高々加算個の点を除いて $f^{(d-1)}(t)$ が存在する。加えて非増加性から $(-1)^{d-1} f_+^{(d-1)}(t)$ は非増加かつ非負となる。ここで部分積分二回行うことにより

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{(t-u)^{d-1}}{(d-1)!} df_+^{(d-1)}(u) &= \left[\frac{(t-u)^{d-1}}{(d-1)!} f_+^{(d-1)}(u) \right]_a^t + \int_a^t \frac{(t-u)^{d-2}}{(d-2)!} f_+^{(d-1)}(u) du \\ &= -\frac{(t-a)^{d-1}}{(d-1)!} f^{(d-1)}(a) - \frac{(t-a)^{d-2}}{(d-2)!} f^{(d-2)}(a) \\ &\quad + \int_a^t \frac{(t-u)^{d-3}}{(d-3)!} f^{(d-2)}(u) du \end{aligned}$$

となる。一方 $f(t)$ をテイラー展開すると

$$f(t) = \sum_{k=0}^{d-3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + \int_a^t \frac{(t-u)^{d-3}}{(d-3)!} f^{(d-2)}(u) du$$

となるので、前の式と組み合わせれば

$$\int_a^t \frac{(t-u)^{d-1}}{(d-1)!} df_+^{(d-1)}(u) = -\sum_{k=1}^{d-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - f(a) + f(t) \quad (5)$$

が成り立つ。(5) 式の左辺において u を $1/u$ と変数変換して $a \rightarrow \infty$ とすれば

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &\rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{t}} \frac{1}{(d-1)!} (ut-1)^{d-1} u^{-d+1} df_+^{(d-1)}\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= \int_{0+}^{\infty} \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \{(1-ut)_+\}^{d-1} u^{-d+1} df_+^{(d-1)}\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= \int_{0+}^{\infty} \{(1-ut)_+\}^{d-1} d\left(\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{0+}^u \frac{1}{x^{d-1}} df_+^{(d-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

となる。ただし $\int_{0+}$ は $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}$ のこととする。一方 (5) 式の (右辺) においても同様の極限を考えると補題 4.1 より

$$(\text{右辺}) \rightarrow 0 - f(\infty) + f(t)$$

となる。よって、ここで $u > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \int_{0+}^u \frac{1}{x^{d-1}} df_+^{(d-1)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\left(= \frac{(-1)^d}{(d-1)!} \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} t^{d-1} df_+^{(d-1)}(t) \right) \end{aligned}$$

とおくと、 $(-1)^{d-1}f_+^{(d-1)}(1/x)$ は非減少関数であることから γ は非減少であり

$$\int_{0+}^{\infty} \{(1-ut)_+\}^{d-1} d\gamma(u) = -f(\infty) + f(t)$$

が成り立つ。また

$$\lim_{u \downarrow 0} \gamma(u) = \frac{(-1)^d}{(d-1)!} \lim_{u \downarrow 0} \left(\left[t^{d-1} f_+^{(d-1)}(t) \right]_{\frac{1}{u}}^{\infty} - (d-1) \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} t^{d-2} f_+^{(d-1)}(t) dt \right)$$

となるが、補題 4.1 より上記極限は 0 に収束する。ここで f は非負で非減少であることから

$$\gamma(0) \stackrel{\text{def}}{=} -f(\infty) \leq 0$$

とおけば γ は $[0, \infty)$ において下に有界かつ非減少となる。ここで

$$\int_0^{\infty} \{(1-ut)_+\}^{d-1} d\gamma(u) = -f(\infty) + f(t) + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^{\epsilon} \{(1-ut)_+\}^{d-1} d\gamma(u)$$

と表した際に (右辺) の末項ははさみうちの原理により $f(\infty)$ に収束する。よって

$$f(t) = \int_0^{\infty} \{(1-ut)_+\}^{d-1} d\gamma(u)$$

が成り立つ。

(証明終)

注

• (a) $\Rightarrow$ (b) の γ の構成について

上記の γ は $f^{(d-1)}$ の存在しない点、つまり不連続点における値の取り方により違いがあるので一意的ではない。上記の構成においては右微分の値を採用しているため、 $f_+^{(d-1)}(t)$ の右連続性から $\gamma(u)$ は $u \in (0, \infty)$ において左連続となる。

定理 4.2

定理 4.1 の γ について $\gamma(0) = 0$ ならば

$$\gamma(u) = \sum_{k=0}^{d-2} \frac{(-1)^k f^{(k)}(1/u)}{k!} \left(\frac{1}{u} \right)^k + \frac{(-1)^{d-1} f_+^{(d-1)}(1/u)}{(d-1)!} \left(\frac{1}{u} \right)^{d-1}$$

が成り立つ。

証明

部分積分を行うと

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \frac{(-1)^d}{(d-1)!} \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} t^{d-1} df_+^{(d-1)}(t) \\ &= \frac{(-1)^d}{(d-1)!} \left[t^{d-1} f_+^{(d-1)}(t) \right]_{\frac{1}{u}}^{\infty} + \frac{(-1)^{d-1}}{(d-2)!} \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} t^{d-2} f_+^{(d-2)}(t) dt \end{aligned}$$

となる。補題 4.1 を適用しつつ繰り返し部分積分を行うと

$$\gamma(u) = \sum_{k=0}^{d-2} \frac{(-1)^k f^{(k)}(1/u)}{k!} \left(\frac{1}{u}\right)^k + \frac{(-1)^{d-1} f_+^{(d-1)}(1/u)}{(d-1)!} \left(\frac{1}{u}\right)^{d-1} - f(\infty)$$

が成り立つ。仮定より $-f(\infty) = \gamma(0) = 0$ となることから定理は成り立つ。

(証明終)

命題 4.1

以下の二つが成り立つ。

1.

$$\mathcal{W}_d = \left\{ f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ は } d \text{ 単調であり、ある } p \in [0, 1] \text{ が存在して} \\ f(0) = p \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \end{array} \right\}$$

となる。

2. 関数 F を非負確率変数の分布関数、 f を $f = \mathcal{M}_d F$ とする。このとき $x \in [0, \infty)$ に対して

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathcal{M}_d^{-1} f(x) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_{k=0}^{d-2} \frac{(-1)^k x^k f^{(k)}(x)}{k!} - \frac{(-1)^{d-1} x^{d-1} f_+^{(d-1)}(x)}{(d-1)!} \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明

・主張 1 について

右辺の集合を A とおく。 $f \in \mathcal{W}_d$ とすると、ある非負確率変数の分布関数 F が存在して

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_t^\infty \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{d-1} dF(x) \\ &= \int_0^\infty \{(1 - tx)_+\}^{d-1} d\left(-F\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

と表せる。 F が分布関数であることから $-F(1/x)$ は非減少かつ下に有界となるので定理 4.1 より f は d 単調である。また

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - F(0) \in [0, 1] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty dF(x) = 0 \end{aligned}$$

となることから $f \in A$ が成り立つ。次に $f \in A$ とすると定理 4.1 より、ある非減少かつ下に有界かつ左連続な関数 γ が存在して

$$f(t) = \int_0^\infty \{(1 - ut)_+\}^{d-1} d\gamma(u)$$

と表せる。とくに $f(\infty) = 0$ であることと $f(0) \in [0, 1]$ であることから

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= -f(\infty) = 0 \\ \gamma(\infty) &= \int_0^\infty d\gamma(u) = f(0) \in [0, 1]\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $f(t)$ の式において u を $1/u$ に変数変換すると

$$f(t) = \int_{0+}^\infty \left(1 - \frac{t}{u}\right)_+^{d-1} d\left(-\gamma\left(\frac{1}{u}\right)\right)$$

となる。 $u \in (0, \infty)$ に対して $g(u) = -\gamma(1/u)$ とすると

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) &= \lim_{u \downarrow 0} (-\gamma(u)) = 0 \\ \lim_{u \downarrow 0} g(u) &= \lim_{u \rightarrow \infty} (-\gamma(u)) = -f(0) \in [-1, 0]\end{aligned}$$

が成り立つ。更に γ は $(0, \infty)$ 上において左連続非減少であるので、 g は $(0, \infty)$ 上右連続非減少となる。改めて $g(0) = -f(0)$ と定義すれば g は $[0, \infty)$ 上右連続になる。一方この右連続性から

$$\int_0^{0+} \left(1 - \frac{t}{u}\right)_+^{d-1} dg(u) = 0$$

となるので $f(t)$ は

$$f(t) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{u}\right)_+^{d-1} dg(u)$$

と書ける。ここで

$$G(u) = \begin{cases} 0 & u \in (-\infty, 0) \\ 1 + g(u) & u \in [0, \infty) \end{cases}$$

とおくと G は右連続非減少かつ $G(u) \in [0, 1]$ かつ $G(\infty) = 1$ かつ $G(-\infty) = 0$ となるので、この G を分布関数に持つ確率変数 X が存在する。更に

$$\begin{aligned}P(X < 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X \leq -\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} G\left(-\frac{1}{n}\right) = 0\end{aligned}$$

となることから、 X は非負確率変数である。

また、 G と g に対するスティルチェス測度をそれぞれ μ_G 及び μ_g とすると、スティルチェス測度の定義より $B \in \mathcal{B}([0, \infty))$ に対して

$$\mu_G(B) = \mu_g(B)$$

となる。よって

$$\int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{u}\right)_+^{d-1} dG(u) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{u}\right)_+^{d-1} dg(u) = f(t)$$

が成り立つので、以上より $f \in \mathcal{W}_d$ となる。

・主張 2 について

主張 1 より $f \in \mathcal{W}_d$ とすると、 $f = \mathcal{M}_d G$ である。 $\gamma(0) = 0$ であることが確認されているので定理 4.2 が適用すれば、 $x > 0$ に対して

$$G(x) = 1 - \gamma\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \sum_{k=0}^{d-2} \frac{(-1)^k x^k f^{(k)}(x)}{k!} - \frac{(-1)^{d-1} x^{d-1} f_+^{(d-1)}(x)}{(d-1)!}$$

が成り立つ。 $x = 0$ に対しても

$$G(0) = 1 - \lim_{x \downarrow 0} \gamma\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - f(0)$$

となるので、 $x \in [0, \infty)$ に対して主張 2 の式が成り立つ。

(証明終)

命題 4.2

X は l_1 ノルム対称分布に従うとする。すなわち、 $\mathbb{X} \stackrel{d}{=} R\mathbb{S}_d$ とする。更に R の分布関数を F_R とすると次の二つが成り立つ。

1. X の生存関数を $\bar{H}$ とすると $x \in \mathbb{R}^d$ に対して 以下の式が成り立つ。

$$\bar{H}(x) = \mathcal{M}_d F_R(\|\max(x, 0)\|_1) + F_R(0) I_{\mathbb{R}_+^d}(x)$$

2. $P(X = 0) = 0$ のとき以下の等式が成り立ち、更に $\|X\|_1$ と $X/\|X\|_1$ は独立になる。

$$\begin{aligned} R &\stackrel{d}{=} \|X\|_1 \\ \mathbb{S}_d &\stackrel{d}{=} \frac{X}{\|X\|_1} \end{aligned}$$

証明

・主張 2 について

まず

$$P(X = 0) = P(\|X\|_1 = 0) = P(\|R\mathbb{S}_d\|_1 = 0) = P(R = 0)$$

となることから、 $P(R = 0) = 0$ が成り立つ。ここで $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \|x\|_1 \\ f_2(x) &= \frac{x}{\|x\|_1} \end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\left(\|X\|_1, \frac{X}{\|X\|_1} \right) &= (f_1(X), f_2(X)) \\
&\stackrel{d}{=} (f_1(R\mathbb{S}_d), f_2(R\mathbb{S}_d)) \\
&= \left(R\|\mathbb{S}_d\|_1, \frac{R\mathbb{S}_d}{R\|\mathbb{S}_d\|_1} \right) \\
&= (R, \mathbb{S}_d)
\end{aligned}$$

が成り立つ。更に各 f_i に対して同様のことを行えば

$$\begin{aligned}
\|X\|_1 &\stackrel{d}{=} R \\
\frac{X}{\|X\|_1} &\stackrel{d}{=} \mathbb{S}_d
\end{aligned}$$

も成り立ち、 R と $\mathbb{S}_d$ の独立性から、上記二つの独立性も成り立つ。

・主張 1 について

$a \in \mathbb{R}^d$ とする。まず $\mathbb{S}_d = (S_i)_{i=1}^d$ に対して

$$P(\mathbb{S}_d > a) = (1 - \|\max(a, 0)\|_1) I_{A_d}(\max(a, 0)) \quad (6)$$

が成り立つことを示す。ただし

$$A_d = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{任意の } i \text{ に対して } x_i \geq 0 \text{ かつ } \sum_{i=1}^d x_i \leq 0\}$$

とする。ある i について $a_i < 0$ となったとき、任意の j に対して $P(S_j < 0) = 0$ となるので

$$P(\mathbb{S}_d > a) = P(S_1 > a_1, \dots, S_i \geq 0, \dots, S_d > a_d)$$

となる。しかし $\mathbb{S}_d$ が一様分布に従うことから、任意の j と b に対して $P(S_j = b) = 0$ となるので

$$P(\mathbb{S}_d > a) = P(S_1 > a_1, \dots, S_i > 0, \dots, S_d > a_d)$$

が成り立つ。つまり

$$P(\mathbb{S}_d > a) = P(\mathbb{S}_d > \max(a, 0))$$

と表せる。以下任意の i に対して $a_i \geq 0$ となる場合を考える。 $B = \prod_{i=1}^d (a_i, \infty)$ とすると、 $a \in A_d$ のとき $B \cap \mathbb{S}_d$ と $\mathbb{S}_d$ は各辺の比が $(1 - \sum_{i=1}^d a_i) : 1$ となるので

$$P(\mathbb{S}_d > a) = \left(1 - \sum_{i=1}^d a_i\right)^{d-1} = (1 - \|a\|_1)^{d-1}$$

となる。 $a \notin A_d$ のときは、 $B \cap \mathcal{S}_d = \phi$ となるので

$$P(\mathbb{S}_d > a) = 0$$

となる。よって (6) 式が成り立つ。

次に主張 1 の式を示す。 $a \in \mathbb{R}_+^d$ のときは

$$(\text{左辺}) = P(X \geq 0) = 1$$

$$(\text{右辺}) = \mathcal{M}_d F_R(0) + F_R(0) = 1 - F_R(0) + F_R(0) = 1$$

となるので成り立つ。 $a \in \mathbb{R}_+^d$ つまり、ある i に対して $a_i \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= P(X_1 \geq 0, \dots, X_i > a_i \geq 0, \dots, X_d \geq 0) \\ &= P(RS_1 \geq 0, \dots, RS_i > a_i, \dots, RS_d \geq 0) \end{aligned}$$

となる。しかし $P(\mathbb{S}_d > 0) = 1$ であることと

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^d \{RS_i > 0\} \cap \{\mathbb{S}_d > 0\} &\subseteq \{R > 0\} \cap \{\mathbb{S}_d > 0\} \\ &\subseteq \bigcap_{j=1}^d \{RS_j > 0\} \end{aligned}$$

であることから

$$(\text{左辺}) = P(RS_1 > 0, \dots, RS_i > a_i, \dots, RS_d > 0)$$

となるので、 $a \in \mathbb{R}_+^d$ に対して

$$\overline{H}(a) = P(X > \max(a, 0))$$

と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} P(X > \max(a, 0)) &= P(RS_d > \max(a, 0)) \\ &= \int_0^\infty P(r\mathbb{S}_d > \max(a, 0)) dF_R(r) \\ &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{\|\max(a, 0)\|_1}{r}\right)^{d-1} I_{A_d}\left(\frac{\max(a, 0)}{r}\right) dF_R(r) \\ &= \int_{\|\max(a, 0)\|_1}^\infty \left(1 - \frac{\|\max(a, 0)\|_1}{r}\right)^{d-1} dF_R(r) \\ &= \mathcal{M}_d F_R(\|\max(a, 0)\|_1) \end{aligned}$$

となり主張 1 の式が成り立つ。

(証明終)

命題 4.3

$X = (X_i)_{i=1}^d$ を各成分が非負の確率変数からなる d 次元確率変数とする。このとき以下の二つは同値である。

- (a) X は l_1 ノルム 対称分布に従う。
- (b) $\overline{H}$ を X の結合生存関数とすると、ある関数 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\overline{H}(x) = f(\|\max(x, 0)\|_1) + (1 - f(0))I_{\mathbb{R}_+^d}(x)$$

が成り立つ。

証明

- (a) $\Rightarrow$ (b) について

X の偏角部分を R とすると、命題 4.2 の主張 1 より

$$\overline{H}(x) = \mathcal{M}_d F_R(\|\max(x, 0)\|_1) + F_R(0)I_{\mathbb{R}_+^d}(x)$$

が成り立つ。一方

$$\mathcal{M}_d F_R(0) = 1 - F_R(0)$$

であるので、 f として $f = \mathcal{M}_d F_R$ が得られたことになる。

- (b) $\Rightarrow$ (a) について

$\overline{H}$ が (b) の表示式を持っていたとすると、命題 3.2 より f は d -単調かつ $f(0) \in [0, 1]$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ となる。更に命題 4.1 の主張 1 を適用すれば、 $f \in \mathcal{W}_d$ となるので、ある非負確率変数 R が存在して

$$f = \mathcal{M}_d F_R$$

となる。これを用いれば

$$\overline{H}(x) = \mathcal{M}_d F_R(\|\max(x, 0)\|_1) + F_R(0)I_{\mathbb{R}_+^d}(x)$$

と書き直すことができる。一方 $\mathbb{S}_d$ を上記の R と独立なものとして、 $Y = RS_d$ とすると命題 4.2 の主張 1 から

$$\overline{H}_Y(x) = \overline{H}(x)$$

となり

$$X \stackrel{d}{=} RS_d$$

が成り立つので、 X は l_1 ノルム対称分布に従う。(ただし上記 $\overline{H}_Y$ は Y の結合生存関数とする。)

(証明終)

定理 4.3

以下の二つが成り立つ。

- (a) X は l_1 ノルム対称分布に従うとする。 X の偏角部分を R 、 R の分布関数を F_R とする。このとき $F_R(0) = 0$ ならば X は $\psi = \mathcal{M}_d F_R$ をジェネレーターとするアルキメディアンコピュラを生存コピュラとして持つ。
- (b) C を ψ をジェネレーターにもつアルキメディアンコピュラとする。また $U = (U_i)_{i=1}^d$ を各成分が $[0, 1]$ 上一様分布に従い、結合分布が C により与えられるものとする。このとき $V = (\psi^{-1}(U_1), \dots, \psi^{-1}(U_d))$ に対して以下の3つが成り立つ。

- V は l_1 ノルム対称分布に従う。
- V の偏角部分 R の分布関数 F_R は $F_R = \mathcal{M}_d^{-1} \psi$ で与えられる。
- V は生存コピュラとして C を持つ。

証明

・ (a) について

$F_R(0)$ であることを踏まえて、命題 4.2 の主張 1 を適用すると任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\overline{H}(x) = \mathcal{M}_d F_R(\| \max(x, 0) \|_1)$$

が得られる。ただし、 $\overline{H}$ は X の結合生存関数とする。 $\mathcal{M}_d F_R = \psi$ とおくと命題 4.1 の主張 1 より

- ψ は d 単調である。
- $\psi(0) = 1 - F_R(0) = 1$ となる。
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$ となる。
- ウィリアムソン d 変形の定義より ψ は $[0, \psi^{-1}(0))$ において単調減少である。

上記四つが成り立つ。よって ψ はアルキメディアンジェネレーターであり、定理 3.1 から

$$C(u) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \left(\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) \right)$$

はコピュラとなる。一方 $\overline{H}$ の周辺生存関数 $\overline{F}_i$ は

$$\overline{F}_i(x) = \overline{H}(-\infty, \dots, x, \dots, -\infty) = \psi(\max(x, 0))$$

となり、命題 3.2 の証明より

$$C(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_d(x_d)) = \psi(\| \max(x, 0) \|_1) = \overline{H}(x)$$

が成り立つ。以上より X は ψ をジェネレーターとするアルキメディアンコンピュータを生存コンピュータとして持つ。

• (b) について

$\overline{H}_V(x)$ を V の結合生存関数、つまり

$$\overline{H}_V(x) = P(\psi^{-1}(U_1) > x_1, \dots, \psi^{-1}(U_d) > x_d)$$

とする。 $x < 0$ のとき

$$\{\psi^{-1}(U_i) > x\} = \Omega = \{U_i \leq \psi(0)\}$$

となる。ただし Ω は標本空間とする。 $x \geq 0$ のときは、まず ψ の非増加性より

$$\psi^{-1}(U_i) > x \Rightarrow U_i \leq \psi(x)$$

となる。一方 $\psi^{-1}(U_i) \leq x$ かつ $U_i \leq \psi(x)$ とすると、第一式の両辺に ψ を作用させれば $U_i \geq \psi(x)$ となり第二式と合わせれば $U_i = \psi(x)$ となる。よって

$$\{U_i \leq \psi(x)\} = \{\psi^{-1}(U_i) > x\} \cup \{U_i = \psi(x)\}$$

が成り立つ。また U_i が一様分布に従うことから

$$P(U_i = \psi(x)) = 0$$

となるので

$$P(\psi^{-1}(U_i) > x) = P(U_i \leq \psi(x))$$

となる。以上のことから $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} P(\psi^{-1}(U_i) > x) &= P(U_i \leq \psi(\max(x, 0))) \\ \{\psi^{-1}(U_i) > x\} &\subseteq \{U_i \leq \psi(\max(x, 0))\} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \overline{H}(x) &= P(U_1 \leq \psi(\max(x_1, 0)), \dots, U_d \leq \psi(\max(x_d, 0))) \\ &= C(\psi(\max(x_1, 0)), \dots, \psi(\max(x_d, 0))) \\ &= \psi(\|\max(x, 0)\|_1) \end{aligned}$$

となるので命題 4.3 を適用すれば、 V が l_1 ノルム対称分布に従うことがわかる。(第二の等式は U のコンピュータが C であることから成り立つ。) また $\overline{H}_V$ の周辺生存関数 $\overline{F}_i$ は

$$\overline{F}_i(x) = \overline{H}_V(-\infty, \dots, x, \dots, -\infty) = \psi(\max(x, 0))$$

となることから V は生存コンピュータとして C を持つ。ところで C がコンピュータであることから定理 3.1 より

- ψ は d 単調
- $\psi(0) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$

の三つが成り立つ。よって命題 4.1 の主張 1 より、分布関数が F_R である非負確率変数 R で $\psi = \mathcal{M}_d F_R$ となるものが存在する。更に

$$1 = \psi(0) = 1 - F_R(0)$$

より $F_R(0) = 0$ となるので、命題 4.1 主張 2 より

$$F_R = \mathcal{M}_d^{-1} \psi$$

が成り立つ。 $\mathbb{S}_d$ を R と独立であるとして、 $Y = R\mathbb{S}_d$ とすると、命題 4.2 主張 1 より

$$\begin{aligned} \overline{H}_Y(x) &= \psi(\|\max(x, 0)\|_1) \\ &= \overline{H}_V(x) \end{aligned}$$

となることから、生存関数が一致するので

$$V \stackrel{d}{=} Y = R\mathbb{S}_d$$

が成り立つ。よって V の偏角部分の分布関数は $\mathcal{M}_d^{-1} \psi$ で与えられる。

(証明終)

補題 4.2

ϕ をアルキメディアンジェネレーターとする。 C を ϕ をジェネレーターとするアルキメディアンコピュラとする。更に d 次元確率変数 $U = (U_i)_{i=1}^d$ を各成分が $(0, 1)$ 上一様分布に従い

$$P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) = C(u_1, \dots, u_d)$$

となるものとする。このとき以下の二つが成り立つ。

(a) $\sum_{i=1}^d \phi^{-1}(U_i)$ と $(\phi^{-1}(U_1)/\sum_{i=1}^d \phi^{-1}(U_i), \dots, \phi^{-1}(U_d)/\sum_{i=1}^d \phi^{-1}(U_i))$ は独立である。

(b) $V_j(U_1, \dots, U_d)$ を

$$V_j(U_1, \dots, U_d) \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \frac{\phi^{-1}(U_j)}{\sum_{i=1}^d \phi^{-1}(U_i)}\right)^{d-1}$$

と定めると、 $V_j(U_1, \dots, U_d)$ は $[0, 1]$ 上一様分布に従う。

証明

・主張 (a) について

まず定理 4.3 主張 2 より

$$X = (\phi^{-1}(U_1), \dots, \phi^{-1}(U_d))$$

とおくと、 X は l_1 ノルム対称分布に従う。更に各 U_i が $[0, 1]$ 上一様分布に従うことから

$$P(\phi^{-1}(U_i) = 0) = P(U_i = \phi(0)) = 0$$

が成り立つので

$$P(X = 0) = 0$$

となる。よって命題 4.2 主張 2 より主張 (a) は成り立つ。

・主張 (b) について

$\mathbb{S}_d = (S_i)_{i=1}^d$ を $\mathcal{S}_d$ 上一様分布に従うものとする。このとき $0 \leq u \leq 1$ に対して

$$\begin{aligned} P(V_j(U) \leq u) &= P\left(1 - \frac{\phi^{-1}(U_j)}{\sum_{i=1}^d \phi^{-1}(U_i)} \leq u^{\frac{1}{d-1}}\right) \\ &= P(S_j \geq 1 - u^{\frac{1}{d-1}}) \\ &= (u^{\frac{1}{d-1}})^{d-1} = u \end{aligned}$$

が成り立つ。上式の第二の等号は命題 4.2 の主張 2 から成り立ち、第三の等号は

$$B = \{x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d : x_j \geq 1 - u^{\frac{1}{d-1}}\}$$

とすると、 $B \cap \mathcal{S}_d$ と $\mathcal{S}_d$ は各辺の比が $u^{1/(d-1)} : 1$ になるので成り立つ。

u が $u < 0$ や $u > 1$ のときは、 $0 \leq V_j \leq 1$ であることを考えればよい。以上より V_j は $[0, 1]$ 上一様分布に従う。

(証明終)

5 アルキメディアンジェネレーターの具体的構成

この章では d 単調性とアルキメディアンコピュラの関係における諸定理を用いてアルキメディアンジェネレーターを具体的に構成していく。

5.1 正項級数型

以下の補題により正項級数を用いることで、アルキメディアンジェネレーターを具体的に構成することができる。

補題 5.1

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

と定義する。ただし各 a_i は非負であるとし、収束半径を ρ' とする。このとき $\rho \leq \rho'$ となる ρ に対して

$$\begin{aligned} g(x) &= f(\rho e^{-\theta x}) \\ h(x) &= f(\rho(1 + \alpha x)^{-\beta}) \end{aligned}$$

と定めるとそれぞれ完全単調となる。ただし θ, α, β はそれぞれ正の数とする。また $d \geq 2$ に対して $\alpha > 0$ 、 $\beta \geq d - 1$ とする。このとき

$$\psi(x) = f(\rho(1 - \alpha x)_+^{\beta})$$

と定めると ψ は d 単調である。逆に ψ が d 単調であるとする、 $\beta \geq d - 1$ となる。

証明

・ g と h について

任意の k に対して

$$g^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} a_i \rho^i (i\theta)^k e^{-i\theta x}$$

$$h^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} a_i \rho^i (\beta i)(\beta i + 1) \cdots (\beta i + (k - 1))(1 + \alpha x)^{-\beta i - k} \alpha^k$$

となることよりただちに従う。

・ ψ について

任意の k に対して

$$\psi^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta i (\beta i - 1) \cdots (\beta i - (k - 1))(1 - \alpha x)^{\beta i - k} \alpha^k & (x < \frac{1}{\alpha}) \\ 0 & (x > \frac{1}{\alpha}) \end{cases}$$

となる。 $\beta \geq d-1$ であれば、任意の $i \in \mathbb{N}$ と $0 \leq k \leq d-1$ に対して $\beta i - k \geq 0$ となることから、 $k = 0, 1, \dots, d$ に対して

$$(-1)^k \psi^{(k)}(x) \geq 0$$

が成り立つ。また任意の $k = 0, 1, \dots, d-2$ に対して $\beta i - k > 0$ となるので

$$\lim_{x \uparrow \frac{1}{\alpha}} \psi^{(k)}(x) = 0$$

が成り立つ。よって ψ は $d-2$ 回微分可能で $(-1)^{d-2} \psi^{(d-2)}$ は非増加凸関数となる。以上より ψ は d 単調である。逆に ψ が d 単調であるとする、 ψ の微分可能性と $(-1)^{d-2} \psi^{(d-2)}$ の凸性より $\beta \geq d-1$ となる。

(証明終)

注

正項級数の微分、積分及び x のべきとの積は再び正項級数になり収束半径は不変であることから、任意の自然数 k と非負の実数 m に対して定まる以下の関数

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} \\ I_k(f)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_{k-2}} f(y_{k-1}) dy_{k-1} \cdots dy_1 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+k} x^{n+k} \\ x^m f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} \end{aligned}$$

からもアルキメディアンジェネレーターを構成できる。ただし m は $a_0 = \cdots = a_l = 0$ の場合、 $-(l+1) \leq m$ まで範囲を広げてもよい。また、任意の $A \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$T_A(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in A} a_n x^n$$

とおけば、 $T_A(f)$ の収束半径はコーシーの収束判定法による計算法から ρ' 以上となるので、この $T_A(f)$ からアルキメディアンジェネレーターを同様に構成できる。

この補題より次の四つは完全単調なアルキメディアンジェネレーターとなる。

$$(1) \quad \phi_{\theta}(x) = 1 - (1 - e^{-x})^{\theta} \quad (0 < \theta \leq 1)$$

$$(2) \quad \phi_{\theta}(x) = (1 - \theta)/(e^x - \theta) \quad (0 < \theta < 1)$$

$$(3) \quad \phi_{\theta}(x) = -(\log(1 - (1 - e^{-\theta})e^{-x}))/\theta \quad (\theta > 0)$$

$$(4) \phi_\theta(x) = (1 - (1 - 2^{-\theta})e^{-x})^{-1/\theta} \quad (\theta > 0)$$

また (1)、(2)、(3) をジェネレーターとするアルキメディアンコピュラはそれぞれ、Joe コピュラ (参考文献 [9])、Ali-Mikhail-Haq コピュラ (参考文献 [8])、Frank コピュラ (参考文献 [7]) と呼ばれている。

証明

- (1) について
関数 f_1 を

$$f_1(x) = (1-x)^\theta = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \theta(1-\theta) \cdots (i-1-\theta) x^i$$

とおくと、ダランベールの収束判定法より収束半径 ρ' は

$$\rho' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-\theta} = 1$$

である。 ϕ_θ は $\phi_\theta(x) = 1 - f_1(e^{-x})$ と表せることから、正項級数型である。

- (2) について
関数 g_θ を

$$g_\theta(x) = \frac{1}{1-\theta x} = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i x^i$$

とおくと、等比級数の収束を考えれば収束半径は $1/\theta (> 1)$ となる。 $f_2(x) = xg_\theta(x)$ とすれば ϕ_θ は $\phi_\theta(x) = (1-\theta)f_2(e^{-x})$ となるので、正項級数型である。

- (3) について
 ϕ_θ を微分すると

$$\phi'_\theta(x) = -\frac{1-e^{-\theta}}{\theta} \frac{e^{-x}}{1-(1-e^{-\theta})e^{-x}}$$

となる。これは関数 f_2 の θ を $1-e^{-\theta}$ に取り換えたものの定数倍の形をしているので、 $-\phi'_\theta$ は正項級数型である。一方、完全単調の定義から $-\phi'_\theta$ が完全単調であることより、 ϕ_θ が完全単調となることが言える。

- (4) について
関数 $f_4(x)$ を

$$\begin{aligned} f_4(x) &= (1 - (1 - 2^{-\theta})x)^{-\frac{1}{\theta}} - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{\theta} + 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{\theta} + n - 1 \right) (1 - 2^{-\theta})^n x^n \end{aligned}$$

と定義すると、ダランベールの収束判定法より収束半径は 1 となる。 $\phi_\theta(x) = f_4(e^{-x})$ となるので ϕ_θ は完全単調である。

(証明終)

Clayton コピュラ (参考文献 [6])

関数 $\phi_\theta(x)$ を

$$\phi_\theta(x) = (1 + \theta x)_+^{-\frac{1}{\theta}}$$

と定める。ただし θ は 0 以外の数とする。このとき以下の二つが成り立つ。

(1) $\theta > 0$ ならば ϕ_θ は完全単調である。

(2) $-1/(d-1) \leq \theta < 0$ であることと、 ϕ_θ が d 単調であることは同値である。

また、この ϕ_θ をジェネレーターとするアルキメディアンコピュラは Clayton コピュラと呼ばれている。

証明

$\theta > 0$ ならば、 $f(x) = x$ 、 $\alpha = \theta$ 、 $\beta = 1/\theta$ の場合の正項級数型の h の形になるので完全単調である。 $\theta < 0$ ならば、 $f(x) = x$ 、 $\alpha = -\theta$ 、 $\beta = -1/\theta$ の場合の正項級数型の ψ の形になるので主張 (2) が成り立つ。

(証明終)

5.2 ウィリアムソン d 変形

$F(x)$ を非負確率変数の分布関数とする。さらに $F(0) = 0$ とする。命題 4.1 の主張 1 を適用すれば $\mathcal{M}_d F(x)$ を直接計算することによりアルキメディアンジェネレーターを構成することができる。

一様分布を用いたもの

F を (a, b) 上一様分布の分布関数としてウィリアムソン d 変形を計算する。ただし a と b は非負とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_d F(x) &= \int_{(x, \infty)} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1} \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(t) dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_{(\max(a,x), \max(b,x))} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d-1)!}{k!(d-1-k)!} (-1)^k x^k t^{-k} dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left((\max(x, b) - \max(x, a)) - (d-1)x \log \left(\frac{\max(x, b)}{\max(x, a)} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{d-1} x^k (-1)^k \frac{(d-1)!}{k!(d-1-k)!} \frac{1}{1-k} \left((\max(x, b))^{-k+1} - (\max(x, a))^{-k+1} \right) \end{aligned}$$

パレート分布を用いたもの

F をパラメータ (a, b) のパレート分布に従う確率変数の分布関数としてウィリアムソン d 変形を計算する。ただし a と b は正の数とする。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_d F(x) &= \int_{(x, \infty)} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1} \frac{a}{b} \left(\frac{b}{t}\right)^{a+1} I_{(b, \infty)}(t) dt \\ &= ab^a \int_{(\max(x, b), \infty)} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d-1)!}{k!(d-1-k)!} (-1)^k x^k t^{-k-a-1} dt \\ &= ab^a \sum_{k=0}^{d-1} \frac{(d-1)!}{k!(d-1-k)!} (-1)^k x^k \frac{1}{k+a} (\max(x, b))^{-k-a}\end{aligned}$$

上記二つはアルキメディアンジェネレーターとなる。しかし、一般にウィリアムソン d 変形は求積法では具体的に表示できないことが多く、また計算結果も煩雑な形をしている。

5.3 その他のジェネレーター

上述の二つの構成とは違った形のジェネレーターも存在する。以下にその例を挙げていく。

Gumbel コピュラ (参考文献 [10])

関数 ϕ_θ を

$$\phi_\theta(x) = \exp(-x^\theta)$$

と定める。ただし θ は $0 < \theta \leq 1$ とする。このとき ϕ_θ は完全単調である。また、この ϕ_θ をジェネレーターとするアルキメディアンコピュラは Gumbel コピュラと呼ばれている。

証明

まず ϕ_θ を一回微分すると

$$\phi'_\theta(x) = -\theta x^{\theta-1} \phi_\theta(x)$$

となる。よって任意の $k = 1, 2, \dots$ に対して

$$\begin{aligned}\phi_\theta^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{k-1} (-\theta x^{\theta-1})^{(n)} \phi_\theta^{(k-1-n)}(x) \\ &= - \sum_{n=0}^{k-1} \theta(\theta-1) \cdots (\theta-n) x^{\theta-1-n} \phi_\theta^{(k-1-n)}(x)\end{aligned}$$

が成り立つので

$$(-1)^k \phi_\theta^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \theta(1-\theta) \cdots (n-\theta) x^{\theta-1-n} (-1)^{k-1-n} \phi_\theta^{(k-1-n)}(x)$$

となる。よって k に関する帰納法を適用すれば、完全単調であることが言える。
(証明終)

また Gumbel コピュラのジェネレーターのほかには、下記二種類も完全単調なもの例として挙げられる。ただし θ は正の数とする。

$$(1) \phi_\theta(x) = \theta(\log(x + e^\theta))^{-1}$$

$$(2) \phi_\theta(x) = (\log(x + e))^{-\theta}$$

証明

・ (1) について

$\phi_\theta(x)$ を一回微分すると

$$\phi'_\theta(x) = -(\log(x + e^\theta))^{-2}(x + e^\theta)^{-1}$$

となる。ここで任意の $k = 1, 2, \dots$ に対して

$$\phi_\theta^{(k)}(x) = (x + e^\theta)^{-k} \sum_{n=2}^{k+1} a_n^{(k)} (\log(x + e^\theta))^{-n} \quad (7)$$

が成り立つことを帰納法により示す。上記 $\phi_\theta^{(k)}$ を微分すると

$$\phi_\theta^{(k+1)}(x) = (x + e^\theta)^{-k-1} \sum_{n=2}^{k+2} (-ka_n^{(k)} - (n-1)a_{n-1}^{(k)}) (\log(x + e^\theta))^{-n}$$

となるので (7) 式は成り立つ。ただし $a_1^{(k)} = a_{k+2}^{(k)} = 0$ とする。特に $\phi_\theta^{(k+1)}$ の式と $a_2^{(1)} = -1$ であることから、 $a_n^{(2m)} \geq 0$ 、 $a_n^{(2m+1)} \leq 0$ が成り立つので、 ϕ_θ は完全単調である。

・ (2) について

$\phi_\theta(x)$ を一回微分すると

$$\phi'_\theta(x) = -\theta(\log(x + e))^{-\theta-1}(x + e)^{-1}$$

となる。ここで任意の $k = 1, 2, \dots$ に対して

$$\phi_\theta^{(k)}(x) = (x + e)^{-k} \sum_{n=1}^k a_n^{(k)} (\log(x + e))^{-\theta-n} \quad (8)$$

が成り立つことを帰納法により示す。上記 (8) 式を微分すると

$$\phi_\theta^{(k+1)}(x) = (x + e)^{-k-1} \sum_{n=1}^{k+1} (-ka_n^{(k)} - (\theta + n - 1)a_{n-1}^{(k)}) (\log(x + \theta))^{-\theta-n}$$

となるので (8) 式は成り立つ。ただし $a_0^{(k)} = a_{k+1}^{(k)} = 0$ とする。特に $\phi_\theta^{(k+1)}$ の式と $a_1^{(1)} = -\theta$ であることから、 $a_n^{(2m)} \geq 0$ 、 $a_n^{(2m+1)} \leq 0$ が成り立つので、 ϕ_θ は完全単調である。

(証明終)

謝辞

本論文を作成するにあたり、谷口説男教授より非常に多くの御指導、御助言を賜りました。末筆ながらここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Xiaomei Qu, Jie Zhou, Xiaojing Shen
Archimedean copula estimation selection via l_1 -norm symmetric distribution
- [2] Alexander J. Mcneil and Johanna Neslehova
Multivariate archimedean copulas, d-monotone functions and l_1 -norm symmetric distributions
- [3] R.E. Williamson
Multiply monotone functions and their laplace transforms
- [4] Fang, K.-T., Kotz, S. and NG, K.-W. (1990)
Symmetric multivariate and related distributions. (Chapman and Hall, London)
- [5] Roger B. Nelsen
An Introduction to Copulas
- [6] Clayton, D.G. (1978)
A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic incidence. (Biometrika 65, 141-151)
- [7] Frank, M.J. (1979)
On the simultaneous associativity of $f(x, y)$ and $x + y - f(x, y)$. (Aequationes Mathematicae 19, 194-226)
- [8] Ali, M.M., Mikhail, N.N. and Haq, M.S. (1978)
A class of bivariate distributions including the bivariate logistic (J. Multivariate Anal. 8, 405-412)
- [9] Joe, H. (1997)
Multivariate Models and Dependent Concepts. (New York, Chapman Hall)

- [10] Gumbel,E.J.(1960)
Bivariate Exponential Distributions(J.Amer.Stat.assoc.55,698-707)
- [11] 辻 正次、実函数論
- [12] 伊藤 雄二、確率論