

確率ボラティリティモデルについて

九州大学大学院数理学府数理学専攻
修士課程 2 年
井上志摩

指導教官：谷口説男 教授

修士論文

2010 年 2 月 1 日提出

序文

ボラティリティとは、金融市場における変動の大きさ、また不確実性を表すパラメータであり、様々な証券の価格付けやリスク管理等において重要な役割を果たしている。金融工学の理論において最も著名なモデルである Black-Scholes-Merton（以下 BSM と略す）モデルにおいては株などの価格を表す過程 $\{S_t\}$ が確率微分方程式

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

に従うことを仮定し、 σ がボラティリティを表す定数である。価格公式には μ は出現せず σ と市場で観測できる変数で表すことができ、このボラティリティを推定することが重要で基本的な問題となる。BSM モデルにおいてはボラティリティは満期まで定数であるということが 1 つの大きな仮定であるが、現実の株式などの市場においてはボラティリティが一定であるという仮定は実際的ではない。実証研究によってもボラティリティ自身が変動することが観測されており、それが BSM モデルの問題点として指摘されている。

ボラティリティが定数でないとするればその変動を記述するモデルを開発することも重要な問題となる。その 1 つとして確率ボラティリティ (Stochastic Volatility, 以下 SV と略す) モデルがあげられる。著名なモデルとしては Heston[13], Hull-White[14] などがあげられるが、モデルの設定に加えオプションの価格評価の問題などさまざまな研究が行われている。

本論文で扱う SV モデルは SABR モデルとよばれる、資産価格過程 $\{S_t\}$ が

$$dS_t = \sigma_t S_t^\beta dZ_t$$

に従うとし、 σ_t は確率モデル；

$$d\sigma_t = a(t, \sigma_t)dB_t + b(t, \sigma_t)dt$$

に従うと仮定するモデルである。このモデルにおいては $\{S_t\}$ のマルチンゲール性、および可積分性を判定する際に 2 つの Brown 運動 $\{Z_t\}, \{B_t\}$ は相関関係が大きな影響を及ぼす。これらの性質がみたされるかどうかによって、このモデルが意味のあるものであるかが決まる。実際、金融派生商品のペイオフは S_t の関数として与えられるが、価格付けにおいてはその期待値が用いられる。この意味で S_t の関数の可積分性は必須不可欠であるが、本論文では S_t 自身の p 乗可積分性に焦点を絞り、Jourdain 氏の論文 [1] に従って報告する。

この修士論文の構成を紹介する。第 1 章では本論文内で用いた確率論・確率解析の基本的な事項を列挙する。後の章で特に重要な確率微分方程式の解の爆発の理論においては証明もつけた。第 2 章では著名な確率ボラティリティモデルを紹介する。第 3 章ではある特別な SABR モデルを考え、そのモデルが意味のあるものであるかをみるために、資産価格過程のマルチンゲール性、および可積分性を判定する Brown 運動の相関係数の条件について調べる。

謝辞

本修士論文の作成にあたり、長期間に渡り、終始丁寧なご指導を賜りました谷口説男教授に深く感謝いた

します。また本研究の途中で、微分方程式、粘性解に関する御指導、御助言を頂きました隠居良行教授に心より御礼申し上げます。

目次

1	準備	1
1.1	確率空間	1
1.2	確率積分	3
1.3	確率微分方程式	7
1.4	解の爆発判定	9
2	ボラティリティモデル	16
2.1	Black-Scholes-Merton モデル	16
2.2	確率ボラティリティモデル	17
3	マルチンゲール性と可積分性の判定	19
3.1	マルチンゲール性	19
3.2	可積分性	24

1 準備

1.1 確率空間

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。

Definition 1.1 (フィルトレーション). $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族 $\mathcal{F}_t$ が (包含関係の意味で) 単調増大, すなわち

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s (0 \leq t < s)$$

をみたすとき, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ をフィルトレーションといい, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ をフィルター付き確率空間という。

以下 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の完備性, すなわち $A \subset B \in \mathcal{F}$ で $P(B) = 0$ ならば $A \in \mathcal{F}$ を仮定し, さらにフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ は P -零集合をすべて含み, さらに右連続性;

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_t$$

が成立していると仮定する。また 本論文で確率変数 X とは Ω 上実数値 $\mathcal{F}$ -可測関数のことをいい, X の P に関する積分

$$\int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$

を X の期待値といい, $\mathbb{E}[X]$ で表す。

Definition 1.2 (収束). $X, X_1, X_2, \dots$ を確率変数とする。

1. X_n が X に概収束するとは,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$$

であることをいい, $X_n \rightarrow X(\text{a.s.})$ と表す。^{*1}

2. X_n が X に確率収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

であることをいい, $X_n \rightarrow X(\text{in prob})$ と表す。

3. X_n が X に p 次平均収束 (L^p 収束) するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$$

となることをいい, $X_n \rightarrow X(\text{in } L^p)$ と表す。

Theorem 1.3 (収束定理). $X, X_1, X_2, \dots$ を確率変数とする。

1. (単調収束定理) $0 \leq X_n \nearrow X(\text{a.s.})$ であるとき,

^{*1} 確率変数 X から誘導される可測事象 $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}$ を $\{X \in A\}$ と, また $P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\})$ を $P(X \in A)$ と省略して記すことにする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

が成り立つ。

2. (Fatou の補題) $X_n \geq 0(a.s.)$ であるとき,

$$\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$$

が成り立つ。

3. (Lebesgue の優収束定理) 可積分な確率変数 Y が存在し, $|X_n| \leq Y(a.s.)$ が成り立ち, $X_n \rightarrow X(a.s.)$ が成り立つとする。このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]。$$

が成り立つ。

4. (Fubini の定理) 測度空間 $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i) (i = 1, 2)$ をとる。この直積測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu) = (X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上の可測関数 $f(x_1, x_2)$ が可積分または非負ならば,

$$\int_X f d\mu = \int_{X_1} \mu_1(dx_1) \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2)$$

が成り立つ。

Definition 1.4 (停止時刻).

$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ が停止時刻であるとは, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ($\forall t \geq 0$) であることをいう。

Proposition 1.5 (条件付き期待値).

$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族とする。このとき可積分な確率変数 X に対し,

$$\mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Z 1_A] (\forall A \in \mathcal{G})$$

をみたす $\mathcal{G}$ -可測で可積分な確率変数 Z が存在する。またこの Z は $(a.s.)$ の意味で一意的に定まる。この Z を $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ と表し, X の $\mathcal{G}$ を与えたときの条件付き期待値という。ただし 1_A は A の定義関数,

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$

である。

Definition 1.6 (マルチンゲール). $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ をフィルター付き確率空間とする。

1. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -適格過程であるとは, 任意の $t \geq 0$ に対し X_t が $\mathcal{F}_t$ -可測であることをいう。
2. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲールであるとは $\{X_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適格かつ任意の $t \geq 0$ に対し X_t は可積分であり, マルチンゲール性;

$$\text{任意の } t > s \geq 0 \text{ に対し, } \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$$

をみたすことをいう。またこの式の等号が $\leq$ となるとき, $\{X_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -優マルチンゲール, $\geq$ となるとき, $\{X_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -劣マルチンゲールという。

3. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -局所マルチンゲールであるとは $\tau_n \nearrow \infty$ となる停止時刻の列 $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在し

, $\{X_{t \wedge \tau_n}\}_{t \geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲールとなることをいう。^{*2}

Proposition 1.7 (Jensen の不等式). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は下に凸であるとする。このとき $f(X)$ が可積分ならば

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$$

が成立する。

この Jensen の不等式を用いればマルチンゲール $\{X_t\}$ と下に凸な関数 $f(x)$ に対し, $\{f(X_t)\}$ は劣マルチンゲールであることがいえる。

Definition 1.8 (独立). $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族の列 $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が独立であるとは任意の $n \in \mathbb{N}$ と $A_i \in \mathcal{F}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ に対して,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

が成り立つことをいう。また確率変数列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が独立であるとは X_n から生成される σ -加法族 $\sigma(X_n) = \{X_n^{-1}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ の列 $\{\sigma(X_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が独立であることをいう。

Theorem 1.9 (Brown 運動). 以下の 3 条件をみたす確率過程 $\{B_t\}$ が存在する。

1. $\{B_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合
2. $\forall \omega \in \Omega$ に対し $t \mapsto B_t(\omega)$ は連続
3. 任意の $0 \leq s \leq t, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ。

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s] = \exp\left(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)$$

この $\{B_t\}$ を $\{\mathcal{F}_t\}$ -Brown 運動という。

Definition 1.10. $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ が d 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Brown 運動であるとは各 $i = 1, 2, \dots, d$ に対し $\{B_t^i\}_{t \geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -Brown 運動であり, $\{B_t^i\}_{i=1,2,\dots,d}$ が独立であることをいう。

1.2 確率積分

次に確率積分の定義するため以下の記号を導入する。 $p > 0$ とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(\mathcal{F}_t) &= \left\{ f = \{f(t)\}_{t \geq 0}; \{\mathcal{F}_t\}\text{-適合, 任意の } T > 0 \text{ に対し } \|f\|_{T,p}^p = \mathbb{E}\left[\int_0^T |f(s, \omega)|^p ds\right] < \infty \right\} \\ \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t) &= \left\{ f = \{f(t)\}_{t \geq 0}; \begin{array}{l} \{\mathcal{F}_t\}\text{-適合, } \exists M > 0 \text{ s.t. } |f(t, \omega)| \leq M (\forall \omega \in \Omega, t \geq 0), \\ \exists 0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \nearrow \infty \text{ s.t. } f(t) = f(t_n) (t \in [t_n, t_{n+1})) \end{array} \right\} \\ \mathcal{L}_p^{loc}(\mathcal{F}_t) &= \left\{ f = \{f(t)\}_{t \geq 0}; \{\mathcal{F}_t\}\text{-適合, 任意の } T > 0 \text{ に対し } P\left(\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty\right) = 1 \right\} \end{aligned}$$

またマルチンゲールのクラスを導入する。

^{*2} $a \wedge b = \min\{a, b\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t) &= \{X = \{X_t\}_{t \geq 0}; 2 \text{ 乗可積分 } \{\mathcal{F}_t\}\text{-マルチンゲール}, X_0 = 0\} \\
\mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t) &= \{X \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t); P(t \mapsto X_t \text{ が連続}) = 1\} \\
\mathcal{M}_2^{loc}(\mathcal{F}_t) &= \{X = \{X_t\}_{t \geq 0}; \text{局所 } 2 \text{ 乗可積分 } \{\mathcal{F}_t\}\text{-マルチンゲール}, X_0 = 0\} \\
\mathcal{M}_2^{c,loc}(\mathcal{F}_t) &= \{X \in \mathcal{M}_2^{loc}(\mathcal{F}_t); P(t \mapsto X_t \text{ が連続}) = 1\}
\end{aligned}$$

明らかに $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{L}_2^{loc}(\mathcal{F}_t)$ であり, さらに $\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ には距離;

$$X = \{X_t\}, Y = \{Y_t\} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t) \text{ に対し, } \|X - Y\|_{\mathcal{L}_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\|X - Y\|_{n,2} \wedge 1)$$

の構造が入りこの距離に関して $\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ は完備であり, $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$ は $\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ の稠密な部分空間となっている。一方 $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ にも距離;

$$X = \{X_t\}, Y = \{Y_t\} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t) \text{ に対し, } \|X - Y\|_{\mathcal{M}_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\mathbb{E}[(X_n - Y_n)^2] \wedge 1)$$

が定義されこの距離に関し $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ は完備, さらに $\mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ は $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ の閉部分空間となっている。

Theorem 1.11 (Doob-Meyer 分解). $\{X_t\}$ を連続な $\{\mathcal{F}_t\}$ -劣マルチンゲールとし, $\mathcal{A}$ を有限な停止時刻全体の集合とする。各 $a > 0$ に対し, $\{X_{\sigma \wedge a}\}_{\sigma \in \mathcal{A}}$ が一様可積分性;

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\sigma \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[|X_{\sigma \wedge a}| 1_{\{|X_{\sigma \wedge a}| > N\}}] = 0$$

をみたすとき, 連続 $\{\mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲール $\{M_t\}$ と $A_0 = 0$ である $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合 連続増加過程 $\{A_t\}$ ^{*3} が存在し, $X_t = M_t + A_t (t \geq 0)$ と分解できる。

Remark 1.12. この連続増加過程 A を可予測なものに限れば, この分解は一意的である。

この Doob-Meyer の分解定理を用いれば, 以下の 2 次変分の存在が示せる。

Definition 1.13 (2 次変分). $\{X_t\}, \{Y_t\} \in \mathcal{M}_2^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$ とする。このときただ一つの $A = \{A_t\} \in \mathcal{A}$ が存在し, $X_t Y_t - A_t$ が局所マルチンゲールとなる。この A を $\langle X, Y \rangle$ と表し, $\langle X, X \rangle$ を $\langle X \rangle$ と表し X の 2 次変分とよぶ。ただし, $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A} = \{A_1 - A_2; A_1, A_2 \text{ は } \{\mathcal{F}_t\} \text{ 適合な連続増加過程}\}$$

を表す。

Definition 1.14 (確率積分 ($\mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$)). $\{f(t)\} \in \mathcal{L}_0$ を $f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{\infty} f(t_i, \omega) 1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ と表示されるものとするとき確率積分を

$$\int_0^t f(s) dB_s = \sum_{i=0}^{\infty} f(t_i) (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i})$$

と定義する。

Lemma 1.15 (確率積分の等長性). $\{f(t)\} \in \mathcal{L}_0$ とするとき, 任意の $t \geq 0$ に対して,

^{*3} $t \geq s \geq 0$ のとき, $A_t \geq A_s \geq 0$ (a.s.) である。

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \{f(s)\}^2 ds \right]$$

が成立する。

Definition 1.16 (確率積分 $(\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t), \mathcal{L}_2^{loc}(\mathcal{F}_t))$) . より一般の確率積分を以下のように定義する。

1. $\{f(t)\} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ に対し $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$ の稠密性から $\{f(t)\}$ の近似列

$$\{f_n(t)\} \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t) (n \in \mathbb{N})$$

がとれ、これの確率積分 $I(f_n)(t) = \int_0^t f_n(s) dB_s \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ が定義できる。等長性を用いれば $\{I(f_n)\}$ が Cauchy 列をなし $\mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ が $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ の閉部分空間、及び $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ の完備性より $X = \{X_t\} \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$ で

$$\|I(f_n) - X\|_{\mathcal{M}_2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

の存在がいえる。この X を確率積分 $\int_0^t f(s) dB_s$ と定義する。

2. $\{f(t)\} \in \mathcal{L}_2^{loc}(\mathcal{F}_t)$ に対し、a.s. に無限大に発散する停止時刻の増大列

$$\sigma_n = \inf \left\{ t \geq 0; \int_0^t f^2(s) ds \geq n \right\} \wedge n$$

を用いて、

$$f_n(t, \omega) = f(t, \omega) 1_{\{\sigma_n(\omega) > s\}}$$

と定義すれば $f_n \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ であり、 $Y = \{Y_t\} \in \mathcal{M}_2^{c, loc}(\mathcal{F}_t)$ が存在し、 $Y_{t \wedge \sigma_n} = \int_0^{t \wedge \sigma_n} f_n(s) dB_s$ が成立することが示せる。この Y_t を確率積分 $\int_0^t f(s) dB_s$ と定義する。

Definition 1.17 (確率積分の性質). $\{f(t)\}, \{g(t)\} \in \mathcal{L}_2^{loc}(\mathcal{F}_t)$ とする。以下が成り立つ。

1. 任意の $t \geq 0$ に対し、

$$\int_0^t (af(s) + bg(s)) dB_s = a \int_0^t f(s) dB_s + b \int_0^t g(s) dB_s \quad (\text{a.s.})$$

が成立する。

2. $\{f(t)\} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ ならば、

$$\left\{ \int_0^t f(s) dB_s \right\}_{t \geq 0}$$

は 2 乗可積分マルチンゲールでさらに、

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \{f(s)\}^2 ds \right] \\ \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] &\leq 4 \mathbb{E} \left[\int_0^T \{f(s)\}^2 ds \right] \end{aligned}$$

が成立する。

3. $\{f(t)\}, \{g(t)\} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ とする。このとき,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dB_s \int_0^t g(s) dB_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) g(s) ds \right]$$

が成立する。

Definition 1.18 (伊藤過程). $(B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ を d 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Brown 運動とする。 $f_k \in \mathcal{L}_2^{loc}(\mathcal{F}_t)$ ($k = 1, 2, \dots, d$), $g \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathcal{F}_t)$ に対し,

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k(s, \omega) dB_s^k + \int_0^t g(s, \omega) ds$$

とあらわされる適合連続過程 $\{X_t\}$ を伊藤過程という。

Theorem 1.19 (伊藤の公式). $(B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ を d 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$ -Brown 運動とする。 $f_k^i \in \mathcal{L}_2^{loc}(\mathcal{F}_t)$ ($k = 1, 2, \dots, d$), $g^i \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathcal{F}_t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, d$) に対し, n 次元伊藤過程 $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$ を

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k^i(s, \omega) dB_s^k + \int_0^t g^i(s, \omega) ds$$

で定める。このとき $\mathbb{R}^d$ 上 C^2 -級関数 F に対し,

$$\begin{aligned} F(X_t^i) &= F(X_0^i) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^d \int_0^t F_{x_i}(X_s) f_k^i(s, \omega) dB_s^k + \sum_{i=1}^n \int_0^t F_{x_i}(X_s) g^i(s, \omega) ds + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^d \int_0^t F_{x_i x_j}(X_s) f_k^i(s, \omega) f_k^j(s, \omega) ds \end{aligned}$$

Definition 1.20 (確率微分形式). 伊藤過程 $\{X_t\}$ を,

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k(s, \omega) dB_s^k + \int_0^t g(s, \omega) ds$$

とする。これを

$$dX_t = \sum_{k=1}^d df_k(t) dB_t^k + dg(t) dt$$

と表す。また伊藤過程 $\{Y_t\}$ は確率微分形式

$$dY_t = Y_0 + \sum_{k=1}^d dp_k(t) dB_t^k + q(t) dt$$

で定められるものとする。このとき積 $dX_t dY_t$ を伊藤過程

$$\sum_{k=1}^d \int_0^t f_k(s, \omega) p_k(s, \omega) ds$$

の定める確率微分形式とする。これは

$$dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij} dt, dB^i dt = dt dB^i = dt dt = 0$$

という規則を用いて dX_t と dY_t の形式的な積をとったものとして得られる。ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタ,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。

Theorem 1.21 (Levy の定理). 連続局所 $\{\mathcal{F}_t\}$ マルチンゲール $\{X_t\}$ が $\langle X \rangle_t = t$ をみたしているとする。この時 $\{X_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -Brown 運動である。

1.3 確率微分方程式

この節では Markov 型の確率微分方程式

$$dX_t = a(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt \quad (1)$$

を考える。ただし $a, b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

Definition 1.22 (確率微分方程式の解). $\{X_t\}$ が確率微分方程式 (1) の解であるとは以下の条件をみたされることをいう。

1. $\{X_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合格連続
2. X_0 は $\mathcal{F}_0$ -可測
3. $X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$

Theorem 1.23 (解の存在と一意性). 確率微分方程式 (1) において以下の条件を仮定する。

$\forall T > 0$ に対し, $L_T > 0$ が存在し

1. $|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq L_T |x - y| \quad (\forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R})$
2. $|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq L_T (1 + |x|)$

このとき (1) は一意的な解をもつ。ただしここでの一意性は $\{X_t\}, \{X'_t\}$ が解であるとき, $P(X_t = X'_t, \forall t \geq 0) = 1$ が成り立つという意味である。

$\{f(t)\} \in \mathcal{L}_2^{loc}(\mathcal{F}_t)$ とする。このとき,

$$M_t = \exp \left(\int_0^t f(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \{f(s)\}^2 ds \right) \quad (2)$$

は伊藤の公式から局所マルチンゲールである。また M_t は非負であるから Fatou の補題を用いれば 優マルチンゲールであることも結論される。 $\{M_t\}$ は一般にはマルチンゲールではないが,

$$\mathbb{E}[M_t] = 1 (\forall t \geq 0) \quad (3)$$

であればマルチンゲールとなる。以下は (3) が成り立つ十分条件として知られている。

Proposition 1.24 (Novikov の条件). $\{M_t\}$ を (2) で定義されているものとする。

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \{f(s)\}^2 ds \right) \right] < \infty \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立するとき, (3) が成り立つ。したがって $\{M_t\}$ はマルチンゲールである。

Theorem 1.25 (Girsanov の定理). 条件 (3) が成立していると仮定する。このとき可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度を

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^t f(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \{f(s)\}^2 ds\right)$$

をみたすように定めると,

$$\widehat{B}_t = B_t - \int_0^t f(s)ds$$

と定めると $\{\widehat{B}_t\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上の $\{\mathcal{F}_t\}$ -Brown 運動である。

この Girsanov の定理から次がただちに従う。

Proposition 1.26. $\{f(t)\} \in \mathcal{L}_2^{loc}(\mathcal{F}_t)$ は Novikov の条件をみたすとする。 Q 及び $\{\widehat{B}_t\}$ を Girsanov の定理 1.25 の通りに構成する。 $\{X_t\}$ が確率微分方程式 (1) の解であれば, Q のもと確率微分方程式

$$dX_t = a(t, X_t)d\widehat{B}_t + \{b(t, X_t) + a(t, X_t)f(t)\}dt$$

の解となる。

Definition 1.27 (弱い解). フィルター付き確率空間 $(\Omega', \mathcal{F}', P', \{\mathcal{F}'_t\})$ と $\{\mathcal{F}'_t\}$ -Brown 運動 $\{B'_t\}$, および $\{\mathcal{F}'_t\}$ -適合かつ連続な確率過程 $\{X_t\}$ が存在し, 以下の条件をみたすとする。

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)dB'_s + \int_0^t b(s, X_s)ds \quad (\text{a.s.})$$

このとき $\{\{X_t\}, \{B_t\}\}$ は確率微分方程式 (1) の弱い解であるという。

Definition 1.28 (弱い解の一意性). $\{\{X_t^i\}, \{B_t^i\}\} (i = 1, 2)$ を確率微分方程式 (1) の 2 つの弱い解が存在するとき常に $\{X_t^i\} (i = 1, 2)$ の $\mathcal{W} = C([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R})$ 上への分布が一致するとき弱い解の一意性が成り立つという。

定義より確率微分方程式 (1) の解が存在すれば弱い解は存在するが, 一意性に関しても次の定理が知られている。

Theorem 1.29. 確率微分方程式 (1) の解の一意性が成り立つとき, 弱い解の一意性も成立する。

Theorem 1.30 (比較定理). 確率微分方程式

$$dX_t = a(t, X_t)dB_t + b_i(t, X_t)dt$$

($i = 1, 2$) の少なくとも一つが一意解をもち, さらに $b_1(t, x) \leq b_2(t, x) (\forall t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ と仮定する。このとき,

$$X_1(t) \leq X_2(t) \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立する。

$\{X_t\}$ の出発時刻 s と初期値 x を強調して, $X_t^{(s,x)}$ と書く。

Theorem 1.31 (Markov 性). $\{X_t\}$ が確率微分方程式 (1) の一意解であるとする。このとき, $\{X_t\}$ は Markov 性, すなわち

任意の有界可測関数 g に対し,

$$\mathbb{E} \left[g \left(X_{s+t}^{(0,x)} \right) | \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[g \left(X_{s+t}^{(0,x)} \right) | \sigma(X_s) \right] = \mathbb{E} \left[g \left(X_t^{(s,y)} \right) \right] \Big|_{y=X_s^{(0,x)}}$$

が成立する。

2 変数関数 $V(t, x)$ を

$$V(t, x) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^{T-t} f(t+u, X_u^{(t,x)}) du \right\} g \left(X_{T-t}^{(t,x)} \right) \right]$$

Theorem 1.32 (Feynman-Kac の公式). 確率微分方程式 (1) の係数 a, b は Lipschitz 条件 をみたすとし, $X = \{X_t\}$ をその一意解とする。今偏微分方程式

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} - f \right) v(t, x) = 0 & (\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}) \\ v(T, x) = g(x) \end{cases}$$

が解 $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ をもつとする。ただし f は有界関数。また v は

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \left(a \frac{\partial}{\partial x} \right) v(t, X_t) dt \right] < \infty$$

をみたすものとする。このとき $v(t, x) = V(t, x)$ である。

逆に V が $V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ でさらに $\mathbb{E}[|g(X_T)|] < \infty$ をみたせば V は上の偏微分方程式の解である。

1.4 解の爆発判定

次に確率微分方程式の解の爆発について述べる。 $I = (l, r) (\infty \leq l < r \leq \infty)$ とし, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 -級関数とし時間的に一様な Markov 型確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dB_t + b(X_t)dt \quad (4)$$

について考える。さらに (4) の係数 a, b は以下の Engelbert-Schmidt の条件をみたすと仮定する。

1. (非退化性) $a^2(x) > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$
2. (局所可積分性) $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し, $\varepsilon > 0$ が存在し, $\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1 + |b(y)|}{a^2(y)} dy < \infty$

また尺度関数 p_c を

$$p_c(x) = \int_c^x \exp \left\{ -2 \int_c^\xi \frac{b(y)}{a(y)} dy \right\} d\xi$$

で定義する。また v_c を p_c を用いて

$$v_c(x) = \int_c^x p'(y) \int_c^y \frac{2}{p'(z)a^2(z)} dz dy$$

微分作用素 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}$$

と定義する。

Definition 1.33 (解の爆発). 確率過程 $\{X_t\}$ が確率微分方程式 (4) の初期値が x である爆発時刻までの解であるとは,

- (1) $\{X_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合格連続な $[-\infty, \infty]$ -値過程で $X_0 = x \in \mathbb{R}$
- (2) $\tau_n = \inf\{t \geq 0; |X_t| \geq n\}$ とするとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$X_{t \wedge \tau_n} = x + \int_0^t a(X_s)1_{\{s \leq \tau_n\}} dB_s + \int_0^t b(X_s)1_{\{s \leq \tau_n\}} ds \quad (a.s.)$$

が成り立つことをいう

Definition 1.34 (爆発時刻). 上の定理の τ_n に対し, $\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ を X_t の爆発時刻という。

Remark 1.35. $\tau_\infty = \inf\{t \geq 0; X_t = \infty \text{ または } -\infty\}$ である。

Theorem 1.36. 以下が成り立つ。

1. $p(l+) = -\infty$ かつ $p(r-) = \infty$ ならば

$$P_x(e = \infty) = P_x(\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = r) = P_x(\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = l) = 1 \quad (\forall x \in I)$$

2. $p(l+) > -\infty$ かつ $p(r-) = \infty$ ならば $\lim_{t \nearrow e} X_t$ が P_x -a.s. に存在し,

$$P_x(\lim_{t \nearrow e} X_t = l) = P_x(\sup_{t < e} X_t < r) = 1 \quad (\forall x \in I)$$

3. $p(l+) = -\infty$ かつ $p(r-) < \infty$ ならば $\lim_{t \nearrow e} X_t$ が P_x -a.s. に存在し,

$$P_x(\lim_{t \nearrow e} X_t = l) = P_x(\inf_{t < e} X_t > l) = 1 \quad (\forall x \in I)$$

4. $p(l+) > -\infty$ かつ $p(r-) < \infty$ ならば $\lim_{t \nearrow e} X_t$ が P_x -a.s. に存在し,

$$P_x(\lim_{t \nearrow e} X_t = l) = 1 - P_x(\lim_{t \nearrow e} X_t = r) = \frac{p(r-) - p(x)}{p(r-) - p(l+)} \quad (\forall x \in I)$$

Proof. $l < a < x < b < r$ とし, $[a, b]$ からの退出時刻を $\tau = \inf\{t; X_t \notin [a, b]\}$ と定める。尺度関数 p と微分作用素 $\mathcal{L}$ に関して

$$\mathcal{L}p(x) = 0 \quad (\forall x \in I)$$

であること, および伊藤の公式を用いれば,

$$p(X_{t \wedge \tau}^x) - p(x) = \int_0^{t \wedge \tau} p'(X_s^x) a(X_s^x) dB_s$$

が成立する。 P_x に関する期待値をとり,

$$\mathbb{E}[p(X_{t \wedge \tau})] = p(x) \quad (\forall x \in I)$$

ここで $t \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\mathbb{E}[p(X_\tau)] = p(a)P_x(X_\tau = a) + p(b)P_x(X_\tau = b) = p(x) \quad (\forall x \in I)$$

この等式と

$$1 = P_x(X_\tau = a) + P_x(X_\tau = b)$$

とを組み合わせれば, $P_x(X_\tau = a)$ と $P_x(X_\tau = b)$ に関し,

$$P_x(X_\tau = a) = \frac{p(b) - p(x)}{p(b) - p(a)} \quad P_x(X_\tau = b) = \frac{p(x) - p(b)}{p(b) - p(a)}$$

と解ける。ここで 1. の $-p(l+) = p(r-) = \infty$ を仮定すると,

$$\lim_{a \searrow l} P_x(X_\tau = b) = 1$$

より,

$$P_x(\sup_{t < e} X_t \geq b) \geq \lim_{a \searrow l} P_x(X_\tau = b) = 1 \quad (\forall b < r)$$

から $P_x(\sup_{t < e} X_t = r) = 1$. 同様に $P_x(\inf_{t < e} X_t = l) = 1$ が得られ, このことから結論が従う。

次に $p(l+) > -\infty$ かつ $p(r-) = \infty$ という 2. の条件を仮定する。上と同様に,

$$P_x(\inf_{t < e} X_t = l) = 1$$

がいえ。今 $Y_t^{a,b} = p(X_{t \wedge \tau}) - p(l+)$ は非負マルチンゲールである。 $a \searrow l$, また $b \nearrow r$ とすると $Y_t = p(X_{t \wedge e} - p(l+))$ は非負の優マルチンゲールであることがわかる。よってマルチンゲール収束定理により $\lim_{t \nearrow \infty} Y_t = \lim_{t \nearrow e} p(X_t) - p(l+)$ が a.s. に存在し有限であることがいえる。ゆえに $\lim_{t \nearrow e} X_t$ が a.s. に存在し上の評価より結論が従う。3. は l と r の条件を逆に適用することで従う。また 4. も同様の方法で示せる。 $\square$

Lemma 1.37. $u(x)$ を以下の微分方程式の解であるとする。

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = u(x) \\ u(c) = 1 \\ u'(c) = 0 \end{cases}$$

このとき, 評価式

$$1 + v_c(x) \leq u(x) \leq \exp(v_c(x)) \quad (\forall x \in I)$$

が成立する。

Proof. $u(x)$ の定義から $u(x)$ は

$$u(x) = 1 + \int_c^x ds(y) \int_c^y u(z) dm(z)$$

ただし, $ds(y)$ は

$$ds(y) = \exp\left(-\int_c^y \frac{2b(z)}{a^2(z)} dz\right) dy$$

また $dm(z)$ は,

$$dm(z) = 2 \exp \left(\int_c^z \frac{2b(\eta)}{a^2(\eta)} d\eta \right) \frac{1}{a^2(z)} dz$$

である。ここで $u_n(x)$ を帰納的に,

$$u_n(x) = \int_c^x ds(y) \int_c^y u_{n-1}(z) dm(z)$$

$$u_0(x) = 1 (\forall x \in I)$$

と定めれば,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

であり, さらに $u_n(x) \geq 0$ また $u_1(x) = v_c(x)$ である。ゆえに,

$$u(x) \geq 1 + u_1(x) = 1 + v_c(x)$$

が得られる。一方,

$$u_n(z) \leq \frac{v_c(z)^n}{n!}$$

と仮定すれば,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \int_c^x ds(y) \int_c^y u_n(z) dm(z) \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_c^x ds(y) \int_c^y v_c(z)^n dm(z) \quad (\because \text{仮定}) \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_c^x ds(y) v_c(y)^n \int_c^y dm(z) \quad (\because v_c \text{ は単調増加}) \\ &= \frac{1}{n!} \int_c^x v_c(y)^n d(v_c(y)) \\ &= \frac{v_c(x)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

このことから,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_c(x)^n}{n!} = \exp(v_c(x))$$

となり結論が従う。 □

Proposition 1.38 (包含関係). 以下の包含関係が成立する。

1. $v_c(r-) < \infty \implies p_c(r-) < \infty$
2. $v_c(l+) < \infty \implies p_c(l+) > -\infty$

対偶をとれば,

3. $p_c(+\infty) = \infty \implies v(+\infty) = \infty$
4. $p(-\infty) = -\infty \implies v(-\infty) = \infty$

Remark 1.39. $v_c(\infty), v_c(-\infty), p_c(\infty), p_c(-\infty)$ が有限かどうかは c に依存しない。

Theorem 1.40 (爆発の判定条件). $\{X_t\}$ を確率微分方程式 (4) の x を初期値にもつ解とする。また τ_∞ を $\{X_t\}$ の爆発時刻とする。このとき、 $P_x(\tau_\infty = \infty) = 1$ となる必要十分条件は

$$v_c(r-) = v_c(l+) = +\infty$$

である (Feller の判定条件)。また $P_x(\tau_\infty < \infty) = 1$ となる必要十分条件は次の 3 条件のうちの 1 つが成り立つことである。

1. $v_c(r-) < \infty$ かつ $v(l+) < \infty$
2. $v_c(r-) < \infty$ かつ $p(l+) = -\infty$
3. $v_c(l+) < \infty$ かつ $p(r-) = \infty$

Proof. まず $P_x(\tau_\infty = \infty) = 1$ に関する同値性を証明する。 $u(x)$ を Lemma1.37 の通りに定義する。また $l < a < x < b < r$ とし、 τ を Theorem1.36 の証明と同様に (a, b) からの退出時刻 $\tau = \inf\{t; X_t \notin (a, b)\}$ と定義する。伊藤の公式から、

$$\begin{aligned} de^{-t}u(X_t) &= e^{-t}u'(X_t)a(X_t)dB_t + e^{-t}(-u(X_t) + (\mathcal{L}u)(X_t))dt \\ &= e^{-t}u'(X_t)a(X_t)dB_t \end{aligned}$$

であり、 $\{e^{-t \wedge \tau}u(X_{t \wedge \tau})\}$ はマルチンゲールである。ここで $a \searrow l$, また $b \nearrow r$ とすると $\{e^{-t \wedge e}u(X_{t \wedge e})\}$ は非負の優マルチンゲールである。

$v_c(r-) = v_c(l+) = \infty$ と仮定すると、Lemma1.37 より

$$\lim_{x \searrow l} u(x) = \lim_{x \nearrow r} u(x) = \infty$$

が成立する。ゆえに $P_x(e < \infty) > 0$ となることはない。なぜなら $t \mapsto e^{-t \wedge e}u(X_{t \wedge e})$ は a.s. に有界優マルチンゲール。このことは (1) の結論を示している。

次に $v_c(r-) < \infty$ と仮定する。一般性を失うことなく、 $c < x$ としてよい。 $\tau' = \inf\{t; X_t = c\}$ と定義する。Lemma1.37 より $u(r-) < \infty$ であり、このことから、

$$\exp(-t \wedge \tau')u(t \wedge \tau')$$

は有界 P_x マルチンゲールである。よって、

$$u(x) = \mathbb{E}_x[\exp(-t \wedge \tau')u(t \wedge \tau')]$$

$t \rightarrow \infty$ とすると、

$$u(x) = \mathbb{E}_x[\exp(-e)u(r-); \lim_{t \nearrow e \wedge \tau'} X_t = r] + \mathbb{E}_x[\exp(-\tau')u(c); \lim_{t \nearrow e \wedge \tau'} X_t = c]$$

となる。ここで $\mathbb{E}_x[\exp(-e); \lim_{t \nearrow e \wedge \tau'} X_t = r] = 0$ と仮定すると、

$$u(x) = u(c)\mathbb{E}_x[\exp(-\tau'); \lim_{t \nearrow e \wedge \tau'} X_t = c] \leq u(c)$$

となるが、これは矛盾である。ゆえに $\mathbb{E}_x[\exp(-e); \lim_{t \nearrow e \wedge \tau'} X_t = r] > 0$ であり、これは $P_x(e < \infty) > 0$ を示している。

次に $P_x(\tau_\infty < \infty) = 1$ に関する同値性を証明する。 $v_c(r-)$ を仮定し、条件 1. 2. 3. のいずれもみたしていないとする。このとき $p_c(l+) > \infty$ かつ $v_c(l+) = \infty$ が成立している。このとき、 $P_x(\lim_{t \nearrow e} X_t = l) = 0$ 。 $e^{-t \wedge e} u(X_{t \wedge e})$ は非負の優マルチンゲールであり、 $\lim_{x \searrow l} u(x) = \infty$ であるから、 $e = \infty \{\lim_{t \searrow} X_t = l\}$ 上 a.s. でなければならない。よって $P_x(e = \infty) > 0 (\forall x \in I)$ 、すなわち $P_x(e < \infty) = 1$ となり 1. 2. 3. のいずれかの条件はみたされていなければならない。逆を示す。まず 1. の条件を仮定する。Green 関数 $G(x, y)$ を

$$G(x) = \begin{cases} \frac{(s(x) - s(l-))(s(r-) - s(y))}{s(r-) - s(l+)} & x < y \\ \frac{(s(y) - s(l-))(s(r-) - s(x))}{s(r-) - s(l+)} & y \leq x \end{cases}$$

で定める。 $f(x)$ を I 上有界連続関数とする。1. の仮定から、

$$u(x) = \int_I G(x, y) f(y) m(dy)$$

は有界関数となり、特に

$$u_1(x) = \int_I G(x, y) m(dy)$$

は有界関数である。また u は C^2 級関数で $u(l+) = u(r-) = 0$ で

$$\mathcal{L}u = -f$$

が成立し、特に

$$\mathcal{L}u_1 = -1$$

が成り立つ。ゆえに伊藤の公式を用いれば、

$$u_1(X_{t \wedge e}) - u_1(x) + t \wedge e = \int_0^{t \wedge e} u'_1(X_s) dB_s$$

ゆえに、

$$-\mathbb{E}_x[u_1(X_{t \wedge e})] + u_1(x) = \mathbb{E}_x[t \wedge e]$$

となる。 $t \rightarrow \infty$ とすると、

$$u_1(x) = \mathbb{E}_x[e]$$

となり、これは $P_x(e < \infty) = 1$ を示している。次に 2. の条件を仮定する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $\hat{\sigma}_n$ を、

$$\hat{\sigma}_n = \inf\{t; X_t = l + \frac{1}{n}\}$$

と定め、 σ_r を

$$\sigma_r = \inf\{t; X_t = r\}$$

と定義すると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_n \wedge \sigma_r = e$ が成り立つ。1. の結果から、

$$P_x(\hat{\sigma}_n \wedge \sigma_r < \infty) = 1 \quad (\forall x \in I)$$

また $p_c(r-) < \infty$ かつ $p_c(l+) = -\infty$ であるから Theorem 1.36 より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_x(\widehat{\sigma}_n > \sigma_r) = 1$$

が成り立つ。今

$$\{\sigma_r < \infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\sigma_r < \widehat{\sigma}_n\}$$

であるから,

$$P_x(e < \infty) = P_x(\sigma_r = e < \infty) = 1$$

となり結論が従う。

3. は 2. の結果において l と r を変えれば同様に示せる。

□

2 ボラティリティモデル

2.1 Black-Scholes-Merton モデル

Definition 2.1 (Black-Scholes-Merton モデル). 資産価格過程 $\{S_t\}$ がBlack-Scholes-Merton モデルに従うとは, $\{S_t\}$ が確率微分方程式

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

に従うことをいう。

ここで $\mu \in \mathbb{R}$ は期待収益率と, $\sigma > 0$ はボラティリティとよばれる。この確率微分方程式は S_t について,

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\}$$

と解ける。

一般に $T > 0$ を満期とする ヨーロピアンデリバティブのペイオフ F は S_T の関数

$$F = f(S_T)$$

で与えられ, F の価格 $v(F)$ は,

$$v(F) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\mathbb{R}} f(S_0 e^{x+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}} dx$$

で表される。ただし, $r > 0$ は金利を表す。特にこの F が行使価格 K のヨーロピアンコールオプションであるとき, すなわち

$$F = (S_T - K)_+$$

で表されているとき, 価格は

$$v(F) = S_0 \Phi(d_+) - K e^{rT} \Phi(d_-)$$

で表される (Black-Scholes の価格公式)。ただし,

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log \frac{S_0}{K} + r \pm \frac{\sigma^2}{2} T \right)$$

であり, $\Phi(x)$ は標準正規分布関数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

である。価格の定義, またこれらの公式の導出については [4], [10] 参照。

この価格公式には期待収益率 μ は出現しておらず, ボラティリティ σ と S_0, r, T を用いて表される。このモデルでは σ は定数であることを仮定しているが, 実際の市場においては σ が定数となることは極めてまれであることが知られている。この σ の挙動を記述するモデルとして確率ボラティリティモデルが考えられている。

2.2 確率ボラティリティモデル

確率ボラティリティモデルとは一般に資産価格過程 $\{S_t\}$ が

$$dS_t = \sigma_t S_t dZ_t + \mu(t, S_t) dt$$

ここで σ_t は以下の確率モデルに従うと仮定する。

$$d\sigma_t = a(t, \sigma_t) dB_t + b(t, \sigma_t) dt$$

ただし $\{Z_t\}, \{B_t\}$ は Brown 運動で

$$dZ_t dB_t = \rho dt$$

をみたしているとする。ただし, $\rho \in [-1, 1]$ は 2 つの Brown 運動の瞬間的な相関を表す定数である。この関係より,

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (Z_t - \rho B_t)$$

は Levy の定理より B_t と独立な Brown 運動となる。すなわち, Z_t は独立な Brown 運動 B_t, W_t によって

$$Z_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2} W_t$$

と表せることがわかる。

以下では具体的な確率ボラティリティモデルをあげる。 $\{Z_t\}, \{B_t\}$ は Brown 運動とする。

Definition 2.2 (Heston モデル). 原資産価格過程 $\{S_t\}$ が Heston モデルに従うとは $\{S_t\}$ が以下の確率微分方程式に従うことをいう。

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu dt + \sqrt{\sigma_t} dZ_t) \\ d\sigma_t &= \kappa(\theta - \sigma_t) dt + \nu \sqrt{\sigma_t} dB_t \\ dZ_t \cdot dB_t &= \rho dt \end{aligned}$$

である。ただし, $\mu, \kappa, \theta, \nu \in \mathbb{R}$ は定数で, $\rho \in [-1, 1]$ である。

Definition 2.3 (Hull-White モデル). $\{S_t\}$ が以下のモデルに従うとき, $\{S_t\}$ は Hull-White モデルに従うという。

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma_t dZ_t) \\ d\sigma_t &= a(t, \sigma_t) dB_t + b(t, \sigma_t) dt \\ dZ_t \cdot dB_t &= \rho dt \end{aligned}$$

ただし, $\rho \in [-1, 1]$ は定数である。

Definition 2.4 (Hagan-Kumar-Lesniewski-Woodward モデル). 資産価格過程 $\{F_t\}$ が Hagan-Kumar-Lesniewski-Woodward モデルに従うとは $\{F_t\}$ が以下の確率微分方程式に従うことをいう。

$$dF_t = \sigma_t F_t^\beta dZ_t^j$$

$$\begin{aligned}d\sigma_t &= \varepsilon \sigma_t dW_t^j \\dZ_t^j dW_t^j &= \rho dt\end{aligned}$$

ただし, $\beta \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \rho \in [-1, 1]$ はいずれも定数である。このモデルは SABR モデルとよばれる。
これらのモデルの性質等については [7],[9] を参照。

3 マルチンゲール性と可積分性の判定

前章において Hagan-Kumar-Lesniewski-Woodward モデルにおいて現れた確率微分方程式

$$dF_t = \sigma_t F_t^\beta dZ_t$$

を考える。ただし $F_0 = F$ とする。ここで $e^{\sigma_t} = Y_t$ とおくと、 Y_t は確率微分方程式

$$dY_t = \alpha dB_t + \mu dt - \gamma Y_t dt \quad Y_0 = y_0$$

に従うとし、 B_t と独立な Brown 運動 W_t に対し、関係式

$$Z_t = \rho B_t + \sqrt{1 - \rho^2} W_t$$

をみたすものとする。また $\tau_n = \inf\{t \geq 0; |F_t| > n\}$ とする。 $\beta \in (0, 1)$ のときは

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_{t \wedge \tau_n}^2] &= F^2 + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{2Y_s} F_s^{2\beta} ds \right] \\ &\leq F^2 + \int_0^t \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{2Y_s}{1-\beta} \right) \right] \right)^{1-\beta} \cdot (\mathbb{E}[F_{s \wedge \tau}^2])^\beta ds \quad (\because \text{Holder の不等式}) \\ &\leq F^2 + \int_0^t \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{2Y_s}{1-\beta} \right) \right] \right)^{1-\beta} \cdot (1 + \mathbb{E}[F_{s \wedge \tau}^2]) ds \end{aligned}$$

となり、 $s \mapsto \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{2Y_s}{1-\beta} \right) \right]$ が局所有界であることに注意すれば、Gronwall の不等式、および $n \rightarrow \infty$ とすることで $\mathbb{E} \left[\int_0^t e^{2Y_s} F_s^{2\beta} ds \right] < \infty (\forall t \geq 0)$ であることが示され、 $\{F_t\}$ はマルチンゲールとなることが従う。

$\beta = 1$ のときにはマルチンゲールとなるかが問題となる。

3.1 マルチンゲール性

以下この章では、以下の確率微分方程式に従うモデルを考える。

$$dF_t = \sigma_t F_t dZ_t \quad (F_0 = F > 0) \tag{5}$$

ここで σ_t は以下の確率モデルに従うとする。

$$\begin{aligned} \sigma_t &= e^{Y_t} \\ dY_t &= \alpha dB_t + \mu dt - \gamma Y_t dt \quad Y_0 = y_0 \\ Z_t &= \rho B_t + \sqrt{1 - \rho^2} W_t \end{aligned}$$

ただし、 (B_t, W_t) は 2 次元 Brown 運動、 $y_0, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ であり、 $F, \alpha > 0$ とする。また $\rho \in [-1, 1]$ は Z_t と B_t の相関を表す定数である。 F_t の定義から、

$$F_t = F \exp \left\{ \int_0^t \sigma_s dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\}$$

と表せる。 $\mathcal{E}_t(X) = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right)$ という Dooleans-Dade の記号を用いれば、

$$F_t = F\mathcal{E}_t\left(\int_0^t \sigma_s dZ_s\right)$$

である。また Y_t については,

$$dY_t + \gamma Y_t dt = \alpha dB_t + \mu dt$$

$e^{\gamma t} Y_t$ に伊藤の公式を適用すれば,

$$\begin{aligned} d(e^{\gamma t} Y_t) &= \gamma e^{\gamma t} Y_t dt + e^{\gamma t} dY_t + \gamma e^{\gamma t} dt \cdot dY_t \\ &= \gamma e^{\gamma t} Y_t dt + e^{\gamma t} dY_t \quad (\because dt \cdot dB_t = dt \cdot dt = 0) \end{aligned}$$

であるから,

$$d(e^{\gamma t} Y_t) = \alpha e^{\gamma t} dB_t + \mu e^{\gamma t} dt$$

これを積分形で書けば,

$$e^{\gamma t} Y_t = y_0 + \alpha \int_0^t e^{\gamma s} dB_s + \mu \int_0^t e^{\gamma s} ds$$

Y_t について解けば,

$$Y_t = y_0 e^{-\gamma t} + \alpha \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dB_s + \mu \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} ds$$

と表示でき, $Y_t, \int_0^t Y_s ds$ は正規分布に従うこともわかる。このとき以下が成り立つ。

Theorem 3.1. $\{F_t\}$ がマルチンゲールとなるための必要十分条件は $\rho \leq 0$ である。

Remark 3.2. Novikov の条件の範疇には入らない。実際, $\int_0^t Y_s ds$ が正規分布に従うことから Jensen の不等式を用いると,

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t e^{Y_s} ds \right) \right) \geq \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{t}{2} e^{\frac{2}{t} \int_0^t Y_s ds} \right) \right) = +\infty \quad (\forall t > 0)$$

であるから $\rho \leq 0$ のときにマルチンゲール性を示すことができない。

Proof. W_t と B_t の独立性, および Y_t がフィルトレーション $\sigma\{B_t | s \leq t\}$ に関する適合格過程であることより, 条件付期待値の性質から,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_t] &= F\mathbb{E} \left[\mathcal{E}_t \left(\rho \int_0^t e^{Y_s} dB_s \right) \mathbb{E} \left[\mathcal{E}_t \left(\sqrt{1-\rho^2} \int_0^t e^{Y_s} dW_s \right) | \sigma\{B_t | s \leq t\} \right] \right] \\ &= F\mathbb{E} \left[\mathcal{E}_t \left(\rho \int_0^t e^{Y_s} dB_s \right) \right] \end{aligned}$$

が成立する。ここで確率測度 Q を,

$$\frac{dQ}{dP} |_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t \left(- \int_0^t \left(\frac{\gamma y - \mu}{\alpha} + \gamma B_s \right) dB_s \right)$$

をみたすようにとる。Girsanov の定理から,

$$\widehat{B}_t = B_t + \int_0^t \left(\frac{\gamma y - \mu}{\alpha} + \gamma B_s \right) ds$$

は Q のもと Brown 運動である。

$$y + \alpha B_t = y + \alpha \widehat{B}_t - \gamma \int_0^t (y + \alpha B_s) ds + \mu t$$

と変形すると、この確率微分方程式の一意性から、 $(y + \alpha B_t, \widehat{B}_t)$ の Q のもとでの分布と (Y_t, B_t) の P のもとでの分布は一致することが結論できる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(F_t)}{F} &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\mathcal{E}_t \left(\rho \int_0^t e^{y_0 + \alpha B_s} d\widehat{B}_s \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathcal{E}_t \left(\rho \int_0^t e^{y + \alpha B_s} dB_s \right) \exp \left(\rho \int_0^t e^{y_0 + \alpha B_s} \left(\frac{\gamma y_0 - \mu}{\alpha} + \gamma B_s \right) ds \right) \cdot \mathcal{E}_t \left(- \int_0^t \left(\frac{\gamma y_0 - \mu}{\alpha} + \gamma B_s \right) dB_s \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathcal{E}_t \left(\int_0^t b(B_s) dB_s \right) \right] \end{aligned}$$

ただし、 $b(z) = \rho e^{y + \alpha z} + \frac{\mu - \gamma y}{\alpha} - \gamma z$. ここで $\{X_t\}$ が確率微分方程式

$$dX_t = dB_t + b(X_t)dt$$

の解とすると、 b が局所 Lipschitz 連続であるからこの b と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、区間 $[-n, n]$ 上では b と一致するような大域的に Lipschitz 連続で有界な関数 b_n が存在する。 X_t^n を上と類似の確率微分方程式

$$dX_t^n = dB_t + b_n(X_t^n)dt \tag{6}$$

の解とし、

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0; |X_t^n| \geq n\}$$

とすると

$$X_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{\tau_{n-1} \leq t < \tau_n\}} X_t^n$$

は上の確率微分方程式 (6) の爆発時刻 $\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ までの解である。また、

$$\sigma_n = \inf\{t \geq 0; |B_t| \geq n\}$$

とすると、Girsanov の定理、及び b_n の構成法と合わせれば、

$$\begin{aligned} P(\tau_n > t) &= \mathbb{E} \left(1_{\{\sigma_n > t\}} \mathcal{E}_t \left(\int_0^t b_n(B_s) dB_s \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(1_{\{\sigma_n > t\}} \mathcal{E}_t \left(\int_0^t b(B_s) dB_s \right) \right) \end{aligned}$$

ここで $n \rightarrow +\infty$ とすれば、

$$P(\tau_\infty > t) = \mathbb{E} \left(\mathcal{E}_t \left(\int_0^t b(B_s) dB_s \right) \right) = \frac{\mathbb{E}[F_t]}{F}$$

ここで $\hat{\rho} = \frac{2\rho e^y}{\alpha}$, $\eta = \frac{2(\mu - \gamma y)}{\alpha}$ とおくと, ρ と $\hat{\rho}$ は同符号であり, $b(z) = \frac{\alpha \hat{\rho} e^{\alpha z}}{2} + \frac{\eta}{2} - \gamma z$ である。Feller の判定条件より尺度関数

$$p(z) = e^{\hat{\rho}} \int_0^z \exp(\gamma x^2 - \eta x - \hat{\rho} e^{\alpha x}) dx$$

を用いて,

$$\begin{aligned} v(z) &= \int_0^z p'(x) \int_0^x \frac{2}{p'(y)} dy dx \\ &= 2 \int_0^z \exp(\gamma x^2 - \eta x - \hat{\rho} e^{\alpha x}) \int_0^x \exp(-\gamma y^2 + \eta y + \hat{\rho} e^{\alpha y}) dy dx \end{aligned}$$

を導入すると $P(\tau_\infty = \infty) = 1$ と $v(+\infty) = v(-\infty) = \infty$ と同値である。

(A) $\rho > 0$, すなわち $\hat{\rho} > 0$ の場合は $x_1 > 0$ を十分大きく, 任意の $y \geq x_1$ に対し,

$$-2\gamma y + \eta + \hat{\rho} \alpha e^{\alpha y} > 0$$

をみたすようにとる。部分積分によって,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^x \exp(-\gamma y^2 + \eta y + \hat{\rho} e^{\alpha y}) dy &= \frac{e^{-\gamma x^2 + \eta x + \hat{\rho} e^{\alpha x}}}{-2\gamma x + \eta + \hat{\rho} \alpha e^{\alpha x}} - \frac{e^{-\gamma x_1^2 + \eta x_1 + \hat{\rho} e^{\alpha x_1}}}{-2\gamma x_1 + \eta + \hat{\rho} \alpha e^{\alpha x_1}} \\ &\quad + \int_{x_1}^x \frac{(\hat{\rho} \alpha^2 e^{\alpha y} - 2\gamma) e^{-\gamma y^2 + \eta y + \hat{\rho} e^{\alpha y}}}{(-2\gamma y + \eta + \hat{\rho} \alpha e^{\alpha y})^2} dy \end{aligned}$$

となる。 x_1 を十分大きく, 任意の $y \geq x_1$ に対し,

$$\hat{\rho} \alpha^2 e^{\alpha y} - 2\gamma \leq \frac{1}{2} (-2\gamma y + \eta + \hat{\rho} \alpha e^{\alpha y})^2$$

をみたすようにとる。このとき任意の $x \geq x_1$ に対し,

$$\int_{x_1}^x \exp(-\gamma y^2 + \eta y + \hat{\rho} e^{\alpha y}) dy \leq \frac{2 \exp(-\gamma x^2 + \eta x + \hat{\rho} e^{\alpha x})}{-2\gamma x + \eta + \hat{\rho} \alpha e^{\alpha x}}$$

これから $v(+\infty) < \infty$ となり結論が示される。

(B) $\rho < 0$ のとき, すなわち $\hat{\rho} < 0$ のときは p の定義からただちに $p(+\infty) = +\infty$ がいえ, これから $v(+\infty) = +\infty$ がいえる。また $\gamma > 0$ を仮定すれば再び p の定義からただちに $p(-\infty) = -\infty$ がいえ, $v(-\infty) = +\infty$ がいえる。このことから $\gamma \leq 0$ のとき $v(-\infty) = +\infty$ がいえればよい。 $y \geq 0$ のとき $e^{\hat{\rho}} \leq e^{\hat{\rho} e^{\alpha y}}$ であることを用いれば, これは

$$w(z) = \int_0^z \exp(\gamma x^2 - \eta x) \int_0^x \exp(-\gamma y^2 + \eta y) dy dx$$

を用いて $w(-\infty) = \infty$ がいえればよい。 $\gamma = 0$ のときは $\eta = \frac{2\mu}{\alpha}$ であり,

$$w(z) = \begin{cases} z^2 & (\mu = 0) \\ \frac{\alpha}{\mu} (z + \frac{\alpha}{2\mu} (e^{-\frac{2\mu z}{\alpha}} - 1)) & (\mu \neq 0) \end{cases}$$

であるから $z \rightarrow -\infty$ とすれば $w(-\infty) = +\infty$ が得られる。

$\gamma < 0$ のときは x_1 を十分小さく $x_1 < 0 \vee \frac{\eta}{2\gamma}$ をみたすようにとれば、部分積分により、

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^x \exp(-\gamma y^2 + \eta y) dy &= \frac{\exp(-\gamma x^2 + \eta x)}{\eta - 2\gamma x} - \frac{\exp(-\gamma x_1^2 + \eta x_1)}{\eta - 2\gamma x_1} - 2\gamma \int_{x_1}^x \frac{\exp(-\gamma y^2 + \eta y)}{(\eta - 2\gamma y)^2} dy \\ &\leq \frac{\exp(-\gamma x^2 + \eta x)}{\eta - 2\gamma x} - \frac{\exp(-\gamma x_1^2 + \eta x_1)}{\eta - 2\gamma x_1} \end{aligned}$$

ゆえに $x \leq x_1$ のとき、

$$\int_{x_1}^x \exp(-\gamma y^2 + \eta y) dy \leq \frac{\exp(-\gamma x^2 + \eta x)}{\eta - 2\gamma x} + C$$

ただし、 C は x に依存しない定数。このことと w の定義とを合わせれば $w(-\infty) = +\infty$ が得られる。この $v(-\infty) = +\infty$ はこれと同様に $\rho > 0$ の場合も言え、このことを合わせれば結論が示される。 $\square$

Proposition 3.3 (プット・コールパリティ). $\rho > 0$ と仮定する。このとき、 $t \mapsto \mathbb{E}[F_t]$ は狭義単調減少である。特に、

$$\forall T, K > 0 \text{ に対し, } \mathbb{E}[(F_T - K)^+] - \mathbb{E}[(K - F_T)^+] < F - K$$

Remark 3.4. このことは $\rho > 0$ のときプット・コールパリティが成立しないことを主張している。

Proof. 初期条件を強調するために $(F_t^{F, y_0}, Y_t^{y_0})$ と表しておく。まず、 F_t の表示式から、

$$\mathbb{E}[F_t^{F, y_0}] = F \mathbb{E}[F_t^{1, y_0}]$$

である。 $T > 0$ に対し、 $A_T = \{y \in \mathbb{R}; \mathbb{E}[F_t^{1, y}] < 1\}$ とおくと、 A_T は Lebesgue 測度 μ について $\mu(A_T) > 0$ である。実際 F_t の Markov 性から

$$\mathbb{E}[F_{2T}^{1, y_0}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[F_{2T}^{1, y_0} | \mathcal{F}_T]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[F_T^{w, y}] |_{(w, y) = (F_T^{1, y_0}, Y_T^{y_0})}] = \mathbb{E}[F_T^{1, y_0} \mathbb{E}[F_T^{1, y}] |_{y = Y_T^{y_0}}]$$

であり、 $Y_T^{y_0}$ の分布は Lebesgue 測度に対し絶対連続であるから、

$$P(Y_T^{y_0} \in A_T) = 0$$

となり、このことから、

$$\mathbb{E}[F_{2T}^{1, y_0}] = \mathbb{E}[F_T^{1, y_0}]$$

となる。このことから $A_{2T} = A_T$ を得る。帰納的に任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $A_{nT} = A_T$ であり、任意の $y_0 \in \mathbb{R} \setminus A_T$ に対し、 $\{F_t^{1, y_0}\}$ はマルチンゲールとなり、これは Theorem 3.1 に矛盾する。

$0 \leq s < t$ とすると再び Markov 性、 F_t の表示式から、

$$\mathbb{E}[F_t^{1, y_0}] = \mathbb{E}\left[F_{\frac{t+s}{2}}^{1, y_0} \mathbb{E}\left[F_{\frac{t-s}{2}}^{1, y}\right] \Big|_{y = Y_{\frac{t+s}{2}}^{y_0}}\right]$$

である。 $Y_{\frac{t+s}{2}}^{y_0}$ は Lebesgue 測度と同値であるから、 $P\left(Y_{\frac{t+s}{2}}^{y_0} \in A_{\frac{t-s}{2}}\right) > 0$ である。これから $\mathbb{E}[F_t^{1,y_0}] < \mathbb{E}\left[F_{\frac{t+s}{2}}^{1,y_0}\right]$ である。右辺は $\mathbb{E}[F_s^{1,y_0}]$ 以下であるから、

$$t \mapsto \mathbb{E}[F_t^{1,y_0}]$$

は狭義減少関数であることがいえる。 □

3.2 可積分性

以下 $\{F_t\}$ がマルチンゲールとなる $\rho \leq 0$ のときの可積分性について述べる。

Theorem 3.5 (可積分性). $t > 0$ とし、 $m > 1$ とする。このとき以下が成り立つ。

1. $\rho = 0$ のとき、 $\mathbb{E}[F_t^m] = +\infty (\forall t > 0)$ である。
2. $\rho < 0$ のとき、 $\mathbb{E}[F_t^m] < +\infty$ となる必要十分条件は次の条件のいずれかがみたされることである。

$$(A) \rho < -\sqrt{\frac{m-1}{m}}$$

$$(B) \rho = -\sqrt{\frac{m-1}{m}} \text{ かつ } \gamma > 0$$

$$(C) \rho = -\sqrt{\frac{m-1}{m}} \text{ かつ } \gamma = 0 \text{ かつ } \mu + \frac{\alpha^2}{2} \leq 0$$

Proof. F_t の表示式から、

$$F_t^m = F^m \exp\left(m\left(\rho \int_0^t e^{Y_s} dB_s + \frac{1}{2}(m(1-\rho^2) - 1) \int_0^t e^{2Y_s} ds\right)\right) \cdot \mathcal{E}_t\left(m\sqrt{1-\rho^2} \int_0^t e^{Y_s} dW_s\right)$$

と変形できる。 W_t と B_t の独立性、および Y_t がフィルトレーション $\sigma\{B_s | s \leq t\}$ に関する適合過程であることから、Theorem 3.1 の証明と同様の手法により、

$$\mathbb{E}[F_t^m] = F^m \mathbb{E}\left[\exp\left(m\left(\rho \int_0^t e^{Y_s} dB_s + \frac{1}{2}(m(1-\rho^2) - 1) \int_0^t e^{2Y_s} ds\right)\right)\right] \quad (7)$$

$\rho = 0$ のときは $\int_0^t Y_s ds$ が正規分布に従うことと Jensen の不等式を用いると、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_t^m] &= F^m \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{m(m-1)}{2} \int_0^t e^{2Y_s} ds\right)\right] \\ &\geq F^m \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{m(m-1)t}{2} e^{\frac{2}{t} \int_0^t Y_s ds}\right)\right] \\ &= \infty \end{aligned}$$

となることが従う。

次に $\rho < 0$ の場合を考える。 e^{Y_t} に伊藤の公式を適用することにより、

$$e^{Y_t} - e^{y_0} = \alpha \int_0^t e^{Y_s} dB_s + \int_0^t \left(\mu + \frac{\alpha^2}{2} - \gamma Y_s\right) e^{Y_s} ds$$

を得る。この式の確率積分項 $\int_0^t e^{Y_s} dB_s$ について解き、(7) に代入することで、

$$\mathbb{E}[F_t^m] = F^m \mathbb{E} \left[\exp \left(m \left(\frac{\rho}{\alpha} (e^{Y_t} - e^{y_0}) + \int_0^t \left(\frac{\rho}{\alpha} \left(\gamma Y_s - \mu - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (m(1-\rho^2) - 1) e^{Y_s} \right) e^{Y_s} ds \right) \right) \right] \quad (8)$$

を得る。仮定の 3 条件のいずれかがみたされていれば、

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto \left(\frac{\rho}{\alpha} \left(\gamma y - \mu - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (m(1-\rho^2) - 1) e^y \right) e^y$$

は上に有界であり、

$$\left(\frac{\rho}{\alpha} \left(\gamma y - \mu - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (m(1-\rho^2) - 1) e^y \right) e^y \leq C \quad (\forall y \in \mathbb{R})$$

とすると、

$$m \left(\frac{\rho}{\alpha} (e^{Y_t} - e^{y_0}) + \int_0^t \left(\frac{\rho}{\alpha} \left(\gamma Y_s - \mu - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (m(1-\rho^2) - 1) e^{Y_s} \right) e^{Y_s} ds \right) \leq m \left(Ct - \frac{\rho e^{y_0}}{\alpha} \right)$$

と評価できるから、任意の $T > 0$ に対し、

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[F_t^m] \leq F^m \exp \left(m \left(CT - \frac{\rho e^{y_0}}{\alpha} \right) \right)$$

となり結論を得る。

逆に仮定の 3 条件のいずれもみたされないと仮定すると、

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto \left(\frac{\rho}{\alpha} \left(\gamma y - \mu - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (m(1-\rho^2) - 1) e^y \right) e^y - \varepsilon e^y$$

が下に有界となるように $\varepsilon > 0$ がとれる。このことから評価式；

$$\mathbb{E}[F_t^m] \geq C' \mathbb{E} \left[\exp \left(m \left(\frac{\rho}{\alpha} e^{Y_t} + \varepsilon \int_0^t e^{Y_s} ds \right) \right) \right]$$

が得られる。ここで Jensen の不等式から、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_t^m] &\geq C' \mathbb{E} \left[\exp \left(m \left(\frac{\rho}{\alpha} e^{Y_t} + \varepsilon t e^{\frac{1}{t} \int_0^t Y_s ds} \right) \right) \right] \\ &= C' \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{m\rho}{\alpha} e^{Y_t} \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(m \varepsilon t e^{\frac{1}{t} \int_0^t Y_s ds} \right) \middle| \sigma(Y_t) \right] \right] \\ &= +\infty \quad (\because \mathbb{E} \left[\exp \left(m \varepsilon t e^{\frac{1}{t} \int_0^t Y_s ds} \right) \middle| \sigma(Y_t) \right] = \infty (\text{a.s.})) \end{aligned}$$

となり結論が従う。 □

Remark 3.6 ($\rho > 0$ のとき). 上の証明法から $\rho > 0$ の場合において、

$$(A) \rho > \sqrt{\frac{m-1}{m}}$$

$$(B) \rho = \sqrt{\frac{m-1}{m}} \text{ かつ } \gamma > 0$$

$$(C) \rho = \sqrt{\frac{m-1}{m}} \text{ かつ } \gamma = 0 \text{ かつ } \mu + \frac{\alpha^2}{2} \leq 0$$

のいずれかがみたされていれば，上の証明の中の (8) において

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto \left(\frac{\rho}{\alpha} \left(\gamma y - \mu - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (m(1 - \rho^2) - 1) e^y \right) e^y$$

が下から有界であることがいえ，評価式；

$$\mathbb{E}[F_t^m] \geq C'' \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{m\rho}{\alpha} e^{Y_t} \right) \right]$$

が得られ，

$$\mathbb{E}[F_t^m] = +\infty (\because Y_t \text{が正規分布に従う})$$

であることが従う。

参考文献

- [1] B.Jourdain, *Loss of martingality in asset price models with lognormal stochastic volatility*, CER-MICS preprint no. 267, (2004)
- [2] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd Edition, North-Holland Kodansha, Amsterdam/Tokyo, (1988)
- [3] I. Karzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, (1991)(邦訳：渡邊壽夫訳、『ブラウン運動と確率積分』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2001)
- [4] 関根順,『数理ファイナンス』, 確率論教程シリーズ 7, 培風館, (2007)
- [5] 渡辺信三,『確率微分方程式』, 数理解析とその周辺 9, 産業図書, (1975)
- [6] 松本裕行,『応用のための確率論・確率過程』, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 36, サイエンス社, (2004)
- [7] M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2nd, Springer,(2005)
- [8] 長井英生,『確率微分方程式』, 共立講座 21 世紀の数学 27, 共立出版, (1999)
- [9] D. Brigo, F.Mercurio, *Interest Rate Models - Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*, 2nd, Springer (2007)
- [10] 川崎英文, 谷口説男 著, 若山正人編『最適化法・数理ファイナンスへの確率解析入門』, 講談社サイエンティフィク, (2008)
- [11] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian motion*, 3rd Editon, Springer, (1999)
- [12] P.S. Hagan, D. Kumar, A.S. Lesniewski, and D.E. Woodward. *Managing Smile Risk*. Wilmott magazine, September, 84–108, (2002)
- [13] S.L. Heston. *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options.*, The Review of Financial Studies, 6(2), 327–343 (1993)
- [14] J. Hull and A. White. *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities.*, The Journal of Finance, XLII(2), 281–300,(1987)