

数理ファイナンスにおけるモデルの視覚化

九州大学大学院数理学府数理学専攻

修士課程 2 年

池上牛雄

指導教員：谷口説男 教授

修士論文

平成 22 年 1 月 29 日提出

序文

金融工学は確率解析の応用分野として広く知られており、価格公式が具体的に導出できる Black-Scholes モデルはその基本モデルとして著名である。Black-Sholes モデルは簡明な仮定の下に危険資産の確率過程を記述し、ギルサノフの定理によってポートフォリオがマルチングールとなる確率測度上で考え、マルチングールの表現定理によってペイオフの複製戦略の存在を示すことでオプションの価格決定をしている。しかしながら複製戦略は存在が示されるだけで常に具体的な関数として書けるわけではない。本論文では、複製戦略が具体的な関数として書き下せる場合の実際の複製ポートフォリオを用いた価格変動の様子を Excel 上で近似的に表した。

本論文は、1 章において基礎的道具となる確率解析の準備をし、2 章で Black-Sholes モデルを構成し、3 章で近似複製ポートフォリオの L_2 収束、確率過程のシミュレーション方法とその結果を Excel を用いてグラフ化する。

目 次

1 確率論	1
1.1 ブラウン運動とマルチングール	1
1.2 確率積分	4
1.3 いくつかの定理, 命題	7
2 数理ファイナンス	9
2.1 Black-Sholes モデル	9
2.2 価格公式	11
2.3 複製戦略	14
3 シミュレーション	15
3.1 \tilde{S}_t のシミュレーション	15
3.2 複製ポートフォリオ $\tilde{V}_t(\Phi)$ のシミュレーション	18

1 確率論

この章では、金融工学の基礎となる確率論の準備をする。以下、 T は定数 $T > 0$ に対して $[0, T]$ もしくは $[0, \infty)$ としておく。

1.1 ブラウン運動とマルチングール

定義 1.1.1 (フィルトレーション)。 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) が与えられているとき、 \mathcal{F} の部分集合族 $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ がフィルトレーションであるとは以下のことを満たすことをいう。

- 1) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad 0 \leq s < t$
- 2) \mathcal{F}_t は σ 加法族, $\forall t \in T$.

このとき、 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間という。

以下、 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ が与えられているとする。

定義 1.1.2 (フィルトレーションの右連続性)。 $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ とする。 $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ となるとき、 (\mathcal{F}_t) は右連続であるといふ。

定義 1.1.3 (\mathcal{F}_t 適合, \mathcal{F}_t 発展的可測)。 (X_t) を距離空間 Ξ 上の確率過程とするとき、

- 1) 各 t で X_t が \mathcal{F}_t 可測であるとき、 (X_t) は \mathcal{F}_t 適合であるといふ。
- 2) 各 t で写像 $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega) \in \Xi$ が $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ に関して可測であるとき、 (X_t) は \mathcal{F}_t 発展的可測であるといふ。ただし $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ は直積 σ 加法族である。

定義 1.1.4 (停止時刻)。 $[0, \infty]$ に値をとる確率変数 $\tau(\omega)$ が停止時刻とは

$$\{\omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t$$

となることをいう。

定義 1.1.5 (ブラウン運動)。 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) で定義された \mathbb{R}^n 上の確率過程 $(B_t)_{t \in [0, \infty)}$ がブラウン運動とは以下のことを満たすこと。

- 1) $0 \leq s \leq t$ に対して $B_t - B_s$ は平均ベクトル 0 , 共分散行列 $(t-s)E$ の N 次元正規分布確率変数である。ここで E は単位行列。
- 2) $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\sigma(B_u; u \leq s)$ と独立である。
- 3) $(B_t)_{t \in [0, \infty)}$ は連続確率過程である。

補題 1.1.6. (B_t) を確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) で定義された初期分布 ν の N 次元ブラウン運動とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^B &:= \sigma(B_s; s \leq t), \quad \mathcal{F}^B := \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t^B), \\ \mathcal{N} &:= \{F \subset \Omega; \exists G \in \mathcal{F}^B, P(G) = 0\}, \\ \mathcal{F}_t &:= \sigma(\mathcal{F}_t^B \bigcup \mathcal{N}) \end{aligned}$$

とすると (\mathcal{F}_t) は右連続である。

この論文では上の手順で得た (\mathcal{F}_t) をブラウン運動 (B_t) による自然なフィルトレーションとよぶ。また、あるフィルトレーション (\mathcal{F}_t) が

$$\mathcal{N} = \{F \subset \Omega; \exists G \in \mathcal{F}, P(G) = 0\} \in \mathcal{F}_0$$

であることを通常の条件を満たすという。

定義 1.1.7 (劣マルチングール, マルチングール). \mathbb{R} 上の確率過程 $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ が劣マルチングールとは

- 1) (X_t) は \mathcal{F}_t 適合。
- 2) $E[|X_t|] < \infty$
- 3) $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s \quad a.s. \quad \forall t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{T}$

をみたすことをいう。3) の条件で等号が成り立つとき, (X_t) はマルチングールという。

定理 1.1.8 (Doob の不等式). $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ が右連続非負劣マルチングールのとき, $X_t^* := \sup_{s \leq t} |X_s|$ として,

$$E[(X_t^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_t|^p], \quad p > 1.$$

以下,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p &:= \{M = (M_t); M \text{ はマルチングールで } E[|M_t|^p] < \infty \forall t\}, \quad p \geq 1 \\ \mathcal{M}_{p,c} &:= \{M \in \mathcal{M}_p; M_t \text{ は連続}\} \end{aligned}$$

と書く。適合するフィルトレーションを明示する場合は $\mathcal{M}_p(\mathcal{F}_t), \mathcal{M}_{p,c}(\mathcal{F}_t)$ と表記する。また、非負 \mathcal{F}_t 適合確率過程 (A_t) で右連続かつ $A_{t_1} \leq A_{t_2} < \infty a.s. t_1 \leq t_2$ であるものを増加過程といい、増加過程全体を \mathcal{A}_+ で表す。さらに、

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{A_1 - A_2; A_1, A_2 \in \mathcal{A}_+\} \\ \mathcal{A}_{+,c} &:= \{A \in \mathcal{A}_+; A \text{ は連続}\}, \quad \mathcal{A}_c := \{A \in \mathcal{A}; A \text{ は連続}\} \end{aligned}$$

とする。

定義 1.1.9 (局所マルチングール). 右連続 \mathcal{F}_t 適合確率過程 (X_t) が局所マルチングールとは、停止時刻の列

$$\begin{aligned} (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad s.t. \quad \tau_n &\leq \tau_{n+1} \quad \forall n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n &= \infty \quad (0 \leq t \leq T \text{ の場合 } \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = T) \end{aligned}$$

が存在して、

$$X_{t \wedge \tau_n} \text{ がマルチングール, } \forall n.$$

となることである。局所マルチングール全体の集合を \mathcal{M}_{loc} , 連続局所マルチングール全体の集合を $\mathcal{M}_{loc,c}$ と表す。

以下, (\mathcal{F}_t) は通常の条件を満たすとする.

定理 1.1.10. $M \in \mathcal{M}_{loc,c}$ とするとき, $\langle M \rangle_0 = 0$ なる $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ で $M^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{loc,c}$ となるものが唯一存在する.

定義 1.1.11 (二次変分). 上の $\langle M \rangle$ を M の二次変分という.

系 1.1.12.

1) 各 $t > 0$ に対して $[0, t]$ の分割列 $\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ をとり,

$$Q_s(M, \Delta_n) := \sum_{t_{i+1} < s} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_s - M_{t_j})^2, \quad t_j = \max_i \{t_i; t_i < s\},$$

$$|\Delta_n| := \max_{i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

として

$$\lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(M, \Delta_n) - \langle M \rangle_s| > \epsilon\right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

が成立する.

2) $M_0 = 0$ のとき,

$$M \in \mathcal{M}_{2,c} \iff E[\langle M \rangle_t] < \infty \quad \forall t$$

である. さらにこのとき $E[M_t^2] = E[\langle M \rangle_t]$ となっている.

いま $M \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対して, $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ と停止時刻列 (τ_n) が存在して,

$$E[M_{t \wedge \tau_n}^2 - \langle M \rangle_{t \wedge \tau_n}; A] = E[M_{s \wedge \tau_n}^2 - \langle M \rangle_{s \wedge \tau_n}; A], \quad 0 \leq s \leq t, \quad \forall A \in \mathcal{F}_s$$

であるが,

$$|M_{t \wedge \tau_n}^2 - \langle M \rangle_{t \wedge \tau_n}| \leq (M_t^*)^2 + \langle M \rangle_t$$

であり, 右辺第 1 項は Doob の不等式, 第 2 項は上の系より可積分であるからルベーグの優収束定理より,

$$E[M_t^2 - \langle M \rangle_t; A] = E[M_s^2 - \langle M \rangle_s; A], \quad 0 \leq s \leq t, \quad \forall A \in \mathcal{F}_s$$

となり, $M^2 - \langle M \rangle$ はマルチンゲールとなる. ブラウン運動 (B_t) の場合, $B_t^2 - t$ がマルチンゲールであることが確かめられるので $\langle B \rangle_t = t$ である.

系 1.1.13. $M, N \in \mathcal{M}_{loc,c}$ のとき,

$$\langle M, N \rangle := \frac{1}{4}(\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle) \in \mathcal{A}_c$$

とおくとこれは $A_0 = 0$, $MN - A \in \mathcal{M}_{loc,c}$ となる唯一の $A \in \mathcal{A}_c$ であり次が成り立つ.

各 $t > 0$ に対して $[0, t]$ の分割列 $\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ をとり,

$$Q_s(M, N, \Delta_n) := \sum_{t_{i+1} < s} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) + (M_s - M_{t_j})(N_s - N_{t_j}),$$

$$t_j = \max_i \{t_i; t_i < s\}$$

として

$$\lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} P(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(M, N, \Delta_n) - \langle M, N \rangle_s| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

命題 1.1.14. $M, N, L \in \mathcal{M}_{loc,c}$ とするとき次が成立する.

- 1) $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$
- 2) $\langle M + N, L \rangle = \langle M, L \rangle + \langle N, L \rangle$
- 3) $\langle aM, N \rangle = a\langle M, N \rangle \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- 4) 停止時刻 τ に対し, $\langle M^\tau, N^\tau \rangle_t = \langle M^\tau, N \rangle_t = \langle M, N \rangle_{t \wedge \tau}$

1.2 確率積分

以下では, フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ は常に (\mathcal{F}_t) は右連続で, 通常の条件を満たしているとする.

$$\mathcal{M}_2(T) := \{M = (M_t)_{t \in [0, T]}; E[M_T^2] < \infty, (M_t)_{t \in [0, T]} \text{ は右連続マルチングール}\}$$

$$\mathcal{M}_{2,c}(T) := \{M \in \mathcal{M}_2(T); (M_t)_{t \in [0, T]} \text{ は連続}\}$$

とすると,

補題 1.2.1.

- 1) $\mathcal{M}_2(T), \mathcal{M}_{2,c}(T)$ は $\|M\|_T := E[M_T^2]^{\frac{1}{2}}$ をノルムとするヒルベルト空間である.
- 2) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_{2,c}$ は $d(M, N) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|M - N\|_n \wedge 1}{2^n}$ を距離とする完備距離空間である.

$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対し,

$$\mathcal{L}_2(T, \langle M \rangle) := \left\{ \varphi; \varphi \text{ は発展的可測で } E \left[\int_0^T \varphi(s, \omega)^2 d\langle M \rangle_s \right] < \infty \right\}$$

$$\mathcal{L}_2(\langle M \rangle) := \left\{ \varphi; \varphi \text{ は発展的可測で } E \left[\int_0^T \varphi(s, \omega)^2 d\langle M \rangle_s \right] < \infty, \forall T \geq 0 \right\}$$

とする. ここで $\varphi \in \mathcal{L}_2(T, \langle M \rangle)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ に対し,

$$|\varphi|_T := E\left[\int_0^T \varphi(s, \omega)^2 d\langle M \rangle_s\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (|\varphi_1 - \varphi_2|_n \wedge 1)$$

とすると,

補題 1.2.2.

- 1) $\mathcal{L}_2(T, \langle M \rangle)$ は $|\cdot|_T$ をノルムとするヒルベルト空間である.
- 2) $\mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ は ρ を距離とする完備距離空間である.

次に,

$$\mathcal{L}_0 := \left\{ \varphi(t, \omega) = \sum_{i=0}^k \xi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t); 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1}, k = 1, 2, \dots, \xi_i \in b\mathcal{F}_{t_i} \right\}$$

とすると,

補題 1.2.3. \mathcal{L}_0 は $\mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ 内で稠密である.

以下, $M \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対して確率積分を定義する.

定義 1.2.4 ($\varphi \in \mathcal{L}_0$ に対する確率積分).

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{i=0}^k \xi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \in \mathcal{L}_0$$

に対し,

$$I(\varphi)(t, \omega) := \sum_{t_{i+1} < t} \xi_i(\omega) (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_l(\omega) (M_t - M_l), \quad t_l < t < t_{l+1}$$

を, φ の M に対する確率積分という. また,

$$I(\varphi)(t, \omega) = \int_0^t \varphi(s, \omega) dMs$$

と書くことにする.

定義 1.2.5 ($f \in \mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ に対する確率積分). $f \in \mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ に対し, 補題 1.2.3 より $f_n \in \mathcal{L}_0$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\int_0^T |f_n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 d\langle M \rangle_t\right] = 0 \quad \forall T.$$

ここで,

$$X_t^{(n)} := \int_0^t f_n(s, \omega) dM_s$$

とおくと, $\exists X_t^{(n_i)}, X_t \in \mathcal{M}_{s,c}$ で $\lim_{n_i \rightarrow \infty} d(X^{(n_i)}, X) = 0$ かつ,

$$P(X_t^{(n_i)} \rightarrow X_t, n_i \rightarrow \infty, \text{ 広義一様}) = 1$$

となる. さらにこの X_t は f_n のとり方によらない. この X_t を f の M の確率積分といい,

$$X_t = \int_0^t f dM_s$$

と表す.

定理 1.2.6.

- 1) $M \in \mathcal{M}_{2,c}$, $f \in \mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ のとき, $X_t = \int_0^t f(s, \omega) dM_s$ は, $X_0 = 0$ かつ
 $\langle X, N \rangle_t = \int_0^t f(s, \omega) d\langle M, N \rangle_s \quad \forall N \in \mathcal{M}_{2,c}$
 を満たす唯一の $X \in \mathcal{M}_{2,c}$ である.

- 2) $E[|X_t|^2] = E\left[\int_0^t |f(s, \omega)|^2 d\langle M \rangle_s\right].$

次に, $M \in \mathcal{M}_{loc,c}$ に対して確率積分を定義する.

定義 1.2.7 (局所マルチングールに対する確率積分). $M \in \mathcal{M}_{loc,c}$ と,

$$P\left(\int_0^T f(t, \omega)^2 d\langle M \rangle_t < \infty\right) = 1 \quad \forall T$$

となる発展的可測過程 $f(t, \omega)$ に対して

$$\tau_n := n \wedge \inf\{t \geq 0; \int_0^t f(s, \omega)^2 d\langle M \rangle_s \geq n\} \wedge \inf\{t \geq 0; |M_t| \geq n\}$$

とすると, $\tau_n \nearrow \infty$ a.s. であり,

$$\begin{aligned} M_t^{(n)} &= M_{t \wedge \tau_n} \in \mathcal{M}_{2,c} \\ f^{(n)}(t, \omega) &= f(t, \omega) \mathbf{1}_{\{\tau_n \geq t\}} \in \mathcal{L}_2(\langle M^{(n)} \rangle) \end{aligned}$$

となっているので, $I(f^{(n)})(t, \omega) := \int_0^t f^{(n)}(s, \omega) dM_s^{(n)}$ と定義できる. これから,

$$I(f)(t, \omega) := I(f^{(n)})(t, \omega) \quad 0 \leq t \leq \tau_n$$

として $I(f)$ を f の M による確率積分という.

定理 1.2.8. $M \in \mathcal{M}_{loc,c}$ と f s.t. $P(\int_0^t f(s, \omega)^2 d\langle M \rangle_s < \infty), \forall t$ なる発展的可測過程をとると, $X_t = \int_0^t f(s, \omega) dM_s$ は, $X_0 = 0$ かつ

$$\langle X, N \rangle_t = \int_0^t f(s, \omega) d\langle M, N \rangle_s \quad \forall N \in \mathcal{M}_{loc,c}$$

を満たす唯一の $X \in \mathcal{M}_{loc,c}$ である.

最後に連続半マルチングールについての確率積分を定義する. $(X_t), (Y_t)$ を連続半マルチングール, すなわち

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + M_t + A_t \\ Y_t &= Y_0 + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t \\ X_0, Y_0 &\in m\mathcal{F}_0, \quad M, \tilde{M} \in \mathcal{M}_{loc,c}, \quad A, \tilde{A} \in \mathcal{A}_c \end{aligned}$$

とする. A_t の全変動を $|A|_t$ と書いて

$$\int_0^t |f(s, \omega)|^2 d\langle M \rangle_s + \int_0^t |f(s, \omega)| d|A|_s < \infty \quad a.s. \quad \forall t$$

となる発展的可測関数 f の X_t による確率積分を

$$\int_0^t f(s, \omega) dX_s := \int_0^t f(s, \omega) dM_s + \int_0^t f(s, \omega) dA_s$$

と定義できる. また半マルチングール X_t, Y_t に対して $\langle X, Y \rangle_t := \langle M, \tilde{M} \rangle_t$ と定義すると, $[0, t]$ の分割列 (Δ_n) に対して,

$$\lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(X, Y, \Delta_n) - \langle X, Y \rangle_s| > \epsilon\right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

となることがわかる.

1.3 いくつかの定理, 命題

定理 1.3.1 (伊藤の公式). $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$ を連続半マルチングール,

$$X_t^i = X_0^i + M_t^i + A_t^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

とし, $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ のとき,

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n \int_0^t D_i f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t D_{ij} f(X_s) d\langle M_i, M_j \rangle_s$$

が成立し, $f(X_t)$ はまた連続半マルチングールとなる.

$X \in \mathcal{M}_{loc,c}$ に対し $e(X)_t := \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t)$ とするとき, $e(X) \in \mathcal{M}_{loc,c}$ は伊藤の公式から確かめられるが, さらに次がいえる.

命題 1.3.2. $X \in \mathcal{M}_{loc.c}$, $X_0 = 0$ a.s. とする.

$$P(\langle X \rangle_t \leq c_t) = 1 \quad \forall t > 0$$

となる定数 c_t があるとき, $e(X)$ はマルチングールである.

定理 1.3.3 (Girsanov の定理). $e(X)$ がマルチングール, (B_t) が P のもとで \mathcal{F}_t ブラウン運動であるとき,

$$\begin{aligned} \hat{P}(A) &:= E[e(X_T); A], \quad A \in \mathcal{F}_T \\ \hat{B}_t &:= B_t - \langle B, X \rangle_t \end{aligned}$$

とすれば (\hat{B}_t) は \hat{P} のもとで \mathcal{F}_t ブラウン運動となる.

定理 1.3.4 (マルチングールの表現定理). (B_t) をブラウン運動, \mathcal{F}_t を (B_t) の自然なフィルトレーションとしたとき, $M \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ に対して, $f \in \mathcal{L}_2(\langle B \rangle)$ があり,

$$M_t = \int_0^t f(s, \omega) dB_s$$

と表される.

最後に, 価格公式導出に必要となる条件付き期待値に関する命題を挙げておく.

命題 1.3.5. 確率変数 X, Y がそれぞれ $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$ に値をとり, X は \mathcal{B} 可測で Y は \mathcal{B} と独立とする. そのとき, $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ 上の非負ボレル可測関数 Ψ に対し,

$$\psi(x) := E[\Psi(x, Y)], \quad x \in E$$

は (E, \mathcal{E}) 上のボレル関数となり,

$$E[\Psi(X, Y)|\mathcal{B}](\omega) = \psi(X(\omega)), \quad a.s.$$

となる.

2 数理ファイナンス

この章では1次元のBlack-Sholesモデルにおけるヨーロピアンオプションの価格決定とヘッジを考察する。以下, (\mathcal{F}_t) はブラウン運動 (B_t) の自然なフィルトレーションとする。

2.1 Black-Sholes モデル

ヨーロピアンオプションとは、満期時刻 T において危険資産 S_T で決定される $f(S_T)$ の金額（ペイオフ）を受け取る権利のことである。

定義 2.1.1 (ヨーロピアンオプション). 満期 T のヨーロピアンオプションを、時刻 T で非負 \mathcal{F}_T 可測確率変数であるペイオフ h を得る権利とする。

オプションの売り手はその代金を安全資産 S_t^0 と危険資産 S_t に分けて運用し、満期時刻 T で買い手から請求されるペイオフ h を作り出さなければならない。これをペイオフのヘッジと言う。

Black-Sholes モデルでは安全資産 S_t^0 と危険資産 S_t の挙動が以下の微分方程式、

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= rS_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1 \\ dS_t &= S_t(\sigma dB_t + \mu dt), \quad S_0 = S \\ r, \sigma, \mu &> 0, \quad (B_t); \mathcal{F}_t - \text{適合標準ブラウン運動} \end{aligned}$$

に従うとし、満期時刻を T として $t \in [0, T]$ 上に限る。このとき S_t^0 と S_t はそれぞれ、

$$\begin{aligned} S_t^0 &= e^{rt} \\ S_t &= \exp \left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \end{aligned}$$

となる。危険資産の表現は、伊藤の公式を使って元の確率微分方程式を確認できる。

定義 2.1.2 (戦略, ポートフォリオ). \mathcal{F}_t 適合である \mathbb{R}^2 値確率過程

$$\Phi = (\Phi_t)_{t \in [0, T]} = (H_t^0, H_t)_{t \in [0, T]}$$

を戦略と言う。また、戦略 Φ に従って S_t^0 と S_t を運用する投資家の時刻 t での資産 $V_t(\Phi)$ をポートフォリオと言い、

$$V_t(\Phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

と表す。

定義 2.1.3 (自己資金調達的戦略). 戰略 Φ が自己資金調達的 (self-financing, 以下 s-f) であるとは、

$$\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty \quad a.s.. \tag{1}$$

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \quad a.s., \text{ for all } t \in [0, T] \tag{2}$$

を満たすことを言う。

危険資産の割引価格 $e^{-rt}S_t$, ポートフォリオの割引価格 $e^{-rt}V_t(\Phi)$ をそれぞれ \tilde{S}_t , $\tilde{V}_t(\Phi)$ と表す.

定義 2.1.4 (許容可能戦略 (admissible strategy)). 戰略 $\Phi = (H_t^0, H_t)_{t \in [0, T]}$ が許容可能 (admissible) とは, $\tilde{V}_t(\Phi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$ が, s-f であり,

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t(\Phi) &\geq 0 \quad \forall t \in [0, T], \\ E^*[\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t^2] &< \infty\end{aligned}$$

を満たすことをいう.

定義 2.1.5 (複製可能 (replicable)). オプションが複製可能とは, ペイオフ h がある許容可能戦略 Φ により,

$$h = V_T(\Phi) \quad a.s.$$

となることをいう.

命題 2.1.6. 戰略 Φ が定義 2.1.3 の (1) を満たすとき,

Φ が s-f.

\iff

$$\tilde{V}_t(\Phi) = V_0(\Phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \quad a.s., \text{ for all } t \in [0, T]$$

Proof

(\implies)

$\tilde{V}_t(\Phi)$ に伊藤の公式を使って,

$$\begin{aligned}d\tilde{V}_t(\Phi) &= -r\tilde{V}_t(\Phi)dt + e^{-rt}dV_t(\Phi) \\ &= -re^{-rt}(H_t^0 e^{rt} + H_t S_t)dt + e^{-rt}H_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt}H_t dS_t \\ &= H_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\ &= H_t d\tilde{S}_t\end{aligned}$$

である.(最後の等号は \tilde{S}_t に伊藤の公式を使っている)

$$\therefore \tilde{V}_t(\Phi) = V_0(\Phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$$

(\iff)

$V_t(\Phi) = e^{rt}\tilde{V}_t(\Phi)$ に伊藤の公式を使い,

$$\begin{aligned}dV_t(\Phi) &= e^{rt}H_t d\tilde{S}_t + rV_t(\Phi)dt \\ &= e^{rt}H_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) + r(H_t^0 S_t^0 + H_t S_t)dt \\ &= H_t dS_t + H_t^0 dS_t^0\end{aligned}$$

$$\therefore V_t(\Phi) = V_0(\Phi) + \int_0^t H_u dS_u + \int_0^t H_u^0 dS_u^0$$

□

2.2 價格公式

満期 T のヨーロピアンオプションの時刻 $t \leq T$ での価格を決定する \tilde{S}_t が,

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= -r\tilde{S}_t dt + e^{-rt}S_t(\sigma dB_t + \mu dt) \\ &= \tilde{S}_t (\sigma dB_t + (\mu - r)dt) \end{aligned}$$

であるから, $W_t = B_t + (\mu - r)t/\sigma$ として,

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t.$$

このとき, Girsanov の定理より,

$$\mathbb{P}^*(A) := E \left[\exp \left(\frac{r-\mu}{\sigma} B_T - \frac{1}{2} \left(\frac{r-\mu}{\sigma} \right)^2 T \right) : A \right], \quad A \in \mathcal{F}.$$

として \mathbb{P} と同値な確率測度 \mathbb{P}^* で $(W_t)_{t \in [0, T]}$ が \mathcal{F}_t 標準ブラウン運動となるものが存在する. S_t と同様に解いて,

$$\tilde{S}_t = S \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2).$$

さらに,

$$\mathbb{P}^*[\langle \sigma W \rangle_t = \sigma^2 t] = 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

だから命題 1.3.2 より, $(\tilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$ は \mathbb{P}^* の下で \mathcal{F}_t マルチングールとなっている. 以下, この \mathbb{P}^* による期待値を E^* と表す.

定理 2.2.1. Black-Sholes モデルにおいて, \mathbb{P}^* 二乗可積分な非負 \mathcal{F}_T 可測確率変数 h によって定義される任意のヨーロピアンオプションは複製可能であり, 複製ポートフォリオの時刻 t での価格 $V_t(\Phi)$ は,

$$V_t(\Phi) = E^*[e^{-r(T-t)}h | \mathcal{F}_t]$$

で与えられる.

Proof

$\forall h \in m\mathcal{F}_T^+$, s.t. $E^*[h^2] < \infty$ に対し,

$$M_t := E^*[e^{-rT}h | \mathcal{F}_t]$$

とすると $(M_t)_{t \in [0, T]}$ は \mathbb{P}^* の下で \mathcal{F}_t -マルチングールである. さらに

$$\begin{aligned} \infty > E^*[(e^{-rT}h)^2] &= E^* [E^*[(e^{-rT}h)^2 | \mathcal{F}_t]] \\ &\geq E^* [E^*[(e^{-rT}h) | \mathcal{F}_t]^2] \end{aligned}$$

であるから, $(M_t) \in \mathcal{M}_2$. 作り方から (W_t) の自然なフィルトレーションは (B_t) の自然なフィルトレーションと同じであるのでマルチングールの表現定理より,

$$\begin{aligned} \exists (K_t)_{t \in [0, T]} \quad s.t. \quad & \mathcal{F}_t \text{適合}, E^* \left[\int_0^t K_u^2 du \right] < \infty \\ & M_t = M_0 + \int_0^t K_u dW_u \quad \mathbb{P}^* - a.s. \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

よって戦略 $\Phi = (H_t^0, H_t)$ を

$$H_t := K_t / (\sigma \tilde{S}_t), \quad H_t^0 := M_t - H_t \tilde{S}_t$$

とおけば定義より

$$\begin{aligned} M_t &= H_t^0 + H_t \tilde{S}_t = \tilde{V}_t(\Phi), \\ \tilde{V}_T(\Phi) &= M_T = e^{-rT} h \text{ より } V_T(\Phi) = h \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(\Phi) &= \tilde{V}_0 + \int_0^t H_u \sigma \tilde{S}_u dW_u \\ &= \tilde{V}_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u. \end{aligned}$$

ゆえに Φ は命題 2.1.6 により s-f である.

$0 \leq M_t = \tilde{V}_t(\Phi), \forall t \geq 0$ と確率積分表現から $(M_t) \in \mathcal{M}_{2,c}$ であるから Doob の不等式より,

$$E^* \left[\sup_{t \in [0, T]} (\tilde{V}_t(\Phi))^2 \right] \leq 4E^*[M_T^2] < \infty$$

ゆえに Φ は許容可能である. □

上の定理より $E^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t]$ を時刻 t でのオプションの代金とすれば, その売り手はある複製戦略 Φ によってそれを運用し, 時刻 T で買い手から請求されるペイオフ $h = V_T(\Phi)$ を得ることができ,

$$\tilde{V}_T(\Phi) = E^*[e^{-rT} h | \mathcal{F}_t] + \int_t^T H_u d\tilde{S}_u$$

である. これより, ヨーロピアンオプションの時刻 t での価格は $E^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t]$ とする.

$h = f(S_T)$ と表されるとき,

$$\begin{aligned} V_t &= E^*[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= E^*[e^{-r(T-t)} f(S_t \frac{S_T}{S_t}) | \mathcal{F}_t] \\ &= E^*[e^{-r(T-t)} f(S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}) | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

いま, $S_t \in m\mathcal{F}_t$, $W_T - W_t$ は \mathcal{F}_t と独立, $f(x) \geq 0$ だから命題 1.3.5 より

$$V_t = E^*[e^{-r(T-t)} f(x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)})]|_{x=S_t}.$$

ここで,

$$F(t, x) := E^*[e^{-r(T-t)} f(x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)})]$$

とおくと上から $V_t = F(t, S_t)$ となっている。以下、具体例で V_t を計算する。

(1)(ヨーロピアンコールオプション)

$$h = f(S_T) = (S_T - K)^+ \quad K > 0$$

で定義されるオプションをヨーロピアンコールオプションという。このとき、

$$\begin{aligned} F(t, x) &= E^*[e^{-r(T-t)} (x e^{\sigma(W_T-W_t)+(r-\sigma^2/2)(T-t)} - K)^+] \\ &= E^*[(x e^{\sigma(W_T-W_t)-\sigma^2(T-t)/2} - K e^{-r(T-t)})^+] \\ &= E^*[(x e^{\sigma\sqrt{T-t}G-\sigma^2(T-t)/2} - K e^{-r(T-t)})^+] \\ &\quad (G \sim N(0, 1) \text{ on } \mathbb{P}^* \text{とした}) \end{aligned}$$

この期待値は, $x e^{\sigma\sqrt{T-t}G-\sigma^2(T-t)/2} - K e^{-r(T-t)} \geq 0$ 上で計算すればよく、

$$l := \frac{\log(K/x) + (\sigma^2/2 - r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

として、

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int_l^\infty (x e^{\sigma y \sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2} - K e^{-r(T-t)}) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &\quad (z = y - \sigma\sqrt{T-t} \text{ として変数変換し}) \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{l-\sigma\sqrt{T-t}}^\infty e^{-z^2/2} dz - K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_l^\infty e^{-y^2/2} dy \\ &= xN(\sigma\sqrt{T-t} - l) - K e^{-r(T-t)} N(-l) \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

とした。

(2)(多項式)

$f(S_T) = S_T^p$ $p \geq 1$ の場合.

$$\begin{aligned}
F(t, x) &= E^*[e^{-r(T-t)}(xe^{\sigma(W_T-W_t)+(r-\sigma^2/2)(T-t)})^p] \\
&= e^{((p-1)r-p\sigma^2/2)(T-t)}E^*[x^p e^{p\sigma\sqrt{T-t}G}] \\
&= e^{((p-1)r-p\sigma^2/2)(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^p e^{p\sigma\sqrt{T-t}-y^2/2}dy \\
&\quad (z = y - p\sigma\sqrt{T-t} \text{として変数変換し}) \\
&= x^p e^{((p-1)r-p\sigma^2/2+(p\sigma)^2)(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz \\
&= x^p e^{((p-1)r-p\sigma^2/2+(p\sigma)^2)(T-t)}.
\end{aligned}$$

2.3 複製戦略

$F(t, x) \in C^{1,2}([0, T) \times \mathbb{R})$ の場合,

$$\tilde{F}(t, x) := e^{-rt}F(t, xe^{rt})$$

とおく. $C^{1,2}([0, T) \times \mathbb{R})$ 関数 $\tilde{F}(t, x)$ に対し $t < T$ で伊藤の公式を適用し,

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t &= \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) \\
&= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \tilde{F}_x(u, \tilde{S}_u)d\tilde{S}_u + \int_0^t \tilde{F}_t(u, \tilde{S}_u)du + \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{F}_{xx}(u, \tilde{S}_u)(\sigma\tilde{S}_u)^2du \\
&= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \tilde{F}_x(u, \tilde{S}_u)\sigma\tilde{S}_u dW_u + \int_0^t K_u du \quad \left(K_u := \tilde{F}_t(u, \tilde{S}_u) + \frac{1}{2}\tilde{F}_{xx}(u, \tilde{S}_u)(\sigma\tilde{S}_u)^2\right).
\end{aligned}$$

ここで \tilde{V}_t がマルチングールより $\left(\int_0^t \tilde{F}_x(u, \tilde{S}_u)\sigma\tilde{S}_u dW_u + \int_0^t K_u du\right)$ がマルチングールである. $\tilde{F}_x(t, x)$ と \tilde{S}_t の連続性から

$$\int_0^t |\tilde{F}_x(u, \tilde{S}_u)\sigma\tilde{S}_u|^2 du < \infty \quad a.s..$$

よって,

$$\begin{aligned}
\exists \tau_n \quad s.t. \quad \tau_n \nearrow T \\
\int_0^{\tau_n} \tilde{F}_x(u, \tilde{S}_u)\sigma\tilde{S}_u dW_u \text{ がマルチングール.}
\end{aligned}$$

ゆえに $\int_0^{\tau_n} K_u du$ もマルチングールとなる. $\int_0^t K_u du$ は増加課程の差で定義されているので, $\int_0^{\tau_n} K_u du = 0 \quad \forall n$ となり,

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \tilde{F}_x(u, \tilde{S}_u)d\tilde{S}_u.$$

これを用いて戦略 $\Phi = (H_t^0, H_t)$ を

$$H_t := \tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t)$$

$$H_t^0 := \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - H_t \tilde{S}_t$$

とすれば

$$\tilde{V}_t(\Phi) = V_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$$

より Φ は s-f となる. これで $h = f(S_T)$ を複製する許容可能戦略 Φ が得られた.

以下, 前節の 2 例で複製戦略 $\tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t)$ を求める.

(1) ヨーロピアンコールオプション

$\tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t) = F_x(t, S_t)$ より $F_x(t, x)$ を計算すればよい. $\theta = T - t$, $n(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ として,

$$\begin{aligned} F_x(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(xN(\sigma\sqrt{\theta} - l) - Ke^{-r(\theta)}N(-l) \right) \\ &= N(\sigma\sqrt{\theta} - l) + xn(\sigma\sqrt{\theta} - l)\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\sqrt{\theta} - l) - Ke^{-r(T-t)}n(-l)\frac{\partial}{\partial x}(-l) \\ &= N(\sigma\sqrt{\theta} - l) + \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi\theta}} \left(xe^{-(\sigma\sqrt{\theta}-l)^2/2} - Ke^{-r\theta}e^{-l^2/2} \right) \\ &= N(\sigma\sqrt{\theta} - l) + \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi\theta}} e^{-(\sigma\sqrt{\theta}-l)^2/2} \left(x - Ke^{-r\theta+\sigma^2\theta-l\sigma\sqrt{\theta}} \right) \\ &= N(\sigma\sqrt{\theta} - l). \end{aligned}$$

(2) 多項式 $F(t, x) = x^p e^{((p-1)r-p\sigma^2/2+(p\sigma)^2)(T-t)}$ であったから,

$$F_x(t, x) = px^{p-1} e^{((p-1)r-p\sigma^2/2+(p\sigma)^2)(T-t)}.$$

3 シミュレーション

この章では, Excel を使って Black-Scholes モデルについてのいくつかのシミュレーションを行う.

3.1 \tilde{S}_t のシミュレーション

Step1: 標準正規分布確率変数を作る.

補題 3.1.1. a, b が $[0, 1]$ 上に一様分布する互いに独立な確率変数であるとき,

$$\sqrt{-2 \log(1-a)} \cos(2\pi b) \sim N(0, 1).$$

Proof

$X, Y \sim N(0, 1)$, i.i.d.のとき,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \int_0^2 \pi \int_0^\infty f(r, \theta) \frac{1}{2\pi} e^{-(r^2)/2} r dr d\theta \\
&\quad (r^2 = s \text{ と変数変換し}) \\
&= \int_0^2 \pi \int_0^\infty f(\sqrt{s}, \theta) \frac{1}{2\pi} e^{-(s)/2} \frac{1}{2} ds d\theta \\
&\quad (s = -2 \log(1-a), \theta = 2\pi b \text{ と変数変換し}) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 f(\sqrt{-2 \log(1-a)}, 2\pi b) da db.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta \\
&= \sqrt{-2 \log(1-a)} \cos(2\pi b)
\end{aligned}$$

とすれば $\sqrt{-2 \log(1-a)} \cos(2\pi b) \sim N(0, 1)$. □

Step2: 標準ブラウン運動を近似的に作る.

互いに独立な正規分布確率変数の列 $(G_i)_{i \geq 1}$ があるとき, $\Delta t > 0$ として,

$$\begin{cases} Y_0 := 0 \\ Y_{n+1} - Y_n := G_{n+1} \end{cases}$$

と決めれば, $Y_n = \sum_{i=1}^n G_i$ だから,

$$\sqrt{\Delta t} Y_n \sim N(0, n\Delta t).$$

$(W_t)_{t \geq 0}$ をブラウン運動として,

$(\sqrt{\Delta t} Y_0, \sqrt{\Delta t} Y_1, \dots, \sqrt{\Delta t} Y_n)$ は $(W_0, W_{\Delta t}, \dots, W_{n\Delta t})$ と同分布である.

なぜなら $n \geq m$ で $Y_n - Y_m$ と Y_m は独立なので, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し,

$$\begin{aligned}
& E[\exp(\sqrt{-1}\xi^* \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta t}Y_n \\ \vdots \\ \sqrt{\Delta t}Y_0 \end{pmatrix})] \\
&= E[\exp\{\sqrt{-1}(\xi_1\sqrt{\Delta t}(Y_n - Y_{n-1}) + (\xi_1 + \xi_2)\sqrt{\Delta t}(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + \cdots + (\xi_1 + \cdots + \xi_{n+1})\sqrt{\Delta t}Y_0)\}] \\
&= E[\exp\{\sqrt{-1}\xi_1\sqrt{\Delta t}(Y_n - Y_{n-1})\}] E[\exp\{\sqrt{-1}(\xi_1 + \xi_2)\sqrt{\Delta t}(Y_{n-1} - Y_{n-2})\}] \cdots \\
&\quad \cdots E[\exp\{\sqrt{-1}(\xi_1 + \cdots + \xi_{n+1})\sqrt{\Delta t}Y_0\}] \\
&= \exp \left\{ \frac{-\Delta t}{2} \xi^* \begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 0 \\ n-1 & n-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \xi \right\} \\
&= E[\exp(\sqrt{-1}\xi^* \begin{pmatrix} W_{n\sqrt{\Delta t}} \\ \vdots \\ W_0 \end{pmatrix})]
\end{aligned}$$

となるからである. この $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ によって, 危険資産課程 \tilde{S}_t は離散時刻 $n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$ で

$$\tilde{S}_{n\Delta t} = S \exp \left(\sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n G_i - \frac{\sigma^2}{2} n \Delta t \right)$$

と表現できる. 図 1 はこれを基に Excel で $r = 0.02$, $\sigma = 0.2$, $\Delta t = 1/1024$ として描いた. マクロコードは最後にまとめて示す.

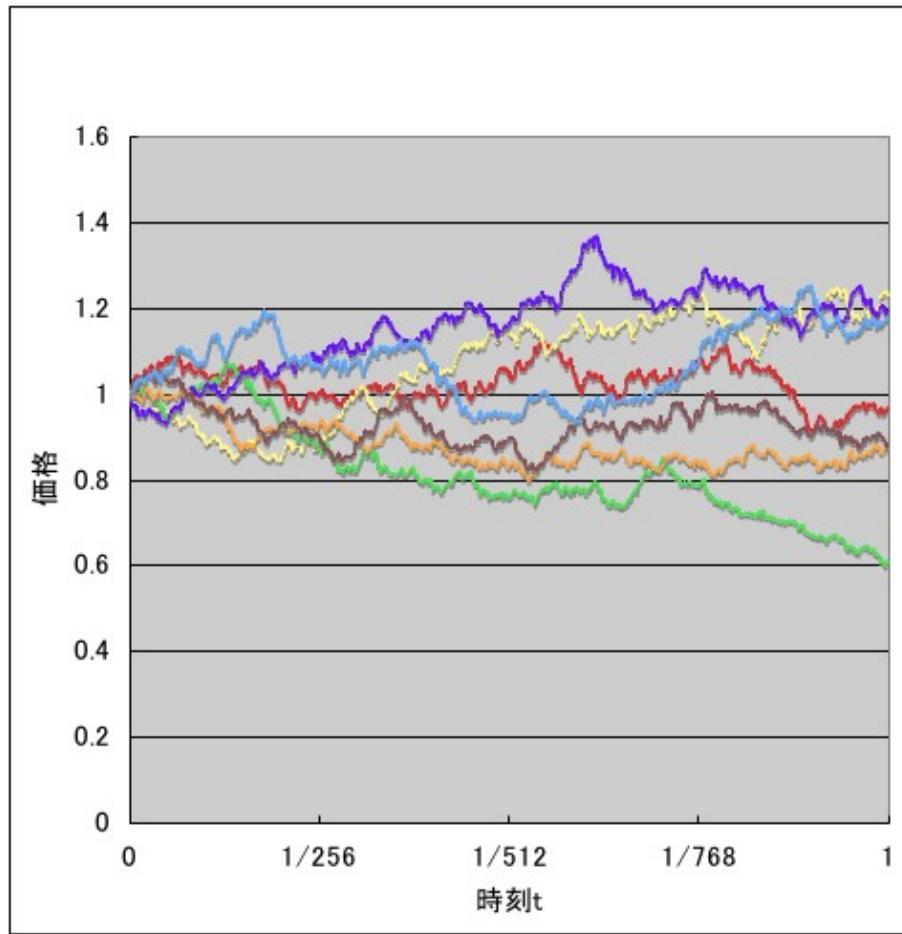


図 1: 危険資産過程 \tilde{S}_t

3.2 複製ポートフォリオ $\tilde{V}_t(\Phi)$ のシミュレーション

いま、オプションの複製戦略 H_t^m を

$$H_t^m := H_{kT/m}, \quad t \in [kT/m, (k+1)T/m], \quad K = 0, 1, \dots, m-1$$

とし複製ポートフォリオ $\tilde{V}_t(\Phi)$ を

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(\Phi^m) &:= V_0 + \int_0^t H_u^m d\tilde{S}_u \\ &= V_0 + \sum_{k=0}^{m-1} H_{kT/m} (\tilde{S}_{(k+1)T/m} - \tilde{S}_{kT/m}) \end{aligned}$$

で離散近似してシミュレーションすることを考える。この近似はヨーロピアンコールオプションと多項式オプションの場合 L^2 -ノルムで収束する。まずこれを証明する。

(1) ヨーロピアンコールオプションの場合: $H_u = N(\sigma\sqrt{\theta} - l)$, $|H_u| \leq 1$.

$$\begin{aligned} & E^* \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t H_u d\tilde{S}_u - \int_0^t H_u^m d\tilde{S}_u \right|^2 \right] \\ & \leq 4\sigma^2 E^* \left[\int_0^T (H_t - H_t^m)^2 (\tilde{S}_t)^2 dt \right]. \end{aligned}$$

いま,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} (H_t - H_t^m)^2 (\tilde{S}_t)^2 \\ & \leq 4 \sup_{t \in [0, T]} (\tilde{S}_t)^2 \quad : \text{可積分}. \end{aligned}$$

ゆえにルベーグの優収束定理より,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E^* \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t H_u d\tilde{S}_u - \int_0^t H_u^m d\tilde{S}_u \right|^2 \right] = 0.$$

(2) 多項式の場合

多項式の場合は収束が $1/m$ のオーダーであることもわかる.

$$\begin{aligned} H_t &= F_x(t, S_t) = pS_t^{p-1} e^{((p-1)r-p\sigma^2/2+(p\sigma)^2)(T-t)} \\ &= pS_t^{p-1} \alpha^{T-t}, \quad \alpha = e^{((p-1)r-p\sigma^2/2+(p\sigma)^2)} \end{aligned}$$

として,

$$\begin{aligned} H_t &= \tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t) \\ &= p(\tilde{S}_t e^{rt})^{p-1} \alpha^{T-t} \\ &= p\alpha^T (e^{r(p-1)-\log \alpha})^t \tilde{S}_t^{p-1} \\ &= p\alpha^T e^{\beta t} \tilde{S}_t^{p-1}, \quad \beta = r(p-1) - \log \alpha. \end{aligned}$$

\tilde{S}_t の p 乗可積分性から,

$$\begin{aligned} & E^* \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t H_u d\tilde{S}_u - \int_0^t H_u^m d\tilde{S}_u \right|^2 \right] \\ & \leq 4\sigma^2 E^* \left[\int_0^T (H_t - H_t^m)^2 (\tilde{S}_t)^2 dt \right] \\ & = 4\sigma^2 \int_0^T E^* [(H_t - H_t^m)^2 (\tilde{S}_t)^2] dt \end{aligned} \tag{◆}$$

である.

ここで, 伊藤の公式より,

$$\begin{aligned} dH_t &= p\alpha^T d \left(e^{\beta t} \tilde{S}_t^{p-1} \right) \\ &= p\alpha^T \left\{ e^{\beta t} (p-1) \tilde{S}_t^{p-2} d\tilde{S}_t + \beta e^{\beta t} \tilde{S}_t^{p-1} dt + \frac{1}{2} e^{\beta t} (p-1)(p-2) \tilde{S}_t^{p-3} (\sigma \tilde{S}_t)^2 dt \right\} \end{aligned}$$

であることから期待値の中身は、

$$\begin{aligned}
& (H_t - H_t^m)^2 (\tilde{S}_t)^2 \\
&= \left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{u \geq [mt/T]T/m\}} dH_u \right)^2 (\tilde{S}_t)^2 \\
&\leq \left[\int_0^t 2x \mathbf{1} dH_u + \int_0^t \mathbf{1}^2 d\langle H, H \rangle_u \right] (\tilde{S}_T^*)^2 \quad \left(x = \int_0^u \mathbf{1}_{\{v \geq [mu/T]T/m\}} dH_v \right) \\
&= p\alpha^T \int_0^t 2x \mathbf{1} e^{\beta u} (p-1) \tilde{S}_u^{p-2} (\tilde{S}_T^*)^2 d\tilde{S}_u + p\alpha^T \int_0^t 2x \mathbf{1} \beta e^{\beta u} \tilde{S}_u^{p-1} (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\quad + p\alpha^T \int_0^t x \mathbf{1} e^{\beta u} (p-1)(p-2) \tilde{S}_u^{p-3} (\sigma \tilde{S}_u)^2 (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\quad + (\alpha^T p(p-1))^2 \int_0^t \mathbf{1} e^{2\beta u} \tilde{S}_u^{2(p-2)} (\sigma \tilde{S}_u)^2 (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\leq 2p\alpha^T \int_0^t x \mathbf{1} e^{\beta u} (p-1) \tilde{S}_u^{p-2} (\tilde{S}_T^*)^2 d\tilde{S}_u \\
&\quad + p\alpha^T \int_0^t 2p\alpha^T (e^{\beta T} + 1) \tilde{S}_u^{p-1} \mathbf{1} |\beta| (e^{\beta T} + 1) \tilde{S}_u^{p-1} (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\quad + p\alpha^T \int_0^t p\alpha^T (e^{\beta T} + 1) \tilde{S}_u^{p-1} \mathbf{1} (e^{\beta T} + 1) (p-1)^2 \tilde{S}_u^{p-1} \sigma (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\quad + (\alpha^T p(p-1))^2 \sigma^2 \int_0^t \mathbf{1} (e^{2\beta T} + 1) \tilde{S}_u^{2(p-1)} (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\leq 2p\alpha^T \int_0^t x \mathbf{1} e^{\beta u} (p-1) \tilde{S}_u^{p-2} (\tilde{S}_T^*)^2 d\tilde{S}_u \\
&\quad + 2(p\alpha^T (e^{\beta T} + 1))^2 |\beta| \int_0^t \mathbf{1} \tilde{S}_u^{2(p-1)} (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\quad + (p\alpha^T (e^{\beta T} + 1))^2 (p-1)^2 \sigma \int_0^t \mathbf{1} \tilde{S}_u^{2(p-1)} (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\quad + (\alpha^T p(p-1))^2 (e^{2\beta T} + 1) \sigma^2 \int_0^t \mathbf{1} \tilde{S}_u^{2(p-1)} (\tilde{S}_T^*)^2 du \\
&\leq 2p\alpha^T \int_0^t x \mathbf{1} e^{\beta u} (p-1) \tilde{S}_u^{p-2} (\tilde{S}_T^*)^2 d\tilde{S}_u \\
&+ \{ 2(p\alpha^T (e^{\beta T} + 1))^2 |\beta| + (p\alpha^T (e^{\beta T} + 1))^2 (p-1)^2 \sigma + (\alpha^T p(p-1))^2 (e^{2\beta T} + 1) \sigma^2 \} (\tilde{S}_T^*)^{2p} \frac{T}{m} \quad (\star)
\end{aligned}$$

最後の式の確率積分項は、

$$\begin{aligned}
& E^* \left[\int_0^T \left(x \mathbf{1} e^{\beta u} (p-1) \tilde{S}_u^{p-2} (\tilde{S}_T^*)^2 \right)^2 du \right] \\
&\leq E^* \left[\int_0^T \left(p\alpha^T (e^{\beta T} + 1) \tilde{S}_u^{p-1} \mathbf{1} (e^{\beta T} + 1) (p-1) \tilde{S}_u^{p-2} (\tilde{S}_T^*)^2 \right)^2 du \right] \\
&\leq (p\alpha^T (p-1))^2 (e^{\beta T} + 1)^4 E^* \left[\int_0^T (\tilde{S}_T^*)^{4p} \left(\frac{1}{\tilde{S}_u} \right)^2 du \right]
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \sup_{u \in [0, T]} \left(\frac{1}{\tilde{S}_u} \right) &= \sup_{u \in [0, T]} \exp(-\sigma W_u - \sigma^2/2t) \exp(\sigma^2 t) \\ &\leq \sup_{u \in [0, T]} \exp(\sigma \hat{W}_u - \sigma^2/2t) \exp(\sigma^2 T) \quad (\hat{W}_t := -W_t \text{ は } \mathbb{P}^* \text{ で } \mathcal{F}_t\text{-ブラウン運動}) \end{aligned}$$

であるから, $\underline{\tilde{S}}_u := \left(\frac{1}{\tilde{S}_u} \right)$ として $\underline{\tilde{S}}_u$ は p 乗可積分である ($p \geq 0$). よって,

$$\begin{aligned} E^* \left[\int_0^T (\tilde{S}_T^*)^{4p} \left(\frac{1}{\tilde{S}_u} \right)^2 du \right] &\leq TE^*[(\tilde{S}_T^*)^{4p}(\underline{\tilde{S}}_T^*)^2] \\ &\leq \frac{T}{2} E^* \left[(\tilde{S}_T^*)^{8p} + (\underline{\tilde{S}}_T^*)^4 \right] \\ &< \infty. \end{aligned}$$

ゆえに (★) の確率積分項はマルチングールである. よって,

$$\begin{aligned} &4\sigma^2 \int_0^T E^*[(H_t - H_t^m)^2(\tilde{S}_t)^2] dt \\ &\leq 4(\sigma T)^2 \left\{ 2(p\alpha^T(e^{\beta T} + 1))^2 |\beta| + (p\alpha^T(e^{\beta T} + 1))^2(p-1)^2\sigma + (\alpha^T p(p-1))^2(e^{2\beta T} + 1)\sigma^2 \right\} \frac{1}{m} E^*[(\tilde{S}_T^*)^{2p}] \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} E^*[(\tilde{S}_T^*)^{2p}] &\leq \left(\frac{2p}{2p-1} \right)^{2p} E^*[(\tilde{S}_T)^{2p}] \\ &= \left(\frac{2p}{2p-1} \right)^{2p} S^{2p} e^{-p\sigma^2 T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{2p\sigma y - y^2/(2T)} dy \\ &\quad (z = \frac{y}{\sqrt{T}} - 2p\sigma\sqrt{T} \text{ として変数変換}) \\ &= \left(\frac{2p}{2p-1} \right)^{2p} S^{2p} e^{(2p-1)\sigma^2 p T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2} dz = \left(\frac{2p}{2p-1} \right)^{2p} S^{2p} e^{(2p-1)\sigma^2 p T} \end{aligned}$$

と評価できる. ゆえに,

$$(\spadesuit) \leq \text{Const} \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \quad as \quad m \longrightarrow \infty.$$

以下は $t \mapsto \tilde{V}_t(\Phi^m)$ のグラフと, $\tilde{V}_t(\Phi) - \tilde{V}_t(\Phi^m)$ の平均と分散 (サンプル数 100, $m \leq 4069$) のグラフである. さらに \tilde{S}_t のシミュレーションと $t \mapsto \tilde{V}_t(\Phi^m)$ のグラフの Excel のマクロコードを示しておく. 使用した乱数は <http://www001.upp.so-net.ne.jp/isaku/rand.html> の「VBA によるメルセンヌツイスター」で,

NextUnifMt : 発生, RandomizeMt : 初期化.

またヘッジシミュレーションの乱数の種は

$$\begin{aligned} \text{ヨーロピアンコールオプション} &: \text{Rnd}(-9) * 10^9 \\ \text{多項式オプション} &: \text{Rnd}(-4) * 10^9 \end{aligned}$$

とした。

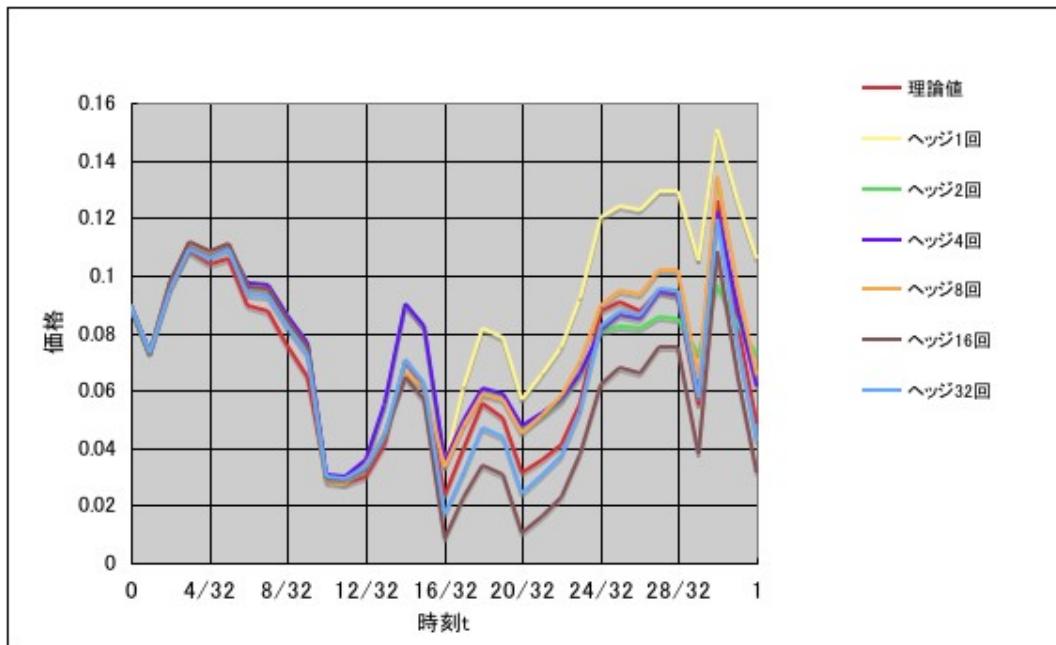


図 2: 離散近似複製ポートフォリオを用いたヨーロピアンコール価格の変動 $V_t(\Phi^m)$

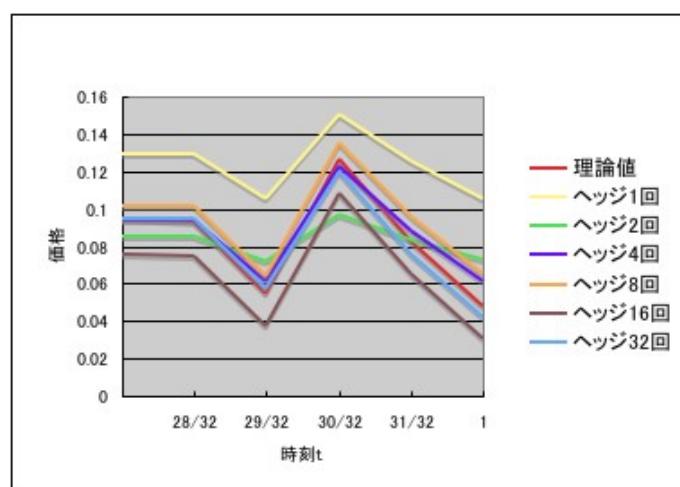


図 3: 拡大

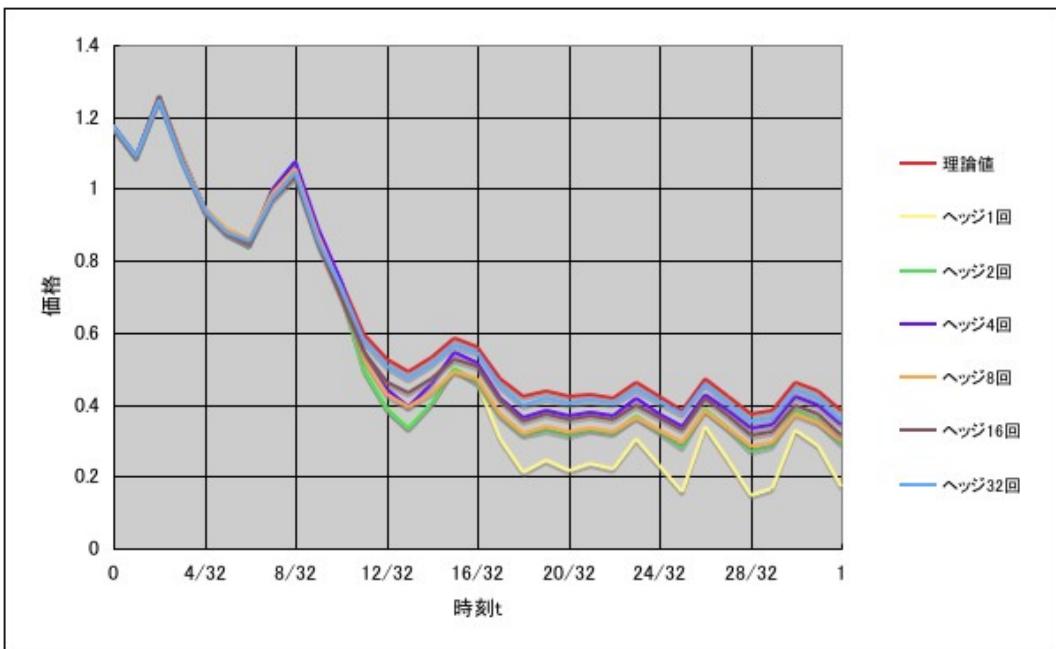


図 4: 離散近似複製ポートフォリオを用いた多項式オプション価格の変動 $V_t(\Phi^m)$

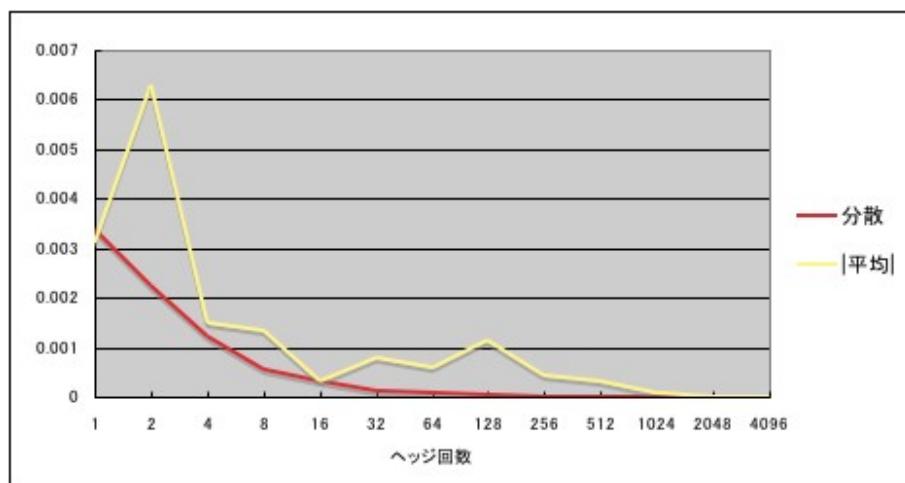


図 5: ペイオフとの誤差 $\tilde{V}_t(\Phi) - \tilde{V}_t(\Phi^m)$ (ヨーロピアンコール)

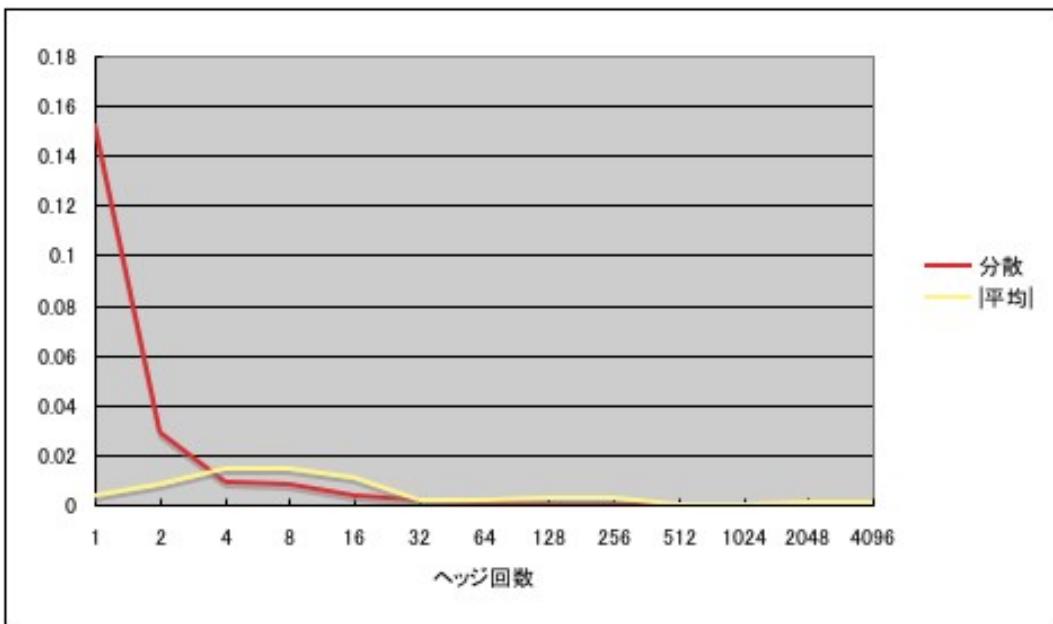


図 6: ペイオフとの誤差 $\tilde{V}_t(\Phi) - \tilde{V}_t(\Phi^m)$ (多項式)

以下, ■を付けた部分は数行で表記してあるがコード上 1 行の式である.
 (1) \tilde{S}_t のマクロコード

```

Sub St()
  Dim c(1024) As Double
  q = 0.2
  r = 0.02
  s = 1
  n = 1024
  Const pi = 3.14159265358979
  RandomizeMt

  For h = 1 To 7
    Cells(44, h + 1) = s

    For i = 1 To n
      a = NextUnifMt
      b = NextUnifMt
      c(i) = Exp((1 / 2) * Log(-2 * Log(1 - a)) * Cos(2 * pi * b))
    Next i

    For i = 1 To n
      Sum = 0
  
```

```

For j = 1 To i
    Sum = Sum + c(j)
Next j
■ Cells(44 + i, h + 1) = s * Exp((-q^2 / 2)*i / n
■                               + q* Exp((1 / 2)* Log(1 / n))* Sum)
Next i
Next h
End Sub

```

(2) 複製ポートフォリオのマクロコード(ヨーロピアンコールのみ)

```

Sub hedgeEC0()

q = 0.2
r = 0.02
s = 1
k = 1
n = 32  '最大ヘッジ回数.
T = 1  '満期時刻.
dt = Exp((1 / 2) * Log(T / n))  'sqrt(dt)
Const pi = 3.14159265358979
Dim c(32) As Double
Dim st(32) As Double

'危険資産のパスを一つ作る.
RandomizeMt
For i = 1 To n
    a = NextUnifMt
    b = NextUnifMt
    c(i) = Exp((1 / 2) * Log(-2 * Log(1 - a))) * Cos(2 * pi * b)
Next i

For i = 1 To n
    Sum = 0
    For j = 1 To i
        Sum = Sum + c(j)
    Next j
    st(i) = s * Exp((r - q^2 / 2) * T* i / n + q * dt * Sum)
Next i

```

’オプション割引価格理論値 $t=0$ の算出.

```
■ e = s*Application.WorksheetFunction.NormSDist(
■   (Log(s/k)+(r+q^2/2)*T)/(q*Exp((1/2)*Log(T)))
■ )
■ - k*Exp(-r*T)*Application.WorksheetFunction.NormSDist(
■   (Log(s/k)+(r+q^2/2)*T)/(q*Exp((1/2)*Log(T)))-q*Exp((1/2)*Log(T))
■ )
)
```

```
For i = 1 To 7
```

```
  Cells(45, i) = e
```

```
Next i
```

’オプション割引価格理論値 $t=T*l/n$ の算出 ($l=1, \dots, n-1$).

```
l = 1
```

```
Do While l < n
```

```
■ Cells(45 + l, 1) = Exp(-r*T*l/n)*(
■   st(l)*Application.WorksheetFunction.NormSDist(
■     (Log(st(l)/k)+(r+q^2/2)*T*(1-l/n))/(q*Exp((1/2)*Log(T*(1-l/n))))
■   )
■ -k*Exp(-r*T*(1-l/n))*Application.WorksheetFunction.NormSDist(
■   (Log(st(l)/k)+(r+q^2/2)*T*(1-l/n))/(q*Exp((1/2)*Log(T*(1-l/n))))
■   -q*Exp((1/2)*Log(T*(1-l/n)))
■   )
■
)
```

```
l = l + 1
```

```
Loop
```

```
y = Exp(-r * T) * (Abs(st(n) - k) + st(n) - k) / 2 , 割引ペイオフ ( $t=T$ ).
Cells(45 + n, 1) = y
```

’ヘッジシミュレーション開始.

```
For w = 1 To 6
```

’戦略は 2^{w-1} 回変更. すなわち 1, 2, 4, 8, 16, 32 回の 6 種.

’1回目, $t = 0$.

```
■ d = Application.WorksheetFunction.NormSDist(
■   (Log(s/k)+(r+q^2/2)*T)/(q*Exp((1/2)*Log(T)))
■ )
,
```

’危険資産持ち分 $t=0$.

dd = (e - d * s) , 安全資産持ち分 $t=0$.

’ ヘッジ 2 回目までの所持資金の推移算出.

```
i = 1
Do While i < n / 2^(w - 1)
    Cells(45 + i, 1 + w) = d * st(i) * Exp(-r * T * i / n) + dd
    i = i + 1
Loop
```

’ ヘッジ回数 2 以上の場合.

```
If 2^(w - 1) > 1 Then
    For l = 1 To 2^(w - 1) - 1
```

’ 戰略の算出 ($t=T*l/2^{w-1}$).

```
e1 = d * st(l * n / 2^(w - 1)) * Exp(-r * T * l / 2^(w - 1)) + dd
    ’ 所持資金 ( $t=T*l/2^{w-1}$ ).
Cells(45 + l * n / 2^(w - 1), 1 + w) = e1
```

```
■ d = Application.WorksheetFunction.NormSDist(
■     (Log(st(l*n/2^(w-1))/k)+(r+q^2/2)*T*(1-l/2^(w-1)))
■         / (q*Exp((1/2)*Log(T*(1-l/2^(w-1))))))
■ )
```

’ 危険資産の持ち分 ($t=T*l/2^{w-1}$).

```
dd = (e1 - st(l * n / 2^(w - 1)) * Exp(-r * T * l / 2^(w - 1)) * d)
    ’ 安全資産の持ち分 ( $t=T*l/2^{w-1}$ ).
```

’ 次回ヘッジまでの所持資金の推移算出.

```
i = l * n / 2^(w - 1) + 1
Do While i < (l + 1) * n / 2^(w - 1)
    Cells(45 + i, 1 + w) = d * st(i) * Exp(-r * T * i / n) + dd
    i = i + 1
Loop
```

Next l

Else:

End If

’ 所持資金 $t=T$

```
Cells(45 + n, 1 + w) = d * st(n) * Exp(-r * T) + dd
```

Next w

End Sub

謝辞

最後になりましたが、2年間に渡り親身に御指導を頂きました谷口説男教授に深く感謝します。

参考文献

- [1] 長井英生,(2003), 確率微分方程式, 共立出版.
- [2] I. カラザス,S.E. シュレーブ, 渡邊壽夫訳,(2008), ブラウン運動と確率積分, シュプリンガー・ジャパン.
- [3] Damian Lamberton,Bernard Lapeyre,(2008),Introduciton to Stochastic Calculus Applied to Finance,Chapman and Hull.
- [4] 湯前 祥二, 鈴木 輝好,(2000), モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店
- [5] D.Williams,(1991), Probability with Martingales. Cambridge University Press.
- [6] 和田維作, 良い乱数・悪い乱数,<http://www001.upp.so-net.ne.jp/isaku/rand.html>

