無裁定の判定条件について

九州大学大学院数理学府数理学専攻
修士課程２年
原 啓輔
指導教員：谷口 説男 教授

修士論文

平成２０年１月２９日

.

序文

数理ファイナンスの基本的な結果で，金融資産の価格過程に対する同値マルチンゲール測度の存在と裁定機会が存在しないことが”本質的に”同値であるという原則がある．ここで”本質的に”とは何を意味するのかが問題となるが，正確には市場が条件 no free lunch with vanishing risk を満たすことと同値マルチンゲール測度が存在することが同値である．このことを価格付けの基本定理という．条件 no free lunch with vanishing risk については 4.3 節で詳細に議論する．この修士論文では，Freddy Delbaen と Walter Schachermayer の『*A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing.*』(文献 [3]) を参考に，一般的な仮定のもとで価格付けの基本定理を厳密に証明することと，それを派生商品の価格付けに応用することを目標とする．議論の跳びや，証明の誤りは適宜修正した．

価格付けは以下の手順でおこなう．まず，金融資産の価格過程に対する同値マルチンゲール測度を求める．価格付けの基本定理より，同値マルチンゲール測度が存在するならば，市場は条件 no free lunch with vanishing risk を満たすことがわかる．逆に市場が no free lunch with vanishing risk を満たすことがわかっていれば，同値マルチンゲール測度の存在が保障されている．同値マルチンゲール測度のもとマルチンゲール理論，特にマルチンゲール表現定理を適用することで，派生商品 f を価格 $\mathbb{E}_Q[f]$ で (すなわち $f - \mathbb{E}_Q[f]$ を) 市場に加えても裁定機会が生じないことがわかる．このような価格を無裁定価格という．

以下，各章で取り扱う話題を紹介する．1 章では，有限確率空間上のモデルにおいて，投資戦略，許容可能，無裁定条件などの重要な概念を定義する．また，価格付け理論の主な結果を証明する．この段階では測度や確率変数を $\mathbb{R}^N$ の元と対応させて考えることができるため，証明は比較的容易である．章の最後に CRR モデルを定義し，価格付けの基本定理にもとづいた派生商品の価格計算をおこなう．

2 章では，連続な時間パラメータを持つ一般のフィルター付き確率空間上のモデルを考える為に必要な，確率積分などの概念を定義する．主に文献 [14] を参考にした．

3 章以降では，一般のフィルター付き確率空間上のモデルを考える．3 章では投資戦略を単純投資戦略に限定し議論する．単純投資戦略とは，ある停止時刻で金融商品を買って保有し，それ以降の停止時刻に売却する投資戦略，及びそれらの線形結合である．この場合，1 章と同様の無裁定条件は同値局所マルチンゲールの存在条件と同値でないことがわかる．無裁定条件に近い条件 no free lunch が同値局所マルチンゲールの存在条件と同値であること (Kreps-Yan の定理) を示す．

4 章では，条件 no free lunch with vanishing risk を定義し，この条件が同値マルチンゲール測度の存在条件と同値であること (価格付けの基本定理) を証明する．また，4.6 節ではこの定理を応用し，完備性に関連する定理を証明する．4.7 節では，条件 no free lunch with vanishing risk よりも強い無裁定に関連する条件，no free lunch with bounded risk について議論する．

5 章では，Black-Scholes モデルと伊藤過程のモデルにおいて派生商品の無裁定価格の計算をおこなう．

目 次

1　有限確率空間上の市場モデル

1.1　モデルの定義

この節ではこの章を通して考える有限確率空間上の市場モデルを定義する．$\Omega = \{\omega_1, \cdots \omega_N\}$，$\mathcal{F} = 2^\Omega$，$n = 1, \cdots, N$ に対し $P[\omega_n] = p_n > 0$ とする．この仮定では $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$，$L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$，$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$[1]などは同じだが，一般化を想定し区別する．自然数 $T \geq 1$ を固定する．$(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ は Ω 上のフィルトレーションとし，$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ と仮定する．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 f は $f = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{1}_{A_j}$，$A_j \in \mathcal{F}$ の形をしている．

Definition 1.1.1. 市場モデルとはフィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T)$ 上の $\mathbb{R}^{d+1}$ 値 $\mathcal{F}_t$-適合確率過程 $\hat{S} = \left(\hat{S}_t\right)_{t=0}^T = \left(\hat{S}_t^0, \hat{S}_t^1, \cdots, \hat{S}_t^d\right)_{t=0}^T$ のことをいう．$\hat{S}^0$ を価値標準財 (*numéraire*) と呼び，任意の t に対し $\hat{S}_t^0 > 0$，$\hat{S}_0^0 = 1$ と仮定する．

Definition 1.1.2. 投資戦略とは $\mathbb{R}^{d+1}$ 値可予測確率過程 $\left(\hat{H}_t\right)_{t=1}^T = \left(\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1, \cdots, \hat{H}_t^d\right)_{t=1}^T$，つまり $\hat{H}_t$ は $\mathcal{F}_{t-1}$-可測となる確率過程のことをいう．

Definition 1.1.3. 任意の $t =, \cdots, T-1$ に対し，

$$\left(\hat{H}_t, \hat{S}_t\right) = \left(\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t\right)$$

が成り立つ時，戦略 $\left(\hat{H}_t\right)_{t=1}^T$ は自己充足的 (self financing) であるという．

自己充足的戦略 $\hat{H}$ によるポートフォリオの時刻 t における価値は

$$\hat{V}_t = \left(\hat{H}_t, \hat{S}_t\right) = \left(\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t\right)$$

である．

$\mathbb{R}^d$ 値過程 S を $j = 1, \cdots, d$，$t = 0, \cdots, T$ に対し $S_t^j = \frac{\hat{S}_t^j}{\hat{S}_t^0}$ と定義する．S は時刻 t における価値標準財の価値 $\hat{S}_t^0$ で割引いた価格過程である．自己充足的戦略 $\left(\hat{H}_t\right)_{t=1}^T = \left(\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1, \cdots, \hat{H}_t^d\right)_{t=1}^T$ から第 0 座標を除いた $\mathbb{R}^d$ 値過程を $(H_t)_{t=1}^T = \left(H_t^1, \cdots, H_t^d\right)_{t=1}^T$ とする．$\mathbb{R}^d$ 値可予測過程が与えられれば，上の関係を満たす自己充足的戦略が一意に決まる．

$t = 0, \cdots, T$ に対し $V_t = \frac{\hat{V}_t}{\hat{S}_t^0}$ とする．$\hat{H}_1^0 = 0$ とすると，

$$\hat{V}_0 = V_0 = \sum_{j=1}^d H_1^j S_0^j$$

である．資産の増分を $\Delta V_{t+1} = V_{t+1} - V_t$ とすると，

$$\begin{aligned} \Delta V_{t+1} &= V_{t+1} - V_t \\ &= \sum_{j=0}^d \hat{H}_{t+1}^j \frac{\hat{S}_{t+1}^j}{\hat{S}_{t+1}^0} - \sum_{j=0}^d \hat{H}_{t+1}^j \frac{\hat{S}_t^j}{\hat{S}_t^0} \\ &= \left(H_t, \Delta S_{t+1}^j\right). \end{aligned}$$

ここで $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^d$ の内積とする．満期時の資産 V_T は

$$V_T = V_0 + \sum_{t=1}^T (H_t, \Delta S_t)$$

である．

[1] Ω から $\mathbb{R}$ への $\mathcal{F}$-可測関数全体を $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と記す.

Definition 1.1.4. $S = \left(S^1, \cdots, S^d\right)$ は (割引いた) 市場モデルとする．投資戦略は $\mathbb{R}^d$ 値可予測過程 $(H_t)_{t=1}^T = \left(H_t^1, \cdots, H_t^d\right)_{t=1}^T$ とする．投資戦略全体を $\mathcal{H}$ とする．

$H \in \mathcal{H}$ に対し，

$$(H \cdot S)_t = \sum_{u=1}^{t} (H_u, \Delta S_u), \quad t = 0, \cdots T$$

と定義する．確率積分 $H \cdot S$ を $\mathbb{R}$ 値過程 $((H \cdot S)_t)_{t=0}^T$ とする．

1.2 価格付けの基本定理

この節では無裁定条件を定義し，価格付けの基本定理を証明する．

Definition 1.2.1. $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の部分集合 K を

$$K = \{(H \cdot S)_T \mid H \in \mathcal{H}\}$$

と定義する．

$$C = \{g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid f \geq g \text{ となる } f \in K \text{ が存在する }\}$$

と定義する．$a \in \mathbb{R}$ に対し，$K_a = a + K$，$C_a = a + C$ とする．

K は初期投資 0 の投資戦略から得られる，満期時の資産高を表す確率変数全体の集合である．C は凸錐である．

Definition 1.2.2.

$$K \cap L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$$

が成り立つ時，市場 S は無裁定条件を満たすという．この条件は

$$C \cap L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$$

が成り立つことと同値である．

Proposition 1.2.3. S が無裁定条件を満たすならば，$C \cap (-C) = K$ が成り立つ．

Proof

$g \in C \cap (-C)$ とすると，$g = f_1 - h_1 = f_2 + h_2$ となる $f_1, f_2 \in C$ と $h_1, h_2 \in L_+^0$ が存在する．無裁定条件より $f_1 - f_2 = h_1 + h_2 \in K \cap L_+^0 = \{0\}$ となり $f_1 = f_2$ が成り立つ．よって $h_1 + h_2 = 0$ となり，$h_1 = h_2 = 0$ が成り立つ．したがって $g \in f_1 = f_2 \in K$ となる．逆は明らかである．

□

Definition 1.2.4. $Q \sim P$(Q は P と同値な測度) かつ S が Q のもとマルチンゲールになる時，確率測度 Q は S に対する同値マルチンゲール測度という．S が確率測度 Q のもとマルチンゲールになる時，確率測度 Q は S に対するマルチンゲール測度という．

$\mathcal{M}^e(S)$ を全ての同値マルチンゲール測度の集合，$\mathcal{M}^a(S)$ を全てのマルチンゲール測度の集合とする．今の確率空間の設定では，$Q \sim P$ を満たす必要十分条件は任意の $\omega \in \Omega$ に対し $Q[\omega] > 0$ となることである．

Lemma 1.2.5. $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 Q に対し次の (1)(2)(3) は同値である．
(1)$Q \in \mathcal{M}^a(S)$.
(2)$\mathbb{E}_Q[f] = 0 \quad \text{for} \quad \forall f \in K$.
(3)$\mathbb{E}_Q[g] \leq 0 \quad \text{for} \quad \forall g \in C$.

Proof
$K \subset C \cap (-C)$ と C，K の定義より (2) と (3) が同値であることは明らかである．(2) と $t = 1, \cdots T$，$x \in \mathbb{R}^d$，$A \in \mathcal{F}_{t-1}$ に対し $\mathbb{E}_Q[(x\mathbf{1}_A, \Delta S_t)] = 0$ が成り立つことは同値である．これは S が Q のもとマルチンゲールであることと同値である．

□

測度 Q に対し $(Q[\omega_1], \cdots, Q[\omega_N])$ を対応させることによって，測度に各座標が 0 以上で，各座標の和が 1 となる $\mathbb{R}^N$ の元が対応する．また，$\mathbb{R}$-値確率変数 f に対し $(f(\omega_1), \cdots, f(\omega_N))$ を対応させることによって，$\mathbb{R}$-値確率変数に対し $\mathbb{R}^N$ の元が対応する．期待値 $\mathbb{E}_Q[f]$ は $\mathbb{R}^N$ の内積 (Q, f) に対応する．次の証明では，$\mathbb{R}^N$ 上で Hahn-Banach の定理を適用し，$Q \in \mathbb{R}^N$ を定義した後に，再び Q を測度とみなす．

Theorem 1.2.6 (価格付けの基本定理). $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T)$ 上の市場 S に対し，次の (1) と (2) は同値である．
(1)S は無裁定条件を満たす.
(2)$\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$.

Proof
(2) $\Rightarrow$ (1)：$Q \in \mathcal{M}^e(S)$ とする．Lemma1.2.5. より任意の $g \in C$ に対し $\mathbb{E}_Q[g] \leq 0$ が成り立つ．$g \in C \cap L^0_+$，$g \neq 0$ とすると Q と P は同値なので，$\mathbb{E}_Q[g] > 0$ となり矛盾する．

(1) $\Rightarrow$ (2)：$K \cap L^0_+ = \{0\}$ と仮定する．

$$\mathbb{P} = \left\{ \sum_{n=1}^N \mu_n \mathbf{1}_{\{\omega_n\}} \middle| \mu_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^N \mu_n = 1 \right\}$$

とする．$\mathbb{P}$ と K は互いに素であり，$\mathbb{P}$ は凸コンパクト集合，K は凸閉集合である．Hahn-Banach の定理より，

$$\begin{aligned} (Q, f) &\leq \alpha \quad \text{for} \quad f \in K \\ (Q, h) &\geq \beta \quad \text{for} \quad h \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

となる $Q \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)^* = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と $\alpha < \beta$ が存在する．K は線形空間であり錐なので，$\alpha = 0$ である．$f \in K$ とすると $-f \in K$ なので $(Q, f) = 0$ となる．また $\beta > 0$ なので，$I = (1, \cdots, 1)$ とすると $(Q, I) > 0$ である．$(Q, I) = 1$ となるよう Q を標準化する．Lemma1.2.5. より $Q \in \mathcal{M}^a(S)$ である．任意の n に対し $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}} \in \mathbb{P}$ なので $Q[\omega_n] > 0$ となり，Q は P と同値である．

□

Corollary 1.2.7. S は無裁定条件を満たすとする．$f \in K_a$，つまり $a \in \mathbb{R}$ と $H \in \mathcal{H}$ に対し $f = a + (H \cdot S)_T$ とする．この時 a と過程 $H \cdot S$ は一意であり，任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ に対し以下が成り立つ．

$$a = \mathbb{E}_Q[f], \quad a + (H \cdot S)_t = \mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_t]. \quad (*)$$

Proof
まず a の一意性を示す．$a^1 > a^2$ かつ $f = a^1 + (H^1 \cdot S)_T = a^2 + (H^2 \cdot S)_T$ とすると，$\big((H^2 - H^1) \cdot S\big)_T = a^1 - a^2 > 0$ となり無裁定条件に矛盾する．

次に $H\cdot S$ の一意性を示す．$H^1, H^2 \in \mathcal{H}$，$0 \le t \le T$ に対し，$f = a + (H^1\cdot S)_T = a + (H^2\cdot S)_T$ かつ $(H^1\cdot S)_t \neq (H^2\cdot S)_t$ と仮定する．$A = \{(H^1\cdot S)_t - (H^2\cdot S)_t\}$ とする．$s \le t$ に対し $H_s = 0$，$s > t$ に対し $H_s = \left(H_s^2 - H_s^1\right)\mathbf{1}_A$ とすると，H は可予測である．

$$(H\cdot S)_T = \left(\left(H^1\cdot S\right)_t - \left(H^2\cdot S\right)_t\right)\mathbf{1}_A$$

となり無裁定条件に矛盾する．

$Q \in \mathcal{M}^e(S)$ とすると，$H\cdot S$ は Q-マルチンゲールなので $(*)$ が成り立つ．

□

C の極 C^0 を

$$C^0 = \{g \in L^1 \mid \text{任意の } f \in C \text{ に対し } (f,g) \le 0\}$$

と定義する．$\mathcal{M}^a(S)$ で生成される錐 $(\mathcal{M}^a(S))$ を

$$(\mathcal{M}^a(S)) = \{rf \mid r \in \mathbb{R}_+, \quad f \in \mathcal{M}^a(S)\}$$

と定義する．双極定理より，$C = C^{00}$ である．

Proposition 1.2.8. S は無裁定条件を満たすとする．$C^0 = (\mathcal{M}^a(S))$ であり，$\mathcal{M}^e(S)$ は $\mathcal{M}^a(S)$ で稠密である．また，次の (1)(2)(3) は同値である．
(1)$g \in C$.
(2)$\mathbb{E}_Q[g] \le 0 \quad \text{for} \quad \forall Q \in \mathcal{M}^a(S)$.
(3)$\mathbb{E}_Q[g] \le 0 \quad \text{for} \quad \forall Q \in \mathcal{M}^e(S)$.

Proof

Lemma1.2.5. より

$$\mathcal{M}^a(S) = \{Q \in \mathbb{P} \mid \mathbb{E}_Q[g] \le 0 \quad \text{for} \quad \forall g \in C\}$$

である．よって，

$$(\mathcal{M}^a(S)) = \{Q \in L^1_+ \mid (Q,g) \le 0 \quad \text{for} \quad \forall g \in C\}$$

である．$C \supset L^\infty_-$ なので $C^0 \subset L^1_+$ である．したがって，$C^0 = (\mathcal{M}^a(S))$ が成り立つ．

$$\begin{aligned} C &= C^{00} \\ &= (\mathcal{M}^a(S))^0 \\ &= \{g \in L^\infty \mid (f,g) \le 0 \quad \text{for} \quad \forall Q \in \mathcal{M}^a(S)\} \end{aligned}$$

となり，(1) と (2) は同値である．

無裁定条件より $Q^* \in \mathcal{M}^e(S)$ が存在する．$Q \in \mathcal{M}^a(S)$，$0 < \mu \le 1$ に対し，$\mu Q^* + (1-\mu)Q \in \mathcal{M}^e(S)$ である．したがって，$\mathcal{M}^e(S)$ は $\mathcal{M}^a(S)$ で稠密であり，(2) と (3) は同値である．

□

同様に次の命題が成り立つ．

Proposition 1.2.9. S は無裁定条件を満たすとする．$f \in L^\infty$ に対し次の (1)(2)(3) は同値である．
(1)$f \in K$.
(2)$\mathbb{E}_Q[f] = 0 \quad \text{for} \quad \forall Q \in \mathcal{M}^a(S)$.
(3)$\mathbb{E}_Q[f] = 0 \quad \text{for} \quad \forall Q \in \mathcal{M}^e(S)$.

Proof

Propsition1.2.3. より $K = C \cap (-C)$ である．よって，Proposition1.2.8. より従う．

□

Corollary 1.2.10. S は無裁定条件を満たすとする．$f \in L^\infty$ が任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ に対し，$\mathbb{E}_Q[f] = a$ を満たすならば $f \in K_a$ である．

Corollary 1.2.11. S は無裁定条件を満たすとする．次の (1) と (2) は同値である．
(1)$\mathcal{M}^e(S)$ はただ一つの元からなる．
(2)$f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対し，$f = a + (H \cdot S)_T$ となる $a \in \mathbb{R}$ と $H \in \mathcal{H}$ が存在する．
この時 Q を (1) のただ一つの元とすれば，$a = \mathbb{E}_Q[f]$ で $H \cdot S$ は一意であり，

$$\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_Q[f] + (H \cdot S)_t, \quad t = 0, \cdots, T$$

である．

Proof
Q_1，$Q_2 \in \mathcal{M}^e(S)$，$Q_1[\omega_n] \neq Q_2[\omega_n]$ とする．$f = \mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$ とすると，$\mathbb{E}_{Q_1}[f] \neq \mathbb{E}_{Q_2}[f]$ であり $f \notin K_a$ となる．したがって (2) を満たすならば (1) を満たす．逆は Proposition1.1.10. より従う．

□

Proposition 1.2.12. S は無裁定条件を満たすとする．$a \in \mathbb{R}$，$H \in \mathcal{H}$ とし $S^{d+1} = a + H \cdot S$ と定義する．この時 $\bar{S} = (S^1, S^2, \cdots, S^d, S^{d+1})$ も無裁定条件を満たす．

Proof
S は無裁定条件を満たすと仮定すると，Theorem1.2.6. より $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ が存在する．$a + H \cdot S$ は Q-マルチンゲールなので $\bar{S}$ も Q-マルチンゲールである．したがって $\bar{S}$ は無裁定条件を満たす．

□

1.3 無裁定による価格付け

$f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し，$K^{f,a}$ を K と $(f-a)$ から生成されるベクトル空間とする．$K^{f,a} \cap L^\infty_+ = \{0\}$ が成り立つ時，a は f に対する無裁定価格 (arbitrage free price) という．

Theorem 1.3.1. S は無裁定条件を満たすと仮定し，$f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする．

$$\underline{\pi}(f) = \inf\{\mathbb{E}_Q[f] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S)\}, \quad \overline{\pi}(f) = \sup\{\mathbb{E}_Q[f] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S)\}$$

と定義する．
$\underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$ の場合，f は価格 $\pi(f) = \underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$ で複製可能 (つまり $f = \pi(f) + (H \cdot S)_T$ となる $H \in \mathcal{H}$ が存在) であり，$\pi(f)$ は一意な f に対する無裁定価格である．
$\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$ の場合，a が f に対する無裁定価格になる必要十分条件は $a \in (\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f))$ を満たすことである．

Proof
$\pi(f) = \underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$ の場合，任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ に対し，$\mathbb{E}_Q[f] = \pi(f)$ となる．Proposition1.2.9. より $f - \pi(f) = (H \cdot S)_T$ となる $H \in \mathcal{H}$ が存在する．$K^{f,a} = K$ なので $\pi(f)$ は f に対する無裁定価格である．次に一意性を示す．$a \neq \pi(f)$ とすると，$f - a = (\pi(f) - a) + (H \cdot S)_T$ なので $\pi(f) - a \in K^{f,a}$ である．よって a は f に対する無裁定価格であり得ない．
$\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$ の場合を考える．$I = \{\mathbb{E}_Q[f] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S)\}$ は有界区間である．まず，$a \in I$ を満たすことが，a が f に対する無裁定価格になる必要十分条件であることを示す．$a \in I$ とすると，$\mathbb{E}_Q[f - a] = 0$

となる $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ が存在する．よって，$K^{f,a} \cap L^\infty_+ = \{0\}$ である．逆に $K^{f,a} \cap L^\infty_+ = \{0\}$ と仮定すると，Theorem1.2.6. の証明と同様に，任意の $g \in K^{f,a}$ に対し $\mathbb{E}_Q[g] = 0$ となる $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ が存在する．$\mathbb{E}_Q[f-a] = 0$ なので $a \in I$ である．

以下 $\underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f) \notin I$ を示す．$a = \overline{\pi}(f)$ とする．定義より任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ に対し，$\mathbb{E}_Q[f - \overline{\pi}(f)] \leq 0$ である．Proposition1.2.8. より $f - \overline{\pi}(f) \in C$ である．$g \geq f - \overline{\pi}(f)$ となる $g \in K$ が存在する．$\overline{\pi}(f) \in I$ と仮定すると，$\mathbb{E}_{Q^*}[f] = \overline{\pi}(f)$ となる $Q^* \in \mathcal{M}^e(S)$ が存在する．$0 = \mathbb{E}_{Q^*}[g] \geq \mathbb{E}_{Q^*}[f - \overline{\pi}(f)] = 0$ なので $\mathbb{E}_{Q^*}[g - (f - \overline{\pi}(f))] = 0$ である．$Q^* \sim P$ より $f - \overline{\pi} \equiv g$ である．$f - \overline{\pi} \in K$，Proposition1.2.9. より，任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ に対し $\mathbb{E}_Q[f] = \overline{\pi}(f)$ となる．$I = \{\overline{\pi}(f)\}$ となり $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$ に矛盾する．以上より $\overline{\pi}(f) \notin I$ を示せた．$\underline{\pi}(f) \notin I$ も同様に示せる．

□

Theorem 1.3.2. S は無裁定条件を満たすとする．この時，$f \in L^\infty$ に対し次の等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\overline{\pi}(f) &= \sup\{\mathbb{E}_Q[f] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S)\} \\
&= \max\{\mathbb{E}_Q[f] \mid Q \in \mathcal{M}^a(S)\} \\
&= \min\{a \mid a + k \geq f \text{ となる } k \in K \text{ が存在する }\}.
\end{aligned}
$$

Proof

Theorem1.3.1. の証明より $f - \overline{\pi}(f) \in C$ である．したがって，$f = \overline{\pi}(f) + g \leq \overline{\pi}(f) + k$ となる $g \in C$ と $k \in K$ が存在する．よって，$\overline{\pi}(f) \geq \inf\{a \mid a + k \geq f$ となる $k \in K$ が存在する $\}$ が成り立つ．

$a < \overline{\pi}(f)$ とすると，$\mathbb{E}_Q[f] > a$ となる $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ が存在する．任意の $k \in K$ に対し，$\mathbb{E}_Q[a + k] = a < \mathbb{E}_Q[f]$ が成り立つ．よって，$a + k \geq f$ となる $k \in K$ は存在しない．以上より $\overline{\pi}(f) = \inf\{a \mid a + k \geq f$ となる $k \in K$ が存在する $\}$ が成り立つ．$\overline{\pi}(f) + k \geq f$ となる $k \in K$ が存在するので，"inf" を "min" に置き換えることができる．

□

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ とは仮定していない．時刻 0 における情報を元に，初期投資を変更する場合を考える．まず，定理の証明に必要な命題を示す．

Proposition 1.3.3. S は無裁定条件を満たすとし，$Q \in \mathcal{M}^e(S)$ とする．$Z_t = \mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right]$，$L_t = \frac{Z_t}{Z_0}$ とし，$\frac{dQ^0}{dP} = L_T$ で Q^0 を定義する．$Q^0 \in \mathcal{M}^e(S)$ かつ $Q^0 |_{\mathcal{F}_0} = P |_{\mathcal{F}_0}$ である．

Proof

$Q \in \mathcal{M}^e(S)$ より SZ は P-マルチンゲールである．$Z_0 \in \mathcal{F}_0$ なので $S\frac{Z}{Z_0} = SL$ は P-マルチンゲールである．$L_T > 0$ なので Q^0 と P は同値である．$t = 0, \cdots, T-1$，$A \in \mathcal{F}_t$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^0}\left[(S_{t+1} - S_t)\mathbf{1}_A\right] &= \mathbb{E}_P\left[L_T(S_{t+1} - S_t)\mathbf{1}_A\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_P\left[L_T S_{t+1}\mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_{t+1}\right] - \mathbb{E}_P\left[L_T S_t \mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[(L_{t+1}S_{t+1} - L_t S_t)\mathbf{1}_A\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

よって，$Q^0 \in \mathcal{M}^e(S)$ である．また，$L_0 = 1$ より $Q^0 |_{\mathcal{F}_0} = P |_{\mathcal{F}_0}$ である．

□

$\mathcal{F}_0$-可測関数の集合に対する "sup" 及び "min" を定義する．$\sup\{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\}$ を定義する．$Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ に対し，$A = \{\mathbb{E}_{Q_1}[f \mid \mathcal{F}_0] > \mathbb{E}_{Q_2}[f \mid \mathcal{F}_0]\}$ とし，$Q_3[B] = Q_1[A \cap B] + Q_2[A^c \cap B]$ と定義すると，$Q_3 \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ であり，$\mathbb{E}_{Q_3}[f \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_{Q_1}[f \mid \mathcal{F}_0] \vee \mathbb{E}_{Q_2}[f \mid \mathcal{F}_0]$ が成り立つ．

$\mathcal{F}_0$ に対応する Ω の分割を，$\Omega = A_1 + \cdots + A_m$ とする．$\omega_{k_i} \in A_i$，$i = 1, \cdots, m$ とする．各 $i = 1, \cdots, m$ に対し，$\sup\{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0](\omega_{k_i}) \mid Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\}$ が定義できる．$\mathbb{E}_{Q_n^i}[f \mid \mathcal{F}_0](\omega_{k_i}) \uparrow \sup\{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0](\omega_{k_i}) \mid Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\}$ となる $\mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ の列 $(Q_n^i)_n$ が存在する．$\mathbb{E}_{Q_n}[f \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_{Q_n^1}[f \mid \mathcal{F}_0] \vee \cdots \vee \mathbb{E}_{Q_n^m}[f \mid \mathcal{F}_0]$ となる $Q_n \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ を取る．$\mathbb{E}_{Q_n}[f \mid \mathcal{F}_0]$ の極限として，$\sup\{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\}$ を定義する．"min" も同様に定義できる．

Theorem 1.3.4. S は無裁定条件を満たすとする．$Q \in \mathcal{M}^e(S)$ かつ $Q|_{\mathcal{F}_0} = P|_{\mathcal{F}_0}$ を満たす Q の集合を $\mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ とする．この時，$f \in L^\infty$ に対し次の等式が成り立つ．

$$\sup\{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\} = \min\{h \in \mathcal{F}_0 \mid h + g \geq f \text{ となる } g \in K \text{ が存在する }\}.$$

Proof

$h \in \mathcal{F}_0$，$g \in K$，$f \leq h + g$ とする．任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ に対し，$\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \leq h + \mathbb{E}_Q[g \mid \mathcal{F}_0] = h$ となる．よって，

$$\begin{aligned} a_1 &= \sup\{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\} \\ &\leq \inf\{h \in \mathcal{F}_0 \mid h + g \geq f \text{ となる } g \in K \text{ が存在する }\} \\ &= a_2 \end{aligned}$$

が成り立つ．

逆を証明する．$a_1 + g \geq f$ となる $g \in K$ が存在することを示せばよい．背理法で示す．これが成り立たないとすると，任意の $g \in K$ に対し $a_1 + g < f$ となるので，$(a_1 + K) \cap (f + L_+^\infty) = \emptyset$ である．Hahn-Banach の定理より，任意の $g \in K$ と $l \in L_+^\infty$ に対し，$\epsilon + \varphi(a_1 + g) < \varphi(f + l)$ となる線形関数 φ と $\epsilon > 0$ が存在する．$\varphi \geq 0$ であり，任意の $g \in K$ に対し $\varphi(g) = 0$ である．φ を標準化し，対応する測度を Q とする．$\mathcal{M}^e(S)$ は $\mathcal{M}^a(S)$ で稠密なので，$Q \in \mathcal{M}^e(S)$ かつ $\mathbb{E}_Q[a_1] + \epsilon < \mathbb{E}_Q[f]$ となるよう Q を取り直すことができる．Proposition1.3.3. より，$Z_t = \mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right]$，$L_t = \frac{Z_t}{Z_0}$ とし，$\frac{dQ^0}{dP} = L_T$ で Q^0 を定義すると，$Q^0 \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ である．

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^0}[f \mid \mathcal{F}_0] &= \mathbb{E}_P[f L_T \mid \mathcal{F}_0] \\ &= \frac{\mathbb{E}_P[f Z_T \mid \mathcal{F}_0]}{Z_0} \\ &= \mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \end{aligned}$$

となり，a_1 の定義より，$\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \leq a_1$ が成り立つ．$\mathbb{E}_Q[f] \leq \mathbb{E}_Q[a_1]$ となり，Q の取り方に矛盾する．

□

Corollary 1.3.5. Theorem1.3.4. と同じ仮定のもと，次の等式が成り立つ．

$$\{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S)\} = \{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\}.$$

また，$f \in L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対し，$\sup_{Q \in \mathcal{M}^e(S)} \mathbb{E}_Q[f] = \|a_1\|_\infty$ が成り立つ．ここで $\|\cdot\|_\infty$ は一様ノルムとし，

$$a_1 = \sup\{\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0] \mid Q \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)\}$$

とする．

Proof

1 つ目の等式は Theorem1.3.4. の証明より従う．2 つ目の等式を示す．Proposition1.3.3. より，任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ に対し，$\frac{dQ}{dP} = f_0 \frac{dQ^0}{dP}$，$f_0 > 0$，$\mathbb{E}_P[f_0] = 1$ となる，$Q^0 \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ と $f_0 \in \mathcal{F}_0$ が存在する．

$$\mathbb{E}_Q[f] = \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0]\right] = \mathbb{E}_{Q^0}\left[\mathbb{E}_Q[f \mid \mathcal{F}_0]\right] \leq \|a_1\|_\infty$$

となるので，$\sup_{Q \in \mathcal{M}^e(S)} \mathbb{E}_Q[f] \leq \|a_1\|_\infty$ が成り立つ．

逆を示す．$\epsilon > 0$ に対し，$f_0 \in \mathcal{F}_0$，$f_0 > 0$ を $\mathbb{E}_P[f_0] = 1$，$\mathbb{E}_P[f_0 a_1] \geq \|a_1\|_\infty - \epsilon$ となるように取る．例えば，$A = \{a_1 = \|a_1\|_\infty\}$ とし，

$$f_0 \geq \frac{\|a_1\|_\infty - \epsilon}{\|a_1\|_\infty P[A]} \mathbf{1}_A$$

となるように取ればよい．f_0 に対し，$a_1 - \epsilon < \mathbb{E}_{Q^1}[f \mid \mathcal{F}_0]$ となる $Q^1 \in \mathcal{M}^e(S, \mathcal{F}_0)$ を取ると，

$$\mathbb{E}_P\left[f_0\left(a_1 - \mathbb{E}_{Q^1}[f \mid \mathcal{F}_0]\right)\right] \leq \epsilon$$

が成り立つ．Q^0 を $\frac{dQ^0}{dP} = f_0 \frac{dQ^1}{dP}$ で定義する．明らかに $Q^0 \in \mathcal{M}^e(S)$ である．Q^1 と f_0 の取り方より，次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^0}[f] &= \mathbb{E}_P\left[f_0 \frac{dQ^1}{dP} f\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_{Q^1}[f \mid \mathcal{F}_0]\right] \quad \left(\because Q^1 \mid_{\mathcal{F}_0} = P \mid_{\mathcal{F}_0}\right) \\
&\geq \mathbb{E}_P[f_0 a_1] - \epsilon \\
&\geq \|a_1\|_\infty - 2\epsilon.
\end{aligned}$$

□

1.4 Kramkov の任意分解定理

最後に，Kramkov の任意分解定理を有限確率空間において証明する．

Theorem 1.4.1. S は無裁定条件を満たすと仮定し，$(V_t)_{t=0}^T$ は $\mathcal{F}_t$-適合過程とする．次の (1)(1')(2) は同値である．
(1) 任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ のもと V は優マルチンゲールである．
(1') 任意の $Q \in \mathcal{M}^a(S)$ のもと V は優マルチンゲールである．
(2)$V = V_0 + H \cdot S - C$ と分解できる．ここで，$H \in \mathcal{H}$，$C = (C_t)_{t=0}^T$ は F_t-適合単調増大過程，$C_0 = 0$ である．

Proof

(2)⇒(1')⇒(1) は明らかである．(1)⇒(2) を示せばよい．まず $T = 1$，つまり $S = (S_t)_{t=0,1}$ の場合を考える．V は任意の $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ のもと優マルチンゲールとすると，$\mathbb{E}_Q[V_1 - V_0] \leq 0$ が成り立つ．よって，$V_1 - V_0 \in C$ であり，$(H \cdot S)_1 \geq V_1 - V_2$ となる $H \in \mathcal{F}_0$ が存在する．$C_0 = 0$ とし，$\Delta C_1 = C_1 = -V_1 + (V_0 + (H \cdot S)_1) \geq 0$ とすると，$V_1 = V_0 + (H \cdot S)_1 - C_1$ と分解される．

$T > 1$ の場合を考える．各 $t_0 = 1, \cdots, T$，$(S_t)_{t=t_0-1,t_0}$ に上と同様の議論をすると，$(H_{t_0}, \Delta S_{t_0}) \geq V_{t_0} - V_{t_0-1}$ となる $H_{t_0} \in \mathcal{F}_{t_0-1}$ が存在する．$\Delta C_{t_0} = (H_{t_0}, \Delta S_{t_0}) - \Delta V_{t_0} \geq 0$ とする．H は可予測過程，$C_t = \sum_{u=1}^t \Delta C_u$ は $\mathcal{F}_t$-適合単調増大過程であり，$V_t = V_0 + (H \cdot S)_t - C_t$ と分解される．

□

1.5 CRR モデル

CRR(Cox-Ross-Rubinstein) モデルにおける，ヨーロピアン・コール・オプションの無裁定価格を計算する．$T \in \mathbb{N}$ を固定し，$\Omega = \{-1, 1\}^T$，$\mathcal{F} = 2^\Omega$ とする．$\omega \in \Omega$ の第 t 座標を $\epsilon_t(\omega)$ とし，$\mathcal{F}_t = \sigma(\epsilon_1, \cdots \epsilon_t)$ とする．$(\delta_1, \cdots, \delta_T) \in \{-1, 1\}^T$ に対し，

$$P[\omega = (\delta_1, \cdots, \delta_T)] = p^{\sharp\{i|\delta_i=1\}}(1-p)^{\sharp\{i|\delta_i=-1\}}$$

と定義する．ここで，$0 < p < 1$ と仮定する．$(\epsilon_t)_{t=1}^T$ は P のもと独立同分布であり，

$$P[\epsilon_t = 1] = p, \quad P[\epsilon_t = -1] = 1 - p, \quad t = 1, \cdots, T$$

が成り立つ．$\hat{S}^0$ を $\hat{S}^0_0 = 1$，$\hat{S}^0_t = (1+r)^t$，$t = 1, \cdots, T$ と定義する．$\hat{S}^1$ を $\hat{S}^1_0 = 1$，$t = 1, \cdots, T$ に対し，$\epsilon_t = 1$ ならば $\hat{S}^1_t = \hat{S}^1_{t-1}(1+u)$，$\epsilon_t = -1$ ならば $\hat{S}^1_t = \hat{S}^1_{t-1}(1+d)$ と定義する．ここで，$-1 < r$，$-1 < d < u$ と仮定する．$\tilde{u}$ と $\tilde{d}$ を

$$1 + \tilde{u} = \frac{1+u}{1+r}, \quad 1 + \tilde{d} = \frac{1+d}{1+r}$$

となるように取る．$\tilde{\epsilon}_t$ を $\epsilon_t = 1$ ならば $\tilde{\epsilon}_t = \tilde{u}$，$\epsilon_t = -1$ ならば $\tilde{\epsilon}_t = \tilde{d}$ と定義する．$S^1 = \frac{\hat{S}^1}{\hat{S}^0}$ とおくと，$t = 1, \cdots, T$ に対し，$S^1_t = S^1_{t-1}(1 + \tilde{\epsilon}_t)$ が成り立つ．

S^1 に対する同値マルチンゲール測度を求める．$Q \in \mathcal{M}^a(P)$ とすると，$t = 1, \cdots, T$ に対し，$\mathbb{E}_Q\left[S^1_t - S^1_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = 0$ である．$S^1_{t-1} > 0$ なので，

$$\tilde{u}\mathbb{E}_Q\left[\mathbf{1}_{\{\tilde{\epsilon}_t = \tilde{u}\}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] + \tilde{d}\mathbb{E}_Q\left[\mathbf{1}_{\{\tilde{\epsilon}_t = \tilde{d}\}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = \mathbb{E}_Q\left[\tilde{\epsilon}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = 0$$

が成り立つ．また，$\mathbb{E}_Q\left[\mathbf{1}_{\{\tilde{\epsilon}_t = \tilde{u}\}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] + \mathbb{E}_Q\left[\mathbf{1}_{\{\tilde{\epsilon}_t = \tilde{d}\}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1$ なので，$q = -\frac{\tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}}$ とおくと，

$$\mathbb{E}_Q\left[\mathbf{1}_{\{\hat{\epsilon}_t = \tilde{u}\}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = q = 1 - \mathbb{E}_Q\left[\mathbf{1}_{\{\hat{\epsilon}_t = \tilde{d}\}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

となる．$0 < q < 1$ である必要十分条件は $d < r < u$ を満たすことである．$d < r < u$ と仮定すると，$Q\left[\tilde{\epsilon}_t = \tilde{u}\right] = q = 1 - Q\left[\tilde{\epsilon}_t = \tilde{d}\right]$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\left[e^{i\theta\tilde{\epsilon}_t} e^{i\sum_{j=1}^{t-1}\theta_j\tilde{\epsilon}_j}\right] &= \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{E}_Q\left[e^{i\theta\tilde{\epsilon}_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] e^{i\sum_{j=1}^{t-1}\theta_j\tilde{\epsilon}_j}\right] \\
&= \mathbb{E}_Q\left[\left(e^{i\theta\tilde{u}}\mathbb{E}_Q\left[\mathbf{1}\{\tilde{\epsilon}_t = \tilde{u}\} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] + e^{i\theta\tilde{d}}\mathbb{E}_Q\left[\mathbf{1}\{\tilde{\epsilon}_t = \tilde{d}\} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]\right) e^{i\sum_{j=1}^{t-1}\theta_j\tilde{\epsilon}_j}\right] \\
&= \mathbb{E}_Q\left[e^{i\theta\tilde{\epsilon}_t}\right]\mathbb{E}_Q\left[e^{i\sum_{j=1}^{t-1}\theta_j\tilde{\epsilon}_j}\right]
\end{aligned}$$

が成り立つので，Q のもと $(\tilde{\epsilon}_t)_{t=1}^T$ は独立である．また，Q は P と同値である．

以上より，$d < r < u$ を満たす場合，P の定義において p を $q = -\frac{\tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}}$ に置き換えて定義される測度を Q とすると，$\mathcal{M}^e(P) = \{Q\}$ が成り立つことがわかる．また，$d < r < u$ を満たさない場合，S^1 に対する同値マルチンゲール測度が存在せず，したがって，S^1 は無裁定条件を満たさないことがわかる．

以下，$d < r < u$ と仮定する．$f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とすると，$\mathcal{M}^e(P) = \{Q\}$，Theorem1.3.1. より，

$$\mathbb{E}_Q[f] = \sum_{j=0}^T q^j(1-q)^{T-j} \sum_{\sharp\{i|\delta_i=1\}=j} f(\delta_1, \cdots, \delta_j)$$

が f の一意な無裁定価格である．特に f が任意の置換 σ と $(\delta_1, \cdots, \delta_T) \in \{-1, 1\}^T$ に対し，$f\left(\delta_{\sigma(1)}, \cdots, \delta_{\sigma(T)}\right) = f(\delta_1, \cdots, \delta_T)$ を満たす場合を考える．$\sharp\{i \mid \delta_i = 1\} = j$ の時，$f(\delta_1, \cdots, \delta_T) = a_j$ とすると，

$$\mathbb{E}_Q[f] = \sum_{j=0}^T q^j(1-q)^{T-j} \begin{pmatrix} T \\ j \end{pmatrix} a_j$$

である．したがって，満期 T，行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプション $f=\left(S_T^1-K\right)^+$ の一意な無裁定価格を

$$\mathbb{E}_Q[f]=\sum_{j=0}^{T} q^j(1-q)^{T-j}\left(\begin{array}{c} T \\ j \end{array}\right)\left((1+\tilde{u})^j\left(1+\tilde{d}\right)^{T-j}-K\right)^+$$

で計算することができる．

2　確率積分

2.1　準備

この節では確率積分を定義する上で必要となる概念を定義する．この章以降特に断らない限り，フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ 上で考える．確率空間は完備であるとする．すなわち $A \subset B \in \mathcal{F}$ かつ P[B]=0 ならば $A \in \mathcal{F}$ とする．さらに $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$ であり，フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ を満たし，$\mathcal{F}_0$ は全ての P-零集合を含むとする．

２つの停止時刻 T≤S に対し，

$$[\![T, S]\!] = \{(t, \omega) \mid t \in \mathbb{R}_+, T(\omega) \leq t \leq S(\omega)\}$$

と定義する．

$$]\!]T, S]\!] = \{(t, \omega) \mid t \in \mathbb{R}_+, T(\omega) < t \leq S(\omega)\}$$

なども同様に定義し，$[\![T, T]\!]$ は $[\![T]\!]$ と記すこととする．

確率過程 X:$\mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ は $\mathcal{F}_t$-適合であるとは，各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対し，$\omega \mapsto X_t(\omega)$ が $\mathcal{F}_t$-可測となることとする．確率過程 X は (右, 左) 連続であるとは，ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対し，$t \mapsto X_t(\omega)$ が (右, 左) 連続となることとする．

全ての左連続 $\mathcal{F}_t$-適合過程で生成される，$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の σ 加法族を可予測 σ 加法族と呼び $\mathcal{P}$ と記す．$\mathcal{P}$-可測な過程を可予測過程を呼ぶ．停止時刻 T に対して，

$$\mathcal{F}_T = \{A \mid A \in \mathcal{F} \text{ かつ，任意の } t \in \mathbb{R}_+ \text{に対して } A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

と定義し，$\mathcal{F}_0$ と $\{A \cap \{t < T\} \mid A \in \mathcal{F}_t\}$ で生成される σ 加法族を $\mathcal{F}_{T-}$ と定義する．$X^* = \sup_{t\geq 0} |X_t|$,　$X^*_t = \sup_{t\geq u\geq 0} |X_u|$，と表記する．X は右連続で，各 t で X_t の左極限が存在するとき，X は *càdlàg* と呼び，$X_{t-} = \lim_{s\uparrow t} X_s$，$(\Delta X)_t = X_t - X_{t-}$ と表記する．

$$\mathcal{M}^2 = \{M \mid M \text{ はマルチンゲール，} \sup_t \mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty\}, \quad \mathcal{M}^2_0 = \{M \in \mathcal{M}^2 \mid M_0 = 0\},$$

$$\mathcal{M}_{\ell oc} = \{M \mid M \text{ は局所マルチンゲール }\}, \quad \mathcal{M}_{\ell oc,0} = \{M \in \mathcal{M}_{\ell oc} \mid M_0 = 0\}$$

と定義する．$\mathcal{M}^2$ と $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ は 1 対 1 に対応する．実際 $M \in \mathcal{M}^2$ に対し M_∞ が存在し，$F \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ に対し $M_t = \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_t]$ とすれば $M \in \mathcal{M}^2$ である．

2.2　確率積分の定義

文献 [14] を参考に確率積分を定義する．まず $M \in \mathcal{M}^2_0$ に対し確率積分を定義する．

$$b\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=1}^n f_{i-1} \mathbf{1}_{]\!]T_{i-1}, T_i]\!]} \middle| 0 \leq T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_n \text{は有限停止時刻，} \quad f_i \text{は } \mathcal{F}_{T_i} - \text{可測で有界} \right\}$$

と定義する．$H = \sum_{i=1}^n f_{i-1} \mathbf{1}_{]\!]T_{i-1}, T_i]\!]} \in b\mathcal{E}$ に対し，$(H \cdot M)_t = \sum_{i=1}^n f_{i-1}(M_{T_i \wedge t} - M_{Ti-1 \wedge t})$ と定義する．

Lemma 2.2.1. $M \in \mathcal{M}^2_0$ と $H = \sum_{i=1}^n f_{i-1} \mathbf{1}_{]\!]T_{i-1}, T_i]\!]} \in b\mathcal{E}$ に対し，$H \cdot M \in \mathcal{M}^2_0$ であり，次の等式が成り立つ．

$$\mathbb{E}\left[(H \cdot M)^2_\infty\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n f^2_{i-1} \left(M_{T_i} - M_{Ti-1}\right)^2\right].$$

Theorem 2.2.2. $M \in \mathcal{M}_0^2$ に対し次の (1) と (2) を満たし，$[M]_0 = 0$ となる単調増大過程 $[M]$ が一意に存在する．
(1)$M^2 - [M]$ は一様可積分マルチンゲールである．
(2)$(0, \infty)$ 上 $\Delta[M] = (\Delta M)^2$ である．

$[M]$ を M の 2 次変分過程という．停止時刻 $S \leq T$ に対し，

$$\mathbb{E}\left[(M_T - M_S)^2 \mid \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[M_T^2 - M_S^2 \mid \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left[[M]_T - [M]_S \mid \mathcal{F}_S\right]$$

である．したがって $H \in b\mathcal{E}$ に対し，

$$\mathbb{E}\left[(H \cdot M)_\infty^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 d[M]_s\right]$$

が成り立つ．

$$\|H\|_M = \left(\mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 d[M]_s\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$L^2(M) = \{H \in \mathcal{P} \mid \|H\|_M < \infty\}$$

と定義する．$\mathcal{U} = L^2(M) \cap b\mathcal{E}$ とし，$I : \mathcal{U} \to \mathcal{M}^2$ を $I(H) = H \cdot M$ と定義する．$\bar{\mathcal{U}} = L^2(M)$ なので I を $L^2(M) \to \mathcal{M}^2$ に拡張できる．以上より特に有界マルチンゲール M と有界可予測過程 H に対し，確率積分 $H \cdot M$ を定義できた．

次に Theorem2.2.3. を用いて，$M \in \mathcal{M}_{\ell oc,0}$ と局所有界可予測過程 H に対し確率積分 $H \cdot M$ を定義する．

Theorem 2.2.3. $M \in \mathcal{M}_{\ell oc,0}$ に対し，次の条件を満たす停止時刻の列 $T_n \uparrow \infty$ が存在する；$M^{T_n} = U^n + V^n$ となる有界マルチンゲール U^n と有限変動マルチンゲール V^n が存在する．

$M \in \mathcal{M}_{\ell oc,0}$ とし H は局所有界可予測過程とする．$(T_n)_n$ は上の条件を満たし，さらに H^{T_n} は有界とする．$H^{T_n} \cdot M^{T_n} = H^{T_n} \cdot U^n + H^{T_n} \cdot V^n$ と定義する．ここで $H^{T_n} \cdot V^n$ は Lebesgue-Stieltjes 積分とする．$H \cdot M$ を $t < T_n$ に対し，$(H \cdot M)_t = (H^{T_n} \cdot M^{T_n})_t$ と定義する．

次に半マルチンゲール S と局所有界可予測過程 H に対し確率積分を定義する．S は半マルチンゲールとは，局所マルチンゲール M と有限変動過程 A で $S = M + A$ と分解できることとする．この分解のことを Doob-Meyer 分解という．確率積分 $H \cdot S$ を $H \cdot S = H \cdot M + H \cdot A$ と定義する．ここで $H \cdot A$ は Lebesgue-Stieltjes 積分とする．$H \cdot S$ は 1 次元半マルチンゲールである．

さらに一般的な確率積分を定義する．1 次元半マルチンゲールの空間に次の D で距離を定義する．

$$D(X) = \sup\left\{\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \mathbb{E}[\min(|(G \cdot X)_n|, 1)] \middle| G \text{ は可予測で } |G| \leq 1\right\}.$$

この距離に対し 1 次元半マルチンゲールの空間は完備である．この D による位相を半マルチンゲール位相と呼ぶ．可予測過程 H が S-可積分とは，$(H\mathbf{1}_{\{|H| \leq n\}} \cdot S)_{n=1}^\infty$ が半マルチンゲール位相でコーシー列であることとする．S-可積分過程 H に対し，$H \cdot S$ を $(H\mathbf{1}_{\{|H| \leq n\}} \cdot S)_{n=1}^\infty$ の極限と定義する．

次に special 半マルチンゲールを定義する．局所マルチンゲール M と有限変動可予測過程 A で $S = M + A$ と分解される時，S は special 半マルチンゲールという．半マルチンゲール S が special になる為の必要十分条件は S が局所可積分となることである．ここで S が局所可積分とは $\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T_n} |S_t|\right] < \infty$ となる停止時刻の列 $T_n \uparrow \infty$ が存在することとする．

最後に 4 章の証明で必要となる定理を紹介する．

Theorem 2.2.4. S は special 半マルチンゲールで，Doob-Meyer 分解は $S = M + A$ とし，H は S-可積分とする．H が special であることと次の (1) と (2) を満たすことは同値である．
(1)H は局所マルチンゲールの確率積分の意味で M-可積分である．
(2)H は Lebesgue-Stieltjes 積分の意味で A-可積分である．
　この時 $H \cdot S$ の Doob-Meyer 分解は $H \cdot S = H \cdot M + H \cdot A$ である．

3 Kreps-Yan の定理

この章では Kreps-Yan の定理を証明する．

3.1 定義と準備

フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ は前章と同様の仮定を満たすとし，$S=(S_t)_{t\geq 0}$ はその上の $\mathbb{R}^d$ 値過程とする．S は $\mathcal{F}_t$-適合局所有界過程とする．

Definition 3.1.1. $H=\sum_{i=1}^n h_i \mathbf{1}_{\rrbracket \tau_{i-1}, \tau_i \rrbracket}$ の形をした $\mathbb{R}^d$ 値過程を単純投資戦略という．ここで $0=\tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n < \infty$ は有限停止時刻，h_i は $\mathbb{R}^d$ 値 $\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}$-可測関数とする．さらに τ_n と $h_1, \cdots, h_n$ が有界の時，H は許容可能という．

また，前章の半マルチンゲールに対する確率積分を拡張し，局所有界過程 S に対し確率過程 $H\cdot S$ を

$$(H\cdot S)_t=\sum_{i=1}^n \left(h_i, S_{\tau_i\wedge t}-S_{\tau_{i-1}\wedge t}\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^d h_i^j\left(S^j_{\tau_i\wedge t}-S^j_{\tau_{i-1}\wedge t}\right)$$

と定義する．

Definition 3.1.2. $\mathcal{F}$ 上の確率測度 Q が P と同値で，S は Q のもと局所マルチンゲールである時，Q を同値局所マルチンゲールという．$\mathcal{F}$ 上の確率測度 Q が P に対し絶対連続で，S は Q のもと局所マルチンゲールである時，Q を局所マルチンゲールという．

また，$\mathcal{M}^e(S)$ を全ての同値局所マルチンゲールの集合，$\mathcal{M}^a(S)$ を全ての局所マルチンゲールの集合とする．$\mathcal{M}^e(S)\neq\emptyset$ が成り立つ時，S は同値局所マルチンゲールの存在条件 (以下 (EMM) と表記) を満たすという．

Lemma 3.1.3. Q は $\mathcal{F}$ 上の確率測度で P に対し絶対連続とする．S は局所有界確率過程とする．この時次の (1) と (2) は同値である．
(1)S は Q のもと局所マルチンゲールである．
(2) 任意の許容可能単純戦略 H に対し，$\mathbb{E}_Q\left[(H\cdot S)_\infty\right]=0$ が成り立つ．

Proof

停止時刻の列 $\tau_n\uparrow\infty$ を取り，S^{τ_n} は有界とする．(2) を仮定し S^{τ_n} は Q-マルチンゲールであることを示す．停止時刻 $0\leq\sigma_1\leq\sigma_2\leq\tau_n$ に対し，$\mathbb{E}\left[S_{\sigma_2}\mid\mathcal{F}_{\sigma_1}\right]=S_{\sigma_1}$ を示せばよい．これは各 j と $A\in\mathcal{F}_{\sigma_1}$ に対し，$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A\left(S^j_{\sigma_2}-S^j_{\sigma_1}\right)\right]=0$ が成り立つことと同値であり，仮定 (2) より成り立つ．

逆に (1) を仮定する．$\sigma_1\leq\sigma_2$ は停止時刻，S^{σ_2} と $h\in\mathcal{F}_{\sigma_1}$ は一様有界とする．任意抽出定理より，$\mathbb{E}\left[S_{\sigma_2}\mid\mathcal{F}_{\sigma_1}\right]=S_{\sigma_1}$ なので，$\mathbb{E}\left[(h, S_{\sigma_2}-S_{\sigma_1})\right]=0$ となる．

□

H が単純許容可能ならば $-H$ も単純許容可能なので，条件 (2) の ” $=$ ” を ” $\leq$ ” または ” $\geq$ ” に置き換えた条件も同値である．

$L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$ の部分集合 K^{simple} を，

$$K^{\mathrm{simple}}=\{(H\cdot S)_\infty \mid H \text{ は許容可能単純戦略 }\}$$

と定義する．また，

$$C^{\mathrm{simple}}=K^{\mathrm{simple}}-L^\infty_+=\{f-k\mid f\in K^{\mathrm{simple}}, k\in L^\infty_+\}$$

と定義する．$r\in\mathbb{R}$，$f\in C^{\mathrm{simple}}$ ならば $rf\in C^{\mathrm{simple}}$ なので C^{simple} は錐である．

Definition 3.1.4. $K^{\text{simple}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$ が成り立つ時，S は単純戦略に対する無裁定条件 (以下 ($\text{NA}^{\text{simple}}$) と表記) を満たすという．(この条件は $C^{\text{simple}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$ と同値である．)

Lemma 3.1.5. H は単純許容可能で，$H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{1}_{\rrbracket \tau_{i-1}, \tau_i \rrbracket}$ とし，$(H{\cdot}S)_\infty \geq 0 \quad a.s.$ かつ $P[(H \cdot S)_\infty > 0] > 0$ とする．この時 $(K \cdot S)_\infty \geq 0 \quad a.s.$ かつ $P[(K \cdot S)_\infty > 0] > 0$ となる単純許容可能な $K = h\mathbf{1}_{\rrbracket \sigma_1, \sigma_2 \rrbracket}$ が存在する．

Proof

帰納法で示す．$n = 1$ の時，$K = H$ と取れば明らかに成り立つ．$n = k-1$ で成り立つと仮定すると，$n = k$ の時も成り立つことを示す．$(H \cdot S)_{\tau_{k-1}} \geq 0 \quad a.s.$ かつ $P\left[(H \cdot S)_{\tau_{k-1}} > 0\right] > 0$ の場合，仮定より条件を満たす K が取れる．$(H \cdot S)_{\tau_{k-1}} = 0 \quad a.s.$ の場合，$K = h_k \mathbf{1}_{\rrbracket \tau_{k-1}, \tau_k \rrbracket}$ と取ればよい．$P\left[(H \cdot S)_{\tau_{k-1}} < 0\right] > 0$ の場合，$K = h_k \mathbf{1}_{\{(H \cdot S)_{\tau_{k-1}} < 0\}} \mathbf{1}_{\rrbracket \tau_{k-1}, \tau_k \rrbracket}$ と取ればよい．

□

次の命題で (EMM) と ($\text{NA}^{\text{simple}}$) は同値でないことを示す．

Lemma 3.1.6. (EMM) を満たすならば ($\text{NA}^{\text{simple}}$) を満たす．しかし逆は成り立たない．

Proof

$Q \in \mathcal{M}^e(P)$ が存在するならば，($\text{NA}^{\text{simple}}$) が成り立つことを示す．$(H{\cdot}S)_\infty \geq 0 \quad a.s.$ かつ $P[(H \cdot S)_\infty > 0] > 0$ とする．Q は P と同値なので $Q[(H \cdot S)_\infty > 0] > 0$ である．したがって $\mathbb{E}_Q[(H \cdot S)_\infty] > 0$ となり Lemma3.1.3. に矛盾する．以上より ($\text{NA}^{\text{simple}}$) が成り立つことが示せた．

($\text{NA}^{\text{simple}}$) を満たし，$\mathcal{M}^e(P) = \emptyset$ となる例を作る．$(\Omega, \mathcal{F}) = \left(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\left(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}\right)\right)$ とする．$\omega \in \Omega$ に対し $\epsilon_n(\omega)$ は ω の第 n 座標とする．P を以下で定義する；P のもと $(\epsilon_n)_{n=1}^\infty$ は独立で，

$$P[\epsilon_n = 1] = \frac{1+\alpha_n}{2}, \quad P[\epsilon_n = -1] = \frac{1-\alpha_n}{2}.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}$-値確率過程 S を定義する．$t_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ とする．$S_0 = 1$ とし時刻 t_n でのジャンプ以外で S は一定とする．$\Delta S_{t_n} = 3^{-n}\epsilon_n$ とする．$\mathcal{F}_t$ は S で生成されるフィルトレーションとすると，S は有界 $\mathcal{F}_t$-適合過程である．

Q を以下で定義する;Q のもと $(\epsilon_n)_{n=1}^\infty$ は独立で，

$$Q[\epsilon_n = 1] = \frac{1}{2}, \quad Q[\epsilon_n = -1] = \frac{1}{2}.$$

$\mathcal{M}^a(S) = \{Q\}$ である．角谷の定理より，$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2 < \infty$ ならば P と Q は同値であり，$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2 = \infty$ ならば P と Q は特異である．任意の n に対し $\alpha = \frac{1}{2}$ とすると，$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2 = \infty$ なので $\mathcal{M}^e(P) = \emptyset$ となる．この時 ($\text{NA}^{\text{simple}}$) を満たすことを示す．

Lemma3.1.5. より $H = h\mathbf{1}_{\rrbracket \sigma_1, \sigma_2 \rrbracket}$ の形の戦略が裁定機会にならないことを示せばよい．$h \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$，$h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1}) \geq 0$ と仮定する．$\{\sigma_1 = 1 - \frac{1}{n}\} \cap \{\sigma_2 = 1 - \frac{1}{n+1}\}$ 上 $\text{sign}(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1}) = \text{sign}(\epsilon_n)$ である．したがって $\text{sign}(h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})) = \text{sign}(h\epsilon_n) \geq 0$ である．ϵ_n と $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$ は独立なので，$\{\sigma_1 = 1 - \frac{1}{n}\} \cap \{\sigma_2 = 1 - \frac{1}{n+1}\}$ 上 $h = 0$ となる．以上より $h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1}) = 0 \quad a.s.$ となる．

□

3.2 Kreps-Yan の定理の証明

Lemma3.1.6. によって ($\text{NA}^{\text{simple}}$) は (EMM) より弱い条件であることがわかった．($\text{NA}^{\text{simple}}$) に近い (EMM) と同値な条件を定義する．

Definition 3.2.1. $\bar{C}$ は C^{simple} の $L^\infty-$ 弱∗閉包とする．

$$\bar{C} \cap L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$$

が成り立つ時，S は条件 no free lunch(以下 (NFL) と表記) を満たすという．

Theorem 3.2.2 (Kreps-Yan の定理)**.** 局所有界過程 S に対し (NFL) と (EMM) は同値である．

Proof

$(EMM) \Rightarrow (NFL)$：$Q \in \mathcal{M}^e(S)$ とする．Lemma3.1.3. より任意の $f \in C^{\mathrm{simple}}$ に対し，$\mathbb{E}_Q[f] \leq 0$ が成り立つ．$(f_n)_{n\geq 1}$ は C^{simple} の列で f に弱∗収束するならば，$\frac{dQ}{dP} \in L^1$ なので $\mathbb{E}_Q[f_n]$ は $\mathbb{E}_Q[f]$ に収束する．よって任意の $f \in \bar{C}$ に対し，$\mathbb{E}_Q[f] \leq 0$ が成り立つ．$g \geq 0 \quad a.s.$，$P[g > 0] > 0$ を満たす $g \in \bar{C}$ が存在すると，$\mathbb{E}_Q[g] > 0$ となり矛盾する．したがって，$\bar{C} \cap L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$ が成り立つ．

$(NFL) \Rightarrow (EMM)$：$f \in L_+^\infty$，$f \not\equiv 0$ とする．Hahn-Banach の定理を弱∗凸閉集合 $\bar{C}$ と $\{f\}$ に適用すると，$g\mid_{\bar{C}} \leq \alpha$，$(f, g) > \beta$ となる $g \in L^1$ と $\alpha < \beta$ が存在する．ここで $g\mid_{\bar{C}} \leq \alpha$ とは任意の $h \in \bar{C}$ に対し $(g, h) \leq \alpha$ が成り立つこととする．$0 \in C$ なので $\alpha \geq 0$ である．$\bar{C}$ は錐なので $\alpha = 0$ である．$-L_+^\infty \subset C$ なので，特に $g\mid_{L_+^\infty} \geq 0$ が成り立つ．$P[g < 0] > 0$ とすると $g\mid_{L_+^\infty} \geq 0$ に矛盾するので $g \in L_+^1$ である．以上より $f \in L_+^\infty$，$f \not\equiv 0$ に対し，$g\mid_{\bar{C}} \leq 0$，$(f, g) > 0$ を満たす $g \in L_+^1$ が存在することが示せた．

$\mathcal{G} = \{g \in L_+^1 \mid g\mid_C \leq 0\}$ とする．$0 \in \mathcal{G}$ なので $\mathcal{G} \neq \emptyset$ である．$\mathcal{S} = \{\{g > 0\} \mid g \in \mathcal{G}\}$ とする．$\mathcal{S}$ は可算の和集合で閉じているので，

$$P[g_0 > 0] = \sup\{P[g > 0] \mid g \in \mathcal{G}\}$$

を満たす $g_0 \in \mathcal{G}$ が存在する．

$P[g_0 > 0] = 1$ が成り立つことを示す．$P[g_0 > 0] < 1$ とすると $f = \mathbf{1}_{\{g_0=0\}}$ に対し，

$$\mathbb{E}[fg_1] = \int_{\{g_0=0\}} g_1(\omega)dP(\omega) > 0$$

を満たす $g_1 \in \mathcal{G}$ が存在する．$g_0 + g_1 \in \mathcal{G}$ であり，

$$P[g_0 + g_1 > 0] = P[g_0 > 0] + P[g_0 = 0, \quad g_1 > 0] > P[g_0 > 0]$$

となるので，g_0 の取り方に矛盾する．

g_0 を $\|g_0\|_1 = 1$ となるように標準化し，測度 Q を $\frac{dQ}{dP} = g_0$ で定義する．$f \in K^{\mathrm{simple}} \subset C^{\mathrm{simple}}$ に対し，$\mathbb{E}_Q[f] \leq 0$ が成り立つ．Lemma3.1.3. より $Q \in \mathcal{M}^e(P)$ となる．

□

4 価格付けの基本定理

4.1 定義と主定理

この節では基礎概念を定義し，主定理の内容を紹介する．この章を通して S は $c\grave{a}dl\grave{a}g$ な半マルチンゲールとする．S は金融資産の価格を表す.

Definition 4.1.1. $a \in \mathbb{R}_+$ とし，S-可積分可予測過程 H が $(H \cdot S) \geq -a$(つまり任意の $t \geq 0$ に対し $(H \cdot S)_t \geq -a \quad a.s.$) を満たす時，a-許容可能という．また，ある $a \in \mathbb{R}_+$ に対して a-許容可能の時，単に許容可能という.

Theorem 4.1.2. M は局所マルチンゲール，H は M に対して許容可能とする．この時 $H \cdot M$ は局所マルチンゲールであり，優マルチンゲールである.

半マルチンゲール S に対し，$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の部分凸集合 K_0 を以下で定義する.

$$K_0 = \left\{ (H \cdot S)_\infty \mid H \text{ は許容可能かつ } (H \cdot S)_\infty = \lim_{t \to \infty} (H \cdot S)_t \text{が } a.s. \text{に存在する} \right\}$$

また，$C_0 = K_0 - L^0_+$，$K = K_0 \cap L^\infty$，$C = C_0 \cap L^\infty$ と定義する．$\bar{C}$ を C の L^∞-ノルムに対する閉包とする.

Definition 4.1.3. 半マルチンゲール S は
(1)$C \cap L^\infty_+ = \{0\}$ が成り立つ時，無裁定条件 (no arbitrage，以下 (NA) と表記) を満たすという.
(2)$\bar{C} \cap L^\infty_+ = \{0\}$ が成り立つ時，条件 no free lunch with vanishing risk(以下 (NFLVR) と表記) を満たすという.

定義から (NFLVR) を満たすならば (NA) を満たすことは明らかである．以下この章では次の定理を証明することを目標とする.

Theorem 4.1.4. S は有界 $\mathbb{R}^d$ 値半マルチンゲールとする．この時，S に対する同値マルチンゲール測度が存在することと，S が (NFLVR) を満たすことは同値である.

Corollary 4.1.5. S は局所有界 $\mathbb{R}^d$ 値半マルチンゲールとする．この時，S に対する同値局所マルチンゲール測度が存在することと，S が (NFLVR) を満たすことは同値である.

4.2 準備

この節では以降の証明で必要となる定理と補題を証明する．後の節でジャンプを評価するために次の定理を準備する.

Theorem 4.2.1. X は半マルチンゲールで $\|(\Delta X)^*\|_p < \infty \quad (1 < p \leq \infty)$ とする．X の Doob-Meyer 分解を $X = M + A$ とする．この時,
(a)X は special である.
(b) 次の評価式が成り立つ.

$$\|(\Delta A)^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|(\Delta X)^*\|_p. \quad \|(\Delta M)^*\|_p \leq \frac{2p-1}{p-1} \|(\Delta X)^*\|_p.$$

Proof

(a) 仮定より X は局所 p 乗可積分なので，特に局所可積分である．よって X は special になる．

(b)$(\Delta M)^* \leq (\Delta A)^* + (\Delta X)^*$ なので，前の式が成り立てば後の式も従う．

$S_n = \inf\{t \mid |M_t| > n\}$ とし，$X^{S_n} = M^{S_n} + A^{S_n}$ に対して (b) が成り立つとする．この時,

$$\|(\Delta A^{S_n})^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|(\Delta X^{S_n})^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|(\Delta X)^*\|_p.$$

Fatou の補題より,

$$\|(\Delta A)^*\|_p = \|\lim_{n\to\infty}(\Delta A^{S_n})^*\|_p \leq \lim_{n\to\infty}\|(\Delta A^{S_n})^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|(\Delta X)^*\|_p$$

となり (b) が成り立つ．

以下 M は有界マルチンゲールと仮定して (b) を示す．$Y_t = \mathbb{E}[(\Delta X)^* \mid \mathcal{F}_t]$ とすると Y_t は右連続マルチンゲールである．A は可予測より $\{\Delta A = 0\} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$ となる可予測停止時刻の列 T_n が取れる．

まず可予測停止時刻 T に対し，$\Delta A_T = \mathbb{E}[(\Delta X)^*_T \mid \mathcal{F}_{T-}]$ を示す．$f \in \mathcal{F}_{T-}$ と $\{T < \infty\}$ 上 $Z_T = f$ となる可予測過程 Z が存在することは同値である．ΔA は可予測なので，$\Delta A_T \in \mathcal{F}_{T-}$ となる．

また，$U_n \uparrow T$，$\mathcal{F}_{T-} = \sigma(\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{F}_{U_n})$ とすると任意抽出定理より,

$$\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_{T-}] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_{U_n}] = \lim_{n\to\infty} M_{U_n} = M_{T-}.$$

以上より $\Delta A_T = \mathbb{E}[(\Delta X)^*_T \mid \mathcal{F}_{T-}]$ が成り立つ．

$$|\Delta A_T| \leq \mathbb{E}[|(\Delta X)_T| \mid \mathcal{F}_{T-}] \leq \mathbb{E}[(\Delta X)^* \mid \mathcal{F}_{T-}] = \lim_{n\to\infty} Y_{U_n} = Y_{T-} \leq Y^*.$$

これより $(\Delta A)^* \leq Y^*$ である．

Y は右連続なので Doob の不等式より,

$$\|(\Delta A)^*\|_p \leq \|Y^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|(\Delta X)^*\|_p.$$

□

Corollary 4.2.2. T は停止時刻とすると次が成り立つ．

$$\|(\Delta A)_T\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|(\Delta X)^*\|_p, \quad \|(\Delta M)_T\|_p \leq \frac{2p-1}{p-1}\|(\Delta X)^*\|_p.$$

集合 A に対する凸包を $\mathrm{conv}\{A\}$ と記す．L^0 の部分集合 F は L^0 有界とは，任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\exists N\, s.t.\, P[|f| > N] < \epsilon \quad \text{for} \quad \forall f \in F$$

となることと定義する．

Lemma 4.2.3. $(f_n)_{n\geq 1}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $[0,\infty)$ 値可測関数列とする．

(1) ある $[0,\infty]$ 値関数 g に概収束する，関数列 $g_n \in \mathrm{conv}\{f_n, f_{n+1}, \cdots\}$ が存在する．

(2)$\{f_n; n \geq 1\}$ が L^0 有界ならば，$P[g < \infty] = 1$.

(3) 任意の n に対して $P[f_n > \alpha] > \delta$ となる $\alpha > 0, \delta > 0$ が存在するならば，$P[g > 0] > 0$.

Proof

(1)$u(x) = 1 - e^{-x}$ とする．$s_n = \sup\{\mathbb{E}[u(g)] \mid g \in \mathrm{conv}\{f_n, f_{n+1}, \cdots\}\}$ とし，$g_n \in \mathrm{conv}\{f_n, f_{n+1}, \cdots\}$ を $\mathbb{E}[u(g)] \geq s_n - \frac{1}{n}$ となるように取る．s_n は下に有界で単調減少なので極限が存在する．$s_0 = \lim s_n$ とすると，$\lim \mathbb{E}[u(g_n)] = s_0$ である．

$(g_n)_{n\geq 1}$ はある g に確率収束することを示す．$[0,\infty]$ の列 $(x_n)_{n\geq 1}$ がコーシー列である必要十分条件は，任意の $\alpha > 0$ に対し，$\exists n_0 \quad s.t. |x_n - x_m| \leq \alpha$ または $\min(g_n, g_m) \geq \alpha^{-1} \quad \text{for} \quad \forall n, m \geq n_0$ となることである．任意の $\alpha > 0$ に対し，$\lim_{n,m\to\infty} P[|g_n - g_m| > \alpha, \min(g_n, g_m) < \alpha^{-1}] = 0$ を示す．

u の凹性より α に対し $|x - y| > \alpha$ かつ $\min(x, y) \leq \alpha^{-1}$ ならば $u\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{1}{2}(u(x) + u(y)) + \beta$ となる，$\beta > 0$ が存在する．したがって，

$$\mathbb{E}\left[u\left(\frac{g_n + g_m}{2}\right)\right] \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_n)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_m)] + \beta P[|g_n - g_m| > \alpha, min(g_n, g_m) < \alpha^{-1}]. \quad (*)$$

g_n, g_m の取り方より，$\mathbb{E}\left[u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right)\right] \leq s_{n\wedge m}$ となる．u の凹性より，

$$s_{n\wedge m} \geq \mathbb{E}\left[u\left(\frac{g_n + g_m}{2}\right)\right] \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_n)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_m)].$$

これより，

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{E}\left[u\left(\frac{g_n + g_m}{2}\right)\right] = 0.$$

したがって $(*)$ より $\lim_{n,m\to\infty} P[|g_n - g_m| > \alpha, \min(g_n, g_m) < \alpha^{-1}] = 0$ となり，$g_n \to g$ (確率収束) となる $g : \Omega \to [0, \infty]$ が存在する．さらに g に概収束する部分列が取れる．

(2)$\{f_n; n \geq 1\}$ が L^0 有界とすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\exists N \, s.t. \, P[h > N] < \epsilon \quad \text{for} \quad \forall h \in \{f_n; n \geq 1\}.$$

特に $P[g_n > N] < \epsilon$ である．

$$P[g > N] \leq P\left[\bigcup_{n_0} \bigcap_{n\geq n_0} \{g_n > N\}\right] = \lim_{n_0\to\infty} P\left[\bigcap_{n\geq n_0} \{g_n > N\}\right] \leq \lim_{n_0\to\infty} P[g_{n_0} > N] \leq \epsilon.$$

よって $g < \infty \quad a.s.$ となる．

(3) 任意の n に対して $P[f_n > \alpha] > \delta$ とすると，

$$\mathbb{E}[u(f_n)] \geq \mathbb{E}[u(f_n)\mathbf{1}_{\{f_n > \alpha\}}] \geq \delta u(\alpha).$$

u は凹関数なので，

$$\mathbb{E}[u(g_n)] \geq \delta u(\alpha).$$

有界収束定理より，

$$\mathbb{E}[u(g)] \geq \delta u(\alpha) > 0.$$

よって，$P[g > 0] > 0$ となる．

□

Lemma 4.2.4. $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上定義された非負の関数列とする．任意の k に対し $P[g_k \geq a_k] \geq \delta > 0$ となる，正の実数列 $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ と $\delta > 0$ が存在すると仮定し，$g = \sum_{j=1}^{n} g_j$ とする．

この時，任意の $0 < \eta < 1$ に対し，

$$P\left[g \geq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \delta\eta\right] \geq \frac{\delta(1-\eta)}{1-\eta\delta}.$$

Proof

$A=\{g\geq(\sum_{j=1}^n a_j)\delta\eta\}$ とすると，

$$\mathbb{E}[g\mathbf{1}_{A^c}]\leq\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)\delta\eta P[A^c]=\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)\delta\eta(1-P[A]).$$

一方，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g\mathbf{1}_{A^c}] &= \sum_{j=1}^n\mathbb{E}[g_j\mathbf{1}_{A^c}]\\ &\geq \sum_{j=1}^n a_jP[A^c\cap\{g_j\geq a_j\}]\\ &\geq \sum_{j=1}^n a_j(P[g_j\geq a_j]-P[A])\\ &\geq \left(\sum_{j=1}^n g_j\right)\delta-\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)P[A].\end{aligned}$$

以上 2 つの不等式より，

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)P[A](1-\delta\eta)\geq\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)\delta(1-\eta)$$

$\sum_{j=1}^n a_j>0$ なので，

$$P[A]\geq\frac{\delta(1-\eta)}{1-\eta\delta}.$$

□

特に $a_k=a>0,\delta=b>0,\eta=\frac{1}{2}$ とすると，次の Corollary が従う．

Corollary 4.2.5. $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ は $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上定義された非負の関数列とする．任意の k に対し $P[g_k\geq a]\geq b$ となる，正の実数 $a>0$，$b>0$ が存在すると仮定し，$g=\Sigma_{j=1}^n g_j$ とする．この時，

$$P\left[g\geq\frac{nab}{2}\right]\geq\frac{b}{2}.$$

4.3 No Free Lunch with Vanishing Risk

この節では S が (NFLVR) を満たすならば，許容可能な H に対して $(H\cdot S)_\infty$ が存在することを示し，(NFLVR) と同値な条件を考察する．

Proposition 4.3.1. S は半マルチンゲールで (NFLVR) を満たすとする．この時,

$$\{(H\cdot S)_\infty\mid H\text{ は }1-\text{許容可能で, 有界な台を持つ }\}$$

は L^0 有界である．

ここで，H は有界な台を持つとは　$H = H\mathbf{1}_{[\![0,T]\!]}$　となる $T \in \mathbb{R}_+$ が存在することとする．H は有界な台を持つとすると，$(H\cdot S)$ は T 以降一定なので $(H\cdot S)_\infty$ は存在し有限である．

Proof

$\{(H\cdot S)_\infty \mid H$ は $1-$ 許容可能で, 有界な台を持つ $\}$ は L^0 有界でないとすると，

$$P[(H^n\cdot S)_\infty \geq n] > \alpha > 0$$

となる $\alpha > 0$ と 1-許容可能で有界な台を持つ H^n の列が存在する．$f_n = \min(\frac{1}{n}(H^n\cdot S)_\infty, 1) \in C$ とすると，

$$P[f_n = 1] = P[(H^n\cdot S)_\infty \geq n] > \alpha > 0.$$

$$\|f_n^-\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

ここで $\|\cdot\|_\infty$ は一様ノルムとする．

Lemma4.2.3. より，ある $[0,\infty]$ 値関数 g に概収束する，関数列 $g_n \in \mathrm{conv}\{f_n, f_{n+1}, \cdots\}$ が存在する．有界収束定理より $\mathbb{E}[g] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[g_n]$ である．$P[f_n = 1] > \alpha$ より $\mathbb{E}[f_n] \geq \alpha - \frac{1}{n}, \mathbb{E}[g_n] \geq \alpha - \frac{1}{n}$ なので $\mathbb{E}[g] \geq \alpha$ である．

$$P[g > 0] = \beta \geq \mathbb{E}[g\mathbf{1}_{\{g>0\}}] = \mathbb{E}[g] \geq \alpha.$$

エゴロフの定理より g_n は Ω' 上 g に一様収束し，$P[\Omega'] \geq 1 - \frac{\beta}{2}$ となる $\Omega' \in \mathcal{F}$ が存在する．$h_n = \min\{g_n, \mathbf{1}_{\Omega'}\} \in C$ とすると，h_n は L^∞ のノルム位相で $g\mathbf{1}_{\Omega'}$ に収束する．よって $g\mathbf{1}_{\Omega'} \in \bar{C}$ であり，$P[g\mathbf{1}_{\Omega'} > 0] \geq \frac{\beta}{2} > 0$ となるので (NFLVR) に矛盾する．

□

Proposition 4.3.2. S は半マルチンゲールで (NFLVR) を満たすとすると，許容可能な H に対し，

$$(H\cdot S)^* = \sup_{0\leq t}|(H\cdot S)_t| < \infty \quad a.s.$$

となり，さらに $\{(H\cdot S)^* \mid H$ は $1-$ 許容可能 $\}$ は L^0有界 である．

Proof

$P[(H\cdot S)^* = \infty] > 0$ となる 1-許容可能な H が存在すると，$\{(H\cdot S)^* \mid H$ は $1-$ 許容可能 $\}$ は L^0 有界にならない．よって $\{(H\cdot S)^* \mid H$ は $1-$ 許容可能 $\}$ は L^0 有界を示せばよい．

$\{(H\cdot S)^* \mid H$ は $1-$ 許容可能 $\}$ は L^0 有界でないとすると，

$$P[(H^n\cdot S)^* > n] > \alpha > 0\,,\ n = 1, 2, \cdots$$

となる，$\alpha > 0$ と H^n の列が取れる．$T_n = \inf\{t \mid (H^n\cdot S)_t > n\}$ とすると，

$$P[T_n < \infty] \geq P[(H\cdot S)^* > n] > \alpha > 0.$$

また，$\{T_n < \infty\}$ 上 $(H^n\cdot S)_{T_n} \geq n$ である．各 n に対し t_n を十分大きく取って，$\alpha < P[T_n \leq t_n]$ とする．$K^n = H^n\mathbf{1}_{[\![0,\min(T_n,t_n)]\!]}$ とすると，K^n は 1-許容可能で有界な台を持ち，

$$P[(K^n\cdot s)_\infty \geq n] \geq P[T_n \leq t_n] > \alpha > 0.$$

これは Proposition4.3.1 に矛盾する．

□

この命題からこの節の主定理を証明する．

Theorem 4.3.3. S は半マルチンゲールで (NFLVR) を満たすとする．この時許容可能な H に対して，$(H\cdot S)_\infty = \lim_{t\to\infty}(H\cdot S)_t$ が存在し有限である確率は 1 である．

Proof

H は 1-許容可能とする．Proposition4.3.2 より $(H\cdot S)^* = \sup_{0\leq t}|(H\cdot S)_t| < \infty \quad a.s.$ なので，$\liminf_{t\to\infty}(H\cdot S)_t = \limsup_{t\to\infty}(H\cdot S)_t \quad a.s.$ を示せばよい．

$P[\liminf_{t\to\infty}(H\cdot S)_t < \limsup_{t\to\infty}(H\cdot S)_t] > 0$ と仮定し，$\beta<\gamma$，$\alpha>0$ を

$$P\left[\liminf_{t\to\infty}(H\cdot S)_t < \beta < \gamma < \limsup_{t\to\infty}(H\cdot S)_t\right] > \alpha$$

であるように取る．

停止時刻の列 $(U_n, V_n)_{n\geq 1}$ で以下の (1)(2)(3) を満たす列が取れれば，Proposition4.3.2 に矛盾し証明が完了する．

(1)$U_1 \leq V_1 \leq U_2 \leq V_2 \leq \cdots \leq U_n \leq V_n \leq U_{n+1} \leq \cdots$.

(2)$L^n = \sum_{k=1}^n H\mathbf{1}_{]\!]U_k \leq V_k]\!]}$ は $(1+\beta)$-許容可能である．

(3)$P[(L^n\cdot S)_\infty \geq n(\gamma-\beta)] > \frac{\alpha}{2}$.

以下このような列を帰納的に構成する．実数列 $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ を $\epsilon_n > 0$，$\sum_{n\geq 1}\epsilon_n < \frac{\alpha}{2}$ となるように取る．

$$A = \{\liminf_{t\to\infty}(H\cdot S)_t < \beta < \gamma < \limsup_{t\to\infty}(H\cdot S)_t\}$$

とする．

$\bigcup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$ は有限加法族で $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t)$ なので，$P[A\Delta A_1] < \frac{\epsilon_1}{2}$ となる t_1 と $A_1\in\mathcal{F}_{t_1}$ が存在する．$\omega\notin A_1$ に対しては $U_1' = V_1' = t_1$ とする．$\omega\in A_1$ に対し，

$$U_1' = \inf\{t \mid t\geq t_1, (H\cdot S)_t < \beta\}, \quad V_1' = \inf\{t \mid t \geq U_1', (H\cdot S)_t > \gamma\}$$

と定義する．$\{V_1' < \infty\}\supset A$ なので，

$$P[\{V_1'<\infty\}\cap A_1] \geq P[A\cap A_1] > \alpha - \frac{\epsilon_1}{2}.$$

$s_1 > t_1$ を

$$P[\{V_1' \leq s_1\}\cap A_1] > \alpha - \frac{\epsilon_1}{2}$$

となるように取る．

$U_1 = \min(U_1', s_1), V_1 = \min(V_1', s_1)$ と定義する．

$$B_1 = \{(H\cdot S)_{U_1} \leq \beta < \gamma \leq (H\cdot S)_{V_1}\} = \{V_1' \leq s_1\}\cap A_1$$

とすると，$P[B_1\cap A] > \alpha - \epsilon_1$ が成り立つ．

$K^1 = H\mathbf{1}_{]\!]U_1,V_1]\!]}$ と定義し，K^1 は $(1+\beta)$-許容可能であることを示す．A_1^c 上では $(K^1\cdot S)_t = 0$ である．$\omega\in A_1$ に対しては，$t\leq U_1$ または $U_1'\geq s_1$ の時 $(K^1\cdot S)_t = 0$ となり，$U_1 < t \leq V_1$かつ $U_1' < s_1$ の時，

$$(K^1\cdot S)_t = (H\cdot S)_t - (H\cdot S)_{U_1'} \geq -1-\beta = -(1+\beta).$$

よって K^1 は $(1+\beta)$-許容可能である．$L^1 = K^1$ とする．

$(B_1\cap A)$ に同様の議論をする．$A_2\subset B_2$，$P[A_2\Delta(B_1\cap A)] < \frac{\epsilon_2}{2}$ となる $t_2\geq s_1$ と $A_2\in\mathcal{F}_{t_2}$ をとる．$\omega\notin A_2$ に対しては $U_2' = V_2' = t_2$ とし，$\omega\in A_2$ に対し，

$$U_2' = \inf\{t \mid t\geq t_2, (H\cdot S)_t < \beta\}, \quad V_1' = \inf\{t \mid t\geq U_2', (H\cdot S)_t > \gamma\}$$

と定義する．$\{V_2' < \infty\} \supset \{B_1 \cap A\}$ なので，

$$P[\{V_2' < \infty\} \cap A_2] \geq P[A_2 \cap (B_1 \cap A)] > \alpha - \epsilon_1 - \frac{\epsilon_2}{2}.$$

$s_2 > t_2$ を

$$P[\{V_1' \leq s_2\} \cap A_2] > \alpha - \epsilon_1 - \frac{\epsilon_2}{2}$$

となるように取る．

$U_2 = \min(U_2', s_2), V_2 = \min(V_2', s_2)$ と定義する．

$$B_2 = \{(H \cdot S)_{U_2} \leq \beta < \gamma \leq (H \cdot S)_{V_2}\} = \{V_2' \leq s_2\} \cap A_2$$

とすると，

$$P[B_2 \cap (B_1 \cap A)] > \alpha - \epsilon_1 - \epsilon_2$$

$K^2 = H\mathbf{1}_{\rrbracket U_2, V_2 \rrbracket}$ と定義すると，K^1 と同様に $(1+\beta)$-許容可能である．$\omega \in B_1^c \subset A_2^c$ の時，$K^2 = 0$ であり，$\omega \in B_1$ の時　$(L^1 \cdot S)_{t_2} = (L^1 \cdot S)_{s_1} \geq \gamma - \beta > 0$ となる．よって $L^2 = L^1 + K^2$ は $(1+\beta)$-許容可能である．

また，

$$P[(L^2 \cdot S)_\infty \geq 2(\gamma - \beta)] \geq P[B_2 \cap (B_1 \cap A)] > \alpha - \epsilon_1 - \epsilon_2.$$

これをくり返し L^n を帰納的に構成できる．

□

Corollary 4.3.4. 半マルチンゲール S は (NFLVR) を満たすとする．この時，

$$\{(H \cdot S)_\infty \mid H \text{ は } 1 - \text{許容可能 }\}$$

は L^0 有界である．

Proof

S が (NFLVR) を満たす時，1-許容可能な H に対して $(H \cdot S)_\infty$ が存在することと，Proposition4.3.1. の証明より従う．

□

次の命題では (NA) のみ仮定する．

Proposition 4.3.5. 半マルチンゲール S は (NA) を満たすとする．この時 H は許容可能で $(H \cdot S)_\infty$ が存在するならば，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対し次の不等式が成り立つ．

$$\|(H \cdot S)_t^-\|_\infty \leq \|(H \cdot S)_\infty^-\|_\infty.$$

Proof

$\|(H \cdot S)_t^-\|_\infty > \|(H \cdot S)_\infty^-\|_\infty$ と仮定し，$A = \{(H \cdot S)_t < -\|(H \cdot S)_\infty^-\|_\infty\}$ とする．$K = H\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\rrbracket t, \infty \llbracket}$ と定義すると，K は許容可能であることを示す．

$L = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\rrbracket t, \infty \llbracket}$ とすると，L は可予測なので $K = HL$ も可予測である．$u \leq t$ の時 $(K \cdot S)_u = 0$ であり，$u \geq t$ の時，

$$(K \cdot S)_u = \mathbf{1}_A((H \cdot S)_u - (H \cdot S)_t) \geq -1 - \mathbf{1}_A(H \cdot S)_t \geq -1.$$

よって K は許容可能である．

$(K\cdot S)_\infty$ は存在し非負で,

$$P[(K\cdot S)_\infty > 0] = P[A] > 0.$$

これは (NA) に矛盾する.

□

以下，条件 (NFLVR) を特徴付ける命題を証明する.

Proposition 4.3.6. 次の (1) と (2) は同値である.
(1) 半マルチンゲール S は (NFLVR) を満たさない.
(2) 次の (a) または (b) を満たす.
(a)S は (NA) を満たさない.
(b)$\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$ (確率収束) となる恒等的に 0 でない $f_0 : \Omega \to [0,\infty]$ と K_0 の列 $((f_n))_{n\geq 1} = ((H^n\cdot S)_\infty)_{n\geq 1}$ で H^n は $\frac{1}{n}$-許容可能となるものが存在する.

Proof
(2) ⇒ (1)：(NA) を満たさなければ，(NFLVR) も満たさない．$(H^n)_{n\geq 1}$ は条件を満たす列とすると，$\{n(H\cdot S)_\infty, n\geq 1\}$ は L^0 有界でなく，$(nH^n)_{n\geq 1}$ は 1-許容可能である．S は (NFLVR) を満たすとすると，この列は Corollary9.3.4 に矛盾するので S は (NFLVR) を満たさない.

(1) ⇒ (2)：S は (NFLVR) を満たさず，(NA) を満たすと仮定すると，$\bar{C}\backslash\{0\}$ の要素 g_0 が存在する．$P[g_0>\alpha]>\alpha>0$ とする．C の列 $(g_n)_{n\geq 1}$ で g_n は g_0 に L^∞-ノルム収束するものが取れる．仮定より $\|g_n^-\|\to 0$ 部分列を取って $\|g_n^-\|\leq \frac{1}{n}$ とする．n 毎に $h_n\geq g_n$ となる $h_n\in K_0$ を取り，$h_n=(L^n\cdot S)_\infty$ とする．$\|h_n^-\|\leq\frac{1}{n}$ なので L^n は $\frac{1}{n}$-許容可能である.
$(h_n+\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ に Lemma4.2.3. を適用して，ある $[0,\infty]$ 値関数 f_0 に概収束する，関数列 $f_n\in \mathrm{conv}\{h_n,h_{n+1},\cdots\}$ を取る．$f_n=(H^n\cdot S)_\infty$ となる H^n は $(L^k)_{k\geq n}$ の凸結合なので $\frac{1}{n}$-許容可能である．十分大きな N を取り，$n\geq N$ に対して $\|g_n-g_0\|_\infty\leq\frac{\alpha}{2}$ とする．$n\geq N$ に対し,

$$P\left[h_n+\frac{1}{n}>\frac{\alpha}{2}\right]\geq P\left[h_n>\frac{\alpha}{2}\right]\geq P\left[g_n>\frac{\alpha}{2}\right]\geq P[g_0>\alpha]>\alpha.$$

Lemma4.2.3.(3) より $P[f_0>0]>0$ となる.

□

Corollary 4.3.7. 半マルチンゲール S に対し次の (1) と (2) は同値である.
(1)S は (NFLVR) を満たす.
(2)$\|g_n^-\|_\infty\to 0$ となる K_0 の列 $(g_n)_{n\geq 1}$ は 0 に確率収束する.

Proof
まず (2) を満たすならば (NA) を満たすことを示す.
$g\in C,\quad g\geq 0$ とすると，$f\geq g$ となる $f\in K_0$ が存在する．$\|f^-\|_\infty=0$ なので条件 (2) より，$f=0$ となり $g=0$ となる.

次に (NFLVR) を満たさないならば (2) を満たさないことを示す.
S は (NFLVR) を満たさないとすると，Proposition4.3.6. より (NA) を満たさない，または $\lim_{n\to\infty} f_n=f_0$ (確率収束) となる恒等的に 0 でない $f_0:\Omega\to[0,\infty]$ と K_0 の列 $((f_n))_{n\geq 1}=((H^n\cdot S)_\infty)_{n\geq 1}$ で H^n は $\frac{1}{n}$-

許容可能となるものが存在する．(NA) を満たさないならば，(2) も満たさない．後者ならば，$\|f_n^-\|_\infty \leq \frac{1}{n}$，$\|f_n^-\|_\infty \to 0$ であり f_0 は恒等的に 0 でないなので，$((f_n))_{n\geq 1}$ は条件 (2) を満たさない．

(NFLVR) または (2) を満たすならば (NA) を満たすので，S は (NA) を満たすとする．最後に (2) を満たさないならば (NFLVR) を満たさないことを示す．

$\|g_n^-\|_\infty \to 0$ かつ $g_n \to 0$ (確率収束) でない K_0 の列 $(g_n)_{n\geq 1}$ が存在すると仮定する．$\|g_n^-\|_\infty = a_n$ とすると，$\hat{g}_n = g_n + a_n$ は $[0,\infty)$ 値関数列で $\hat{g}_n \to 0$ (確率収束) でない．よって $P[\hat{g}_n > \alpha] \to 0$ とならない $\alpha > 0$ が存在する．部分列を取って，$P[\hat{g}_n > \alpha] > \delta > 0 \quad \text{for} \quad \forall n$ とする．ここで部分列はそのまま $(\hat{g}_n)_{n\geq 1}$ と表記し，$(a_n)_{n\geq 1}$ の部分列 $(a'_n)_{n\geq 1}$ を取り，$\|g_n^-\|_\infty = a'_n$ とする．

Lemma4.2.3. より，ある $[0,\infty]$ 値関数 h に概収束する，関数列 $h_n \in \mathrm{conv}\{g_n, g_{n+1}, \cdots\}$ が存在し，$P[h > 0] > 0$ となる．また $h_n \in K_0$，$\|h_n^-\|_\infty = a'_n \to 0$ である．部分列を取って，$h_n \in K_0$，$\|h_n^-\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ とする．Proposition4.3.5. より $h_n = (H^n \cdot S)_\infty$ となる H^n は $\frac{1}{n}$-許容可能である．Proposition4.3.6. より (NFLVR) を満たさない．

□

Corollary 4.3.8. 半マルチンゲール S は (NA) を満たすと仮定する．S が (NFLVR) を満たすことの必要十分条件は，

$$\{(H\cdot S)_\infty \mid H \text{ は } 1-\text{許容可能で有界な台を持つ }\}$$

が L^0 有界になることである．

Proof

Proposition4.3.1. より S が (NFLVR) を満たすならば $\{(H\cdot S)_\infty \mid H \text{ は } 1-\text{許容可能で有界な台を持つ }\}$ は L^0 有界である．

逆を証明する．$\{(H\cdot S)_\infty \mid H \text{ は } 1-\text{許容可能で有界な台を持つ }\}$ は L^0 有界とすると，Proposition4.3.2. の証明より，$\{\sup_{0\leq t}(H\cdot S)_t \mid H \text{ は } 1-\text{許容可能 }\}$ も L^0 有界である．K^0 の列 $(g_n)_{n\geq 1}$ は $\|g_n^-\|_\infty = \epsilon_n \to 0$ を満たすとすると，Proposition4.3.5. より $g_n = (H^n \cdot S)_\infty$ となる H^n は ϵ_n-許容可能である．

$\frac{1}{\epsilon_n} g_n$ は 1-許容可能なので $(\frac{1}{\epsilon_n} g_n)_{n\geq 1}$ は L^0 有界でなくてはならない．よって g_n は 0 に確率収束する．Corollary4.3.7 より S は (NFLVR) を満たすことが示せた．

□

4.4 主定理の証明

この節では主定理の証明を行う．まず 4.1 節で定義した C が L^∞ の弱$*$閉集合になることを Theorem4.4.3. で示し，Hahn-Banach の定理を用いて証明した Kreps-Yan の定理と同様に Theorem4.1.4. を証明する．

Definition 4.4.1. D は L^0 の部分集合とする．下から一様有界な D の列 $(f_n)_{n\geq 1}$ が f に概収束するならば，$f \in D$ となる時，D は Fatou 閉という．

Theorem 4.4.2. C は L^∞ の凸錐とする．この時 C が弱$*$閉集合であることと，$(f_n)_{n\geq 1}$ は 1 で一様有界な C の列で，f_n は f_0 に確率収束するならば，$f \in C$ となることは同値である．

この定理を用いて次の定理を証明する．

Theorem 4.4.3. S は有界半マルチンゲールで (NFLVR) を満たすとする．この時，
(1)C_0 は Fatou 閉集合である．
(2)$C = C_0 \cap L^\infty$ は L^∞ の弱$*$閉集合である．

Proof

(1) の証明は非常に複雑なので次の節で証明する．

C^0 は Fatou 閉とし．$C = C_0 \cap L^\infty$ は弱∗閉集合であることを示す．$(f_n)_{n\geq 1}$ は 1 で一様有界な C の列で，f_n は f_0 に確率収束すると仮定する．特に $(f_n)_{n\geq 1}$ は下から 1 で有界で，C_0 は Fatou 閉なので $f \in C_0$ である．したがって $f \in C$ となる．

□

この定理より，主定理 Theorem9.1.1 を証明する．

Proof of Theorem4.1.4.

S は (NFLVR) を満たすとすると，(NA)：$C \cap L^\infty_+ = 0$ も満たす．Theorem4.4.3. より C は L^∞ の弱∗閉集合なので，Theorem3.2.2.(Kreps-Yan の定理) の証明と同様に，

$$\exists Q \sim P \quad s.t. \quad \mathbb{E}_Q[f] \leq 0 \quad \text{for} \quad \forall f \in C.$$

$s < t,\ B \in \mathcal{F}_s$ とすると，S は有界より $(S_t - S_s)\mathbf{1}_B$，$-(S_t - S_s)\mathbf{1}_B \in C$ なので，$\mathbb{E}_Q[(S_t - S_s)\mathbf{1}_B] = 0$ となる．よって，Q は S に対するマルチンゲール測度となる．

逆に P は S に対するマルチンゲール測度と仮定すると，S は (NFLVR) を満たすことを示す．H は許容可能とすると，Theorem4.1.2. より $(H \cdot S)$ は下に有界な優マルチンゲールである．マルチンゲール収束定理より，

$$\mathbb{E}[(H \cdot S)_\infty] \leq \mathbb{E}[(H \cdot S)_0] = 0.$$

したがって，

$$\mathbb{E}[f] \leq 0 \quad \text{for} \quad \forall f \in \bar{C}.$$

よって，$\bar{C} \cap L^\infty_+ = 0$ となる．

□

次に Theorem4.1.4. から Corollary4.1.5. を導く．

Proof of Corollary4.1.5.

S は (NFLVR) を満たすとする．S は局所有界より，$|S\mathbf{1}_{[\![0,T_n]\!]}| \leq \alpha_n$ となる実数列 $\alpha_n \to \infty$ と停止時刻の列 $T_n \uparrow \infty$ が取れる．

$$\tilde{S} = S\mathbf{1}_{[\![0,T_1]\!]} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} (\mathbf{1}_{]\!]T_n,T_{n+1}]\!]} \cdot S)$$

とおくと，$\tilde{S}$ は有界半マルチンゲールであり，

$$\{(H \cdot S) \mid H \text{ は } S \text{ に対し許容可能 }\} = \{(H \cdot \tilde{S}) \mid H \text{ は} \tilde{S} \text{に対し許容可能 }\}$$

である．今 (NFLVR) を仮定しているので，許容可能な H に対し，$(H \cdot S)_\infty, (H \cdot \tilde{S})_\infty$ が存在する．よって，S に対する K_0 と $\tilde{S}$ に対する K_0 が一致し，$\tilde{S}$ も (NFLVR) を満たす．

Theorem4.1.4. より $\tilde{S}$ に対する同値マルチンゲール測度 Q が存在する．

$$S^{T_n} = \tilde{S}\mathbf{1}_{[\![0,T_1]\!]} + \sum_{k=1}^{n} 2^n(\alpha_n + \alpha_{n+1}) \left(\mathbf{1}_{]\!]T_k,T_{k+1}]\!]} \cdot \tilde{S}\right)$$

であり，

$$\left(\mathbf{1}_{[\![0,T_k]\!]} \cdot \tilde{S}\right)_t = \tilde{S}_{t\wedge T_k} - \tilde{S}_0$$

は Q-マルチンゲールなので，S^{T_n} は Q-マルチンゲールである．よって，S は Q-局所マルチンゲールとなる．

逆は Theorem4.1.4. の証明と同様に示せる．

□

4.5 Theorem4.4.3.(1) の証明

この節では Theorem4.4.3.(1) を証明する．S は有界半マルチンゲールで，(NFLVR) を満たすとする．$h_n \in C_0$，$h_n \geq -1$，$h_n \to h \quad a.s.$ となる列を取り，$h \in C_0$ を示す．$g_n \in K_0$，$g_n \geq h_n \geq -1$，$g_n = (H^n \cdot S)_\infty$ とすると，Proposition9.3.6 より H^n は 1-許容可能である．

$$\mathfrak{D} = \{f \mid (K^n \cdot S)_\infty \to f \quad a.s. \quad, f \geq h \text{ となる } 1-\text{許容可能戦略の列 } K^n \text{が存在する.}\}$$

と定義し，次の Lemma を証明する．

Lemma 4.5.1. $\mathfrak{D}$ は空でなく，最大要素 f_0 を含む．

Proof

上の g_n に対し Lemma4.2.3. を適用すると，ある $[0,\infty]$ 値関数 f に概収束する，関数列 $f_n \in \mathrm{conv}\{g_n, g_{n+1}, \cdots\}$ が存在する．$f_n = (K^n \cdot S)$ とすると，K^n は 1-許容可能かつ $f \geq h$ である．よって $f \in \mathfrak{D}$ となる．

$\mathfrak{D}$ は $\{(H \cdot S)_\infty \mid H \text{ は } 1-\text{許容可能}\}$ の閉包に包含される．$\{(H \cdot S)_\infty \mid H \text{ は } 1-\text{許容可能}\}$ は L^0 有界なので $\mathfrak{D}$ も L^0 有界である．また $\mathfrak{D}$ は確率収束で閉じている．

以下 L^0 の有界閉集合は最大要素を含むことを示す．$\mathfrak{D}$ の可算順序列を次のように構成する．$\alpha = 1$ に対して，$\mathfrak{D}$ の任意の要素を f_1 とする．$\alpha = \beta + 1$ で f_β が最大要素でなければ，$f_\alpha \geq f_\beta$，$P[f_\alpha > f_\beta] > 0$ となる $\mathfrak{D}$ の要素を f_α とする．$\beta_n \uparrow \alpha$ ならば，f_{β_n} は単調増大で $\mathfrak{D}$ は L^0 有界なので，有限関数に収束する．その極限を $f_\alpha \in \mathfrak{D}$ とする．このようにして可算順序集合 $\mathfrak{D}' = \{f_\alpha \mid \alpha \geq 1\}$ を構成する．$f_\alpha \geq -1$ なので，$I : \mathfrak{D}' \to \mathbb{R}$，$I(f) = \mathbb{E}[\exp(-f)]$ は well-defind である．$I(\mathfrak{D}')$ は $\mathbb{R}$ の下に有界な単調減少列なので，最小値が存在する．それに対応する $\mathfrak{D}'$ の要素が $\mathfrak{D}$ の最大要素である．

□

$\mathfrak{D}$ の最大要素を f_0 とし，$f_n = (H^n \cdot S)_\infty$，$H^n$ は 1-許容可能，$f_n \to f \quad a.s.$ とする．$f_0 \in K_0$ を示せば，$h \in C_0$ となり Theorem4.4.3.(1) の証明が完了する．

Lemma 4.5.2. 上の条件のもと，

$$F_{n,m} = ((H^n - H^m) \cdot S)^* = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |(H^n \cdot S)_t - (H^m \cdot S)_t|$$

とすると，$F_{n,m}$ は $n, m \to \infty$ の時 0 に確率収束する．

Proof

$$P[\sup_{t \in \mathbb{R}_+} ((H^{n_k} \cdot S)_t - (H^{m_k} \cdot S)_t) > \alpha] \geq \alpha$$

となる α と発散する部分列 $(n_k, m_k)_{k \geq 1}$ が存在すると仮定し矛盾を導く．

$$T_k = \inf\{t \mid (H^{n_k} \cdot S)_t - (H^{m_k} \cdot S)_t \geq \alpha\}$$

と定義すると，$P[T_k < \infty] \geq \alpha$ である．

$$L^k = H^{n_k} \mathbf{1}_{[\![0,T_k]\!]} + H^{m_k} \mathbf{1}_{]\!]T_k,\infty[\![}$$

と定義すると，L^k は可予測である．$t \le T_k$ に対し，H^{n_k} は 1-許容可能なので，$(L^k \cdot S)_t = (H^{n_k} \cdot S)_t \ge -1$ であり，$t \ge T_k$ に対しては,

$$(L^k \cdot S)_t = (H^{n_k} \cdot S)_{T_k} + (H^{m_k} \cdot S)_t - (H^{m_k} \cdot S)_{T_k} \ge (H^{m_k} \cdot S)_t + \alpha \ge -1 + \alpha$$

となり，L^k は 1-許容可能である．

$\rho_k = \lim_{t\to\infty}(L^k \cdot S)_t$ とする．$\{T_k = \infty\}$ 上 $\rho_k = f_{n_k}$ であり，$\{T_k < \infty\}$ 上，$\rho_k = f_{n_k} + (H^{n_k} \cdot S)_{T_k} - (H^{m_k} \cdot S)_{T_k}$ なので,

$$\varphi_k = f_{n_k}\mathbf{1}_{\{T_k=\infty\}} + f_{m_k}\mathbf{1}_{\{T_k<\infty\}}, \quad \psi_k = ((H^{n_k} \cdot S)_{T_k} - (H^{m_k} \cdot S)_{T_k})\mathbf{1}_{\{T_k<\infty\}}$$

とおくと，$\rho_k = \varphi_k + \psi_k$ である．f_n は f_0 に概収束するので，φ_k も f_0 に概収束する．また,

$$P[\psi_k \ge \alpha] \ge P[T_k < \infty] \ge \alpha$$

である．Lemma4.2.3.(3) より，ある $[0,\infty]$ 値関数 ψ_0 に概収束する，関数列 $\hat{\psi}_n \in \mathrm{conv}\{\psi_n, \psi_{n+1}, \cdots\}$ が存在し，$P[\psi_0 > 0] > 0$ である．$\hat{\rho}_k = \hat{\varphi}_k + \hat{\psi}_k$ となる，$\hat{\varphi}_n \in \mathrm{conv}\{\varphi_n, \varphi_{n+1}, \cdots\}$ と $\hat{\rho}_n \in \mathrm{conv}\{\rho_n, \rho_{n+1}, \cdots\}$ が存在する．$\hat{\varphi}_k$ は f_0 に概収束し，$\hat{\rho}_k$ は $f_0 + \psi_0$ に概収束する．$\hat{\rho}_k = (\hat{L}^k \cdot S)_\infty$ とすると，$\hat{L}^k$ は 1-許容可能なので f_0 の最大性に矛盾する．

□

これより $(H^n \cdot S)_t$ は t に関して一様に収束する．$q = \sup_n \sup_t |(H^n \cdot S)_t|$ と定義すと，$q < \infty \quad a.s.$ である．P と同値な測度 Q を

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{\exp(-q)}{\mathbb{E}_P[\exp(-q)]}$$

で定義すると，$q \in L^2(Q)$ となる．ルベーグの収束定理より次の式を得る．

$$\lim_{n,m\to\infty} \| \sup_t |(H^n \cdot S)_t - (H^m \cdot S)_t| \|_{L^2(Q)} = 0.$$

S は有界なので special マルチンゲールである．Q に対する Doob-Meyer 分解を $S = M + A$ とする．ここで M は局所マルチンゲール，A は有限変動可予測過程である．

$\lambda > 0$ に対して

$$\mathcal{H}_\lambda = \{H : 1-\text{許容可能} \mid \|(H \cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \le \lambda\}$$

と定義し，次の補題を証明する．

Lemma 4.5.3. $\lambda > 0$ に対し $\{(H \cdot M)^* \mid H \in \mathcal{H}_\lambda\}$ は $L^0(Q)$ 有界である．

Proof

$\lambda > 0$ を固定して，$\mathcal{H}_\lambda$ を $\mathcal{H}$ と省略する．$H \in \mathcal{H}$ に対し $(H \cdot S)^* \in L^2(Q)$ なので，$H \cdot S$ は Q に対し special である．Theorem2.2.4. より $H \cdot M$ は $H \cdot S$ の局所マルチンゲール部分で，$H \cdot A$ は $H \cdot S$ の有限変動可予測部分である．

$\{(H \cdot M)^* \mid H \in \mathcal{H}\}$ は $L^0(Q)$ 有界でないと仮定すると,

$$Q\left[(K^n \cdot M)^* > n^3\right] > 8\alpha$$

となる $\mathcal{H}$ の列 $(K^n)_{n\ge1}$ と $0 < \alpha < 1$ が存在する．チェビシェフの不等式より次の不等式を得る．

$$Q\left[\sup_t |(K^n \cdot S)_t| \ge n\right] \le \frac{1}{n^2}\|(K^n \cdot S)^*\|^2_{L^2(Q)} \le \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

任意の $n \geq N$ に対し，$\frac{\lambda^2}{n^2} < \frac{\alpha}{3}$ かつ $\frac{6\lambda}{n^2} < \alpha$ かつ $\frac{(n\alpha+4)^2}{n^2} \leq \alpha$ となる N を取る．

$$T_n = \inf\{t \mid |(K^n \cdot M)_t| \geq n^3 \text{または} |(K^n \cdot S)_t| \geq n\},$$

$$L^n = \frac{1}{n^2} K^n \mathbf{1}_{[\![0,T_n]\!]}$$

と定義する．

$K^n \cdot M$ は局所マルチンゲールなので，$L^n \cdot M$ も局所マルチンゲールである．さらに次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} Q[(L^n \cdot M)^* \geq n] &\geq Q\left[(K^n \cdot M)^* \geq n^3\right] - Q[(K^n \cdot S)^* \geq n] \\ &\geq 8\alpha - \frac{\lambda^2}{n^2} \geq 7\alpha \quad \text{for} \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

$L^n \cdot M$ は T_n 以降一定である．$(K^n \cdot S)$ は $[\![0, T_n[\![$ 上，上から n，下から -1 で有界なので，$L^n \cdot S$ のジャンプは下から $-\frac{n+1}{n^2}$ で有界である．$\|(K^n \cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \lambda$ なので，

$$\|\Delta(L^n \cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq 2\|(L^n \cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \frac{2\lambda}{n^2}.$$

Corollary4.2.2. より

$$\|\Delta(L^n \cdot M)_{T_n}\|_{L^2(Q)} \leq 3\|(L^n \cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \frac{6\lambda}{n^2}.$$

よって

$$\|(L^n \cdot M)^*\|_{L^2(Q)} \leq n + \|\Delta(L^n \cdot M)_{T_n}\|_{L^2(Q)} \leq n + \frac{6\lambda}{n^2}$$

となり，$L^n \cdot M$ は $L^2(Q)$-マルチンゲールである．

n 毎に停止時刻の列 $(T_{n,i})_{i\geq 0}$ を

$$T_{n,0} = 0, T_{n,i} = \inf\{t \mid t \geq T_{n,i-1}, |(L^n \cdot M)_t - (L^n \cdot M)_{T_{n,i-1}}| \geq 1\}$$

と定義する．この時 $n \geq N$ に対し次の不等式が成り立つ．

$$\|(L^n \cdot M)_{T_{n,i}} - (L^n \cdot M)_{T_{n,i-1}}\|_{L^2(Q)} \leq 1 + \|\Delta(L^n \cdot M)_{T_{n,i}}\|_{L^2(Q)} \leq 1 + \frac{6\lambda}{n^2} \leq 1 + \alpha \leq 2.$$

k_n を $\frac{n\alpha}{4}$ を超える最小の整数とする．$f_{n,i} = (L^n \cdot M)_t - (L^n \cdot M)_{T_{n,i-1}}$ とおくと $\|f_{n,i}\|_{L^2(Q)} \leq 2$ である．$i = 1, \cdots, k_n$ と $n \geq N$ に対し $Q[T_{n,i} < \infty] > 6\alpha$ をが成り立つことを示す．その為には $Q[T_{n,k_n} < \infty] > 6\alpha$ を示せば十分である．

$B = \{T_{n,k_n} < \infty\}$ とする，$n \geq N$ に対し，

$$\begin{aligned} \|(L^n \cdot M)^* \mathbf{1}_{B^c}\|_{L^2(Q)} &\leq \left\| \sum_{i=1}^{k_n} (L^n \mathbf{1}_{]T_{n,i-1},T_{n,i}]} \cdot M)^* \mathbf{1}_{B^c} \right\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \|(L^n \mathbf{1}_{]T_{n,i-1},T_{n,i}]} \cdot M)^* \mathbf{1}_{B^c}\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \|(L^n \mathbf{1}_{]T_{n,i-1},T_{n,i}]} \cdot M)^*\|_{L^2(Q)} \\ &\leq 2\sum_{i=1}^{k_n} \|f_{n,i}\|_{L^2(Q)} \quad (\because \text{Doob の不等式}) \\ &\leq 4k_n \leq n\alpha + 4 \quad \left(\because k_n \leq \frac{n\alpha}{4} + 1\right). \end{aligned}$$

チェビシェフの不等式より

$$Q[(L^n \cdot M)^* \mathbf{1}_{B^c} \geq n] \leq \frac{(n\alpha + 4)^2}{n^2} \leq \alpha.$$

これより,

$$Q[B^c \cap \{(L^n \cdot M)^* \geq n\}] \leq \alpha.$$

よって,

$$\begin{aligned} Q[B] &\geq Q[\{(L^n \cdot M)^* \geq n\} \setminus B^c] \\ &\geq Q[(L^n \cdot M)^* \geq n] - Q[B^c \cap \{(L^n \cdot M)^* \geq n\}] \\ &> 7\alpha - \alpha = 6\alpha. \end{aligned}$$

$T_{n,i} < \infty$ ならば $|f_{n,i}| \geq 1$ なので，$n \geq N$ と $i = 1, \cdots, k_n$ に対し，$Q[|f_{n,i}| \geq 1] > 6\alpha$ が成り立つ．$\beta = \alpha^2$，$B_{n,i} = \{f^-_{n,i} \geq \alpha\}$ とし，$Q[B_{n,i}] > \beta$ を示す．マルチンゲール性より,

$$\mathbb{E}_Q[f^-_{n,i}] = \mathbb{E}_Q[f^+_{n,i}] = \frac{\mathbb{E}_Q[|f_{n,i}|]}{2} > 3\alpha$$

となる．$f^-_{n,i}$ は $B^c_{n,i}$ 上 α で抑えられるので,

$$\mathbb{E}_Q[f^-_{n,i} \mathbf{1}_{B^c_{n,i}}] \leq \alpha, \quad \mathbb{E}_Q[f^-_{n,i} \mathbf{1}_{B_{n,i}}] \geq \mathbb{E}_Q[f^-_{n,i}] - \alpha > 2\alpha$$

となる．一方コーシー・シュワルツの不等式より,

$$\mathbb{E}_Q[f^-_{n,i} \mathbf{1}_{B_{n,i}}] \leq \|f^-_{n,i}\|_{L^2(Q)} Q[B_{n,i}]^{\frac{1}{2}} \leq 2Q[B_{n,i}]^{\frac{1}{2}}$$

となる．以上 2 つの不等式より，$Q[B_{n,i}] > \alpha^2 = \beta$ が成り立つ.

次に $L^n \cdot A$ を評価する．定義より任意の i に対し,

$$\|(L^n \cdot S)_{T_{n,i}} - (L^n \cdot S)_{T_{n,i-1}}\|_{L^2(Q)} \leq \frac{2\lambda}{n^2}$$

が成り立つ．チェビシェフの不等式より,

$$Q[|(L^n \cdot S)_{T_{n,i}} - (L^n \cdot S)_{T_{n,i-1}}| \geq \frac{2\lambda}{n}] \leq \left(\frac{2\lambda}{n^2}\right)^2 \left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2 = n^{-2}$$

となる．$Q[((L^n \cdot M)_{T_{n,i}} - (L^n \cdot M)_{T_{n,i-1}})^- \geq \alpha] > \beta$ なので，$i \leq k_n$ と $n \geq N$ に対し,

$$Q\left[(L^n \cdot A)_{T_{n,i}} - (L^n \cdot A)_{T_{n,i-1}} \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}\right] > \beta - n^{-2}$$

が成り立つ.

$L^n \cdot A$ は有限変動過程である．$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ を可予測集合 B^n_+ と B^n_- で，$(L^n \mathbf{1}_{B^n_+})$ と $(-L^n \mathbf{1}_{B^n_-})$ が単調増大になるよう分割する.

$R^n = L^n \mathbf{1}_{B^n_+ \cap [\![0, T_{n,k_n}]\!]}$ と定義すると,

$$(R^n \cdot A)_{T_{n,i}} - (R^n \cdot A)_{T_{n,i-1}} \geq (L^n \cdot A)_{T_{n,i}} - (L^n \cdot A)_{T_{n,i-1}}$$

を満たす．よって $i = 1, \cdots k_n$ と $n \geq N$ に対し,

$$Q\left[(R^n \cdot A)_{T_{n,i}} - (R^n \cdot A)_{T_{n,i-1}} \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}\right] > \beta - n^{-2}$$

が成り立つ.

$\Delta(L^n \cdot S)_t \neq 0$ ならば $\Delta(R^n \cdot S)_t = \Delta(L^n \cdot S)_t$ または $\Delta(R^n \cdot S)_t = 0$ なので，

$$\Delta(R^n \cdot S) \geq -\frac{n+1}{n^2} \geq \frac{2}{n}$$

が成り立つ．また $n \geq N$ に対し，

$$\|(R^n \cdot M)_{T_{n,k_n}}\|^2_{L^2(Q)} \leq \|(L^n \cdot M)_{T_{n,k_n}}\|^2_{L^2(Q)} \leq \sum_{i=1}^{k_n} \|f_{n,i}\|^2_{L^2(Q)} \leq 4k_n$$

となり，Doob の不等式より次の評価を得る．

$$\left\| \sup_{t\geq 0} |(R^n \cdot M)_t| \right\|_{L^2(Q)} \leq 2\|(R^n \cdot M)_{T_{n,k_n}}\|_{L^2(Q)} \leq 4\sqrt{k_n}.$$

$R^n \cdot A$ は単調増大なので正である．よって $R^n \cdot S = R^n \cdot M + R^n \cdot A \geq R^n \cdot M$ となり，次の評価を得る．

$$\begin{aligned} Q\left[\inf_{t\geq 0}(R^n \cdot S)_t \leq -k_n n^{-\frac{1}{4}}\right] &\leq Q\left[\sup_{t\geq 0}|(R^n \cdot M)_t| \geq k_n n^{-\frac{1}{4}}\right] \\ &\leq k^{-2} n^{\frac{1}{2}} 16 k_n \quad (\because \text{チェビシェフの不等式と上の評価式}) \\ &= 16\frac{\sqrt{n}}{k_n} \leq 64\alpha^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \left(\because k_n \geq \frac{n\alpha}{4}\right). \end{aligned}$$

$U_n = \inf\left\{t \mid (R^n \cdot S)_t < -k_n n^{-\frac{1}{4}}\right\}$ と定義すると上の不等式より，$Q[U_n < \infty] \leq 64\alpha^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ となる．$V^n = \frac{1}{k_n} R^n \mathbf{1}_{[0,U_n]}$ と定義する．以下この V_n が (NFLVR) に矛盾することを示す．$V^n \cdot S$ は下から $-n^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{nk_n}$ で有界であり，V^n は許容可能である．$-n^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{nk_n}$ は 0 に収束する．

$Q\left[(R^n \cdot A)_{T_{n,i}} - (R^n \cdot A)_{T_{n,i-1}} \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}\right] > \beta - n^{-2}$ と Corollary4.2.5. より次の評価を得る．

$$Q\left[(R^n \cdot A)_{T_{n,k_n}} \geq \frac{k_n}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)(\beta - n^{-2})\right] \geq \frac{\beta - n^{-2}}{2}.$$

これより，

$$Q\left[(L^n \cdot A)_{T_{n,k_n}} \geq \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)(\beta - n^{-2})\right] \geq \frac{\beta - n^{-2}}{2} - Q[U_n < \infty],$$

$$Q\left[(L^n \cdot A)_\infty \geq \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)(\beta - n^{-2})\right] \geq \frac{\beta - n^{-2}}{2} - 64\alpha^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

となる．$\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)(\beta - n^{-2}) \to \frac{\alpha\beta}{2} = \gamma$ なので，$n \geq N'$ に対し $\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)(\beta - n^{-2}) \geq \frac{\gamma}{2}$ となる N' を取る．すると $n \geq N \vee N'$ に対して，

$$Q\left[(L^n \cdot A)_\infty \geq \frac{\gamma}{2}\right] > \frac{\beta}{4}$$

となる．

$(V^n \cdot S)_\infty = (V^n \cdot M)_\infty + (V^n \cdot A)_\infty$ であり，$(V^n \cdot M)_\infty$ は 0 に $L^2(Q)$ 収束する．実際，

$$\|(V^n \cdot M)_\infty\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{k_n}\|(R^n \cdot M)_{T_{n,k_n}}\|_{L^2(Q)} \leq 2\frac{1}{\sqrt{k_n}} \to 0.$$

チェビシェフの不等式より，

$$Q\left[|(V^n \cdot M)_\infty| > \frac{\gamma}{4}\right] \leq \frac{16}{\gamma^2}\|(V^n \cdot M)_\infty\|_{L^2(Q)}$$

となるので，十分大きな n に対して次の不等式がなりたつ．

$$Q\left[(V^n \cdot S)_\infty \geq \frac{\gamma}{4}\right] \geq Q\left[(V^n \cdot A)_\infty > \frac{\gamma}{2}\right] - Q\left[|(V^n \cdot M)_\infty| > \frac{\gamma}{4}\right] \geq \frac{\beta}{4}.$$

$g_n = (V^n \cdot S)_\infty$ とすると，$\|g_n^-\|_\infty \to 0$ である．Lemma4.2.3. よりある $[0,\infty]$ 値関数 g に概収束する，関数列 $\hat{g}_n \in \mathrm{conv}\{g_n, g_{n+1}, \cdots\}$ が存在し，$\hat{g} \in K_0, Q[g>0]>0$ なので Corollary4.3.7. より (NFLVR) に矛盾する．

□

$c>0$ に対し，

$$T_c^n = \inf\{t \mid |(H^n \cdot M)_t| \geq c\}, \quad K_c^n = H^n \mathbf{1}_{\rrbracket T_c^n, \infty \llbracket}$$

と定義する．

Lemma 4.5.4. $\epsilon > 0$ に対し，次の条件を満たす $c_0 > 0$ が存在する．任意の n と凸結合係数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ および $c \geq c_0$ に対し，

$$Q\left[\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right) \cdot M\right)^* > \epsilon\right] < \epsilon.$$

Proof

背理法で示す．次の性質を満たす $\alpha > 0$ が存在すると仮定する；任意の $c_0 > 0$ に対し，

$$Q\left[\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right) \cdot M\right)^* > \alpha\right] < \alpha$$

となる，凸結合係数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と $c \geq c_0$ が存在する．$q = \sup_n \sup_t |(H^n \cdot S)_t| < \infty \quad a.s.$ なので，$Q[q > N] < \frac{\alpha}{4}$ となる N が取れる．

$$\tau = \inf\{t \mid |(H^n \cdot S)_t| > N \quad \text{for } \exists n\}$$

と定義すると，$Q[\tau < \infty] \leq Q[q > N] < \frac{\alpha}{4}$ である．

Lemma4.5.3. を $\lambda = \sup_n \|(H^n \cdot S)^*\|_{L^2(Q)}$ として適用すると，$(H^n \cdot M)^*$ は $L^0(Q)$ 有界である．したがって，

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n Q[T_c^n < \infty] \leq \lim_{c\to\infty} \sup_n Q[(H^n \cdot M)^* \geq c] = 0$$

となる．任意の $0 < \delta < \frac{\alpha}{4}$ に対し，$Q[A] \leq \gamma_\delta$ ならば $\|q^2 \mathbf{1}_A\|_{L^2(Q)} \leq \frac{\delta}{2}$ となる $\gamma_\delta > 0$ を取る．c_1 を $c \geq c_1$ ならば

$$\sup_n Q[T_c^n < \infty] \leq \gamma_\delta \wedge \delta^2$$

となるように取る．すると任意の n と $c \geq c_1$ に対し次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \|(K_c^n \cdot S)^*\|_{L^2(Q)} &\leq \|2(H^n \cdot S)^* \mathbf{1}_{\{T_c^n < \infty\}}\|_{L^2(Q)} \\ &\leq 2\|q \mathbf{1}_{\{T_c^n < \infty\}}\|_{L^2(Q)} \leq \delta. \end{aligned}$$

仮定より，

$$Q\left[\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right) \cdot M\right)^* > \alpha\right] < \alpha$$

となる，凸結合 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と $c \geq c_1$ が存在する．

$$\sigma = \inf\left\{t \middle| \left|\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right) \cdot M\right)_t\right| \geq \alpha\right\}, \quad K = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right) \mathbf{1}_{\llbracket 0, \min(\tau,\sigma) \rrbracket}$$

と定義する．

定義より $Q[(K\cdot M)^* > \alpha] > \alpha - Q[\tau > \infty] > \frac{3}{4}\alpha$ となる．また $(K\cdot S)^* \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (K_c^i \cdot M)^*$ なので，$\|(K\cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \delta$ となる．$\min(T_c^i, \tau, \sigma) < \tau$ ならば，$\left((H^i\cdot S)_{\min(t,\tau,\sigma)} - (H^i\cdot S)_{\min(T_c^i,\tau,\sigma)}\right) \geq N+1$ であり，$\min(T_c^i,\tau,\sigma) = \tau$ ならば，$\left((H^i\cdot S)_{\min(t,\tau,\sigma)} - (H^i\cdot S)_{\min(T_c^i,\tau,\sigma)}\right) = 0$ となる．よって，$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{\rrbracket T_c^i, \infty\llbracket}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
(K\cdot S)_t &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{\{t > T_c^i\}} \left((H^i\cdot S)_{\min(t,\tau,\sigma)} - (H^i\cdot S)_{\min(T_c^i,\tau,\sigma)}\right) \\
&\geq -(N+1)Y_t
\end{aligned}
$$

である．Y は単調増大であり，$\mathcal{F}_t$-適合で左連続なので可予測である．$Y_\infty = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{\{T^i < \infty\}}$ なので，$\mathbb{E}_Q[Y_\infty] = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q[T_c^i < \infty] \geq \delta$ である．したがって，$Q[Y_\infty > \delta] \leq \delta$ となる．$\nu = \inf\{t \mid Y_t > \delta\}$ と定義すると，$Q[\nu < \infty] \leq Q[Y_\infty > \delta] \leq \delta < \frac{\alpha}{4}$ となる．

$K' = K\mathbf{1}_{\llbracket 0,\nu \rrbracket}$ と定義すると以下の不等式が成り立つ．

$$
\|(K'\cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \|(K\cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \delta.
$$

$$
\begin{aligned}
Q[(K'\cdot M)^* > \alpha] &> Q[(K\cdot M)^* > \alpha] - Q[\nu < \infty] \\
&> \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{4}\alpha = \frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
(K'\cdot S)_t = (K\cdot S)_{t\wedge\nu} \geq -(N+1)Y_{t\wedge\nu} \geq -(N+1)\delta.
$$

$L^\delta = \frac{K'}{(N+1)\delta}$ は 1-許容可能であり，

$$
\|(L^\delta \cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{N+1}, \quad Q\left[(L^\delta\cdot M)^* \geq \frac{\alpha}{(N+1)\delta}\right] > \frac{\alpha}{2}
$$

を満たす．これは Lemma4.5.3. に矛盾する．

□

Lemma 4.5.5. $\epsilon > 0$ に対し，次の条件を満たす $c_0 > 0$ が存在する．任意の 1 で有界な可予測過程 h と凸結合係数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ および $c \geq c_0$ に対し，

$$
Q\left[\left(\left(h\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right)\cdot M\right)^* > \epsilon\right] < \epsilon.
$$

特に上の不等式が成り立つならば，前章で定義した D に対し，$D\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \cdot M\right) < 2\epsilon$ となる．

Proof

$\epsilon > 0$ に対し，Lemma4.5.4. の c_0 を取ると，任意の凸結合係数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と $c \geq c_0$ に対し，

$$
Q\left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \cdot M\right)^* > \epsilon\right] < \epsilon.
$$

Lemma4.5.4. の証明より $\lim_{c\to\infty} \sup_n \|(K_c^n\cdot S)^*\|_{L^2(Q)} = 0$ である．c_0 を十分大きく取って，$c \geq c_0$ に対し，$\sup_n \|(K_c^n \cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \frac{\epsilon}{6}$ とする．Corollary4.2.2. より任意の n と停止時刻 σ に対し，次の不等式が成り立つ．

$$
\|\Delta(K_c^n\cdot S)^*\|_{L^2(Q)} \leq \epsilon.
$$

h は可予測で $|h| \le 1$，$c \ge c_0$，$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ は凸結合係数とし，

$$\sigma = \inf\left\{t \middle| \ \left|\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \cdot M\right)_t\right| > \epsilon\right\}$$

と定義する．以下の評価が成り立つ．

$$\sup_{t \le \sigma}\left|\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \cdot M\right)_t\right| \le \epsilon + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left|\Delta\left(K_c^i \cdot M\right)_\sigma\right|.$$

よって左辺の $L^2(Q)$-ノルムは 2ϵ で抑えられ，$\left(\left(h \sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right) \mathbf{1}_{[\![0,\sigma]\!]} \cdot M\right)^*$ の $L^2(Q)$-ノルムも 2ϵ で抑えられる．したがって，

$$\begin{aligned} Q\left[\left(\left(h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i\right) \cdot M\right)^* > \sqrt{\epsilon}\right] &\le Q\left[\left(\left(h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i\right) \mathbf{1}_{[\![0,\sigma]\!]} \cdot M\right)^* > \sqrt{\epsilon}\right] + Q[\sigma < \infty] \\ &\le \frac{4\epsilon^2}{\epsilon} + \epsilon = 5\epsilon. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.5.6. 凸結合の列 $L^n \in \mathrm{conv}\{H^k, k \ge n\}$ で $(L^n \cdot M)$ が半マルチンゲール位相で収束するものが存在する．

Proof

$\epsilon = \frac{1}{2n}$ として Lemma4.5.5. を適用すると，任意の凸結合 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ に対し，

$$D\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_{c_n}^i\right) \cdot M\right) \le \frac{1}{n}$$

となる c_n が取れる．

各 n と k に対し，

$$\left(H^k \mathbf{1}_{[\![0,T_{c_n}^k]\!]} \cdot M\right)^* \le c_n + \left|\Delta(H^k \cdot M)_{T_{c_n}^k}\right|$$

である．Corollary4.2.2. より，$H^k \mathbf{1}_{[\![0,T_{c_n}^k]\!]} \cdot M$ は $L^2(Q)$-マルチンゲールであり，

$$\left\|H^k \mathbf{1}_{[\![0,T_{c_n}^k]\!]} \cdot M\right\|_{L^2(Q)} \le c_n + 6\|q\|_{L^2(Q)}.$$

$\mathcal{M}^2$ は $L^2(Q)$-マルチンゲールのヒルベルト空間とし，$\mathfrak{H} = \left(\Sigma \oplus \mathcal{M}^2\right)_{l^2}$ をその ℓ^2-sum とする．すなわち，$\mathfrak{H} = \{(X_n)_{n\ge1} \mid X_n \in \mathcal{M}^2, \quad \sum_{n\ge1} \|X_n\|_2^2 < \infty\}$ とする．この空間はノルム $\|X\|^2 = \sum_{n\ge1} \|X_n\|_2^2$ でヒルベルト空間である．X^k の座標を

$$X_n^k = \frac{1}{2^n(c_n + 6\|q\|_{L^2(Q)})}\left(H^k \mathbf{1}_{[\![0,T_{c_n}^k]\!]} \cdot M\right)$$

と定義すると，$\|X^k\|^2 \le \sum_{n\ge1} 2^{-n} = 1$ である．$(X^k)_{k\ge1}$ は $\mathfrak{H}$ の有界列なので，$\mathfrak{H}$ のノルムに対し収束する列 $\hat{Y}^k \in \mathrm{conv}\{X^k, X^{k+1}, \cdots\}$ が取れる．$\hat{Y}^k = \sum_{j=0}^{N_k} \lambda_j^k X^{k+j}$ とすると各 n に対し，

$$Y_n^k = \sum_{j=0}^{N_k} \lambda_j^k H^{k+j} \mathbf{1}_{[\![0,T_{c_n}^{k+j}]\!]} \cdot M$$

は $k \to \infty$ で収束する $L^2(Q)$-マルチンゲールの列である．

$L^k = \sum_{j=0}^{N_k} \lambda_j^k H^{k+j}$ とする．$\epsilon > 0$ に対し $\frac{1}{N} < \epsilon$ となる N を取ると，以下の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} D\left(\left(L^k - L^l\right) \cdot M\right) &\leq D\left(Y_N^k - Y_N^l\right) + D\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k K_{c_N}^{k+j} \cdot M\right) + D\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^l K_{c_N}^{l+j} \cdot M\right) \\ &\leq D\left(Y_N^k - Y_N^l\right) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

$k, l \geq N_0$ ならば $D\left(Y_N^k - Y_N^l\right) \leq \epsilon$ となる N_0 が取れる．以上より $L^k \cdot M$ は半マルチンゲール位相でコーシー列であり，完備性より収束する．

□

Lemma 4.5.7. Lemma4.5.6. の列 $(L^k)_{k\geq 1}$ に対し，$(L^k \cdot A)$ は半マルチンゲール位相で収束する．

Proof

任意の t に対し，$k, m \to \infty$ の時，$\int_0^t \left|d\left(\left(L^k - L^m\right) \cdot A\right)\right|$ が 0 に確率収束するならば，$L^k \cdot A$ は半マルチンゲール位相で 0 に確率収束する．$k, m \to \infty$ の時，$\int_0^\infty \left|d\left(\left(L^k - L^m\right) \cdot A\right)\right|$ が 0 に確率収束することを示せば十分である．これが成り立たないと仮定すると，$\alpha > 0$ と部分列 $(i_k, j_k)_{k\geq 1}$ で，

$$Q\left[\int_0^\infty \left|d\left(\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right) \cdot A\right)\right| > \alpha\right] > \alpha$$

となるものが存在する．

$$\int_0^\infty h_u^k \left(L_u^{i_k} - L_u^{j_k}\right) dA_u = \int_0^\infty \left|L_u^{i_k} - L_u^{j_k}\right| |dA_u|$$

が成り立つ，$\{+1, -1\}$ 値可予測過程 h^k が存在する．

$$\varphi_k = \int_0^\infty h_u^k d\left(\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right) \cdot A\right)_u$$

と定義する．

$$R^k = L^{j_k} + \frac{1}{2}\left(1 + h^k\right)\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right) = \frac{1}{2}\left(L^{i_k} - L^{j_k} + h^k\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right)\right)$$

と定義する．h^k の取り方より，

$$\left(R^k - L^{i_k}\right) \cdot A = \frac{1}{2}\left(\left(h^k - 1\right)\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right)\right) \cdot A,$$

$$\left(R^k - L^{j_k}\right) \cdot A = \frac{1}{2}\left(\left(h^k + 1\right)\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right)\right) \cdot A$$

はいずれも単調増大過程である．$\varphi_k = \left(\left(R^k - L^{i_k}\right) \cdot A\right)_\infty + \left(\left(R^k - L^{j_k}\right) \cdot A\right)_\infty$ なので，

$$Q\left[\left(\left(R^k - L^{i_k}\right) \cdot A\right)_\infty > \frac{\alpha}{2}\right] + Q\left[\left(\left(R^k - L^{j_k}\right) \cdot A\right)_\infty > \frac{\alpha}{2}\right] > \alpha$$

である. 必要ならばi_k と j_k を交換して, 単調増大になるように部分列を取り直して, $Q\left[\left(\left(R^k - L^{i_k}\right) \cdot A\right)_\infty > \frac{\alpha}{2}\right] > \frac{\alpha}{2}$ と仮定する．$\left(R^k - L^{i_k}\right) \cdot M = \frac{1}{2}\left(\left(h^k - 1\right)\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right)\right) \cdot M$ であり，$\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right) \cdot M$ は半マルチンゲール位相で 0 に収束するので，$\left(\left(R^k - L^{i_k}\right) \cdot M\right)^*$ も 0 に確率収束する．同様に $\left(\left(R^k - L^{j_k}\right) \cdot M\right)^*$ も 0 に確率収束する．

$\delta_k = 2^{-k}$ とする．必要ならば i_k, j_k の部分列を取り，全ての k に対し，

$$Q\left[\left(\left(R^k - L^{i_k}\right) \cdot M\right)^* \geq \delta_k \text{または} \left(\left(R^k - L^{j_k}\right) \cdot M\right)^* \geq \delta_k\right] < \delta_k$$

が成り立つとしてよい. $\tau_k = \inf\left\{t \mid \left(R^k \cdot M\right)_t \leq \max\left(\left(L^{i_k} \cdot M\right)_t, \left(L^{j_k} \cdot M\right)_t\right)\right\}$ と定義すると, $Q\left[\tau_k < \infty\right] < \delta_k$ を満たす．$\tilde{R}^k = R^k \mathbf{1}_{[\![0,\tau_k]\!]}$ と定義する．$\tilde{R}^k$ は $(1 + \delta_k)$-許容可能であること，特に $(1 + \delta_k)^{-1} \tilde{R}^k$ は 1-許容可能であることを示す.

$t < \tau_k$ に対し，以下の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\left(\tilde{R}^k \cdot S\right)_t &= \left(R^k \cdot A\right)_t + \left(R^k \cdot M\right)_t \\ &\geq \max\left(\left(L^{i_k} \cdot A\right)_t, \left(L^{j_k} \cdot A\right)_t\right) + \left(R^k \cdot M\right)_t \\ &\geq \max\left(\left(L^{i_k} \cdot A\right)_t, \left(L^{j_k} \cdot A\right)_t\right) + \max\left(\left(L^{i_k} \cdot M\right)_t, \left(L^{j_k} \cdot M\right)_t\right) - \delta_k \\ &\geq \max\left(\left(L^{i_k} \cdot S\right)_t, \left(L^{j_k} \cdot S\right)_t\right) - \delta_k \\ &\geq -1 - \delta_k.\end{aligned}$$

したがって，

$$\left(\tilde{R}^k \cdot S\right)_{\tau_k -} \geq \max\left(\left(L^{i_k} \cdot S\right)_{\tau_k -}, \left(L^{j_k} \cdot S\right)_{\tau_k -}\right) - \delta_k$$

である．$\Delta\left(\tilde{R}^k \cdot S\right)_{\tau_k}$ は $\left(L^{i_k} \cdot S\right)_{\tau_k}$ または $\left(L^{j_k} \cdot S\right)_{\tau_k}$ と等しいので，

$$\begin{aligned}\left(\tilde{R}^k \cdot S\right)_{\tau_k} &\geq \max\left(\left(L^{i_k} \cdot S\right)_{\tau_k}, \left(L^{j_k} \cdot S\right)_{\tau_k}\right) - \delta_k \\ &\geq -1 - \delta_k\end{aligned}$$

となる．以上より，$\tilde{R}^k$ は $(1+\delta_k)$-許容可能であることが示せた．

部分列を取れば $\left(\left(\frac{\tilde{R}^k}{1+\delta_k} - L^{i_k}\right) \cdot S\right)_\infty^-$ は 0 に概収束することを示す．

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{\tilde{R}^k}{1+\delta_k} - L^{i_k}\right) \cdot S\right)_\infty &= \frac{1}{1+\delta_k}\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot S\right)_\infty - \frac{\delta_k}{1+\delta_k}\left(L^{i_k} \cdot S\right)_\infty \\ &= \frac{1}{1+\delta_k}\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot A\right)_\infty + \frac{1}{1+\delta_k}\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot M\right)_\infty - \frac{\delta_k}{1+\delta_k}\left(L^{i_k} \cdot S\right)_\infty\end{aligned}$$

と分解する．第一項に関して以下の評価式が成り立つ．

$$Q\left[\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot A\right)_\infty > \frac{\alpha}{2}\right] > \frac{\alpha}{2} - \delta_k.$$

$$Q\left[\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot A\right)_\infty \geq 0\right] \geq Q\left[\tau_k = \infty\right] > 1 - \delta_k.$$

ボレルカンテリの補題より，

$$Q\left[\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot A\right)_\infty \geq 0\right] \geq Q\left[\tau_k = \infty \quad \text{f.e.}\right] = 1.$$

また，第二項に関して以下の評価式が成り立つ．

$$Q\left[\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot M\right)_\infty < -\delta_k\right] < \delta_k.$$

よって，$\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot M\right)_\infty^-$ は 0 に確率収束する．第三項は 0 に概収束する．以上より部分列をとって，$\left(\left(\frac{\tilde{R}^k}{1+\delta_k} - L^{i_k}\right) \cdot S\right)_\infty^-$ は 0 に概収束することが示せた．

$\left(\left(\frac{\tilde{R}^k}{1+\delta_k} - L^{i_k}\right) \cdot S\right)_\infty$ に Lemma4.2.3. を適用する．$\left(L^{i_k} \cdot S\right)_\infty$ は f_0 に概収束するので，列 $V^k \in \mathrm{conv}\{\tilde{R}^k, \tilde{R}^{k+1}, \cdots\}$ が存在し，$\left(V^k \cdot S\right)_\infty$ は $\exists g$ に概収束する．$g - f_0 \geq 0$ でもある．

以下 $Q\left[g > f_0\right] > 0$ であることを示す．$V^k = \sum_{j=0}^{N_k} \lambda_j^k \tilde{R}^{k+j}$, $\quad \tilde{L}^k = \sum_{j=0}^{N_k} \lambda_j^k L^{k+j}$ とする．上の評価式より，

$$Q\left[\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot S\right)_\infty > \frac{\alpha}{2} - \delta_k\right] > \frac{\alpha}{2} - 2\delta_k$$

である．$k \geq N$ ならば $\frac{\alpha}{2} - 2\delta_k > \frac{\alpha}{4}$ とすると，$k \geq N$ に対し以下の評価が成り立つ．

$$Q\left[\left(\left(\tilde{R} - L^{i_k}\right) \cdot S\right)_\infty > \frac{\alpha}{4}\right] > \frac{\alpha}{4}.$$

Lemma4.2.4 を $a_j = \lambda_j^k \left(\tilde{R}^{k+j} \cdot S\right)_\infty - \lambda_j^k \left(L^{k+j} \cdot S\right)_\infty$，$\delta = \frac{\alpha}{4}$，$\eta = \frac{1}{2}$ として適用すると，以下の評価が成り立つ．

$$Q\left[\left(\tilde{R}^k \cdot S\right)_\infty - \left(\tilde{L}^k \cdot S\right)_\infty \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{\alpha}{4}\right] > \frac{\alpha}{8} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{8}}.$$

Lemma4.2.3. より $Q\left[g > f_0\right] > 0$ が示せた．

$(1+\delta_k)^{-1} V^k$ は 1-許容可能で，$\left(\frac{V^k}{1+\delta_k} \cdot S\right)_\infty$ は g に概収束し，$g \geq f_0$，$Q\left[g > f_0\right] > 0$ なので f_0 の最大性に矛盾する．

□

Proof of Theorem4.4.3.(1)

Lemma4.5.6. と Lemma4.5.7. より，列 $L^k \in \mathrm{conv}\{H^k, H^{k+1}, \cdots\}$ で $L^k \cdot M$ と $L^k \cdot A$ が半マルチンゲール位相で収束するものが存在する．$L^k \cdot S$ も半マルチンゲール位相で収束する．Mémin の定理[2]より，可予測過程 L で $L^k \cdot S$ は $L \cdot S$ に半マルチンゲール位相で収束するものが存在する．L は 1-許容可能であり，以下の等式を満たす．

$$\begin{aligned}(L \cdot S)_\infty &= \lim_{t\to\infty} (L \cdot S)_t = \lim_{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} (L^n \cdot S)_t \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to\infty} (L^n \cdot S)_t = \lim_{n\to\infty} (L^n \cdot S)_\infty = f_0\end{aligned}$$

Lemma4.5.2. より $(H^n \cdot S)_t$ は $\mathbb{R}_+$ 上一様収束するので，$(L^n \cdot S)_t$ も $\mathbb{R}_+$ 上一様収束する．よって，上の等式において極限の順序交換が可能である．以上より $f_0 \in K_0$ となり証明が完了する．

□

4.6 同値局所マルチンゲール測度の集合

S は局所有界で P のもと局所マルチンゲールと仮定する．Corollary4.1.5. より S は (NFLVR) を満たす．

$$\mathcal{M}(P) = \{Q \mid Q \ll P, \quad S \text{ は } Q \text{ のもと局所マルチンゲール}\}$$

$$\mathcal{M}^e(P) = \{Q \mid Q \sim P, \quad S \text{ は } Q \text{ のもと局所マルチンゲール}\}$$

と定義する．$\mathcal{M}^e(P)$ は $\mathcal{M}(P)$ で L^1-稠密である．この節ではまず，$\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}^e(P)$ ならば，$\mathcal{M}(P) = \{P\}$ となることを証明する．L^∞ の部分集合 W^0 を，

$$W^0 = \{f \mid S-\text{可積分過程 } H \text{ で } H \cdot S \text{ は有界}, f = (H \cdot S)_\infty \text{となるものが存在する}\}$$

と定義し，$W = \{\alpha + f \mid \alpha \in \mathbb{R}, \quad f \in W^0\}$ と定義する．

Lemma 4.6.1. H は S-可積分で，$H \cdot S$ は有界とする．この時 $Q \in \mathcal{M}(P)$ に対し，$H \cdot S$ は Q-マルチンゲールである．

[2]Mémin の定理：X は半マルチンゲールとする．$\mathbb{L}(X) = \{H \cdot X \mid H \text{ は } X\text{-可積分可予測過程}\}$ は半マルチンゲール位相で完備である．(文献 [10] 参照)

Proof

S は Q-局所マルチンゲールで，H と $(-H)$ は許容可能である．Theorem4.1.2. より $H \cdot S$ と $(-H) \cdot S$ は Q-優マルチンゲールであり，$H \cdot S$ は Q-マルチンゲールである．

□

次の定理の証明は省略する．(文献 [1] 参照)

Theorem 4.6.2. $f \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad f^- \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする．この時以下の条件 (1)(2) は同値である．
(1)$H \cdot S$ は Q-一様可積分マルチンゲールで，$f = \alpha + (H \cdot S)_\infty$ となる，可予測過程 S-可積分過程 H と $Q \in \mathcal{M}^e(P)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する．
(2) 任意の $R \in \mathcal{M}^e(P)$ に対し，$\mathbb{E}_R[f] \leq \mathbb{E}_Q[f]$ となる $Q \in \mathcal{M}^e(P)$ が存在する．
有界な f に対してはさらに次の条件 (3) も同値である．
(3)$\mathbb{E}_R[f]$ は $R \in \mathcal{M}(P)$ の関数として一定である．

Corollary 4.6.3. W は L^∞ の弱∗閉集合である．

Proof

$(f_n)_{n \geq 1}$ は W の列で f に弱∗収束すると仮定すると，

$$\mathbb{E}[f_n g] \to \mathbb{E}[fg] \quad for \quad \forall g \in L^1 \supset \mathcal{M}(P)$$

である．Theorem4.6.2. より定数 c_n が存在し，$\mathbb{E}[f_n g] = c_n$，$\forall g \in \mathcal{M}(P)$．よって c_n の極限を c とすると，$\mathbb{E}[fg] = c$，$\forall g \in \mathcal{M}(P)$ となる．Theorem4.6.2. より，$H \cdot S$ は Q-一様可積分マルチンゲールで，$f = \alpha + (H \cdot S)_\infty$ となる，可予測 S-可積分過程 H と $Q \in \mathcal{M}^e(P)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する．

$$(H \cdot S)_t = \lim_{u \to \infty} \mathbb{E}\left[(H \cdot S)_u \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[(H \cdot S)_\infty \mid \mathcal{F}_t\right]$$

であり，$(H \cdot S)_\infty$ は有界なので，$H \cdot S$ は有界である．したがって，$f \in W$ である．

□

Theorem 4.6.4. S は局所有界で P のもと局所マルチンゲールとする．この時以下が成り立つ．
(1)$\mathcal{M}(P)$ は $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の閉有界凸集合である．
(2)$\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}^e(P)$ ならば，$\mathcal{M}(P) = \{P\}$ である．

Proof

(1) 凸集合であることは明らかである．$\mathbb{E}_Q[1] = 1$ なので，有界集合であることも明らかである．閉集合であることを示す．$(Q_n)_{n \geq 1}$ は $\mathcal{M}(P)$ の列で Q に L^1-収束すると仮定する．停止時刻 T を取り，S^T は有界とする．$s < t$，$A \in \mathcal{F}_t$ とすると，

$$\mathbb{E}_Q\left[S_t^T \mathbf{1}_A\right] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_{Q_n}\left[S_t^T \mathbf{1}_A\right] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_{Q_n}\left[S_s^T \mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}_Q\left[S_s^T \mathbf{1}_A\right]$$

となり，S^T は Q-マルチンゲールである．したがって，$Q \in \mathcal{M}(P)$ である．
(2)$\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}^e(P)$ とすると，(1) より $\mathcal{M}^e(P)$ は $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の閉有界凸集合である．Bishop-Phelps の定理[3]より，

$$G = \{f \in L^\infty \mid \exists Q \in \mathcal{M}^e(P) \quad s.t. \quad \mathbb{E}_R[f] \leq \mathbb{E}_Q[f] \quad \text{for} \quad \forall R \in \mathcal{M}(P)\}$$

は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ でノルム位相で稠密である．Theorem4.6.2. より $G \subset W$ であり，W は弱∗閉集合なので，強閉集合である．したがって，$W = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ である．

[3]Bishop-Phelps の定理：C はバナッハ空間 X の閉有界凸集合とする．この時 C 上の最大値が存在する関数の集合は X^* で稠密である．(文献 [5] 参照)

$f_1, f_2 \in \mathcal{M}^e(P)$ かつ，$f_1 \neq f_2$ とすると，Hahn-Banach の定理より，$\mathbb{E}[f_1 g] \neq \mathbb{E}[f_2 g]$ となる $g \in W$ が存在する．Theorem4.6.2. より $\mathbb{E}[f_1 g] = \mathbb{E}[f_2 g]$ となり矛盾する．したがって，$\mathcal{M}(P) = \{P\}$ である．

□

$$C^0 = \{g \mid g \in L^1, \quad \mathbb{E}[gh] \leq 0 \quad \text{for} \quad \forall h \in C\}$$

と定義し以下の定理を証明する．

Theorem 4.6.5.

$$\mathcal{M}(P) = \{Q \mid Q \in L^1, \quad Q[\Omega] = 1, \quad Q \in C^0\}.$$

Proof

$Q \in \mathcal{M}(P)$ とすると，Theorem4.1.2. より可予測過程 H に対し $H \cdot S$ は Q-優マルチンゲールである．任意の $h \in C$ に対し，$h \leq (H \cdot S)_\infty$ となる可予測過程 H が存在するので，$\mathbb{E}_Q[h] \leq 0$ となる．したがって，$Q \in C^0$ となる．

逆に $Q \in L^1$，$Q[\Omega] = 1$，$Q \in C^0$ とする．$-L^\infty_+ \subset C$ なので $C^0 \subset L^1_+$ である．よって，Q は確率測度である．停止時刻 T を取り，S^T は有界とする．$u \geq t$，$\alpha \in \mathbb{R}$，$A \in \mathcal{F}_t$ とすると，$\alpha\left(S^T_u - S^T_t\right)\mathbf{1}_A \in C$ である．$Q \in C^0$ より，$\mathbb{E}_Q\left[\left(S^T_u - S^T_t\right)\mathbf{1}_A\right] = 0$ となり，S^T は Q-マルチンゲールである．以上より S は Q-局所マルチンゲールであることが示せた．

□

Theorem 4.6.6. 任意の $f \in L^\infty$ に対し以下の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\sup_{Q \in \mathcal{M}^e(P)} \mathbb{E}_Q[f] &= \sup_{Q \in \mathcal{M}(P)} \mathbb{E}_Q[f] \\
&= \inf\{x \mid x + h \geq f \text{ となる } h \in C \text{ が存在する }\} \\
&= \inf\{x \mid x + h = f \text{ となる } h \in C \text{ が存在する }\}.
\end{aligned}$$

Proof

１つ目の等式は，$\mathcal{M}^e(P)$ は $\mathcal{M}(P)$ で L^1-稠密であることから，明らかである．$\{x \mid x + h \geq f$ となる $h \in C$ が存在する $\} = \{x \mid x + h = f$ となる $h \in C$ が存在する $\}$ なので３つ目の等式が成り立つ．以下２つ目の等式を示す．

$h \in C$，$x + h \geq f$，$Q \in \mathcal{M}(P)$ とする．Theorem4.6.5. より，$\mathbb{E}_Q[f - x] \leq \mathbb{E}_Q[h] \leq 0$ となり，$\mathbb{E}_Q[f] \leq x$ が成り立つ．したがって，

$$\sup_{Q \in \mathcal{M}(P)} \mathbb{E}_Q[f] \leq \inf\{x \mid x + h \geq f \text{ となる } h \in C \text{ が存在する }\}$$

となる．

逆を示す．$z < \inf\{x \mid x + h \geq f$ となる $h \in C$ が存在する $\}$ とすると，$f - z \notin C$ である．C は弱 $*$ 閉凸集合なので，Hahn-Banach の定理より，$\mathbb{E}_Q[h] \leq 0 \quad \text{for} \quad \forall \in C$，$\mathbb{E}_Q[f - z] > 0$ となる，$Q \in L^1$ が存在する．$Q[\Omega] = 1$ となるよう標準化すると，Theorem4.6.5. より $Q \in \mathcal{M}(P)$ となる．したがって，$z < \mathbb{E}_Q[f] \leq \sup_{Q \in \mathcal{M}(P)} \mathbb{E}_Q[f]$ となる．以上より，

$$\sup_{Q \in \mathcal{M}(P)} \mathbb{E}_Q[f] \geq \inf\{x \mid x + h \geq f \text{ となる } h \in C \text{ が存在する }\}$$

が示せた．

□

$\inf\{x \mid x+h \geq f$ となる $h \in C$ が存在する $\}$ は売り手が初期投資 x である h という投資戦略を行い満期時に損をしない x の下限である．この値が売り手にとってもっとも有利かつ，買い手が許容できる f の価格である．この価格を f に対する無裁定価格という．

4.7 No free lunch with Bounded Risk

$\tilde{C}$ は C の弱∗収束列の極限の集合とする．

Definition 4.7.1. 半マルチンゲール S に対し $\tilde{C} \cap L_+^\infty = \{0\}$ を満たす時，条件 no free lunch with bounded risk(以下 (NFLBR) と表記) を満たすという．

$\bar{C} \subset \tilde{C}$ なので，(NFLBR) を満たすならば (NFLVR) も成り立つ．この節では (NFLBR) と同値な条件を考察し，関連する命題を示す．

Proposition 4.7.2. 半マルチンゲール S に対し次の (1) と (2) は同値である．
(1)S は (NFLBR) を満たす．
(2)1-許容可能列 $(H^n)_{n\geq 1}$，$g_n = (H^n \cdot S)_\infty$ に対し，g_n^- が 0 に確率収束するならば，g_n は 0 に確率収束する．

Proof
(1) $\Rightarrow$ (2)
背理法で示す．S は (NFLBR) を満たし，$(H^n)_{n\geq 1}$ は 1-許容可能，$g_n = (H^n \cdot S)_\infty$，$g_n^-$ は 0 に確率収束し，g_n は 0 に確率収束しないとする．部分列を取り，任意の n に対し，$P[g_n > \alpha] > \alpha$ となる $\alpha > 0$ が存在し，g_n^- は 0 に概収束するしてよい．Lemma4.2.3. よりある $[0,\infty]$ 値関数 f に概収束する，関数列 $f_n \in \mathrm{conv}\{g_n, g_{n+1}, \cdots\}$ が存在する．$P[f > 0] > 0$ である．$h_n = \min(f_n, 1) \in C$ とすると，h_n は $h = \min(f, 1)$ に概収束する．h_n は 1 で有界なので，h_n は h に弱∗収束する．S は (NFLBR) を満たし $h \geq 0$ なので，$h = 0 \quad a.s.$ となる．これは $P[f > 0] > 0$ に矛盾する．

(2) $\Rightarrow$ (1)
(2) を仮定すると，特に $f \in K_0, f^- = 0$ ならば $f = 0$ となるので，S は (NA) を満たす．$(h_n)_{n\geq 1}$ は C の列で $h \geq 0$ に弱∗収束すると仮定し，$h = 0 \quad a.s.$ を示す．Banach-Stainhaus の定理より $(h_n)_{n\geq 1}$ は一様有界である．$(h_n)_{n\geq 1}$ は 1 で一様有界として示せば十分である．h_n は h に L^∞-弱∗収束するので，h_n は h に L^2-弱収束する．したがって，列 $g_n \in \mathrm{conv}\{h_n, h_{n+1}, \cdots\}$ で h に L^2-収束するものが取れる．$h^- = 0$ なので g_n^- は 0 に確率収束する．$g_n \geq -1$ なので，Proposition4.3.5. より $g_n = (H^n \cdot S)_\infty$ となる H^n は 1-許容可能である．仮定より，$h = 0$ となる．

□

(NFLBR) の定義において有界な台を持つ戦略 H に制限した K_0 を用いる時，有界な台を持つ戦略に対する (NFRBR) という．有界な台を持つ戦略に対する (NA)，有界な台を持つ戦略に対する (NFLVR) も同様に定義する．次は自明である．

$$(H \cdot S)_t = (H \mathbf{1}_{[\![0,t]\!]} \cdot S)_\infty, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

すなわち，一般の戦略に対する時刻 t での資産高は有界な台を持つ投資戦略により複製される．

Proposition 4.7.3.

(1) 半マルチンゲール S が有界な台を持つ戦略に対する (NFLBR) を満たすならば，一般の (NA) が成り立つ．
(2) 半マルチンゲール S が有界な台を持つ戦略に対する (NFLVR) と一般の (NA) を満たすならば，一般の (NFLVR) が成り立つ．

Proof
　S は有界な台を持つ戦略に対する (NFLVR) を満たすとすると，Theorem4.3.3. より許容可能な H に対し，$(H\cdot S)_\infty$ が存在し有限である．
(1)S は有界な台を持つ戦略に対する (NFLBR) を満たすとする．H は 1-許容可能で $g=(H\cdot S)_\infty\geq 0\quad a.s.$ とする．$H^n=H\mathbf{1}_{[\![0,n]\!]},\quad g_n=(H^n\cdot S)_\infty=(H\cdot S)_n$ とすると，g_n は g に，g_n^- は 0 に概収束する．仮定より $g=0$ となる．
(2)S は有界な台を持つ戦略に対する (NFLVR) と一般の (NA) を満たすとする．H^n は許容可能，$g_n=(H^n\cdot S)_\infty$，$\|g_n^-\|_\infty\to 0$ と仮定し，g_n は 0 に確率収束することを示す．S は (NA) を満たすので，Proposition4.3.5. より H^n は $\|g_n^-\|_\infty$-許容可能である．$(H^n\cdot S)_m$ は $m\to\infty$ の時 $(H^n\cdot S)_\infty$ に確率収束するので，n 毎に十分大きな t_n をとり，$h_n=(H^n\cdot S)_{t_n}$，$P\left[|h_n-g_n|>\frac{1}{n}\right]<\frac{1}{n}$ とする．$\|h_n^-\|_\infty\to 0$ なので仮定より h_n は 0 に確率収束する．任意の $\epsilon>0$ に対し，$\epsilon>\frac{1}{n}$ となる n を取る．$m\geq n$ とすると，

$$
\begin{aligned}
P\left[|g_m|>2\epsilon\right] &\leq P\left[|g_m-h_m|>\epsilon\right]+P\left[|h_m|>\epsilon\right]\\
&\leq P\left[|g_m-h_m|>\frac{1}{m}\right]+P\left[|h_m|>\epsilon\right]\\
&\leq \frac{1}{m}+P\left[|h_m|>\epsilon\right].
\end{aligned}
$$

よって，g_m は 0 に確率収束する．

□

　この命題より次の命題を示す.

Proposition 4.7.4. $(S_n)_n$ は離散フィルター $(\mathcal{F}_n)_n$-適合局所有界過程とする．S に対する同値局所マルチンゲール測度が存在しないならば，次の条件 (1)(2) の少なくとも一方を満たす.
(1)S は (NA) を満たさない.
(2)S 初等戦略に対する (NFLVR) を満たさない.

　ここで初等戦略とは，$H=f\mathbf{1}_{]\!]t_1,t_2]\!]}$ ($t_1<t_2$は定数，$f\in\mathcal{F}_{t_1}$) の形をした過程の線形結合とする．離散過程 $(S_n)_n$ と一般の時間パラメータ $\mathbb{R}_+$ を持つ過程 $\left(S_{[t]}\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を対応させることで，一般の過程に対する結果が離散過程に対しても成り立つ.
Proof
　対偶を示す．今の仮定のもと初等戦略に対する (NFLVR) と有界な台を持つ戦略に対する (NFLVR) は同値である．実際初等過程ならば有界な台を持ち，H が有界な台を持つならば，$(H\cdot S)_\infty=\sum_{n=1}^N H_n\Delta S_n$ となる N が存在し，H を $\hat{H}=\sum_{n=1}^N H_n\mathbf{1}_{]\!]n,n+1]\!]}$ で複製できる．S が (1) と (2) を両方満たすならば，Proposition4.7.3.(2) より (NFLVR) を満たす．Corollary4.1.5. より同値局所マルチンゲール測度が存在する.

□

5　価格計算の例

この章では具体的なモデルの例を挙げ，同値局所マルチンゲール測度を求め，デリバティブの価格を計算する．

5.1　Black-Scholes モデル

W はフィルター付確率空間 $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}\right)$ 上の 1 次元ブラウン運動とする．r，μ，σ は定数とし，

$$\hat{B}_t = e^{rt}, \quad \hat{S}_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}, \quad 0 \le t \le T$$

とする．$\hat{B}$ を安全債権の価格過程，$\hat{S}$ を株価過程とみなす．$\hat{B}$ で割り引き，

$$B_t = \frac{\hat{B}_t}{\hat{B}_t} = 1, \quad S_t = \frac{\hat{S}_t}{\hat{B}_t} = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$$

とする．$\nu = \mu - r$ とおく．$t \ge s$ に対し，$\mathbb{E}[S_t \mid \mathcal{F}_s] = S_s e^{\nu(t-s)}$ である．よって，S は $\nu = 0$ の時以外はマルチンゲールでない．S に対する同値マルチンゲール測度を求める．伊藤の公式より，

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + \nu S_t dt = \sigma S_t d\left(W_t + \frac{\nu}{\sigma}t\right)$$

である．Girsanov の公式より，

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\frac{\nu}{\sigma}W_T - \frac{\nu^2}{2\sigma^2}T\right)$$

で Q を定義すると，$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\nu}{\sigma}t$ は Q のもとブラウン運動になる．

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma\tilde{W}_t - \frac{1}{2}\left[\sigma\tilde{W}\right]_t\right)$$

なので $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ である．$Q' \in \mathcal{M}^e(S)$ とすると，$Q = Q'$ となることを示す．$d\tilde{W}_t = \frac{1}{\sigma S_t}dS_t$ であり，S は Q' のもとマルチンゲールなので，$\tilde{W}$ も Q' のもとマルチンゲールである．また，Q と Q' は同値なので，Q' のもとでも $\left[\tilde{W}\right]_t = t$ である．したがって Lévy の定理より，$\tilde{W}$ は Q' のもとでもブラウン運動である．よって，$0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le T$，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\mathbb{E}_Q[f(S_{t_1}, \cdots, S_{t_n})] = \mathbb{E}_{Q'}[f(S_{t_1}, \cdots, S_{t_n})]$$

が成り立ち，$Q = Q'$ となることが示せた．以上より $\mathcal{M}^e(S) = \{Q\}$ である．

下から有界な $\hat{f} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ を派生商品の満期 T での支払い関数とみなす．$\hat{S}_T$ で割り引いた $f = e^{-rT}\hat{f}$ が満期時における価値を表す．マルチンゲール表現定理より，

$$f = \mathbb{E}_Q[f] + \left(H \cdot \tilde{W}\right)_T = \mathbb{E}_Q[f] + \left(\frac{H}{\sigma S} \cdot S\right)_T$$

となる許容可能投資戦略 $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$ が存在する．よって Theorem4.6.6. を参考にすれば，$\mathbb{E}_Q[f]$ が f の無裁定価格である．

$\hat{f}(\omega) = \left(\hat{S}_T(\omega) - K\right)_+$ とすると，$\hat{f}$ は満期 T，行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプションの支払い関数である．この場合 $f = \left(S_T - Ke^{-rT}\right)_+$ である．$\mathbb{E}_Q[f]$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[f] &= \mathbb{E}_Q\left[\left(S_0 \exp\left((\sigma W_T + \nu T) - \frac{\sigma^2}{2}T\right) - Ke^{-rT}\right)_+\right] \\
&= S_0 \mathbb{E}_Q\left[\exp\left(\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2}{2}T\right)\mathbf{1}_{\{S_T \ge Ke^{-rT}\}}\right] - Ke^{-rT}Q\left[S_T \ge Ke^{-rT}\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $Z=\frac{W_T+\nu T}{\sqrt{T}}$ とする．Z は標準正規分布に従う．Φ は標準正規分布の分布関数とすると，

$$\mathbb{E}_Q[f]=S_0\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

となる．この価格式のことを Black-Scholes の公式という．

5.2 伊藤過程

W はフィルター付確率空間 $\left(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}\right)$ 上の m 次元ブラウン運動とする．ρ，μ，σ は局所有界可予測過程とし，ρ は 1 次元過程，μ は n 次元過程，σ は $n\times m$ 次元過程とする．σ^i を σ の第 i 行ベクトル，σ^{ij} を σ の (i,j) 成分とする．$(n+1)$ 次元過程 $\hat{S}=\left(\hat{S}^0,\hat{S}^1,\cdots\hat{S}^n\right)$ を以下で定義する．

$$d\hat{S}^0_t=\rho_t\hat{S}^0_t dt,\quad \hat{S}^0_0=1.$$

$1\leq i\leq n$ に対し，

$$\begin{aligned}d\hat{S}^i_t &= \mu^i_t dt+\sum_j^m\sigma^{ij}_t dW^j_t\\ &= \mu^i_t dt+\sigma^i_t dW_t,\quad \hat{S}^i_0=x_i.\end{aligned}$$

この様な確率過程を伊藤過程という．$S=\frac{\hat{S}}{\hat{S}^0}=\left(\frac{\hat{S}^1}{\hat{S}^0},\cdots,\frac{\hat{S}^n}{\hat{S}^0}\right)$ と定義する．

$$\hat{S}^0_t=\exp\left(\int_0^t\rho_s ds\right)$$

なので，$\xi_t=\left(\hat{S}^0_t\right)^{-1}$ とおけば，

$$dS_t=\xi_t\left(d\hat{S}_t-\rho_t\hat{S}_t dt\right)$$

が成り立つ．

以下，

$$\sigma_t u_t=\mu_t-\rho_t\hat{S}_t,\quad \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u_t^2 dt\right)\right]<\infty$$

を満たす m 次元過程 u が存在すると仮定する．

$$\frac{dQ}{dP}=\exp\left(-\int_0^T u_t dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T u_t^2 dt\right)$$

で測度 Q を定義する．Girsanov の公式より，$\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t u_s ds$ は Q のもとブラウン運動である．

$$\begin{aligned}\int_0^t\xi_s\sigma^i_s d\tilde{W}_s &= \int_0^t\xi_s\sigma^i_s u_s ds+\int_0^t\xi_s\sigma^i_s dW_s\\ &= \int_0^t\xi_s\left(\mu_s-\rho_s\hat{S}_s\right)ds+\int_0^t\xi_s\sigma^i_s dW_s\\ &= \int_0^t dS^i_s\end{aligned}$$

が成り立つので，$dS_t = \xi_t \sigma_t d\tilde{W}_t$ である．したがって，Q は S に対する同値局所マルチンゲール測度である．Theorem4.1.5. より，S は (NFLVR) を満たすことがわかる．

さらに，σ は左逆元 Λ をもつと仮定する．$f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ は下から有界とすると，マルチンゲール表現定理より，

$$f = \mathbb{E}_Q[f] + \left(H \cdot \tilde{W}\right)_T = \mathbb{E}_Q[f] + \sum_{j=1}^{m} \left(H^j \cdot \tilde{W}^j\right)_T$$

となる m 次元可予測過程 $(H_t)_{t\in[0,T]}$ が存在する．$\bar{H} = \xi^{-1} H \Lambda$ と定義すると，$\xi \bar{H} \sigma = H$ なので，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[f] + \left(\bar{H} \cdot S\right)_T &= \mathbb{E}_Q[f] + \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{H}^i \cdot S^i\right)_T \\
&= \mathbb{E}_Q[f] + \sum_{i=1}^{n} \left(\xi \bar{H}^i \sigma^i \cdot \tilde{W}\right)_T \\
&= \mathbb{E}_Q[f] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\xi \bar{H}^i \sigma^{ij} \cdot \tilde{W}^j\right)_T \\
&= \mathbb{E}_Q[f] + \sum_{j=1}^{m} \left(H^j \cdot \tilde{W}^j\right)_T = f
\end{aligned}$$

となる．$\bar{H}$ は許容可能である．したがって，$\mathbb{E}_Q[f]$ が f の無裁定価格である．

参考文献

[1] J.P.Ansel, C.Stricker,(1994), *Couverture des actifs contingents et prix maximum.* Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques, vol.30, p303-315.

[2] C.S.Chou, P.A.Meyer, S.Stricker,(1980), *Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés.* In: J.Azéma, M.Yor(eds.), Séminaire de Probabilités XIV, Springer Lecture Notes in Mathematics 784, p128-139.

[3] F.Delbaen, W.Schachermayer,(1994), *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing.* Mathematische Annalen, vol.300, p463-520.

[4] F.Delbaen, W.Schachermayer,(2005), *The Mathematics of Arbitrage.* Springer Finance.

[5] J.Diestel, W.Ruess,(1975), *Geometry of Banach spaces - selected topics.* Springer Lecture Notes in Mathematics 485, Springer , Berlin, Heidelberg, New York.

[6] R.Durrett,(1996), *Stochastic Calculus, A Practical Introduction.* CRC Press.

[7] R.Durrett,(2004), *Probability: Theory and Examples, Third Edition.* Duxbury Press.

[8] B.Øksendal,(1999), *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications.* Springer.

[9] 藤田岳彦,(2002), ファイナンスの確率解析入門, 講談社.

[10] J.Mémin,(1980), *Espaces de semi Martingales et changement de probabilité.* Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, vol.52, p9-39.

[11] P.A.Meyer,(1976), *Un cours sur les intégrales stochastiques.* In: P.A.Meyer (ed.), Séminaire de Probabilités X, Springer Lecture Notes in Mathematics 511, p245-400.

[12] 西尾真喜子,(1978), 確率論, 実教出版株式会社.

[13] P.Protter,(1990), *Stochastic Integration and Differential Equations, second edition.* Applications of Mathematics, vol.21, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[14] L.C.G.Rogers, D.Williams,(2000), *Diffusions, Markov Processes and Martingales.* Volume 1 and 2, Cambridge University Press.

[15] D.Williams,(1991), *Probability with Martingales.* Cambridge University Press.

[16] R.J.Williams,(2006), *Introduction to the Mathematics of Finance.* Guraduate Studies in Mathematics vol.72, American Mathematical Society.