マリアバン解析と数理ファイナンス

九州大学大学院数理学府数理学専攻
修士課程２年
入江 志保
指導教官：谷口 説男 教授

修士論文

平成１９年１月２９日

まえがき

金融市場に対する数学的アプローチは, 1900 年に発表されたバシュリエの『Theorie de la Speculation』が始まりであるが, 近代的な確率解析に基づく研究は 1965 年に発表されたサミュエルソンの効率性市場仮説 (EMH) が出発点である．ちなみにバシュリエの論文はアインシュタインに先行するブラウン運動の数学的取り扱いとして名高い．60 年代半ばにはシャープ, リントナー, モッシ達によって資本資産価格モデル (CAPM) が発表された．これらの理論から 1973 年にブラック, ショールズ, マートンによる条件付き請求権の価格付け理論が登場し, 70 年代末から 80 年代初めにかけて, ハリソン, クレプス, プリスカの資産価格付けの基本定理が登場した．これらの理論によって 80 年代初めまで経済学・経営学の分野として発展してきた分野が数理ファイナンスとして確立された．

数理ファイナンスは，経済，経営における金融分野の数理科学的問題の理解，モデル化さらに解法を提供する理論体系である．モデル化においては，確率過程が重要な役割を果たしている．中でも，確率過程の時間発展を記述する確率微分方程式は重要である．

数理ファイナンスで取り扱う派生商品 (derivative) に関して, 価値評価とともにリスク管理は金融実務上極めて重要な課題である．派生商品の価値は確率微分方程式の有用性より Brown 運動の汎関数として表現される．派生商品の取引における保有・空売りに関するリスクは商品の価値変化として表される．価値変化を表す代表的なものが, 派生商品の価値のパラメータに関する偏微分係数, すなわち感応度 (Greeks) である．Greeks の計算のために Brown 運動の汎関数を解析する必要があり, この 1 つの手法として Brown 運動に対する微積分を展開したマリアバン解析があげられる．

マリアバン解析とは, $W = \{w : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n; \text{連続},\ w(0) = 0\}$ とおき, μ を W 上の Wiener 測度, $H = \{h \in W;\ h(t)\ \text{は絶対連続かつ}\ \int_0^\infty |h'(t)|^2 dt < \infty\}$ で与えられる Hilbert 空間 H に対して (μ, H, W) を基礎にした無限次元空間 W 上の超関数の理論あるいは Sobolev 空間の理論と言える．この H は Gauss 測度 μ の Cameron-Martin 空間と呼ばれている．

マリアバン解析が登場する以前は, ヒルベルト空間 H $(\dim H = \infty)$ を考えると, H の内積から H の上に自然な測度を構成することはできないと考えられていた．従って内積を重視すれば測度を考えることを放棄せざるを得ない．非線形関数解析においては, 内積やノルムを重視し, 微分を定義するには Fréchet 微分のようにそのノルムに基づいて定義していた．微分可能な関数は連続でなければならない．ところが確率論においては可測であるが連続になり得ない関数の例が数多く現れる．例えば, Brown 運動について考える．Brown 運動は関数空間の上の測度として実現されるため測度があれば積分が自然に定義できる．また Brown 運動が実現されている関数空間は Banach 空間であり，無限次元だが Fréchet 微分というものがすでに定義されている．ここで確率微分方程式の解を考えると，Fréchet の意味で微分できないばかりでなく，連続ですらない．そのような関数に対する微分として現れたのがマリアバン解析である．他の無限次元解析と比べて, 微分と積分が自然につながるところに特徴がある．Brown 運動の積分と調和していることで部分積分の公式として表せることを可能にしている．これは, 全ての方向への微分を考えず, Cameron-Martin 空間の方向だけの微分を考えることでマリアバン解析を可能にしたと言える．

本論文で扱う話題は Paul Malliavin と Anton Thalmaier による『Stochastic calculus of variations in mathematical finance』を参考にした．しかし，Malliavin 解析の導入は，同書に述べられている方法ではなく， 1980 年代に楠岡成雄氏，重川一郎氏，杉田洋氏，渡辺信三氏など日本の研究者が提案，定式化，発展させた方向で行う．これは，Malliavin 解析に明るくない読者を想定した著者たちの創意工夫の努力を削ぐものではあるが，数々の議論がより簡明な形で見通しよく述べることが可能となる．また，同書に散見される議論，推論の跳びや，証明の誤りなどは適宜修正した．

本修士論文の作成にあたりお世話になりました多くの方々に感謝の意を申し上げます. 特に, 時に厳しく, 時に優しく, いつもあたたかくご指導ご鞭撻を賜りました谷口説男教授に深く感謝の意を申し上げます.

目 次

1 ブラウン運動と確率積分

1.1 Wiener 空間とブラウン運動

$T>0$ とし, $\mathcal{W}=\mathcal{W}^n$ を原点とする $\mathbb{R}^n$ 値連続関数全体とする;

$$\mathcal{W}=\{w:[0,T]\to\mathbb{R}^n | w \text{ は連続かつ } w(0)=0\}.$$

写像 $W:[0,T]\times\mathcal{W}\to\mathbb{R}^n$ を

$$W(t,w)=w(t),\quad t\in[0,T],\ w\in\mathcal{W}$$

と定め, $\mathbb{R}^n$ 値確率変数 W を $W(t)(w)=W(t,w)$ と定義する. また, μ を $\mathcal{W}$ 上の Wiener 測度とする. 実 Hilbert 空間 E に値をとる μ に関し, p 乗可積分な関数の全体を $L^p(\mu;E)$ とし, $L^p(\mu;\mathbb{R})$ は $L^p(\mu)$ と表す.

集合の族 $\mathcal{C}$ を含む最小の σ 加法族を $\sigma[\mathcal{C}]$ と表記し, さらに位相空間 E の開集合の全体を $\mathcal{O}_E$ とするとき $\mathcal{B}(E)=\sigma[\mathcal{O}_E]$ とおく.

Theorem 1.1 次の性質を持つ $(\mathcal{W},\mathcal{B}(\mathcal{W}))$ 上の確率測度 μ が唯一つ存在する.

$$\mu(W(t_1)\in A_1, W(t_2)-W(t_1)\in A_2,\cdots,W(t_m)-W(t_{m-1})\in A_m)=\prod_{j=1}^m\int_{A_j}g_n(t_j-t_{j-1},x_j)dx_j.$$

ただし, $0=t_0<t_1<\cdots<t_m\leq T,\ A_1,A_2,\cdots,A_m\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$g_n(s,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}^n}\exp\left(-\frac{|y|^2}{2s}\right),\quad s>0,\ y=(y^1,\cdots,y^n)\in\mathbb{R}^n,\quad |y|=\sqrt{\sum_{j=1}^n|y^j|^2} \text{ である.}$$

Definition 1.2 Theorem 1.1 で与えられた $\mathcal{W}$ 上の確率測度 μ を n 次元 Wiener 測度と呼ぶ. さらに $(\mathcal{W},\mathcal{B}(\mathcal{W}),\mu)$ を $[0,T]$ 上の n 次元 Wiener 空間という.

$[0,T]$ 上絶対連続な $h\in\mathcal{W}$ で, その微分 $\dot{h}$ が $[0,T]$ 上 Lebesgue 測度に対し二乗可積分となるもの全体からなる $\mathcal{W}$ の線形部分空間 H を Cameron-Martin 部分空間と呼ぶ. Cameron-Martin 部分空間は, 内積

$$\langle h,g\rangle_H=\int_0^T\langle\dot{h}(t),\dot{g}(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}dt,\quad h,k\in H$$

を持つ実可分ヒルベルト空間である. ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積をあらわす. この内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ から定まるノルムを $\|\cdot\|_H$ と表す. さらに $h(t)=\int_0^t\dot{h}(s)ds$ であるから,

$$\|h\|_\infty\leq\sqrt{nT}\|h\|_H,\quad h\in H$$

であり, H は $\mathcal{W}$ で稠密となっている.

Definition 1.3 (フィルトレーション) 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ に対して, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ がフィルトレーションとは,

1. $\mathcal{F}_t$ は σ 加法族であり, $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t(s\leq t)$

を満たすことである. また $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ をフィルター付き確率空間という.

Definition 1.4 (ブラウン運動) 確率過程 $\{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ が n 次元 $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動であるとは以下の 3 条件が満たされることを言う.

1. $\{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合な $\mathbb{R}^n$ 値確率過程である.
2. $\{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は右連続かつ P-*a.s.* に連続である.
3. 任意の $0 \le s \le t$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ に対して次が成り立つ.

$$\mathbb{E}[\exp(\sqrt{-1}\langle \lambda, W(t)-W(s)\rangle_{\mathbb{R}^n})|\mathcal{F}_t] = \exp\left(-\frac{|\lambda|^2(t-s)}{2}\right).$$

さらに, $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, $P(W(0)=x)=1$ が成り立つとき, x から出発する n 次元 $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動という.

$(\mathcal{W}, \mathcal{B}(\mathcal{W}), \mu)$ 上のフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ を $\mathcal{F}_t = \sigma[W(s); s \le t]$ と定めれば $\{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は 0 から出発する $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動である.

Definition 1.5 (マルチンゲール) $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ をフィルター付き確率空間とする. $\mathbb{R}$-値確率過程 $\{M_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が $(\mathcal{F}_t)$-連続 L^p マルチンゲールであるとは次の条件を満たすことをいう.

1. $\mathbb{E}[|M_t|^p] < \infty$.
2. M_t は $\mathcal{F}_t$-可測 $(\forall t \ge 0)$.
3. $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ $(\forall s \le t)$.
4. $P(t \mapsto M_t \text{は連続}) = 1$.

条件 3 で ”$=$” を ”$\le$” で置き換えたとき, $(\mathcal{F}_t)$-連続 L^p-優マルチンゲール, ”$\ge$” で置き換えたとき, $(\mathcal{F}_t)$-連続 L^p-劣マルチンゲールという.

$(\mathcal{W}, \mathcal{B}(\mathcal{W}), \mu, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ 上, 各 $\alpha = 1, \cdots, n$ に対して $\{W^\alpha(t)\}_{t\in[0,\infty)}$, は $(\mathcal{F}_t)$-連続 L^p マルチンゲールである.

Definition 1.6 (収束) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $X, X_1, X_2, \cdots,$ を確率変数とする.

1. X_n が X に概収束する ($X_n \to X$ *a.s.*と記す) とは, $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$ となることをいう.
2. X_n が X に確率収束する ($X_n \to X$ in prob と記す) とは, $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ $(\forall \varepsilon > 0)$ となることをいう.
3. $p > 0$ とする. X_n が X に L^p 収束する ($X_n \to X$ in L^pと記す) とは, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$ となることをいう.

1.2 確率積分

Definition 1.7 (発展的可測) $\mathbb{R}$-値確率過程 $\{f(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ が $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測であるとは, 任意の $T \ge 0$ に対し, 写像 $[0,T] \times \Omega \ni (t,\omega) \mapsto f(t,\omega) \in \mathbb{R}$ が直積 σ 加法族 $\mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F}_T$ に関し可測となることをいう.

Definition 1.8 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ をフィルター付き確率空間とする.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}} &= \left\{ \{f(t)\}_{t\in[0,\infty)} \middle| \begin{array}{l} \mathbb{R}\text{値確率過程}, (t,\omega)\mapsto f(t,\omega) \text{ は可測}, f(t) \text{ は } \mathcal{F}_t\text{可測}, \\ P(\int_0^T f(t)^2 dt < \infty, \forall T>0) = 1 \end{array} \right\}. \\
\mathcal{L}^2 &= \left\{ \{f(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}} \middle| \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t)^2 dt\right] < \infty, \forall T>0 \right\} \\
\mathcal{SF} &= \left\{ \{f(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}} \middle| \begin{array}{l} \exists 0<t_0<\cdots<t_n<t_{n+1}\nearrow\infty \text{ s.t.} \\ f(t)=f(t_n)\ (t\in[t_n,t_{n+1})),\ \sup_{0\le t\le T,\omega\in\Omega}|f(t,\omega)|<\infty\ (\forall T>0) \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

とおく.

P-a.s. に連続かつ $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な確率過程は $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ の元である. $\mathcal{SF}\subset\mathcal{L}^2\subset\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ という包含関係に加え, $\mathcal{SF}$ は $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ で確率収束の位相に関し稠密となっている.

Lemma 1.9 任意の $\{f(t)\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ に対し, $\{f_m(t)\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{SF}$, $m=1,2,\cdots$ が存在し,

$$\int_0^T \{f(t)-f_m(t)\}^2 dt \to 0 \quad \text{in prob}, \quad \forall T>0.$$

Definition 1.10 (確率積分 $(\mathcal{SF})$) $1\le\alpha\le n$ とする. $\{f(t)\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{SF}$ の $W^\alpha(t)$ に関する確率積分を次で定義する.

$$\int_0^T f(t)dW^\alpha(t) = \sum_{m=0}^\infty f(t_m)\{W^\alpha(t_{m+1}\wedge T) - W^\alpha(t_m\wedge T)\}, \quad T>0.$$

ただし $f(t)=\sum_{m=0}^\infty f(t_m)\mathcal{I}_{[t_m,t_{m+1})}(t)$ と表されるとする.

Lemma 1.11 $\{f_m(t)\}_{t\ge0}\in\mathcal{SF}$ とする. もし

$$\lim_{m,k\to\infty} P\left(\int_0^{T_0}\{f_m(t)-f_k(t)\}^2 dt > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\varepsilon>0,\ T_0>0$$

が成り立つならば, 右連続, *P-a.s.* に連続かつ $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な確率過程 $\{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ が存在し,

$$\sup_{0\le T\le T_0}\left|X(T)-\int_0^T f_m(t)dW^\alpha(t)\right| \to 0 \quad \text{in prob} \quad \forall T_0>0.$$

Definition 1.12 (確率積分 $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$) $\{f(t)\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ とする.

$$\int_0^{T_0}\{f(t)-f_m(t)\}^2 dt \to 0 \quad \text{in prob} \quad \forall T_0>0$$

を満たす $\{\{f_m(t)\}_{t\in[0,\infty)}\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{SF}$ をとり, lemma 1.11 で与えられる右連続, *P-a.s.* に連続かつ $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な確率過程 $\{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ を

$$\left\{\int_0^T f(t)dW^\alpha(t)\right\}_{T\in[0,\infty)}$$

と表し, これを $\{f(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ の $\{W^\alpha(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ に関する確率積分という.

Theorem 1.13 (確率積分の性質) $\{f(t)\}_{t\in[0,\infty)}, \{g(t)\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$, $1\le\alpha\le n$ とする.

1. (線形性) $a, b \in \mathbb{R}$ とする．任意の $T > 0$ に対し，P-*a.s.* に

$$\int_0^T \{af(t) + bg(t)\} dW^\alpha(t) = a\int_0^T f(t)dW^\alpha(t) + b\int_0^T g(t)dW^\alpha(t).$$

が成立する．

2. $a,\ b > 0$ とする．次が成り立つ．

$$P\left(\sup_{0\le T\le T_0}\left\{\int_0^T f(t)dW^\alpha(t) - \frac{a}{2}\int_0^T f(t)^2 dt\right\} > b\right) \le e^{-ab}.$$

3. $\{f_m(t)\}_{t\ge 0} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ が $\int_0^{T_0}\{f(t) - f_m(t)\}^2 dt \to 0$ in prob ならば，

$$\sup_{0\le T\le T_0}\left|\int_0^T f_m(t)dW^\alpha(t) - \int_0^T f(t)dW^\alpha(t)\right| \to 0 \quad \text{in prob}$$

となる．

4. $\{f(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2$ ならば，$\{\int_0^t f(s)dW^\alpha(s)\}_{t\in[0,\infty)}$ は L^2- $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである．このとき，さらに次が成立する．

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(t)dW^\alpha(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t)^2 dt\right], \quad \forall T > 0,$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{T\in[0,T_0]}\left(\int_0^T f(t)dW^\alpha(t)\right)^2\right] \le 4\mathbb{E}\left[\int_0^{T_0} f(t)^2 dt\right], \quad \forall T, T_0 > 0.$$

5. $\{f_\alpha(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2,\ 1 \le \alpha \le n$ とする．このとき

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f_\alpha(t)dW^\alpha(t)\int_0^T f_\beta(t)dW^\beta(t)\right] = \delta_{\alpha\beta} \quad \forall T > 0$$

が成り立つ．とくに

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\alpha=1}^n\left(\int_0^T f_\alpha(t)dW^\alpha(t)\right)^2\right] = \sum_{\alpha=1}^n \mathbb{E}\left[\int_0^T f_\alpha(t)^2 dt\right].$$

Definition 1.14 $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な $\mathbb{R}$ 値確率過程 $\{b(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ で

$$\int_0^T |b(t)|dt < \infty, \quad \forall T > 0 \ \ P\text{-a.s.}$$

となるもの全体を $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$ と表す．

以下常に，$\{\int_0^t b(s)ds\}_{t\in[0,\infty)}$ は右連続, P-a.s. 連続かつ $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測であるとする．

Definition 1.15 (伊藤過程) $\{a_\alpha(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}},\ 1 \le \alpha \le n,$ と $\{b(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$ を用いて

$$X(T) = \sum_{\alpha=1}^n \int_0^T a_\alpha(t)dW^\alpha(t) + \int_0^T b(t)dt, \quad T \ge 0$$

と表される確率過程 $\{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ を伊藤過程と呼ぶ．

Theorem 1.16 (伊藤の公式) $N \in \mathbb{N}$, $\{a_\alpha^k(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2_{\rm loc}$, $\{b^k(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^1_{\rm loc}$, $1 \le \alpha \le n$, $1 \le k \le N$ とする.

$$\begin{aligned} X^k(T) &= X^k(0) + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^T a_\alpha^k(t) dW^\alpha(t) + \int_0^T b^k dt, \quad (k = 1, \cdots, N) \\ X(T) &= (X^1(T), \cdots, X^N(T)), \quad T \ge 0 \end{aligned}$$

とおく. 任意の $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ に対し, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} f(X(T)) = f(X(0)) &+ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^N \int_0^T f_k^{(1)}(X(t)) a_\alpha^k dW^\alpha(t) + \sum_{k=1}^N \int_0^T f_k^{(1)}(X(t)) b^k(t) dt \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k,j=1}^N \int_0^T f_{kj}^{(2)}(X(t)) a_\alpha^k(t) a_\alpha^j(t) dt. \end{aligned}$$

ただし $f^{(n)}_{k_1,\cdots,k_n} = \frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \cdots \partial x^{k_n}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Definition 1.17 (確率微分形式) $\{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ を

$$X(T) = X(0) + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^T a_\alpha(t) dW^\alpha(t) + \int_0^T b(t) dt, \quad T \ge 0$$

と表される伊藤過程とする.

1. これを

$$dX(t) = \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(t) dW^\alpha(t) + b(t) dt$$

と表記し, 確率微分形式による表現と呼ぶ.

2. 確率過程 $\{c(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ が $\{c(t)a_\alpha(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2_{\rm loc}$, $1 \le \alpha \le n$, $\{c(t)b(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^1_{\rm loc}$ を満たすとき, $c(t)dX(t)$ を伊藤過程

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_0^T c(t) a_\alpha(t) dW^\alpha(t) + \int_0^T c(t) b(t) dt$$

の定める確率微分形式とする.

3. 伊藤過程 $\{Y(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ の確率微分形式を

$$dY(t) = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha(t) dW^\alpha(t) + q(t) dt$$

とする. $dX \cdot dY(t)$ を伊藤過程

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_0^T a_\alpha(t) p_\alpha(t) dt$$

の定める確率微分形式とする. これを確率微分形式 $dX(t)$ と $dY(t)$ の積と呼ぶ.

定義より

$$dW^\alpha \cdot dW^\beta(t) = \delta_{\alpha\beta}dt, \quad dt \cdot dW^\alpha = dW^\alpha \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dt = 0$$

である.

$\mathcal{F}_t^W$ を $W(s)$, $(s \le t)$ の生成する σ 加法族とし, $L^2(\mathcal{F}_t^W)$ を $\mathcal{F}_t^W$-可測な二乗可積分関数の全体とする. $T > 0$ に対し, $L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ で Lebesgue 測度に対し二乗可積分なボレル可測関数 $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ の全体を表す.

Theorem 1.18 (表現定理) 任意の $F \in L^2(\mathcal{F}_T^W)$ に対し, $\{f_\alpha(t)\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2$, $\alpha = 1, \cdots, n$ が存在し,

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^T f_\alpha(t) dW^\alpha(t)$$

が P-$a.s.$ に成り立つ.

1.3 マリアバン解析

$\ell \in \mathcal{W}^*$ に対し, 同じ記号で写像 $\mathcal{W} \ni w \mapsto \ell(w) \in \mathbb{R}$ も表す. $\ell_1, \cdots, \ell_n \in \mathcal{W}^*$ と多項式 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を用いて

$$\phi = p(\ell_1, \cdots, \ell_n) \quad (\phi(w) = p(\ell_1(w), \cdots, \ell_n(w)),\ w \in \mathcal{W})$$

と表される $\phi : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ の全体を $\mathcal{P}$ と表し, 可分実 Hilbert 空間 E に対し

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \sum_{j=1}^n \phi_j e_j \,\middle|\, \phi_j \in \mathcal{P},\ e_j \in E,\ 1 \le j \le n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

とおく. $\phi = p(\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathcal{P}$ に対し, $\nabla\phi \in \mathcal{P}(H)$ を

$$\nabla\phi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial x^j}(\ell_1, \cdots, \ell_n)\ell_j$$

と定義する. さらに $\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j e_j \in \mathcal{P}(E)$ に対し, $\nabla\phi \in \mathcal{P}(H \otimes E)$ を

$$\nabla\phi = \sum_{j=1}^n \nabla\phi_j \otimes e_j$$

と定める. ただし実可分 Hilbert 空間 E_1, E_2 に対し, $E_1 \otimes E_2$ は Hilbert-Schmidt 作用素 $A : E_1 \to E_2$ のなす Hilbert 空間を表し, $e^{(1)} \in E_1$, $e^{(2)} \in E_2$ に対し, $e^{(1)} \otimes e^{(2)}$ で $E_1 \ni e \mapsto \langle e^{(1)}, e\rangle_{E_1} e^{(2)} \in E_2$ なる Hilbert-Schmidt 作用素を表す; $E_1 \otimes E_2$ は, E_1 の正規直交基 $\{e_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ を用いて

$$\langle A, B\rangle_{E_1 \otimes E_2} = \sum_{n=1}^\infty \langle Ae_n^{(1)}, Be_n^{(1)}\rangle_{E_2}, \quad A, B \in E_1 \otimes E_2$$

で与えられる内積を持つ. さらに $\phi \in \mathcal{P}$ に対し,

$$\langle \nabla\phi(w), h\rangle_H = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(w + th), \quad \forall w \in \mathcal{W},\ \ h \in H$$

が成り立つ.

Definition 1.19 $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ とする.

$$\|\phi\|_{(k,p)} = \sum_{j=0}^{k} \|\nabla^j \phi\|_p, \quad \phi \in \mathcal{P}(E)$$

とおき, $\mathcal{P}(E)$ の $\|\cdot\|_{(k,p)}$ に関する完備化を $\mathbb{D}^{k,p}(E)$ と表す. $\mathbb{D}^{k,p}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{D}^{k,p}$ と略記する. $\nabla : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(H \otimes E)$ の $\mathbb{D}^{k,p}(E)$ への拡張も同じ ∇ で表す. 閉作用素 $\nabla : L^p(\mu; E) \to L^p(\mu; H \otimes E)$ の共役作用素を ∇^* と表す.

$(\mathbb{D}^{r,p}(E))'$ を $\mathbb{D}^{r,p}(E)$ の双対空間とし, $(L^p(\mu; E))' = L^q(\mu; E)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) という同一視を介して

$$\mathbb{D}^{-r,q}(E) = (\mathbb{D}^{r,p}(E))'$$

と表す.

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^{r,\infty-}(E) &= \bigcap_{p \in (1,\infty)} \mathbb{D}^{r,p}(E), & \mathbb{D}^{\infty,p}(E) &= \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{D}^{r,p}(E) \\
\mathbb{D}^{r,1+}(E) &= \bigcup_{p \in (1,\infty)} \mathbb{D}^{r,p}(E), & \mathbb{D}^{-\infty,p}(E) &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{D}^{r,p}(E) \\
\mathbb{D}^{\infty}(E) &= \bigcap_{r \in \mathbb{R}, p \in (1,\infty)} \mathbb{D}^{r,p}(E), & \mathbb{D}^{-\infty,1+}(E) &= \bigcap_{r \in \mathbb{R}, p \in (1,\infty)} \mathbb{D}^{r,p}(E)
\end{aligned}$$

とおく. $\mathbb{D}^{\infty}(E)$ は Fréchet 空間であり, $\mathbb{D}^{-\infty,1+}(E)$ はその双対空間となっている. $\Phi \in \mathbb{D}^{-\infty,1+}(E) = (\mathbb{D}^{\infty}(E))'$ の $F \in \mathbb{D}^{\infty}(E)$ への作用を $\int_{\mathcal{W}} \langle F, \Phi \rangle_H d\mu$ もしくは $\mathbb{E}[\langle F, \Phi \rangle_E]$ と表す;

$$\Phi(F) = \int_{\mathcal{W}} \langle F, \Phi \rangle_E d\mu = \mathbb{E}[\langle \Phi, F \rangle_E].$$

$E = \mathbb{R}$ のとき内積の括弧を省略して, $\int_{\mathcal{W}} F\Phi d\mu$ もしくは $\mathbb{E}[F\Phi]$ と表す. さらに $F = 1$ ならば, $\int_{\mathcal{W}} \Phi d\mu$, $\mathbb{E}[\Phi]$ とも表す. $\Phi \in L^p(\mu; E)$ のとき, $\langle F, \Phi \rangle_E \in L^1(\mu)$ となる.

Theorem 1.20

1. $\nabla : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(H \otimes E)$ は, 任意の $r \in \mathbb{R}$ と $p \in (1,\infty)$ に対し制限 $\nabla : \mathbb{D}^{r+1,p}(E) \to \mathbb{D}^{r,p}(H \otimes E)$ が連続となる線形作用素 $\nabla : \mathbb{D}^{-\infty,1+}(E) \to \mathbb{D}^{-\infty,1+}(H \otimes E)$ に一意的に拡張できる.

2. ∇ の共役作用素 ∇^* は, 任意の $r \in \mathbb{R}$ と $p \in (1,\infty)$ に対し制限 $\nabla^* : \mathbb{D}^{r+1,p}(H \otimes E) \to \mathbb{D}^{r,p}(E)$ が連続となる線形作用素 $\nabla^* : \mathbb{D}^{-\infty,1+}(H \otimes E) \to \mathbb{D}^{-\infty,1+}(E)$ に一意的に拡張できる.

Proposition 1.21 $p, q, r > 1$ は $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ を満たすとし, E, E_1, E_2 を実可分 Hilbert 空間とする. $F \in \mathbb{D}^{1,p}(E_1)$, $G \in \mathbb{D}^{1,q}(E_2)$, $K \in \mathbb{D}^{1,p}$ とする. このとき, $F \otimes G \in \mathbb{D}^{1,r}(E_1 \otimes E_2)$, $KG \in \mathbb{D}^{1,r}(H \otimes E_2)$ であり,

$$\begin{aligned}
\nabla(F \otimes G) &= F \otimes \nabla G + \nabla F \otimes G, \\
\nabla^*(KG) &= K\nabla^* G - \langle \nabla K, G \rangle_H
\end{aligned}$$

が成り立つ.

Theorem 1.22 $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $p \in (1,\infty)$ とする.

1. $\Phi \in \mathbb{D}^{-\infty,1+}(E)$ が $\mathbb{D}^{r,p}(E)$ に属するためには,

$$\sup\left\{\int_{\mathcal{W}}\langle\Phi,F\rangle_E d\mu \,\middle|\, F\in\mathcal{P}(E),\ \|F\|_{-r,q}\le 1\right\}<\infty$$

が成り立つことが必要かつ十分である．ただし，$q=\frac{p}{p-1}$.

2. $F\in L^p(\mu;E)$ が $\mathbb{D}^{k,p}(E)$ に属するためには，$F_k\in L^p(\mu;H^{\otimes k}\otimes E)$ が存在し次が成り立つことが必要かつ十分である．

$$\int_{\mathcal{W}}\langle F,(\nabla^*)^k G\rangle_E d\mu=\int_{\mathcal{W}}\langle F_k,G\rangle_{H^{\otimes k}\otimes E}d\mu,\quad \forall G\in\mathcal{P}(H^{\otimes k}\otimes E).$$

ただし $H^{\otimes k}=\underbrace{H\otimes\cdots\otimes H}_{k\text{ 回}}$ である．さらにこのとき $F_k=\nabla^k F$ が成り立つ．

$Z\in\mathbb{D}^{1,2}(H)$, 任意の $\phi\in\mathbb{D}^{1,2}$ に対して $\langle Z,\nabla\phi\rangle=D_Z\phi$ とおけば $\mathbb{E}[D_Z\phi]=\mathbb{E}[\phi\nabla^*Z]$ となる．また，$Z\in\mathbb{D}^{1,2}(H)$ となる Z を L^2- ベクトル場と言う．

Theorem 1.23 $Z\in\mathbb{D}^{1,2}(H)$ に対して

$$\mathbb{E}[|\nabla^*Z|^2]=\mathbb{E}\left[\int_0^1|Z_\tau|^2d\tau+\int_0^1\int_0^1(\nabla Z_\tau)(\nabla Z_t)dtd\tau\right].\tag{1.1}$$

が成立する．特に

$$\mathbb{E}[|\nabla^*Z|^2]\le\|Z\|^2_{\mathbb{D}^{1,2}}\tag{1.2}$$

と評価ができる．

証明は後で行う．

$s\in\mathbb{N}$ に対し，$\ell^{(s)}_{j,k}\in\mathcal{W}^*$ を

$$\ell^{(s)}_{j,k}(w)=2^{\frac{s}{2}}\left\{w^k\left(\frac{j+1}{2^s}\right)-w\left(\frac{j}{2^s}\right)\right\}$$

と定義する．$\|\ell^{(s)}_{j,k}\|_H=1$ である．$\pi_s:\mathcal{W}\to\mathcal{W}$ を

$$\pi_s w=\sum_{j,k}\ell^{(s)}_{j,k}(w)\ell_{j,k},\quad \mathcal{B}_s=\sigma(\ell^{(s)}_{j,k};j=0,\cdots,2^s,\ k=1,\cdots,d)$$

とおく．$Z\in\mathbb{D}^{1,2}(H)$ に対し

$$\mathbb{E}[Z|\mathcal{B}_s](w)=\int_{\mathcal{W}}Z(\pi_s w+(\mathcal{I}-\pi_s)w')\mu(dw')\tag{1.3}$$

となる．これより

$$\nabla\mathbb{E}[Z|\mathcal{B}_s]=\pi_s(\mathbb{E}[\nabla Z|\mathcal{B}_s])$$

である．よって

$$\|\mathbb{E}[\pi_s Z|\mathcal{B}_s]-Z\|_{\mathbb{D}^{1,2}(H)}\to 0\quad(s\to\infty)$$

となる．したがって (1.1) を $Z^s=\mathbb{E}[\pi_s Z|\mathcal{B}_s]$ に対して示せばよい．Z^s は有限次元的構造をもつので

$$\nabla^*Z^s=\int_0^1(\dot W^s(\tau)Z^s(\tau)-\nabla Z^s(\tau))d\tau\tag{1.4}$$

で与えられる．ただし $\dot W^s(\tau)=\sum_{k=1}^{2^s}(W(\frac{k}{2^s})-W(\frac{k-1}{2^s}))\mathcal{I}_{((k-1)2^{-s},k2^{-s})}(\tau)$ とする．

Lemma 1.24 Z^s は (1.1) を満たす.

Proof. (1.4) に注意すれば

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &:= \mathbb{E}[\nabla^* Z^s \nabla^* Z^s] \\ &= \mathbb{E}[\nabla^* Z^s \int_0^1 (\dot{W}^s(\tau) Z^s(\tau) - \nabla Z^s(\tau)) d\tau] \\ &= \mathbb{E}[D_{Z^s} \int_0^1 (\dot{W}^s(\tau) Z^s(\tau) - \nabla Z^s(\tau)) d\tau] \\ &= \mathbb{E}[\int_0^1 \int_0^1 Z^s(\tau')(\nabla \dot{W}^s(\tau) Z^s(\tau) - \nabla Z^s(\tau)) d\tau d\tau'].\end{aligned}$$

一般的に以下が成り立つ.

$$\nabla(\dot{W}^s(\tau) Z^s(\tau)) = Z^s(\tau)(\nabla \dot{W}^s(\tau)) + \dot{W}^s(\tau)(\nabla Z^s(\tau)).$$

ただし $\nabla \dot{W}^s(\tau)$ は τ, τ' が $((k-1)2^{-s}, k2^{-s})$ に依存しなければ 0, 依存していれば 1 となることに注意しておく. この導関数は $\tau = \tau'$ ならば二重積分が普通の積分になることより

$$\mathcal{J} = \mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 Z^s(\tau')\{Z^s(\tau)(\nabla \dot{W}^s(\tau)) + \dot{W}^s(\tau)(\nabla Z^s(\tau)) - \nabla^2 Z^s(\tau)\} d\tau d\tau'\right]$$

となる. ゆえに

$$\mathcal{J} - \mathbb{E}\left[\int_0^1 |Z^s(\tau)|^2 d\tau\right] = \int_0^1 \int_0^1 Z^s(\tau')(\dot{W}^s(\tau) \nabla Z^s(\tau) - \nabla^2 Z^s(\tau)) d\tau d\tau'. \tag{1.5}$$

ベクトル場 $Y_{\tau'}(\tau) := \nabla Z^s(\tau)$ を導入する. すると (1.4) より

$$\nabla^* Y_{\tau'} = \int_0^1 (\dot{W}^s(\tau) \nabla Z^s(\tau) - \nabla^2 Z^s(\tau)) d\tau$$

となる. フビニの定理により (1.5) に代入すれば

$$\begin{aligned}\mathcal{J} - \mathbb{E}\left[\int_0^1 |Z^s(\tau)|^2 d\tau\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \nabla^* Y_{\tau'} Z^s(\tau') d\tau'\right] \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}[D_{Y_{\tau'}} Z^s(\tau')] d\tau' \\ &= \int_0^1 d\tau' \mathbb{E}\left[\int_0^1 (\nabla Z^s(\tau')) Y_{\tau'}(\tau) d\tau\right].\end{aligned}$$

□

Proof(*Proof of Theorem*1.23). 上の考察と lemma 1.24 より (1.1) は従う.
(1.2) を示す. シュワルツの不等式と (1.1) より

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\nabla^* Z|^2] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 |Z_\tau|^2 d\tau + \int_0^1 \int_0^1 \nabla Z_\tau \nabla Z_t dt d\tau\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^1 |Z_\tau|^2 d\tau + \int_0^1 \int_0^1 |\nabla Z_\tau|^2 dt d\tau\right] \\ &= \|Z\|^2_{\mathbb{D}^{1,2}}\end{aligned}$$

より示される.

Theorem 1.25 $Z \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ とする. $\{\dot{Z}(t)\}_{t\in[0,T]}$ が可予測ならば $\nabla^* Z = \int_0^1 Z(\tau)dW(\tau)$.

Proof. $\{\dot{Z}(t)\}_{t\in[0,T]}$ は可予測より

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 |\dot{Z}(t)|^2 dt\right] < \infty$$

である. したがって $\{(\dot{Z}_n^1(t), \cdots, \dot{Z}_n^d(t))\} \in \mathcal{SF}^d$ が存在して $n \to \infty$ とすれば

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 |\dot{Z}(t) - \dot{Z}_n(t)|^2 dt\right] \to 0 \tag{1.6}$$

が成り立つ. $Z_n \in \mathbb{D}^{0,2}(H)$ を $Z_n(t) = \int_0^1 \dot{Z}_n(s)ds$ と定義する. 伊藤積分の定義と Proposition1.21 により

$$\nabla^* Z_n = \sum_{\alpha=1}^d \int_0^t \dot{Z}_n^\alpha(s)dW^\alpha(s)$$

である. (1.6) と伊藤積分の等距離性から $n \to \infty$ とすれば

$$\|Z_n - Z\|_{\mathbb{D}^{0,2}(H)} \to 0, \tag{1.7}$$

$$\left\|\nabla^* Z_n - \sum_{\alpha=1}^d \int_0^1 Z^\alpha(t)dW^\alpha(t)\right\|_{\mathbb{D}^{0,2}}. \to 0 \tag{1.8}$$

$\nabla^* : \mathbb{D}^{0,2}(H) \to \mathbb{D}^{-1,2}(H)$ の連続性より

$$\|\nabla^* Z_n - \nabla^* Z\|_{\mathbb{D}^{-1,2}} \to 0.$$

(1.8) と $\mathbb{D}^{0,2} \subset \mathbb{D}^{-1,2}$ という包含関係をあわせると

$$\nabla^* Z = \sum_{\alpha=1}^d \int_0^1 Z^\alpha(t)dW^\alpha(t) \tag{1.9}$$

となる. □

$\mathcal{N}_t$ を $\{e_\tau : \tau < t\}$ によって構成される $\mathcal{W}$ 上のフィルトレーションとする. ただし e_t は写像 $W \mapsto W(t)$, τ は停止時刻とする. また, 条件付期待値を $\mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\phi] := \mathbb{E}[\phi|\mathcal{N}_t]$ とおく.

Theorem 1.26 (Clark-Ocone-Karatzas formula) $\phi \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{W})$ を与えると

$$\phi - \mathbb{E}[\phi] = \int_0^1 \mathbb{E}^{\mathcal{N}_\tau}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(\tau)]dW(\tau). \tag{1.10}$$

Proof. マルチンゲール表現定理より L^2 過程 β に対して $\phi - E[\phi] = \int \beta(\tau)dW(\tau)$ なるものが存在する. 任意の可予測なベクトル場 Z 対して

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^1 \dot{\overbrace{\nabla(\phi - E[\phi])}}(t)\dot{Z}(t)dt\right] &= \mathbb{E}[\langle\nabla(\phi - \mathbb{E}[\phi]), Z\rangle_H] \\
&= \mathbb{E}[(\phi - \mathbb{E}[\phi])\nabla^* Z] \\
&= \mathbb{E}\left[(\phi - E[\phi])\int_0^1 \dot{Z}(\tau)dW(\tau)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int \beta(\tau)dW(\tau)\int_0^1 \dot{Z}(\tau)dW(\tau)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int \beta\dot{Z}(\tau)d\tau\right].
\end{aligned}$$

ゆえに $0=\mathbb{E}[\int_0^1(\dot{\widehat{\nabla\phi}}(t)-\beta(t))Z(t)dt]$ となり $\mathbb{E}[\int_0^1(\mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(t)]-\beta(t))Z(t)dt]=0$ である．この式は任意のベクトル場 Z で成り立っているので $\mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(t)]-\beta(t)=0$ となる． □

Theorem 1.27 $\phi\in\mathbb{D}^{2,2}(\mathcal{W})$ に対して

$$\phi-\mathbb{E}[\phi)]-\int_0^1\mathbb{E}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(\tau)]dW(\tau)=\int_0^1 dW(t_2)\int_0^{t_2}\mathbb{E}^{\mathcal{N}_{t_1}}[\ddot{\widehat{\nabla^2\phi}}(t_2,t_1)]dW(t_1).$$

Proof. τ を固定し，スカラー値関数 $\psi_\tau:=\dot{\widehat{\nabla\phi}}(\tau)$ を考える．(1.10) より ψ_τ に関して

$$\dot{\widehat{\nabla\psi_\tau}}(t)=\ddot{\widehat{\nabla^2\phi}}(\tau,t)$$

なる事実を使うと

$$\psi_\tau-\mathbb{E}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(t)]=\int_0^1\mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\ddot{\widehat{\nabla^2\phi(\tau,t)}}(t)]dW(t)$$

となる．また

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathcal{N}_\tau}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(t)] &= \mathbb{E}^{\mathcal{N}_\tau}[\psi_\tau]\\ &= \mathbb{E}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(\tau)]+\int_0^\tau\mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\ddot{\widehat{\nabla^2\phi}}(\tau,t)]dW(t)\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\phi-\mathbb{E}[\phi] &= \int_0^1\mathbb{E}^{\mathcal{N}_\tau}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(\tau)]dW(\tau)\\ &= \int_0^1\left(\mathbb{E}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(\tau)]+\int_0^\tau\mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\ddot{\widehat{\nabla^2\phi}}(\tau,t)]dW(t)\right)dW(\tau)\\ &= \int_0^1\mathbb{E}[\dot{\widehat{\nabla\phi}}(\tau)]dW(\tau)+\int_0^1 dW(\tau)\int_0^\tau\mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\ddot{\widehat{\nabla^2\phi}}(\tau,t)]dW(t).\end{aligned}$$

□

$\dot{\widehat{\nabla\phi}}(\tau)$ を $\widehat{\nabla\phi}(\tau)$ と略記する．

Theorem 1.28 (Stroock の微分公式) $Z\in\mathbb{D}^{1,2}(H)$ でさらに $\{\dot{Z}(t)\}$ が可予測のとき

$$\widehat{\nabla(\int_0^1\dot{Z}(t)dW(t))}(\tau)=\dot{Z}(\tau)+\int_0^1\widehat{\nabla\dot{Z}(\tau)}(t)dW(t). \tag{1.11}$$

Proof. $Z_n\in\mathbb{D}^{0,2}(H)$ を $Z_n(t)=\int_0^t\dot{Z}_n(s)ds$ とする．(1.7), (1.9) と $\nabla:\mathbb{D}^{-1,2}\to\mathbb{D}^{-2,2}$ の連続性より

$$\|\nabla\nabla^*Z_n-\nabla\nabla^*Z\|_{\mathbb{D}^{-2,2}}\to 0$$

が言える．また Proposition 1.21 より $\nabla\nabla^*Z_n=\dot{Z}_n+\int_0^1\nabla\dot{Z}_n(t)dW(t)$ となる．$\mathbb{D}^{2,2}\subset\mathbb{D}^{0,2}(H)$ の包含関係に注意すれば (1.11) が成り立つ． □

1.4 密度関数

$g:\mathcal{W}^n\to\mathbb{R}^d$ の写像を考え, 成分は $g^1,\cdots,g^d,\quad g^i\in\mathbb{D}^{1,\infty-}(\mathcal{W}^n)$ とする. また g のマリアバン共分散行列を対称な正行列によって以下のように定義する.

$$\sigma_{ij}(w):=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\langle\nabla g^i(w),\nabla g^j(w)\rangle_H dt.$$

Definition 1.29 (非退化) 任意の $p<\infty$ に対して $\mathbb{E}[\det(\sigma)^{-p}]<\infty$ が成立することを $g:\mathcal{W}^n\to\mathbb{R}^d$ が非退化であるという.

Definition 1.30 $\phi\in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\tilde{\phi}=\phi\circ g$ を ϕ の g による lift といい, 写像 $g^*:C_b^1(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{D}^{1,\infty-}(\mathcal{W}^n)$ を

$$g^*(\phi)=\tilde{\phi}$$

と定義する.

Definition 1.31 g の分布を ν, Wiener 測度を γ, $\nu=g_*(\gamma)$ とするとき g に付随する条件付期待値を以下で表現する.

$$\begin{array}{rccc}\mathbb{E}^g: & L^p(\mathcal{W}^n;\gamma) & \to & L^p(\mathbb{R}^d;\gamma)\\ & \Cup & & \Cup\\ & F & \mapsto & \mathbb{E}^g[F]\end{array}$$

ただし, $\mathbb{E}^g[F](x)=\mathbb{E}[F|g=x]$. 即ち;

$$\int_{\mathbb{R}}\mathbb{E}^g[F](x)\phi(x)\nu(dx)=\mathbb{E}[F\phi(g)]=\mathbb{E}[Fg^*(\phi)].$$

Definition 1.32 (covering ベクトル場) $z=(z^1,\cdots,z^d)\in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ とする. $Z\in H,\ Z(t)=(Z_W^1(t),\cdots,Z_W^d(t))$ が以下を満たすとき, z の covering ベクトル場という.

$$\langle Z,\nabla g^i\rangle_H=z^i(g),\qquad i=1,\cdots,d.$$

g は非退化でさらに $\mathbb{D}^{2,\infty-}(\mathcal{W}^n)$ に属するとする. $(\sigma^{ij})=(\sigma_{ij})^{-1}$ とおく. ただし $1\le i,j\le d$ とする. $z^i\in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ とし

$$^\circ Z=\sum_{i,j=1}^{d}z^i(g)\sigma^{ij}\nabla g^j$$

とおく. このとき $^\circ Z\in\mathbb{D}^{1,\infty-}(H)$ であり

$$\langle{}^\circ Z,\nabla g^i\rangle_H=z^i(g),\quad i=1,\cdots,d$$

を満たしている. $Y\in\mathbb{D}^{1,\infty-}(H)$ が covering ベクトル場とする. ∇g^i の線形独立性より

$$Y=\sum_{i=1}^{d}c_i\nabla g^i+\eta,\quad \eta\perp\nabla g^i,\quad i=1,\cdots,d$$

と表現できる. covering ベクトル場であるから

$$\sum_{i=1}^{d}c_i\sigma_{ij}=\langle Y,\nabla g^j\rangle=z^j(g)$$

となる．これより

$$Y = {}^\circ Z + \eta$$

と表現される．とくに ${}^\circ Z$ は covering ベクトル場の中で最小の L^2-ノルムを持つといえる．

Definition 1.33 (Divergence) $z \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, ν を $\mathbb{R}^d$ 上の測度とする． 次の 2 条件を満たすとき divergence $\vartheta_\nu(z)$ を持つという．

1. $\int_{\mathbb{R}^d} \langle z, d\phi \rangle d\nu = \int_{\mathbb{R}^d} \phi \vartheta_\nu(z) d\nu$, $\forall \phi \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$,
2. $\int_{\mathbb{R}^d} |\vartheta_\nu(z)| d\nu < \infty$.

Theorem 1.34 $z \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ に対し, covering ベクトル場 ${}^\circ Z$ をとると

$$\vartheta_\nu(z) = \mathbb{E}^g[\nabla^* Z] \tag{1.12}$$

が成り立つ．さらに $g \in \mathbb{D}^{2,\infty-}(\mathcal{W}^n)$ と仮定すると任意の covering ベクトル場 $(\frac{\partial}{\partial \xi^i})$ に対して

$$\exists \vartheta_\nu(\frac{\partial}{\partial \xi}) \in L^p(\mathbb{R}^d; \nu) \quad \forall p < \infty.$$

また Number 作用素を $\mathcal{N} = -\nabla^* \nabla \phi$ とすると

$$\nabla^* {}^\circ Z_i = -\sum_j \sigma^{ij} \nabla^* \nabla (g^j) + \sum_\ell (\nabla^2 g^\ell)({}^\circ Z_i, {}^\circ Z_\ell) + \sum_{p,\ell} \sigma^{ik} (\nabla^2 g^k)({}^\circ Z_\ell, \nabla g^\ell). \tag{1.13}$$

Proof. z を $\mathbb{R}^d$ 上のベクトル場, $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $\langle z, d\phi \rangle = \partial_z \phi$ とする．

$$D_Z(g^* \phi) = \langle {}^\circ Z, \nabla \tilde{\phi} \rangle_H = \langle {}^\circ Z \sum_{i=1}^d \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(g), \nabla g^i \rangle_H = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(g) z^i(g) = \langle z, d\phi \rangle_{(g)}$$

が成り立つ．これは

$$D_Z(g^* \phi) = g^*(\partial_z \phi) \tag{1.14}$$

を意味している．よって

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \phi \vartheta_\nu(z) d\nu &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle z, d\phi \rangle (\xi) \nu(d\xi) \\ &= \mathbb{E}[\langle z, d\phi \rangle (g)] = \mathbb{E}[D_Z \tilde{\phi}] \\ &= \mathbb{E}[\nabla^* Z \tilde{\phi}] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi) \mathbb{E}^g[\nabla^* Z](\xi) \nu(d\xi). \end{aligned}$$

これより (1.12) が成り立つ．

${}^\circ Z_i$ を座標ベクトル場 $(\frac{\partial}{\partial \xi^i})$ の covering ベクトル場とする． $z \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathbb{D}^{2,p}(\mathcal{W}^n)$ の仮定より ${}^\circ Z_i \in \mathbb{D}^{1,\infty-}(\mathcal{W}^n)$. つまり L^p $(p < \infty)$ 上で $\nabla^* {}^\circ Z_i$ は存在することが証明される．

最後に (1.13) は以下の計算より従う．

$$\begin{aligned} \nabla^* {}^\circ Z_i &= -\sum_j \sigma^{ij} \nabla^* \nabla g^i + \sum_{j,k,\ell} \langle \nabla \langle \nabla g_k, \nabla g_\ell \rangle, \nabla g_j \rangle \\ &= -\sum_j \sigma^{ij} \nabla^* \nabla g^i + \sum_{j,k,\ell} \sigma^{ik} \langle \nabla \langle \nabla g_k, \nabla g_\ell \rangle, \nabla g_j \rangle \sigma^{\ell j} \\ &= -\sum_j \sigma^{ij} \nabla^* \nabla g^i + \sum_{j,k,\ell} \sigma^{ik} \langle \langle \nabla^2 g_k, \nabla g_\ell \rangle + \sum_{k,\ell} \langle \nabla g_k, \nabla^2 g_\ell \rangle, \nabla g_j \rangle \sigma^{\ell j} \\ &= -\sum_j \sigma^{ij} \nabla^* \nabla g^i + \sum_{k,\ell} \sigma^{ik} \langle \langle \nabla^2 g_k, \nabla g_\ell \rangle, \nabla g_j \rangle \sigma^{\ell j} + \sum_{j,k,\ell} \sigma^{ik} \langle \langle \nabla g_k, \nabla^2 g_\ell \rangle, \nabla g_j \rangle \sigma^{\ell j}. \end{aligned}$$

□

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を Schwartz の急減少関数族とする． $\mathbf{s} = (s(1), \cdots, s(d)) \in (\mathbb{Z}_+)^d$ と定義し, 成分の和を $|s| = \sum_{i=1}^d s(i)$ とおく. 微分作用素を $\partial_{\mathbf{s}} = \prod_{i=1}^d [\frac{\partial}{\partial \xi^i}]^{\mathbf{s}(i)}$ とする.

Lemma 1.35

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{|\mathbf{s}| \leq m} a_s \partial^{\mathbf{s}}, \qquad a_s \in \mathbb{C} \\ Q_{\mathcal{L}} &= \sum_{|\mathbf{s}| \leq m} a_m Q_{\mathbf{s}} \end{aligned}$$

とすれば

$$\mathbb{E}[(g^* \mathcal{L}\phi) f] = \mathbb{E}[(g^*\phi) Q_{\mathcal{L}}(f)].$$

ただし, $Q_{\mathbf{s}} = Q_{\mathbf{q}} \nabla^{*\circ} Z_i - \nabla Q_{\mathbf{q}}$ とする.

Proof. $|\mathbf{s}|$ の帰納法によって証明する.

まず $|\mathbf{s}| = \mathbf{1}$ のときは, $Q_{\mathcal{L}} = \nabla^{*\circ} Z_i$ とすれば, $Q_i \in \mathbb{D}^\infty$ より (1.13) から満たされる．次に $|\mathbf{s}| < \mathbf{r}$ で lemma 1.35 が満たされていると仮定する． $|\mathbf{s}| = r$ とし, $\partial_{\mathbf{s}} = \partial_{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \quad |\mathbf{q}| = r - 1$ と書く．ここで $\phi_1 := \frac{\partial}{\partial \xi^i} \phi$ と定義すると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g^*(\partial_{\mathbf{s}}\phi)] = \mathbb{E}[g^*(\partial_{\mathbf{q}}\phi_1)] = \mathbb{E}[(g^*\phi_1) Q_{\mathbf{q}}] &= \mathbb{E}[(\nabla g^* \phi) Q_{\mathbf{q}}] \\ &= \mathbb{E}[(g^*\phi)(Q_{\mathbf{q}} \nabla^{*\circ} Z_i - \nabla Q_{\mathbf{q}})]. \end{aligned}$$

□

さらに一般的に任意の $\mathbf{s}$ に対してある $Q_{\mathbf{s}} \in \mathbb{D}^\infty(\mathcal{W}^n)$ が存在し $\mathbb{E}[g^*(\partial_{\mathbf{s}}\phi)] = \mathbb{E}[Q_{\mathbf{s}} g^*(\phi)]$ $(\forall \phi \in C_b^{|\mathbf{s}|}(\mathbb{R}^d))$ とすれば

$$\mathbb{E}[(g^* \partial_{\mathbf{s}} \phi) f] = \mathbb{E}[(g^*\phi) Q_{\mathbf{s}}(f)], \quad \forall f \in \mathbb{D}^\infty(\mathcal{W}^n)$$

が成立することも言える.

Theorem 1.36 *g を非退化とし, $g^i \in \mathbb{D}^\infty(\mathcal{W}^n)$ とすると g の分布はルベーグ測度に関する密度関数 $p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を持つ.*

Proof.

$$\begin{aligned} (1 + |\eta|^2)^m \partial_\eta^{\mathbf{s}} u(\eta) &= \mathbb{E}[g^*(1 - \Delta)^m \psi_\eta^{\mathbf{s}} f] \\ &= \mathbb{E}[(g^* \psi_\eta^{\mathbf{s}}) Q_{(1-\Delta)^m}(f)] \\ \text{ただし} \quad \psi_\eta^{\mathbf{s}}(\xi) &= (i\xi)^{\mathbf{s}} e^{i(\xi|\eta)}, \quad (i\xi)^{\mathbf{s}} = \prod_{j=1}^d (i\xi)^{\mathbf{s}_j}. \end{aligned}$$

これより

$$|\partial_\eta^{\mathbf{s}} u(\eta)| \leq \frac{1}{(1 + |\eta|^2)^n} \mathbb{E}[|g^{\mathbf{s}}||Q_{(1-\Delta)^m}(f)|].$$

ゆえに $\exists p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

□

以下, g は非退化で $g \in \mathbb{D}^\infty$, $f \in \mathbb{D}^\infty$ とする. H をヘヴィサイド関数として

$$\begin{aligned} H(t) &= \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (\text{othewise}) \end{cases} \\ {}^{\alpha}H(t) &= H(t-\alpha) \end{aligned}$$

とおく.

Theorem 1.37 Z_i は座標ベクトル場 $(\frac{\partial}{\partial \xi^i})$ の covering ベクトル場とするとき $\mathcal{R}_g^i : \mathbb{D}^\infty \to \mathbb{D}^\infty$ を以下の通り定義する.

$$\mathcal{R}_g^i(\Psi) = \nabla^* Z_i \Psi - D_{Z_i}\Psi.$$

すると

$$u_f(a) = \mathbb{E}\left[\Gamma_g(f) g^* \left(\prod {}^{a_i}H(\xi^i)\right)\right], \quad \Gamma_g(f) = (\mathcal{R}_g^1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_g^d)(f).$$

軟化子を使って $H_\varepsilon := H * \psi_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\psi(\frac{t}{\varepsilon}), \quad \psi \subset \mathrm{supp}[-1,0], \quad \int \psi_\varepsilon dt = 1$ と定義する. H_ε の微分を H'_ε と表す.

Lemma 1.38

$$\begin{aligned} u_f(a) &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \cdots \lim_{\varepsilon_d \to 0} \mathbb{E}\left[f \prod_{i=1}^d {}^{a_i}H'_{\varepsilon_i}(g^i)\right] \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \cdots \lim_{\varepsilon_d \to 0} \mathbb{E}\left[f D_{Z_1} \cdots D_{Z_d} g^* \left(\prod_{i=1}^d {}^{a_i}H_{\varepsilon_i}(\xi^i)\right)\right]. \end{aligned}$$

Proof. $a = 0$ とすることで a^i を省略して考える. 軟化子の性質より $\mathcal{S}'$ 上で $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d \to 0$ とすると

$${}_{\mathcal{S}'}\langle \prod_{i=1}^d H'_{\varepsilon_i}(\xi^i), u_f \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \to {}_{\mathcal{S}'}\langle \delta_0, u_f \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = u_f(0)$$

が言える. また (1.14) より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f D_{Z_1} \cdots D_{Z_d} g^* \left(\prod_{i=1}^d H_{\varepsilon_i}(\xi^i)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[f D_{Z_1} \cdots D_{Z_{d-1}} g^* \left(\frac{\partial}{\partial \xi^d} \prod_{i=1}^d H_{\varepsilon_i}(\xi^i)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[f g^* \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi^d} \prod_{i=1}^d H_{\varepsilon_i}(\xi^i)\right)\right] \\ &= {}_{\mathcal{S}'}\langle \prod_{i=1}^d H'_{\varepsilon_i}(\xi^i), u_f \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

となる.

□

h を $\mathbb{R}^{d-1}$-値写像 $h = (g^2, \cdots, g^d)$ とおく. $\Gamma_h(f) = (\mathcal{R}_g^2 \circ \cdots \mathcal{R}_g^d)(f)$ と表現できる.

Proof(*Proof of Theorem* 1.37).

$$\begin{aligned} u_f(0) &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \mathbb{E}\left[H'_{\varepsilon_1}(g^1)\Gamma_h(f)\prod_{i=2}^d H(g^i)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathcal{R}_{g^1}\left(\Gamma_h(f)\prod_{i=2}^d H(g^i)\right)H(g^1)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=2}^d H(g^i)\right)\times \mathcal{R}_{g^1}(\Gamma_h(f))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathcal{R}_g^1(\Gamma_h(f))\prod_{i=1}^d H(g^i)\right] \end{aligned}$$

より d に関する帰納法で示される. □

Lemma 1.39

$$\mathcal{C}_i(\xi) = -c_d \frac{\xi_i}{\|\xi\|^{d-1}}$$

とおく. ただし

$$c_d = \begin{cases} \frac{2(d-1)}{a(d)} & (d > 0) \\ \frac{2}{a(d)} & (d = 2) \end{cases}, \quad a(k) = 2^{k-1}\pi, \quad \|\xi\|^2 = \sum_i (\xi^i)^2$$

とする. 任意の $h \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$h(\xi) = \sum_{i=1}^d (\mathcal{C}_i * \frac{\partial h}{\partial \xi^i})(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つ.

Proof. $f \in C_0^2$ としてニュートンポテンシャル核を以下で定義する.

$$q_d(\xi) = \begin{cases} \|\xi\|^{2-d} & (d > 2) \\ \log \frac{1}{\|\xi\|} & (d = 2) \end{cases}$$

すると

$$\frac{\partial}{\partial \xi^k} q_k = a(d)\mathcal{C}_k, \quad q \geq 2.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^d \left(\mathcal{C}_i * \frac{\partial h}{\partial \xi^i}\right)(\xi) &= \frac{1}{a(d)} \sum_{k=1}^d \frac{\partial q_d}{\partial \xi^k} * \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \\ &= \frac{1}{a(d)} q_d * \left(\sum_{k=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial \xi^k}\right)^2 f\right) \\ &= \frac{1}{a(d)} q_d * \Delta f. \end{aligned}$$

□

Theorem 1.40 Z_i を座標ベクトル場 $(\frac{\partial}{\partial \xi^i})$ の covering ベクトル場 とするとき, $\mathcal{R}_g^i : \mathbb{D}^\infty \to \mathbb{D}^\infty$ を以下として定義する.

$$\mathcal{R}_g^i(\Psi) = \nabla^* Z_i \Psi - D_{Z_i}\Psi.$$

このとき

$$u_f(a) = c_d \sum_i \mathbb{E}\left[\mathcal{R}_g^i(f)\frac{g^i - a^i}{\|g-a\|^{d-1}}\right]$$

となる.

Proof.

$$\begin{aligned} u_f(a) &= \mathbb{E}[fH'(\cdot - a)] = \mathbb{E}[f\delta_a(g)] = \mathbb{E}[f\Delta q_d(g)] \\ &= \sum_i \mathbb{E}[\mathcal{R}_g^i(f)\partial_i q_d] = \sum_i \mathbb{E}[\mathcal{R}_g^i(f) c_d \mathcal{C}_i] \\ &= c_d \sum_i \mathbb{E}\left[\mathcal{R}_g^i(f)\frac{g^i - a^i}{\|g-a\|^{d-1}}\right]. \end{aligned}$$

ただし以下に注意しておく. $\tilde{p}(r) = \sup_{|\xi|=r}\{|p(\xi)|\}$ とおけば

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\frac{g^i - a^i}{\|g-a\|^{d-1}}\right|^q\right] &\leq \mathbb{E}[\|g-a\|^{(2-d)q}] \\ &\leq \int |\xi - a|^{(2-d)q} p(\xi) d\xi \\ &\leq \int_0^\infty r^{(2-d)q} r^{d-1} \tilde{p}(r) dr \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

$\mathbb{R}^1$ 値確率変数の場合を考える.

Theorem 1.41 ϕ を $\phi \in \mathbb{D}^{2,p}(\mathcal{W})$ を満たす $\mathbb{R}$-値確率変数とする. $\|D\phi\|^2 = \int_0^1 |\nabla\phi|^2 dt$ と表記し, ある $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbb{E}[\|D\phi\|^{-(2q+\varepsilon)}] < \infty$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ と仮定する.

このとき, ϕ の分布 $P \circ \phi^{-1}$ はルベーグ測度に関する連続な密度関数 u を持ち

$$\begin{aligned} u(a) &= \mathbb{E}[(\nabla^* Z)\mathcal{I}_{\{\phi(W) > a\}}] \text{ であり} \\ |u(a)| &\leq \|\nabla^* Z\|_{L^{p'}} \gamma(\{\phi > a\})^{\frac{1}{q'}}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1 \end{aligned}$$

と評価される.

Proof. $\mathcal{W}$ 上のベクトル場を $Z = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|^2}$ としておく. このとき, $\langle Z, \nabla\phi\rangle = 1$ となる. ここで Z の divergence $\nabla^* Z$ に関して以下を仮定する.

$$\mathbb{E}[|\nabla^* Z|] < \infty. \tag{1.15}$$

このとき, $a < b$, ν を ϕ の分布として

$$u_{a,b}(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi \leq a) \\ 1 & (\xi \geq a) \\ \text{線形補間} & (a < \xi < b) \end{cases}$$

という連続関数を考える.

$$\frac{1}{b-a}\nu([a,b)) = \mathbb{E}[(u_{a,b}\circ\phi)\nabla^* Z]$$

より

$$\left|\frac{1}{b-a}\nu([a,b))\right| \leq \mathbb{E}[|\nabla^* Z|].$$

$\mathbb{E}[|\nabla^* Z|] = C_Z$ とすれば

$$\nu([a,b)) \leq C_Z(b-a)$$

となる. リプシッツ連続より絶対連続となっているので各点で密度関数を持つことが示された.

$$u_n^{\xi_0}(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi \leq \xi_0 - \frac{1}{n}) \\ 1 & (\xi \geq \xi_0 + \frac{1}{n}) \\ \text{線形補間} & (\xi_0 - \frac{1}{n} < \xi < \xi_0 + \frac{1}{n}) \end{cases}$$

とすれば

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}\int_{\xi_0-\frac{1}{n}}^{\xi_0+\frac{1}{n}} \nu(d\xi) &= \mathbb{E}\left[\frac{n}{2}\mathcal{I}_{[\xi_0-\frac{1}{n},\xi_0+\frac{1}{n}]}(\phi)\right] \\ &= \mathbb{E}[(u_n^{\xi_0})'(\phi)] \\ &= \mathbb{E}[D_Z(u_n^{\xi_0}\circ\phi)] \\ &= \mathbb{E}[(u_n^{\xi_0}\circ\phi)\nabla^* Z]. \end{aligned}$$

$n\to\infty$ とすれば $u(\xi_0) = \mathbb{E}[(\nabla^* Z)\mathcal{I}_{\{\phi(W)>\xi_0\}}]$ となる.
次に (1.15) を示す.

$$\nabla Z = \frac{\nabla^2\phi}{\|\nabla\phi\|^2} - \frac{2\langle\nabla^2\phi,\nabla\phi\rangle\otimes\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|^4}$$

より

$$\begin{aligned} \|\nabla Z\|_p &\leq \left\|\frac{\nabla^2\phi}{\|\nabla\phi\|^2}\right\|_p + 2\left\|\frac{\nabla^2\phi}{\|\nabla\phi\|^2}\right\|_p \\ &= 3\left\|\frac{\nabla^2\phi}{\|\nabla\phi\|^2}\right\|_p \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\nabla^2\phi}{\|\nabla\phi\|^2}\right\|_{1+\eta}^{1+\eta} &= \left\|\frac{|\nabla^2\phi|^{1+\eta}}{\|\nabla\phi\|^{2(1+\eta)}}\right\|_1 \\ &\leq \||\nabla^2\phi|^{1+\eta}\|_\alpha \|\|\nabla\phi\|^{-2(1+\eta)}\|_\beta \\ &< \infty. \end{aligned}$$

となることより Theorem 1.23 から示される. ただし, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ $(\alpha,\beta>1)$ とする. □

Theorem 1.42 Z は座標ベクトル場 $(\frac{\partial}{\partial\xi^1})$ の covering ベクトル場とする. $\Psi\in\mathbb{D}^{1,q}(\mathcal{W})$ とすると

$$\mathbb{E}[\Psi|\phi=a] = \frac{1}{u(a)}\mathbb{E}[(\Psi\nabla^* Z - D_Z\Psi)\mathcal{I}_{\{\phi>a\}}].$$

Proof. $f_n(\xi) = \frac{n}{2}\mathcal{I}_{[a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}]}(\xi)$ としたときに,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u(a)\mathbb{E}[\Psi|\phi = a]f_n(a)da &= \mathbb{E}[\Psi f_n(\phi)] \\ &= \mathbb{E}[\Psi D_Z(u_n^a \circ \phi)] \\ &= \mathbb{E}[(u_n^a \circ \phi)\nabla^*(\Psi Z)]\end{aligned}$$

となり, $n \to \infty$ とすると証明される. ただし

$$u_n^a(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi \leq a - \frac{1}{n}) \\ 1 & (\xi \geq a + \frac{1}{n}) \\ \text{線形補間} & (a - \frac{1}{n} < \xi < a + \frac{1}{n}) \end{cases}$$

とする. □

2 様々なオプションでの Greek の構成

2.1 オプション

$S(t)$ を時刻 t における株価とし, 価格 K で購入するとする. このとき, 権利行使がオプション満期のみに限定されているものをヨーロピアンオプションと言う. この章では先物買い契約に契約を必ずしも履行しなくともよいという選択権 (オプション) のついたコールオプションを取り扱う. 満期時期 T に証券 i を 1 単位価格 K (行使価格) で買う権利であるヨーロピアン・コールオプションを $\max\{S^i(T)-K,0\}$ としておく.

次にバリアオプションについて述べる. 満期以前に株価がある値 A に到達すればそこからオプション契約発生, もし満期時まで株価がその値に到達しなければオプション契約消滅という付帯条件つきのオプション契約であるノックインオプションを取り扱う. ノックインオプションは $\mathcal{I}_{\{\tau<T\}}\max(S(T)-K,0)$ としておく. ただし $\tau=\inf\{t|S(t)=A\}$ である.

Definition 2.1 (ブラックショールズモデル) 以下の確率微分方程式で与えられるものをブラックショールズの株価変動モデルと言う.

$$dS(t)=aS(t)dW(t)+bS(t)dt \tag{2.1}$$

ただし, $a,\ b>0$ は定数とする. b は利率を表す.

(2.1) の微分方程式を具体的に解くと, 解は

$$S(t)=S(0)\exp\left\{aW(t)+\left(b-\frac{a^2}{2}\right)t\right\}$$

と書ける.

2.2 elliptic weight

リスクのない測度もとでの無限小生成作用素を

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\alpha^{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^{d}\beta^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

とする. $\alpha^{ij}:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R},\ \beta^i:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ とし, $\sigma:=\sqrt{\alpha}$ とする. 独立な実数値ブラウン運動 $W^1,W^2,\cdots,W^n$ に関して次の確率微分方程式を考える.

$$dS_W^i(t)=\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(t,S_W(t))dW^j(t)+\beta^i(t,S_W(t))dt,\quad i=1,2,\cdots,d \tag{2.2}$$

ϕ を $\mathbb{R}^d$ 上の実数値関数, 満期を T, リスク利率を r (定数), ペイオフ $\phi(S_W^1(T),\cdots,S_W^d(T))$ とする. $t<T$ でヨーロピアン・オプション価格を

$$\Phi_\phi(t,x)=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\phi(S(T))|S(t)=x]$$

とする.

Theorem 2.2 価格関数は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}-r\right)\Phi=0,\quad \Phi_\phi(T,\cdot)=\phi \tag{2.3}$$

を満たす.

Proof.

$$e^{-rt}\Phi_\phi(t,x) = e^{-rT}\mathbb{E}[\phi(S(T))|S(t)=x]$$

より微分すると,

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}\Phi_\phi(t,x)) &= e^{-rT}\left[-r\Phi dt + \frac{\partial}{\partial t}\Phi dt + \frac{\partial}{\partial x}\Phi dX \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi dX dX\right] \\ &= e^{-rT}\left[-r\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\Phi + \beta\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Phi\right]dt + e^{-rT}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi dW. \end{aligned}$$

マルチンゲール性より dt の項が 0 になることに注意すれば示される. □

Definition 2.3 時間を固定したオプション価格の微分を

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &:= d[\Phi_\phi(t,\cdot)] = \sum_{i=1}^{d}\Delta_\phi^i(t,x)dx^i, \\ \Delta_\phi^i(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Phi_\phi(t,x),\ (i=1,2,\cdots,d) \end{aligned}$$

と定義する.

Theorem 2.4 ペイオフ ϕ は C^1 級であるとすると微分形式 $\Delta_\phi(t,x)$ は以下の式を満たす.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}^1 - r\right)\Delta_\phi = 0, \quad \Delta_\phi(T,\cdot) = d\phi$$

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} + \sum_{i=1}^{d} M^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma, \quad (M^i)_q^j = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^q}, \quad \Gamma_q^j = \frac{\partial \beta^j}{\partial x^q}.$$

Proof. (2.3) に微分 d を作用させると, $0 = d(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L} - r)\Phi_\phi$ となる. $d(\frac{\partial}{\partial t}) = (\frac{\partial}{\partial t})d$ が成立するので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^q}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^q}\sum_{i,j=1}^{d}\alpha^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^q}\sum_{i=1}^{d}\beta^i\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x^q}\left(\alpha^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\right) + \frac{\partial}{\partial x^q}\sum_{i=1}^{d}\beta^i\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left\{\frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} + \alpha^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\cdot\frac{\partial}{\partial x^q}\right\} + \sum_{i=1}^{d}\left\{\frac{\partial\beta^i}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta^i\frac{\partial}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^q}\right\} \\ &= \mathcal{L}^1\frac{\partial}{\partial x^q} \end{aligned}$$

より示される. □

Theorem 2.5 オプション $\phi(S_W(T))$ は以下の確率積分で複製される.

$$e^{-rT}\phi(S_W(T)) - e^{-rT}\mathbb{E}[\phi(S_W(T))] = \int_0^T\sum_{j=1}^{n}\gamma_W^j(t)dW^j(t). \tag{2.4}$$

$$\text{ただし, } \gamma_W^j(t) = \langle\sigma^{\cdot j}, e^{-rT}\Delta_\phi(t,S_W(t))\rangle = e^{-rT}\sum_{i=1}^{d}\sigma^{ij}\Delta_\phi^i(t,S_W(t)).$$

Proof. 全ての価格が時刻 T に関して割引されているので利率 r が 0 になるときに制限して考えればよい. (2.4) は e^{-rT} をかけて得られる. Theorem 2.2 によると, $r = 0$ ならば過程 $M(t) = \Phi_\phi(t, S_W(t))$ はマルチンゲールとなる. マルチンゲール表現定理より, $M(t) = M(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \gamma^j dW^j$ となる. 相関 γ^j は伊藤公式の利用によって, $\gamma^j dt = [d\Phi_\phi(t, S_W(t)) * dW^j] = \sum_{i=1}^{d} \Delta_\phi^i [dS^i * dW^j] = \sum_{i=1}^{d} \Delta_\phi^i \sigma^{ij} dt$ より示される. □

次に偏微分方程式での weight, 所謂 elliptic weight について考える. 満期 T に対するヨーロピアンオプションはペイオフ $\phi(S_T)$ から構成される. $t_0 < T$ に対して $\pi_{T \leftarrow t_0}(x_0, dx)$ を以下の意味で基本解とする.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathcal{L}\right) \pi_{T \leftarrow t_0}(\cdot, dx) &= 0, \\
\lim_{t_0 \to T} \pi_{T \leftarrow t_0}(x_0, dx) &= \delta_{x_0}
\end{aligned}
$$

より (x_0, t_0) でのオプション ϕ の値 Φ_ϕ は

$$\Phi_\phi(x_0, t_0) = e^{-r(T-t_0)} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \pi_{T \leftarrow t_0}(x_0, dx)$$

となる. elliptic weight w_{ζ_0} とは任意のペイオフ関数 ϕ に対し次を満たす関数 $w_{\zeta_0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ のことを言う.

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Phi_\phi(t_0, x_0 + \varepsilon\zeta_0) = e^{-r(T-t_0)} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) w_{\zeta_0}(x) \pi_{T \leftarrow t_0}(x_0, dx). \tag{2.5}$$

Definition 2.6 (楕円性) $A = a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ のとき

$$(a^{ij}) \geq \varepsilon I$$

を満たすとき, A は楕円型であるという.

Theorem 2.7 $\sigma \in C^2$ が楕円型であると仮定すると $\zeta_0 \in \mathbb{R}^d$ に対して唯一つの elliptic weight w_{ζ_0} が存在する. さらに $\zeta_0 \mapsto w_{\zeta_0}$ は線形写像である.

Proof. 楕円性の仮定より, $\pi_{T \leftarrow t_0}(x_0, dx)$ はルベーグ測度に関して $t_0 < T$ で密度関数をもつ.

$$\pi_{T \leftarrow t_0}(x_0, dx) = q_{T \leftarrow t_0}(x_0, x) dx$$

は $q_{T \leftarrow t_0}(x_0, x) > 0$ であり, x_0 に関して C^1 級関数である. すると,

$$w_{\zeta_0}(x) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \log q_{T \leftarrow t_0}(x_0 + \varepsilon\zeta_0, x)$$

は elliptic weight となる.

$w_{\zeta_0}, w'_{\zeta_0}$ の 2 つの elliptic weight を考える. ϕ に関して,

$$\int \phi(x)(w_{\zeta_0}(x) - w'_{\zeta_0}(x)) q_{T \leftarrow t_0}(x_0, x) dx = 0$$

と表現できる. $x \in \mathbb{R}^d$ 上に対して $q_{T \leftarrow t_0}(x_0, x) > 0$ であることに注意すれば, a.e. にルベーグ測度に関して $w_{\zeta_0}(x) = w'_{\zeta_0}(x)$ となる. ゆえに, elliptic weight は唯一つであり, $w_{\zeta_0} + w_{\zeta_1}$ はベクトル $\zeta_0 + \zeta_1$ に関する elliptic weight より, $w_{\zeta_0} + w_{\zeta_1} = w_{\zeta_0 + \zeta_1}$ となる. □

Example 2.8 (elliptic weight の例) 1 変量のブラックショールズモデル

$$dS_W(t) = S_W(t) dW(t)$$

を考える．$\xi_W(t) := \log S_W(t)$ とする．伊藤積分より ξ_W は $d\xi_W(t) = dW - \frac{1}{2}dt$ の解である．ゆえに

$$W(T) = \log S_W(T) - \log S_W(0) + \frac{1}{2}T$$

となる．$\xi_W(T)$ は平均 $\xi_W(0) - \frac{1}{2}T$, 分散 T の正規分布に従っている．つまり $\xi_W(T) = \log S_W(T)$ より $S_W(T)$ は対数正規分布に従っていることがわかる．$S_W(T)$ の密度関数は以下として与えられる．

$$p_x(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left(\log\frac{y}{x} + \frac{T}{2}\right)^2\right), \quad x = S_W(0).$$

よって

$$\Delta_\phi(x,T) = \frac{\partial}{\partial x}\int \phi(y)p_x(y)dy = \int \phi(y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\log p_x(y)\right)p_x(y)dy$$

であり

$$\frac{\partial}{\partial x}\log p_x(y) = \frac{1}{xT}\left(\log\frac{y}{x} + \frac{T}{2}\right)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial x}\log p_x(S_W(t)) = \frac{W(T)}{xT}$$

となる．ゆえに elliptic weight w は以下のように表される．

$$w(x) = \frac{1}{x_0}\left(\frac{1}{T}\log\frac{x}{x_0} + \frac{1}{2}\right).$$

ブラックショールズモデルは楕円性が満たされない．$A_1(x) = \sigma x$ より $A_1(0) = 0$ であることからわかる．しかしながら解が $S_W(t) = S_W(0)\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ なので $A_1(S_W(t)) > 0$ となり $\sigma S_W(t) > 0$ である．これにより上のような elliptic weight の計算が推敲できる．

2.3 経路ごとの weight と smearing

まず確率微分方程式における flow を考える．$\mathbb{R}^d$ 上の時間に依存する C^2-ベクトル場 $A_\alpha = (\sigma^{i\alpha})_{1\le i\le d}$, $A_0 = (\beta^i)_{1\le i\le d}$ を導入することによって, (2.2) を表現する．確率微分方程式

$$dS_W(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha(t, S_W(t))dW^\alpha(t) + A_0(t, S_W(t))dt \tag{2.6}$$

を考える．(2.6) による flow は, $t \ge t_0$, $S_0 \in \mathbb{R}^d$ を満たす写像 $U^W_{t\leftarrow t_0}(S_0) := S_W(t)$ である．ただし $S_W(\cdot)$ は初期値 $S_W(0)$ $(t = t_0)$ である (2.6) の解である．写像 $U^W_{t\leftarrow t_0}$ は well-defined である．

行列 $\mathbf{A}_\alpha$ のベクトル場 A_α を $(\mathbf{A}_\alpha)^i_j = \frac{\partial A^i_\alpha}{\partial x^j}$, $(\alpha = 0, 1, \cdots, n)$ と定義する．flow に付随するヤコビ行列もあわせて (2.6) を表現する．

$$\begin{aligned} dS_W(t) &= \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha(t, S_W(t))dW^\alpha(t) + A_0(t, S_W(t))dt, \\ d_t J^W_{t\leftarrow t_0} &= \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{A}_\alpha(t, S_W(t))dW^\alpha(t) + \mathbf{A}_0(t, S_W(t))dt\right) J^W_{t\leftarrow t_0}. \end{aligned}$$

ただし $J^W_{t\leftarrow t_0}$ は実 $n \times n$ 行列で, $J^W_{t_0\leftarrow t_0}$ は単位行列を満たすとする．$U^W_{t\leftarrow t_0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^d$ の局所微分同相写像となっている．

$\zeta_W(t) = J^W_{t\leftarrow t_0}(\zeta_0)$ をヤコビ流とする．

Theorem 2.9 (flow の微分の構成) $\zeta_0 \in \mathbb{R}^d$ とすれば

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} U^W_{t\leftarrow t_0}(S_0+\varepsilon\zeta_0) = J^W_{t\leftarrow t_0}(\zeta_0), \quad t \geq t_0 \tag{2.7}$$

が成立する.

Theorem 2.10 A_α が C^∞ であり, $\mathbf{A}_\alpha$ が C_b^∞ ならば, (2.6) を満たす $S(T) \in \mathbb{D}^\infty$ がある. さらに

$$\langle \nabla S^i(T), h\rangle_H = \sum_{\alpha=1}^n \int_{t_0}^T J^W_{T\leftarrow t} A^i_\alpha(S(t))\dot{h}^\alpha(t)dt, \quad h \in H$$

が成り立つ.

Theorem 2.10 より満期 T でペイオフ ϕ のヨーロピアンオプションに関して区分ごとの値を $\Psi(W) := \phi(S_W(T))$ とするとマリアバン微分は

$$\dot{\widehat{(\nabla\Psi)^\alpha}}(t) = \langle J^W_{T\leftarrow t}(A_\alpha(S_W(t))), d\phi(S_W(T))\rangle \tag{2.8}$$

と表現できる.

Theorem 2.11 上の $\phi(S_W(T))$ に対し Greek Δ^i_ϕ は経路ごとの Delta の平均によって与えられる;

$$\Delta^i_\phi(t,x) = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{i\alpha}(x)\mathbb{E}_{t,x}[\dot{\widehat{(\nabla\Psi)^\alpha}}(t)]. \tag{2.9}$$

ただし $\sigma_{i\alpha} = (\sigma^{i\alpha})^{-1}$ とし, $e_i = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{i\alpha}A_\alpha$ とする.

Proof. (2.8) の右辺に伊藤の公式を適用すれば

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t,x}[\dot{\widehat{(\nabla\Psi)^\alpha}}(t)] &= \mathbb{E}[d\phi(S_W(t,x))J^W_{T\leftarrow t}(A_\alpha)|S_W(t)=x] \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x^i}\mathbb{E}[\phi(S_W(T))|S_W(t)=x]A^i_\alpha \\
&= \Delta^i_\phi(t,x)A^i_\alpha
\end{aligned}$$

となる. 両辺に $\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{i\alpha}$ をかければ (2.9) となる. □

Theorem 2.12 (Ocone-Karatzas formula) ペイオフ関数 ϕ は C^1 級で

$$\begin{aligned}
\zeta^\alpha_W(t) &:= J^W_{T\leftarrow t}A_\alpha(S_W(t)), \quad t \geq t_0; \\
\beta^\alpha_W(t) &:= \mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}_{t_0,x_0}[\langle \zeta_W(t), d\phi(S_W(t))\rangle]
\end{aligned}$$

とおく. ペイオフ関数 ϕ は伊藤積分で表現できる;

$$\phi(S_W(T)) - \mathbb{E}_{t_0,x_0}[\phi(S_W(T))] = \int_{t_0}^T \sum_{\alpha=1}^n \beta^\alpha_W(t)dW^\alpha(t).$$

Proof. 満期 T でペイオフ ϕ として与えられるヨーロピアンオプションと対応したものを $\Psi(W) = \phi(S_W(T))$ として $\mathcal{W}$ 上にペイオフ関数 $\Psi(W)$ を定義できる. (1.10) で Ψ とすればよい. □

次に経路ごとの weight を考える. パス空間上でペイオフ関数 ϕ に依存しない $\mathbb{R}^n$-値関数 $\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)$ を

$$\mathbb{E}_{t_0,x_0}[\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)\phi(S_W(T))] = \mathbb{E}_{t_0,x_0}[\overset{\cdot}{\overbrace{(\nabla\phi(S_W(T)))}}^\alpha(t_0)], \quad \alpha = 1,\cdots,n. \tag{2.10}$$

として与える. (2.10) を満たす $\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)$ が存在するときに $\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)$ を経路ごとの weight と言う. (2.10) の左辺は $S_W(T)$ の条件のもとで $\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)$ の条件付期待値として構成されていることから, 経路ごとの weight である $\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)$ は唯一つではない.

経路ごとの weight と elliptic weight の関係について考える. (2.5) は

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\Phi_\phi(t_0, x_0+\varepsilon\zeta_0) = e^{-r(T-t_0)}\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}_{t_0,x_0+\varepsilon\zeta_0}[\phi(S(T))]$$

と書き直せる.

$$\begin{aligned}(\sharp) &:= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}_{t_0,x_0+\varepsilon\zeta_0}[\phi(S(T))]\\ &= \sum_{i,j=1}^d \mathbb{E}_{t_0,x_0}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(S(T))\frac{\partial S^i}{\partial x^j}(T)\zeta_0^j\right]\end{aligned}$$

とおく.

$$\overset{\cdot}{\overbrace{(\nabla\phi(S(T)))}}^\alpha(t) = \sum_{i,j,k=1}^d\left(\frac{\partial S(T)}{\partial x}\right)^{ij}\left(\frac{\partial S}{\partial x}(t)\right)^{-1}_{jk}\sigma^{k\alpha}(S(t))\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(S(T))$$

であり, とくに

$$\overset{\cdot}{\overbrace{(\nabla\phi(S(T)))}}^\alpha(t_0) = \sum_{i,j=1}^d\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(S(T))\frac{\partial S^i}{\partial x^j}(T)\sigma^{j\alpha}(S(0)).$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^d\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(S(T))\frac{\partial S^i}{\partial x^j}(T) = \sum_{\alpha=1}^d\sigma_{j\alpha}(S(0))\overset{\cdot}{\overbrace{(\nabla\phi(S(T)))}}^\alpha(t_0)$$

となる. ただし $(\sigma^{ij})^{-1} = (\sigma_{ij})$ とする. $(\sharp)$ に代入すれば

$$\begin{aligned}(\sharp) &= \sum_{j=1}^d\sum_{\alpha=1}^n\mathbb{E}_{t_0,x_0}[\sigma_{j\alpha}(S(0))\overset{\cdot}{\overbrace{(\nabla\phi(S(T)))}}^\alpha(t_0)]\zeta_0^j\\ &= \sum_{j=1}^d\sum_{\alpha=1}^n\mathbb{E}_{t_0,x_0}[\overset{\cdot}{\overbrace{(\nabla\phi(S(T)))}}^\alpha(t_0)]\sigma_{j\alpha}(x_0)\zeta_0^j\end{aligned}$$

となる. ここで $\mathbb{E}_{t_0,x_0}[\overset{\cdot}{\overbrace{(\nabla\phi(S(T)))}}^\alpha(t_0)] = \mathbb{E}_{t_0,x_0}[\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)\phi(S_W(T))]$ に注意すれば

$$\begin{aligned}(\sharp) &= \mathbb{E}_{t_0,x_0}\left[\phi(S_W(T))\left(\sum_{j=1}^d\sum_{\alpha=1}^n\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)\sigma_{j\alpha}(x_0)\zeta_0^j\right)\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)\mathbb{E}_{t_0,x_0}\left[\left(\sum_{j=1}^d\sum_{\alpha=1}^n\Omega^\alpha_{T\leftarrow t_0}(W)\sigma_{j\alpha}(x_0)\zeta_0^j\right)\bigg|S(T)=x\right]\pi_{T\leftarrow t_0}(x_0,dx)\end{aligned}$$

となる. ゆえに経路ごとの weight と elliptic weight の関係は以下の式で表現できる.

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_{i\alpha}(S_W(t_0))\mathbb{E}_{t_0,x_0}[\Omega^{\alpha}_{T\leftarrow t_0}(W)|S_W(T)=x] = w_{e_i}(x). \tag{2.11}$$

$\zeta_0 \in \mathbb{R}^d$ とする. 適合確率過程 $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \cdots, \gamma^n(t))$ を用いて

$$J^W_{T\leftarrow t_0}(\zeta_0) = \int_{t_0}^{T} J^W_{T\leftarrow t}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \gamma^{\alpha}(t) A_{\alpha}(S_W(t)\right) dt \tag{2.12}$$

が成り立つとき

$$\Gamma(\cdot) = \int_0^{\cdot} \gamma(s)ds \in H$$

を smearing policy と言う.

(2.12), $J^W_{T\leftarrow t_0} = J^W_{T\leftarrow t} \circ J^W_{t\leftarrow t_0}$ の関係に注意すれば, 過程 γ が ζ_0 を構成することは $\int_{t_0}^{T} J^W_{t_0\leftarrow t}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \gamma^{\alpha}(t) A_{\alpha}(S_W(t)\right) dt = \zeta_0$ と表現できることと同値であることがわかる.

Theorem 2.13 Γ を ζ_0 に対する smearing policy とする. このとき

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}_{t_0,S_0+\varepsilon\zeta_0}[\phi(S_W(T))] = \mathbb{E}_{t_0,S_0}[\nabla^*\Gamma\phi(S_W(T))]$$

が成り立つ.

Proof. 以下の計算より示される.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}_{t_0,S_0+\varepsilon\zeta_0}[\phi(S_W(T))] &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}[\phi(S_W(T, S_0+\varepsilon\zeta_0))] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial S^i}{\partial x^j}(T, S_0)\zeta_0^j\right] \\
&= \mathbb{E}[\langle \partial\phi, J^W_{T\leftarrow t_0}(\zeta_0)\rangle] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\langle \partial\phi(S(T)), \int_{t_0}^{T} J^W_{T\leftarrow t}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma^{\alpha}(t)A_{\alpha}(S_W(t))\right)dt\right\rangle\right] \\
&= \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}[\langle \partial_j\phi(S(T)), \langle \nabla S^j(T), \Gamma\rangle_H\rangle] \\
&= \mathbb{E}[\langle \nabla\phi(S(T)), \Gamma\rangle_H] \\
&= \mathbb{E}[\phi(S(T))\nabla^*\Gamma].
\end{aligned}$$

□

Corollary 2.14 Γ を ζ_0 に対する適合 smearing policy とすれば

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}_{t_0,S_0+\varepsilon\zeta_0}[\phi(S_W(T))] = \mathbb{E}_{t_0,S_0}[\phi(S_W(T))\Omega^{\zeta_0}_{T\leftarrow t_0}(W)]$$

が成り立つ. ただし, $\Omega^{\zeta_0}_{T\leftarrow t_0}(W) := \int_{t_0}^{T}\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma^{\alpha}(t)dW^{\alpha}(t)$ とする.

$\beta_W^\alpha(t)$ を以下で定める.

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \beta_W^\alpha(t) A_\alpha(S_W(t)) = J_{t\leftarrow t_0}^W(\zeta_0).$$

また $\int_{t_0}^T g_W(t)dt = 1$ となる任意の可予測なスカラー値関数 $g_W(t)$ を選ぶ. この $g_W(t)$ を smearing gauge といい, $\gamma = g\beta$ を適合 trading policy と呼ぶ.

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^T J_{T\leftarrow t}^W \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \gamma^\alpha(t) A_\alpha(S(t)) \right) dt &= \int_{t_0}^T J_{T\leftarrow t}^W g(t) J_{t\leftarrow t_0}^W(\zeta_0) dt \\
&= J_{T\leftarrow t_0}^W(\zeta_0) \int_{t_0}^T g(t)dt \\
&= J_{T\leftarrow t_0}^W(\zeta_0)
\end{aligned}$$

であることより, (2.12) を満たすので $\gamma = g\beta$ としたときの $\Gamma(\cdot) = \int_0^\cdot \gamma(s)ds$ は smearing policy であると言える.

Example 2.15 (経路ごとの weight の例) まず 1 変量のブラックショールズモデルの Delta [1] の weight について考える. 初期時刻を $t_0 = 0$ とし, σ を定数として

$$dS_W(t) = \sigma S_W(t) dW(t) \tag{2.13}$$

とする. ヨーロピアンオプションのペイオフ $\phi(S_W(T))$ に対して, Delta は

$$\Delta(x, T) = \frac{d}{dx} \mathbb{E}_x[\phi(S_W(T))]$$

で与える. (2.13) の解は, $S_W(t) = S_W(0) \exp(\sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2} t)$ である.

$$\begin{aligned}
J_{t\leftarrow 0}^W(\zeta_0) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} U_{t\leftarrow 0}^W(S_0 + \varepsilon\zeta_0) \\
&= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} (S_0 + \varepsilon\zeta_0) \exp\left(\sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2} t \right) \\
&= \zeta_0 \exp\left(\sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2} t \right)
\end{aligned}$$

より

$$J_{t\leftarrow 0}^W = \frac{S_W(t)}{S_W(0)}$$

となる. また $J_{0\leftarrow t}^W = (J_{t\leftarrow 0}^W)^{-1} = \frac{S_W(0)}{S_W(t)}$ である. $\beta_W(\sigma S_W(t)) = J_{t\leftarrow 0}^W$ より $x = S_W(0)$ とすると

$$\beta_W(t) = \frac{1}{\sigma x}$$

となる. smearing gauge $g(t) = \frac{1}{T}$ によって Delta の構成をする. trading policy は $\gamma(t) = \frac{1}{T\sigma x}$ となり smearing policy は $\Gamma(t) = \frac{t}{T\sigma x}$ となる. Corollary 2.14 において $\zeta_0 = 1$ とすれば

$$\begin{aligned}
\Delta(x, T) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}_{t_0, x+\varepsilon}[\Phi(W)] \\
&= \mathbb{E}_{t_0, x}[\Phi(W)\Omega_{T\leftarrow 0}(W)], \quad \Phi(W) := \phi(S_W(T))
\end{aligned}$$

[1] 原資産の価格変動に対する, オプション価格の変動率

となる．Z は可予測より，divergence は伊藤積分で構成される．つまり，

$$\nabla^* Z := \Omega_{T\leftarrow 0}(W) = \frac{1}{\sigma T x}\int_0^T dW = \frac{W(T)}{\sigma T x}.$$

もし $\sigma = 1$ ならば

$$\Delta_\phi(x,T) = \mathbb{E}_x\left[\phi(S_W(T)) \times \frac{W(T)}{xT}\right] \tag{2.14}$$

となる．

次に Vega [2] の Weight について考える．(2.13) より，σ を $\sigma+\varepsilon$ として，S_{W^ε} と表記する．

$$dS_{W^\varepsilon}(t) = \sigma S_{W^\varepsilon}(t)dW(t) + \varepsilon S_{W^\varepsilon}dW(t). \tag{2.15}$$

$\Psi_W = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} S_{W^\varepsilon}$ とする．(2.15) の微分によって，Ψ_W は以下の線形な確率微分方程式を満たす．

$$d\Psi_W = \sigma\Psi_W dW + S_W(t)dW, \quad \Psi_W(0) = 0. \tag{2.16}$$

Lagurange 未定数法によって非同次線形等式を解ける．

$$\Psi_W(t) = J^W_{t\leftarrow 0}(u(t)) = \frac{S_W(t)}{S_W(0)}u(t)$$

と書くと伊藤の公式によって，

$$\begin{aligned} d\Psi_W(t) &= d\left(\frac{S_W(t)}{S_W(0)}\right)u(t) + \frac{S_W(t)}{S_W(0)}du(t) + d\left(\frac{S_W(t)}{S_W(0)}\right)du(t) \\ &= \sigma\frac{S_W(t)}{S_W(0)}u(t)dW(t) + \frac{S_W(t)}{S_W(0)}(du(t) + \sigma dW(t)du(t)). \end{aligned}$$

(2.16) と比較すると $du(t)+\sigma dW(t)du(t) = S_W(0)dW(t)$．さらに dW を掛けることで $x = S_W(0)$ として，

$$u(T) = x(W(T) - \sigma T), \quad \Psi_W(T) = S_W(T)(W(T) - \sigma T).$$

それゆえに，C^1-級関数である ϕ に対してペイオフ $\phi(S_W(T))$，満期 T のヨーロピアンオプションの Vega は

$$V_\phi(x,T) := \mathbb{E}_x[\langle d\phi(S_W(T)), \Psi_W(T)\rangle]$$

となる．適合ベクトル場を $Y(t) = \frac{S_W(t)}{T}$ とすると，∇ での微分の立場で

$$\int_0^T J^W_{T\leftarrow t}(Y(t))dt = S_W(T)\frac{d}{dx}$$

と表現できる．さらに $f(W) = W(T) - \sigma T$ とすると

$$\begin{aligned} &V_\phi(x,T) = \mathbb{E}_x[D_{fY}\Phi(W)], \quad \Phi(W) := \phi(S_W(T)), \\ &S_W(T)(W(T) - \sigma T) = xJ^W_{T\leftarrow 0}(f). \end{aligned}$$

適合ベクトル場 xZ を考えると

$$V_\phi(x,T) = \mathbb{E}[D_{xfZ}\Phi] = \mathbb{E}[\Phi\nabla^*(xfZ)] = \mathbb{E}[(xf\nabla^* Z - D_{xZ}f)\Phi].$$

[2]現在のプレミアムから将来の変動率を予測したボラティリティの変動に対する，オプション価格の感応度

Theorem 1.28 より

$$\dot{\widehat{\nabla W(T)}}(t) = \nabla \dot{\widehat{\int_0^T dW(s)}}(t) = 1$$

となり

$$D_{xfZ}(W(T)) = xD_{fZ}(W(T) = x\int_0^T f\frac{1}{\sigma Tx}\dot{\widehat{\nabla W(T)}}(t)dt = \frac{f}{\sigma T}\int_0^T dt = \frac{f}{\sigma}$$

となる．$\nabla^* Z$ は (2.14) で構成されていたので

$$\begin{aligned}
\nabla^*(fxZ) &= xf\nabla^* Z - D_{xZ}f \\
&= xf\frac{W(T)}{\sigma Tx} - x\int_0^T Z\nabla f dt \\
&= \frac{W(T)}{\sigma T}(W(T) - \sigma T) - x\frac{1}{\sigma Tx}\int_0^T dt \\
&= \frac{W(T)^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} - W(T).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$V_\phi(x,T) = \frac{1}{T\sigma}\mathbb{E}_x[\phi(S_W(T))(W(T)^2 - T - \sigma TW(T))]$$

になる．

Example 2.16 (多変量での weight)

$$dS_W^\alpha(t) = \sigma_\alpha S_W^\alpha(t)dW^\alpha(t)$$

として考える．$\zeta_0 = e_\alpha$ とおく．ただし

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

とする．

$$\beta(t)\sigma S(t) = \begin{pmatrix} \frac{S^1(t)}{x_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{S^n(t)}{x_n} \end{pmatrix} e_\alpha, \quad e_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\alpha$$

である．ゆえに

$$\beta^j(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_\alpha x_\alpha} & (j = \alpha) \\ 0 & (j \neq \alpha) \end{cases}$$

となる．$g(T) = \frac{1}{T}$ とすれば $\gamma(t) = \frac{1}{Tx_\alpha\sigma_\alpha}e_\alpha$ となり $\Gamma(t) = \frac{t}{Tx_\alpha\sigma_\alpha}e_\alpha$ となる．ゆえに Delta は

$$\Omega_{T\leftarrow 0}^{\zeta_0}(W) = \int_0^T \langle\gamma(t), dW(t)\rangle = \frac{1}{Tx_\alpha\sigma_\alpha}W^\alpha(T)$$

より

$$\begin{aligned}\Delta^{\zeta_0}(x,T) &= \mathbb{E}_{0,x}[\phi(S(T))\Omega^{\zeta_0}_{T\leftarrow 0}(W)]\\ &= \mathbb{E}_{0,x}\left[\phi(S(T))\frac{W^{\alpha}(T)}{Tx_{\alpha}\sigma_{\alpha}}\right]\end{aligned}$$

となる.

次にヨーロピアンバリアオプション (2.17) の経路ごとの weight の構成を行う. $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな開部分領域を D, 満期を T, D から $S_W(\cdot)$ が脱出する初期時刻 (バリア価格 A に到達する時刻) を $\tau = \inf\{t|S_W(t) = A\}$ としておく.

Wiener 空間 $\mathcal{W}$ 上の関数を

$$\Psi(W) := \phi(S_W(T))\mathcal{I}_{\{T<\tau\}}(W) \tag{2.17}$$

として D 上有界, $S_W(t_0) \in D$, $t_0 < T$ としておく. また

$$\Theta = \left\{\theta : \text{可予測},\ s > \tau \text{ ならば } \theta(s) = 0,\ s < \tau \text{ ならば } \int_{t_0}^{T}\theta(s)ds = 1\right\}$$

とおく.

Theorem 2.17 Delta は伊藤積分で表現される. 任意の $\theta \in \Theta$ に対して

$$\Delta = \mathbb{E}[\Psi\mathcal{I}_{\{T<\tau\}}H^{\theta}_{\zeta}],\quad H^{\theta}_{\zeta} := \sum_{\alpha=1}^{n}\int_{t_0}^{T}\beta^{\alpha}(s)\theta(s)dW^{\alpha}(s). \tag{2.18}$$

Proof. $t \geq t_0$ に対して $(P_t\phi)(S_0) := \mathbb{E}[\phi(S(t))\mathcal{I}_{\{t<T\}}]$ を考える. すると $(P_{T+t_0-t}\phi)(S(t))$ は $t_0 \leq t \leq \min(T,\tau)$ において局所マルチンゲールとなる. このことより

$$N(t) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(P_{T-t_0+t}\phi)(S(t,S_0+\varepsilon\zeta_0)) = d(P_{T+t_0-t})_{S(t)}J^{W}_{t\leftarrow t_0}(\zeta_0)$$

もまた局所マルチンゲールである.

$h(t) = 1 - \int_{t_0}^{t}\theta(r)dr$ と定義する. ただし $\theta(r) \in \Theta$ $(t_0 \leq t \leq T)$ とする. 伊藤積分の利用により

$$N(t)h(t) - N(t_0)h(t_0) - \int_{t_0}^{t}N(r)dh(r) = \int_{t_0}^{t}h(r)dN(r)$$

となる. よって

$$d(P_{T+t_0-t}\phi)_{S(t)}\zeta(t)h(t) - \int_{t_0}^{t}d(P_{T+t_0-r}\phi)_{S(r)}\zeta(r)dh(r) = N(t)h(t) - \int_{t_0}^{t}N(r)dh(r),\quad t_0 \leq t \leq T$$

も局所マルチンゲールである.

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t}d(P_{T+t_0-t}\phi)_{S(t)}\zeta(r)\theta(r)dr - (P_{T+t_0-t}\phi)(S(t))\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\theta(r)\beta^{\alpha}(r)dW^{\alpha}(r)$$

について考える. $P_t\phi = u(t,x)$ とすれば $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u$ である. $P_{T+t_0-t}\phi(S(t)) = u(T+t_0-t,S_t)$ とすれば

$$d(P_{T+t_0-t}\phi(S(t))) = -\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x^i}A^i_{\alpha}dW^{\alpha} + \mathcal{L}udt = \frac{\partial u}{\partial x^i}A^i_{\alpha}dW^{\alpha}$$

となることより伊藤微分を d^I と表記すれば

$$d^I(P_{T+t_0-t}\phi)(S(t)) = d(P_{T+t_0-t}\phi)_{S(t)}A_\alpha dW^\alpha$$

である.

$$\begin{aligned}(P_{T+t_0-t}\phi)(S(t))\int_{t_0}^t \theta(r)\beta^\alpha(r)dW^\alpha &= (\text{局所マルチンゲールの項}) + \int_{t_0}^t d(P_{T+t_0-t}\phi)(S(u))A_\alpha(S(u))\theta(u)\beta^\alpha du \\ &= (\text{局所マルチンゲールの項}) - \int_{t_0}^t d(P_{T+t_0-t}\phi)(S(u))A_\alpha(S(u))\beta^\alpha(u)dh(u).\end{aligned}$$

よって

$$\int_{t_0}^t d(P_{T+t_0-t}\phi)_{S(r)}\zeta(r)\theta(r)dr - (P_{T+t_0-t}\phi)(S(t))\sum_{\alpha=1}^n\int_{t_0}^t \theta(r)\beta^\alpha(r)dW^\alpha(r)$$

は局所マルチンゲールとなる.

マルコフ性より $(P_{T+t_0-t}\phi)(S(t)) = \mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\phi(S(T))\mathcal{I}_{\{T<\tau\}}]$ を使うと

$$M(t) := d(P_{T+t_0-t}\phi)_{S(t)}\zeta(t)h(t) + \mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}[\phi(S(t))\mathcal{I}_{\{T<\tau\}}]\sum_{\alpha=1}^n\int_{t_0}^t \theta(r)\beta^\alpha(r)dW^\alpha(r)$$

は $t_0 \le t \le T' = \min(T,\tau)$ で局所マルチンゲールとなる. ゆえに $\mathbb{E}[M(t_0)] = \mathbb{E}[M(T')]$ を使うと

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M(t_0)] &= d(P_T\phi)_{S(t_0)}\zeta(t_0) \\ \mathbb{E}[M(T')] &= d(P_{T+t_0-T'}\phi)_{S(T')}\zeta(T')h(T') + \mathbb{E}^{\mathcal{N}_{T'}}[\phi(S(T'))\mathcal{I}_{\{T<\tau\}}]\sum_{\alpha=1}^n \theta(r)\beta^\alpha(r)dW^\alpha(r)\end{aligned}$$

であることより $T' = \tau$ のときは $h(t) = 1 - \int_{t_0}^\tau \theta(s)ds$ は $\theta(s)$ が可予測なので $\int_{t_0}^{T\wedge\tau}\theta(s)ds = 1$ と表記でき, $T' = T$ のときは $h(T) = 1 - \int_{t_0}^T \theta(s)ds = 0$ ということより $\Delta = \mathbb{E}[\Psi H_\zeta^\theta]$ となる. □

次に $\theta \in \Theta$ の構成について考える. $m \in D$ から ∂D までのユークリッド距離を $d(m)$ とすれば

$$\mathcal{J}(W) = \int_0^\tau d^{-2}(S_W(r))dr = \infty, \quad a.s.$$

これは $S_W(t) = S(0)\exp(aW(t) + bt)$ より,

$$\begin{aligned}S_W(\tau) - S_W(t) &= S(0)\exp[aW(\tau) + b\tau] - S(0)\exp[aW(t) + bt] \\ &= S(0)\{a(W(\tau) - W(t)) + R(\tau, t)\}.\end{aligned}$$

ただし, $|R(\tau,t)|^p \le o(|W(\tau) - W(t)| + |\tau - t|)$ が成り立つ.

$$(S_W(\tau) - S_W(t))^{-2} \ge S(0)^{-2}a^{-2}(W(\tau) - W(t))^2 + o(|W(\tau) - W(t)| + |\tau - t|)$$

であるから

$$\int_0^T (S_W(\tau) - S_W(t))^{-2}dt \ge \int_{0+}\frac{1}{W(s)^2}ds = \infty$$

よりわかる. τ_1 を $\int_0^{\tau_1} d^{-2}(S_W(r)dr) = 1$ と定義すると, a.s. に $\tau_1 < \tau$ であり,

$$\theta(r) = d^{-2}(S_W(r))\mathcal{I}_{[0,\tau_1]}(r)$$

となる.

f は ∂D 上でディリクレ境界条件を満たすとする. f の微分 df の接線方向のベクトル成分を $(df)^\rho$ と表記し, ∂D 上で 0 とする. D 上のペイオフ関数 ϕ に対し,

$$\partial_t \phi_t + \Delta_1 \phi_t = 0, \quad \phi_T = \phi$$

となる. 境界条件は $\phi_t | \partial D = 0$ で ϕ_t を与える. $w_t := d\phi_t$ とすると

$$\partial_t w_t + \mathcal{L} w_t = 0, \quad w_T = d\phi,\ (w_t)^\rho = 0$$

となる. このとき, Ocone-Karazas formula は

$$\phi - \mathbb{E}_{t_0, S_0}[\phi] = \int_{t_0}^{T} w_t^\alpha dW(t), \quad w_t^\alpha = \langle w_t, A_\alpha(S(t)) \rangle$$

で与えられる. これは, 半群性から従う. $d_\zeta \phi_t(S_T)$ のマルチンゲール性に注意すれば

$$\begin{aligned} J_{T \leftarrow t} w_T(S(T))|_{\mathcal{N}_T} &= J_{t \leftarrow 0}^{-1} J_{T \leftarrow 0} w_T(S(T))|_{\mathcal{N}_T} \\ &= J_{t \leftarrow 0}^{-1} d_\zeta \phi_t(S(T))|_{\mathcal{N}_T} \\ &= J_{t \leftarrow 0}^{-1} d_\zeta \phi_t(S(t)) \\ &= d\phi_t(S(t)) \end{aligned}$$

より Theorem2.12 と比較することで成立することがわかる.

3　ボラティリティ価格のフィードバック率

現実の市場では権利行使期間中に渡って原資産のボラティリティが一定となることは極めて稀であり TOB [3] が公表された場合など極めて特殊なケースに限られる．つまり, 現実の市場では原資産のボラティリティが日々変動するケースがほとんどである．この章ではボラティリティが変化するモデルを想定し, 資産価格のフィードバック効果 (過去の売買履歴の影響による効果) を考える．さらに 1 変量の場合を考え, 例をあげることにする．

3.1　ボラティリティ価格のフィードバック率

短期間 (数日) での 1 つの資産価格を考える．$S_W(t)$ を時刻 t でのリスクのある資産価格とし, さらに割り引いた値としておく．

$$dS_W(t) = \sigma(S_W(t))dW(t) - \mu(S_W(t))dt$$

ただし μ, σ は価格のフィードバック効果を含んだ未知の滑らかな関数とする．ここで $\zeta(t)$ を以前と同様に $\zeta = \frac{d}{dS_0}S_W(t, S_0)$ とし, $z(t) = \frac{\zeta(t)}{\sigma(t)}$ とおく．ただし $\sigma(t) := \sigma(S_W(t))$ であり, $\sigma(t) > 0$ としておく．

Theorem 3.1 $z(t)$ は t に関して微分可能となる．つまり $s \le t$ ごとに

$$z(t) = \exp\left(\int_s^t \lambda(S_W(\tau))d\tau\right) z(s) \tag{3.1}$$

$$\lambda = -\left(\frac{1}{2}\sigma\sigma'' + \mu' - \mu\frac{\sigma'}{\sigma}\right) \tag{3.2}$$

と表示できる．ただし $\sigma(t) \neq 0$ としておく．$\lambda(t)$ をフィードバック率と言う．

Proof. 伊藤積分の利用によって, $dz = \zeta d(\frac{1}{\sigma}) + \frac{1}{\sigma}d\zeta + d\zeta \cdot d(\frac{1}{\sigma})$ が成り立つ．それぞれの項の計算を行う．

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sigma' dS_W(t) + \frac{1}{2}\sigma'' dS_W(t)dS_W(t) \\ &= \sigma'(\sigma dW - \mu dt) + \frac{1}{2}\sigma''\sigma^2 dt. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= -\frac{1}{\sigma^2}d\sigma + \frac{1}{2}\frac{2}{\sigma^2}d\sigma d\sigma \\ &= -\frac{1}{\sigma^2}\{\sigma^2(\sigma dW - \mu dt) + \frac{1}{2}\sigma''\sigma^2 dt\} + \frac{1}{\sigma^3}(\sigma')^2\sigma^2 dt \\ &= -\frac{\sigma'}{\sigma}dW - \frac{1}{2}\sigma'' dt + \frac{(\sigma')^2}{\sigma}dt + \frac{\sigma'}{\sigma^2}\mu dt. \\ d\zeta \cdot d\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= -\frac{(\sigma')^2}{\sigma}\zeta dt = -z(\sigma')^2 dt. \\ \zeta d\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= \sigma z\left(-\frac{\sigma'}{\sigma}dW - \frac{1}{2}\sigma'' dt + \frac{(\sigma')^2}{\sigma}dt + \frac{\sigma'}{\sigma^2}\mu dt\right). \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} dz &= \left\{(\sigma' - \sigma')dW + \left(-\frac{1}{2}\sigma''\sigma + (\sigma')^2 - (\sigma')^2 - \mu' + \mu\frac{\sigma'}{\sigma}\right)dt\right\} \\ &= z\lambda dt \end{aligned}$$

[3] TOB とは株式公開買付のことである．不特定かつ多数の人に対して, 公告により会社の経営権の取得等を目的として, 株券等の買付けの申込み又は売付けの申込みの勧誘をおこない, 有価証券市場外で株券等の買付けをおこなうことである．

となる．よって

$$z(t) = \exp\left(\int_s^t \lambda(S_W(\tau))d\tau\right) z(s)$$

となる． □

Corollary 3.2 $\mu = 0, \quad \sigma > \varepsilon, \quad \sigma'' > \varepsilon$ と仮定する．このとき $z(t)$ は時間に関して指数減衰する．

Proof. Theorem 3.1 より

$$z(t) = z(0)\exp\left(\int_0^t \left(-\frac{1}{2}\sigma\sigma''\right)(S(u))du\right)$$

である．これより

$$|z(t)| \leq |z(0)|\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2}t)$$

となり指数減衰する． □

次に対数座標上でのボラティリティ価格のフィードバック率の構成を行う．まず λ の具体的な表示を考えていくために変数変換を行う．$x_W(t) = \log(S_W(t))$ として $a(x) = \exp(-x)\sigma(\exp(x))$ と書いておく．このとき伊藤積分を使うことで以下の確率微分方程式が成立することがわかる．

$$dx_W(t) = a(x_W(t))dW(t) - \frac{1}{2}a^2(x_W(t))dt. \tag{3.3}$$

Theorem 3.3 (3.3) に関して λ は以下で与える．

$$\lambda = -\frac{1}{2}(a'a + aa''). \tag{3.4}$$

さらに A, B, C を $dx \cdot dx := Adt, \quad dA \cdot dx := Bdt, \quad dB \cdot dx := Cdt$ と定義すれば λ は以下の形式となる．

$$\lambda = \frac{3}{8}\frac{B^2}{A^3} - \frac{1}{4}\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\frac{C}{A^2}.$$

Proof. (3.4) は $\mu = \frac{1}{2}a^2$ とすれば (3.2) より従う．

$$dx = adW - \frac{1}{2}a^2 dt$$

という伊藤微分をもつ．ゆえに $A = a^2$．A と x のクロスボラティリティ B は

$$Bdt = 2aa'dx \cdot dx = 2a^3a'dt$$

を満たす．それゆえに

$$aa' = \frac{B}{2a^2} = \frac{1}{2}\frac{B}{A}$$

となる．B と x のクロスボラティリティは

$$2d(aa') \cdot dx = 2(aa'' + (a')^2)a^2dt = Cdt.$$

また

$$2d(aa') \cdot dx = \frac{1}{A^2}(A(dB \cdot dx) - B(dA \cdot dx)) = \frac{1}{A^2}(AC - B^2)dt$$

より $2aa'' = \frac{C}{A} - \frac{3}{2}\frac{B^2}{A^3}$ であるがより示される. $\square$

Theorem 3.3 よりクロスボラティリティの項でフィードバック率が表現できることがわかる. フィードバック率の経済学的評価に関するかぎりでは, クロスボラティリティはフィードバック効果の経済的伝播のスピードに関する不自由がある. $\mu = 0$ として考えてみる.

$dp = \sigma(t, W)dW + b(t, W)dt$ に対して $\mathrm{Vol}(p) \equiv \sigma(t)^2$ とおく.

Proposition 3.4

$$D = \mathrm{Vol}(\log A), \quad E = \mathrm{Vol}(\log D)$$

と仮定すると,

$$\lambda = -\frac{1}{4}\eta\sqrt{D}(\sqrt{A} + \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{E})$$

となる. ただし η は $\mathrm{Cov}(x, A) > 0$ のとき 1, それ以外では -1 とし, $\varepsilon^2 = 1$ とする.

Proof. $A = a^2$ であるので $\log A = 2\log a$. $dA = 2aa'dx$ より

$$\begin{aligned} d(\log A) &= \frac{1}{A}dA - \frac{1}{2}\frac{1}{A^2}dAdA \\ &= \frac{1}{a^2}2aa'(adW - \frac{1}{2}a^2dt) - \frac{1}{2}\frac{1}{a^4}4a^2(a')^2a^2dt \\ &= 2a'dW - aa'dt - 2(a')^2dt. \end{aligned}$$

ゆえに $\mathrm{Vol}(\log A) = (2a')^2 = 4(a')^2$ となる. また $\log D = 2\log 2a'$ なので同様に計算すれば

$$d(\log D) = \frac{2aa''}{a'}dW - \left(a'' + \frac{(aa'')^2}{2(a')^2}\right)dt$$

となる. ゆえに $\mathrm{Vol}(\log D) = (\frac{2aa''}{a'})^2 = 4(\frac{aa''}{a'})^2$ である. よって $a = \sqrt{A},\ a' = \frac{\eta}{2}\sqrt{D},\ aa'' = a'\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{E}$ とすれば示される. $\square$

3.2 市場のエルゴード性

価格過程を

$$dS_W(t) = \sigma(t, S_W(t))dW(t) - \mu(t, S_W(t))dt$$

で与える. ただし μ, σ は滑らかな関数とし, 生成作用素は

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2}{dS^2} - \mu\frac{d}{dS}$$

である.

市場の全ての状態に応じた任意の収益パターンを市場で取引されている商品でポートフォリオを組むことによって実現できる市場を完備な市場としておく.

Definition 3.5 $\{S_W(t)\}$ が不変確率測度 ρ を持つとき, 完備で elliptic な市場はエルゴード的と言う.

長い期間で考えると実際の経済市場ではエルゴード的な市場は存在しない．それゆえ短期間 (数日) としてエルゴードな市場を考える．ボラティリティの負のフィードバック率が市場のエルゴード性に対応していることを示す.

Proposition 3.6 $\mu = 0$ とする．$\lambda(t) < -\delta$ を満たす $\delta > 0$ が存在したとすれば $t \to \infty$ としたときに $z_W(t) \to 0$ となる．さらに

$$|z_W(t)| \leq \exp(-\delta(t - t_0))|z_W(t_0)| \quad \forall t > t_0$$

と評価できる．ただし

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp\left(\int_s^t \lambda(S_W(\tau))d\tau\right) z(s), \\ \lambda &= -\left(\frac{1}{2}\sigma\sigma'' + \mu' - \mu\frac{\sigma'}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

とする.

Proof. (3.1) により $s = t_0$ とすれば

$$\begin{aligned} |z(t)| &= \left|\exp(\int_{t_0}^t \lambda(S_W(\tau))d\tau)\right| \cdot |Z_W(t_0)| \\ &\leq \left|\exp(\int_{t_0}^t (-\delta)d\tau)\right| \cdot |Z_W(t_0)| \\ &= \exp(-\delta(t - t_0))|Z_W(t_0)| \end{aligned}$$

となる. □

Lemma 3.7 以下のような楕円作用素 $\mathcal{R}_\tau = \frac{1}{2}\alpha\frac{d}{dS^2} + \beta\frac{d}{dS}$ が存在する.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\tau}\int \pi_\tau(S_0, dS)\phi(S) = \int \pi_\tau(S_0, dS)(\mathcal{R}_\tau\phi)(S) \text{ かつ} \\ &0 < \alpha(S, \tau) < \exp(-2\delta\tau)|\sigma(S)|^2, \quad |\beta(\tau, s)| \leq \exp(-\delta\tau)\sigma(S). \end{aligned}$$

Proof. 熱方程式を満たすことより

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}\int_{\mathbb{R}} \pi_\tau(S_0, dS)\phi(S) &= \frac{1}{2}\sigma^2(S_0)\left(\frac{\partial}{\partial S_0}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \pi_\tau(S_0, dS)\phi(S) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2(S_0)\left(\frac{\partial}{\partial S_0}\right)^2 \mathbb{E}[\phi(S_W(T, S_0))] \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2(S_0)\mathbb{E}[\phi''(S_W(T, S_0))\zeta^2(\tau, S_0) + \phi'(S_W(\tau, S_0))\zeta'(\tau, S_0)] \end{aligned} \tag{3.5}$$

となる.

$$z(\tau, S_0) = \exp\left(\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right) z(0, S_0) = \frac{1}{\sigma(S_0)}\exp\left(\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi''(S_W(\tau, S_0))\zeta^2(\tau, S_0)] &= \mathbb{E}[\phi''(S_W(\tau, S_0))\sigma^2(S(\tau, S_0))z^2(\tau, S_0)] \\ &= \mathbb{E}\left[\phi''(S_W(\tau, S_0))\sigma^2(S(\tau, S_0))\frac{1}{\sigma^2(S_0)} \cdot \exp\left(2\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi''(S)\frac{\sigma^2(S)}{\sigma^2(S_0)}\mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right)\middle| S(\tau, S_0) = S\right]. \end{aligned}$$

よって

$$\alpha(\tau, S) = \sigma^2(S)\mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right)\middle| S(\tau, S_0) = S\right]$$

とおけば

$$\sigma^2(S_0)\mathbb{E}[\phi''(S_W(\tau, S_0))\zeta^2(\tau, S_0)] = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau, S)\phi''(S)\pi_\tau(S_0, dS)$$

となる．さらに $0 < \alpha(\tau, S) < \exp(-2\delta\tau)\sigma^2(S)$, $\zeta(\tau, S_0) = \frac{\sigma(S(\tau,S_0))}{\sigma(S_0)} \exp\left(\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right)$ であるから

$$\begin{aligned}
&\zeta'(\tau, S_0)\\
&= \zeta(\tau, S_0)\left\{-\frac{\sigma'(S_0)}{\sigma(S_0)} + \int_0^\tau \lambda'(S(u, S_0))\zeta(u, S_0)du + \frac{\sigma'(S(\tau, S_0))}{\sigma(S_0)}\exp\left(\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right)\right\}\\
&= \frac{\sigma(S(\tau, S_0))z(\tau, S_0)}{\sigma^2(S_0)}\Bigg\{ -\sigma'(S_0) + \int_0^\tau \lambda'(S(u, S_0))\sigma(S(u, S_0))z(u, S_0)du\\
&\qquad +\sigma'(S(\tau, S_0))\exp\left(\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right)\Bigg\}
\end{aligned}$$

となる．これより

$$\begin{aligned}
&\beta(\tau, S)\\
&= \frac{1}{2}\sigma(S)\mathbb{E}\Bigg[z(\tau, S_0)\Bigg\{ -\sigma'(S_0) + \int_0^\tau \lambda'(S(u, S_0))\sigma(S(u, S_0))z(u, S_0)du\\
&\qquad +\sigma'(S)\exp\left(\int_0^\tau \lambda(S(u, S_0))du\right)\Bigg\}\Bigg| S(\tau, S_0) = S\Bigg]
\end{aligned}$$

とおけば先と同様にして

$$\frac{1}{2}\sigma^2(S_0)\mathbb{E}[\phi'(S(\tau, S_0))\zeta'(\tau, S_0)] = \int_{\mathbb{R}} \beta(\tau, S)\phi'(S)\pi_\tau(S_0, dS)$$

となる．さらに

$$|\beta(\tau, S)| \leq \exp(-\delta\tau)|\sigma(S)|$$

が成り立つ.

以上を (3.5) に代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{\mathbb{R}} \pi_\tau(S_0, dS)\phi(S) = \int_{\mathbb{R}} \pi_\tau(S_0, dS)(\mathcal{R}_\tau\phi)(S)$$

が成り立ち, さらに $\mathcal{R}_\tau$ は求める性質を満たしている． □

Theorem 3.8 $\mu = 0$ とする．ある $\delta > 0$ に対し $\lambda(t) < -\delta$ $(\forall t)$ が成立し, σ は時間に依存せず有界とすれば市場はエルゴード的であり, 不変測度は一意的である.

Proof.

$$T_\tau\phi(S_0) = \int \pi_\tau(S_0, dS)\phi(S), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

とする.

$$T_\tau\phi(S_0) = \phi(S_0) + \int_0^\tau d\xi \frac{d}{d\xi}\int_{\mathcal{R}} \pi_\xi(S_0, dS)\phi(S)$$

と表される. lemma 3.7 より

$$\left|\frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} \pi_\xi(S_0, dS)\phi(S)\right| \le \mathrm{Const} \times \exp(-\delta\xi)$$

となり

$$T_\infty\phi(S_0) = \lim_{\tau\to\infty} T_\tau\phi(S_0)$$

が存在する.

1. $\phi \ge 0$ ならば $T_\tau\phi(S_0) \ge 0$,
2. ϕ, ψ, a, b に対し $T_\tau(a\phi + b\psi) = aT_\tau\phi + bT_\tau\psi$

が成り立つので, $\tau \to \infty$ として同様の性質が $T_\infty\phi(S_0)$ に対して成立する. よって測度 ρ_{S_0} が存在し

$$T_\infty\phi(S_0) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{S_0}(du)\phi(u), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

となる. $T_t 1(S_0) = 1$ なので $T_\infty 1(S_0) = 1$ となり, 特に $\rho_{S_0}(\mathbb{R}) = 1$ である.

$$T_t(T_s\phi)(S_0) = T_{t+s}\phi(S_0)$$

であるから $t \to \infty$ として

$$T_\infty(T_s\phi)(S_0) = T_\infty\phi(S_0).$$

つまり

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_{S_0}(du)\int_{\mathbb{R}} \pi_s(u, dS)\phi(S) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{S_0}(du)\phi(u).$$

よって ρ_{S_0} は不変測度となる.
次に一意性について考える.

$$\rho_{S_0} = \rho_{S_1}$$

を示したい.

$$\begin{aligned} T_t\phi(S_1) - T_t\phi(S_0) &= \int_{S_0}^{S_1} \frac{d}{du}\mathbb{E}[\phi(S(t,u))]du \\ &= \int_{S_0}^{S_1} \mathbb{E}[\phi'(S(t,u))z(t)\sigma(S(t,u))]du. \end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $|\sigma(x)| \le C(1+|x|)^k$ に注意すると $\sup|\phi'(x)(1+|x|)^k| < \exists M$ なので $t \to \infty$ とすると (3.6) は 0 に近づき $\rho_{S_0} = \rho_{S_1}$ となる.

4　確率金利モデル

価格変動モデルから金利変動モデルへ話を進める．ブラックショールズモデルのときは原証券は株と安全債券しかなかったものを, 確率金利モデルだと満期が異なる債権を全て同時に考えることになる．

4.1　マリアバン共分散とヘルマンダー条件

N を十分大きな数としておく．また $r \in \mathbb{R}^N$ を r^ξ $(\xi = 1, \cdots, N)$ によって表現する．

Definition 4.1 (作用素) $\mathbb{R}^N$ に 2 つの作用素を定義する．
時刻 t_0 に引き戻した作用素を

$$Q_{\overleftarrow{W}}(\theta) = \int_{t_0}^{T} \sum_{\alpha=1}^{n} J^W_{t_0 \leftarrow t} A_\alpha(r_W(t))\theta^\alpha(t)dt, \quad \theta \in L^2([t_0, T]; \mathbb{R}^n), \tag{4.1}$$

時刻 T で考えた作用素を

$$Q_{\overrightarrow{W}}(\theta) = \int_{t_0}^{T} \sum_{\alpha=1}^{n} J^W_{T \leftarrow t} A_\alpha(r_W(t))\theta^\alpha(t)dt, \quad \theta \in L^2([t_0, T]; \mathbb{R}^n) \tag{4.2}$$

と定義する．

共役な作用素 $(Q_{\overrightarrow{W}})^*$ は well-defined である．

Definition 4.2 (マリアバン共分散) 時刻 t_0 , T でのマリアバン共分散をそれぞれ $\sigma_{\overrightarrow{W}} := Q_{\overrightarrow{W}} \circ (Q_{\overrightarrow{W}})^*$, $\sigma_{\overleftarrow{W}} := Q_{\overleftarrow{W}} \circ (Q_{\overleftarrow{W}})^*$ と定義する．

$\mathbb{R}^N$ 上の基底を $\{e^\xi\}$ とすれば, 共分散は

$$(\sigma_{\overrightarrow{W}})^{\xi,\eta} = \langle e^\xi, Q_{\overrightarrow{W}}(Q_{\overrightarrow{W}}(e^\eta))\rangle \tag{4.3}$$

$$(\sigma_{\overleftarrow{W}})^{\xi,\eta} = \langle e^\xi, Q_{\overleftarrow{W}}(Q_{\overleftarrow{W}}(e^\eta))\rangle \tag{4.4}$$

と表現できる．これは以下の計算より明らかである．

$$\langle (Q_{\overrightarrow{W}}(e))^*, \theta\rangle_{L^2} = \langle e, Q_{\overrightarrow{W}}(\theta)\rangle = \int_0^T \sum_{\alpha=1}^{n} \langle e, J^W_{T\leftarrow t} A_\alpha(r)\rangle \theta^\alpha(t)dt$$

であるから第 α 成分だけ考えれば

$$(Q_{\overrightarrow{W}}(e))^*_\alpha(t) = \langle e, J^W_{T\leftarrow t} A_\alpha(r)\rangle \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

となることからわかる．
2 つの共分散に関していくつかの自明な関係式をあげておく．

1. $J^W_{T\leftarrow t_0} \circ \sigma_{\overleftarrow{W}} \circ (J^W_{T\leftarrow t_0})^* = \sigma_{\overrightarrow{W}}$.
2. $\forall \zeta \in \mathbb{R}^N$, $\theta_{\overrightarrow{W}} = ((Q_{\overrightarrow{W}})^* \circ (\sigma_{\overrightarrow{W}})^{-1})(\zeta)$ と定義したとき, $Q_{\overrightarrow{W}}(\theta_{\overrightarrow{W}}) = \zeta$ が成り立つ．さらに $\sigma_{\overrightarrow{W}}$ の最小固有値を $\lambda_{\overrightarrow{W}}$ とすれば $\|\theta_{\overrightarrow{W}}\|^2_{L^2} = ((\sigma_{\overrightarrow{W}})^{-1}\zeta, \zeta) \leq (\lambda_{\overrightarrow{W}})^{-1}\|\zeta\|^2$ が成り立つ．
3. $\forall \zeta \in \mathbb{R}^N$, $\theta_{\overleftarrow{W}} = ((Q_{\overleftarrow{W}})^* \circ (\sigma_{\overleftarrow{W}})^{-1})(\zeta)$ と定義したとき, $Q_{\overleftarrow{W}}(\theta_{\overleftarrow{W}}) = \zeta$ が成り立つ．さらに $\sigma_{\overrightarrow{W}}$ の最小固有値を $\lambda_{\overleftarrow{W}}$ とすれば $\|\theta_{\overleftarrow{W}}\|^2_{L^2} = ((\sigma_{\overleftarrow{W}})^{-1}\zeta, \zeta) \leq (\lambda_{\overleftarrow{W}})^{-1}\|\zeta\|^2$ が成り立つ．

Hilbert 空間の双対性を利用して 2 を示す. $\zeta' \in \mathbb{R}^N$ に関して

$$\begin{aligned}
(Q_{\vec{W}}(\theta_{\vec{W}})|\zeta') &= (\theta_{\vec{W}}|(Q_{\vec{W}})^*\zeta') \\
&= (((Q_{\vec{W}})^* \circ (\sigma)^{-1})(\zeta)|(Q_{\vec{W}})^*\zeta') \\
&= (\sigma^{-1}(\zeta)|Q_{\vec{W}} \circ (Q_{\vec{W}})^*\zeta') \\
&= (\sigma^{-1}(\zeta)|\sigma(\zeta')) \\
&= (\sigma^* \circ \sigma^{-1}(\zeta)|\zeta') \\
&= (\zeta|\zeta').
\end{aligned}$$

ゆえに任意の ζ' に関して $(Q_{\vec{W}}(\theta_{\vec{W}}) - \zeta|\zeta') = 0$ となる. つまり $Q_{\vec{W}}(\theta_{\vec{W}}) = \zeta$ が言える. また

$$\begin{aligned}
(\theta_{\vec{W}}|\theta_{\vec{W}})_{L^2} &= ((Q_{\vec{W}})^* \circ \sigma^{-1}(\zeta)|(Q_{\vec{W}})^* \circ \sigma^{-1}(\zeta)) \\
&= (\sigma^{-1}(\zeta)|Q_{\vec{W}} \circ (Q_{\vec{W}})^* \circ \sigma^{-1}(\zeta)) \\
&= (\sigma^{-1}(\zeta)|\zeta)
\end{aligned}$$

より示される.

Proposition 4.3 ベクトル場 A_α が $A_\alpha \in C^4$ かつ有界とすると $\sigma^{\rightarrow}, \sigma^{\leftarrow} \in \mathbb{D}^{1,\infty-}(\mathcal{W}^n)$ となる.

Proof. まず $Q^{\rightarrow} \in \mathbb{D}^{1,\infty-}(\mathcal{W}^n)$ を示す. θ に対して微分の構成をする.

$$\dot{\overbrace{(\nabla Q_{\vec{W}}(\theta))}}^{\alpha}(\tau) = \int_0^s dt \sum_{\alpha=1}^n [\dot{\overbrace{(\nabla J^W_{s\leftarrow t})}}^{\alpha}(\tau)(A_\alpha(r_W(t)))\theta^\alpha(t) + J^W_{s\leftarrow t}\dot{\overbrace{(\nabla A_\alpha(r_W(t))}}^{\alpha}(\tau))\theta^\alpha(t)].$$

2 項目について考えると

$$\dot{\overbrace{(\nabla A_\alpha(r_W(t))}}^{\alpha}(\tau) = \mathcal{I}_{\{\tau<t\}}\mathbf{A}_\alpha J^W_{T\leftarrow t}(A_\alpha)$$

より, A_α の有界性より評価できる. また 1 項目の構成は

$$d_t(J^W_{s\leftarrow t}) = \left(\sum_{\alpha=1}^n \mathbf{A}_\alpha(\zeta_W(t))dW^\alpha(t) + \mathbf{A}_0(\zeta_W(t))dt\right) J^W_{s\leftarrow t}$$

の微分を含んでいる. この微分は係数 $\mathbf{A}_\alpha$ の微分が A_α の 2 回微分により導かれることより明らかとなる.
ゆえに

$$\dot{\overbrace{(\nabla\sigma^{\xi,\eta})}}^{\alpha}(\tau) = \int_0^s dt \sum_{\alpha=1}^n (C_{\xi,\eta} + C_{\eta,\xi})$$

となる. ただし $C_{\xi,\eta} := (e^\xi|\dot{\overbrace{(\nabla(J^W_{s\leftarrow t}A_\alpha(r_W(t))))}}^{\alpha}(\tau))_{\mathbb{R}^N}(e^\eta|\dot{\overbrace{(\nabla(J^W_{s\leftarrow t}A_\alpha(r_W(t))))}}^{\alpha}(\tau))_{\mathbb{R}^N}$ である.
$\dot{\overbrace{(\nabla(J^W_{s\leftarrow t}A_\alpha(r_W(t))))}}^{\alpha}(\tau)$ は構成されていたことに注意すれば示される. □

2 つのベクトル場 A_1, A_2 を与える. Lie Bracket を $C^\xi := \sum_{\eta\in\{1,\cdots,N\}}(A_1^\eta\frac{\partial A_2}{\partial\xi^\eta} - A_2^\eta\frac{\partial A_1}{\partial\xi^\eta}), \quad \xi \in \{1,\cdots,N\}$ で与え, $[A_1, A_2]$ によって表記する. また n 個のベクトル場 $A_1,\cdots,A_n$ によって Lie Algebra $\mathcal{A}$ を構成する. $r \in \mathbb{R}^N$ として $\mathcal{A}(r) := \{\zeta \in \mathbb{R}^N|\zeta = Z(r),\ Z \in \mathcal{A}\}$ とおく.

Definition 4.4 (ヘルマンダー準楕円条件) ベクトル場 $A_1, \cdots, A_n$ が C^∞ かつ $\mathcal{A}(r) = \mathbb{R}^N$ $(\forall r \in \mathbb{R}^N)$ のとき, $A_1, \cdots, A_n$ は狭義のヘルマンダー準楕円条件を満たすという.

Lemma 4.5 [4] 任意の α に対して $A_\alpha \in C_b^\infty$ と仮定し, (4.4) の最小固有値を $\lambda(W)$ としたとき, $\mathbb{E}[\lambda(W)^{-p}] < \infty \quad \forall p < \infty$.

4.2 可予測な smearing による条件

この節では出発点に関する微分ができることを証明する.

非退化の条件のもとでは $\mathbb{E}[\frac{\partial \phi}{\partial x^\xi}(\Phi)] = \mathbb{E}[\phi(\Phi)\nabla^* Z_\xi]$ が成立していた. このとき一般的に $\mathbb{E}[\sum \frac{\partial \phi}{\partial x^\xi}(\Phi)\Psi^\xi] = \mathbb{E}[\phi(\Phi)\sum \nabla^*(\Psi^\xi Z_\xi)]$ も成立している. $\nabla^*(\Psi^\xi Z_\xi)$ の量を計算することで出発点だけの情報で求められることがわかる.

Theorem 4.6 ベクトル場 A_α が Definition 4.4 を満たし, $A_\alpha \in C_b^\infty$ ならば, $\forall p > 1,\ \forall r_0 \in \mathbb{R}^N,\ \forall \phi \in C_b^1, \forall \xi \in \{1, \cdots, N\}$ に対して次の条件が満たされる.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \phi}{\partial r^\xi}(r)\pi_s(r_0, dr) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(r) K_\xi(r)\pi_s(r_0, dr),\ \text{ただし} \int |K_\xi(r)|^p \pi_s(r_0, dr) < \infty. \tag{4.5}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} (\pi_s(r_0 + \varepsilon e^\xi, dr) - \pi_s(r_0, dr))\phi(r) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(r) H_\xi(r)\pi_s(r_0, dr),\ \text{ただし} \int |H_\xi(r)|^p \pi_s(r_0, dr) < \infty. \tag{4.6}$$

Proof. まず (4.6) から示す. 座標ベクトル場 $(e^\eta)_{\{1 \le \eta \le N\}}$ を考え, $\eta \in \{1, \cdots, N\}$ として $\mathcal{W}^n$ 上のベクトル場 Y_η を $Y_\eta := (Q_{\overleftarrow{W}})^*(e^\eta)$ と定義する. $\gamma_{\overleftarrow{W}} := (\sigma_{\overleftarrow{W}})^{-1}$ と表記して $\mathcal{W}^n$ 上のベクトル場 $Z_\xi := \sum_\eta (\gamma_{\overleftarrow{W}})^\eta_\xi Y_\eta$ を考えれば, $\nabla^* Z_\xi = \sum_\eta ((\gamma_{\overleftarrow{W}})^\eta_\xi \nabla^* Y_\eta - \nabla(\gamma_{\overleftarrow{W}})^\eta_\xi)$ より $\nabla^* Z$ は存在し, $\nabla^* Z \in L^p$ となる.

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} (\pi_s(r_0 + \varepsilon e^\xi, dr) - \pi_s(r_0, dr))\phi(r) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}[\phi(r(s, r_0 + \varepsilon e^\xi))] \\
&= \mathbb{E}[\langle e^\xi, d(\phi(r(s, \cdot)))\rangle] \\
&= \mathbb{E}[\langle e^\xi, J^W_{t_0 \leftarrow s} d\phi(r(s, r_0))\rangle].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$\nabla \phi(r(s, r_0)) = \sum_i d\phi_i(r(s, r_0))\nabla r^i(s, r_0)$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \phi(r(s, r_0)), \nabla r^j(s, r_0)\rangle_H &= \sum_i d\phi_i(r(s, r_0))\langle \nabla r^i(s, r_0), \nabla r^j(s, r_0)\rangle \\
&= \sum_i d\phi_i(r(s, r_0))(\sigma_{\overrightarrow{s}})^i_j \\
&= \sum_{i,\alpha,\beta} d\phi_i(r(s, r_0))(J^W_{t_0 \leftarrow s})^i_\alpha (\sigma_{\overleftarrow{s}})^\alpha_\beta (J^W_{t_0 \leftarrow s})^\beta_j
\end{aligned}$$

であるので $\langle \nabla \phi(r(s, r_0)), \sum_{\beta,j} (\gamma_W)^\alpha_\beta ((J^W_{t_0 \leftarrow s})^{-1})^\beta_j \nabla r^j(s, r_0)\rangle = (J^W_{t_0 \leftarrow s} d\phi)_\alpha$ である. ゆえに (4.7) は Z_ξ を 座標ベクトル場 $(\frac{\partial}{\partial \xi})$ の covering ベクトル場とすれば

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle \nabla \phi(r(s, r_0)), \sum_{\beta,j} (\gamma_W)^\xi_\beta ((J^W_{t_0 \leftarrow s})^{-1})^\beta_j \nabla r^j(s, r_0)\rangle] &= \mathbb{E}[\langle \nabla \phi(r(s, r_0)), Z_\xi\rangle] \\
&= \mathbb{E}[D_{Z_\xi}(\phi(r(s, r_0)))] \\
&= \mathbb{E}[\nabla^* Z_\xi \phi(r(s, r_0))]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

[4] 証明は [11] 参照

となる．σ-field を $\mathcal{E}_s : W \to r(s, r_0)$ で構成する．(4.8) の条件付期待値を考えると

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{E}^{\mathcal{E}_s}[\nabla^* Z_\xi]\phi(r)\pi_s(r_0, dr) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} (\pi_s(r_0 + \varepsilon e^\xi, dr) - \pi_s(r_0, dr))\phi(r)$$

より (4.6) は示される．

次に (4.5) について考える．共役な行列を $J^W_{0 \leftarrow s} =: \delta_W$ とする．$\mathbb{R}^N$ 上の座標ベクトル場 e^ξ に対して $\mathcal{W}^n$ 上のベクトル場 $U_\xi = \sum_\eta (\delta_W)^\eta_\xi Z_\eta$ を考えれば $\nabla^* U_\xi = \sum_\eta ((\delta_{\overleftarrow{W}})^\eta_\xi \nabla^* Z_\eta - \nabla(\delta_{\overleftarrow{W}})^\eta_\xi)$ となる．このとき

$$\mathbb{E}[\nabla^* U_\xi \phi(r_W(s))] = \mathbb{E}[\nabla(\phi(r_W(s)))] = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \phi}{\partial r^\xi}(r)\pi_s(r_0, dr).$$

後は同様にして示される． $\square$

参考文献

[1] Barrucci, E., Mallivin, P., Mancino, M. E., Renò, R., Thalmaier, A.: The pricevolatility feedback rate : an implementable mathematical indicator of marcket stability, Math. Finance **13**(2003), no. 1, 17-35.

[2] Fournié, E., Lasry, J.-M., Lebuchoux, J., Lion, P.-L, Touzi, N., Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo method in finance, Finance Stoch. **3**(1999), no. 4, 391-412.

[3] Fournié, E., Lasry, J.-M., Lebuchoux, J., Lion, P.-L., Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo method in finance. Ⅱ, Finance Stoch. **5**(2001), no. 2, 201-236.

[4] 藤田岳彦*,* ファイナンスの確率解析入門*,* 講談社*,* 2002.

[5] 舟木直久*,* 確率微分方程式*,* 岩波講座 現代数学の基礎 5 第 9 巻*,* 岩波書店*,* 1997.

[6] Hull, J.C., *Options, Futures, And Other Derivative,* 6th edn, Prentice Hall, 2006.

[7] Ikeda, N., Watanabe, S.: *Stochastic differential equations and diffusion processes,* 2nd edn, North-Holland Mathematical LIbrary, vol. 24, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.

[8] Kunita, H., *Stochastic flows and stochastic differential equations,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[9] 楠岡成雄*, Malliavin Calculus* とその応用*,* 数学*,* **41**(1989), 154-165.

[10] ________: *Malliavin Calculus* とその応用*,* 数学*,* **36**(1984), 97-109.

[11] Kusuoka, S., Stroock, D.: Applications of the Malliavin calculus Ⅱ, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **32**(1985), no. 1, 1-76.

[12] Malliavin, P., *Stochastic analysis,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 313, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[13] Malliavin, P., Thalmaier,A. : *Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance,* Springer Finance Series, 2006.

[14] Nualart, D., *The Malliavin calculus and related topics,* Probability and its Applications, Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] Samuelson, P.A., *Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance,* Translated and with Commentary by Mark Davis and Alison Etheridge, Princetion Uni Pr, 2006.

[16] 重川一郎, 確率解析, 岩波講座 現代数学の展開 3 第 9 巻, 岩波書店, 1998.

[17] Shreve, S.E., *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models,* Springer Finance, Springer-Verlag New York, LLC, 2004.