確率解析と幾何

— ユビキタス・ウィナー・インテグラル —

谷 口　説 男（九州大学大学院数理学研究院）*†

1.　はじめに

M をコンパクトなリーマン多様体とし，$\dim M = d$ とする．リーマン多様体 M に関する情報はすべて附随するラプラシアン $\triangle_M$ から引き出すことができるはずであるが，ラプラシアンは非有界作用素となっているので，その解析は容易ではない．ラプラシアンが生成する半群，すなわち $\triangle_M/2$ に附随する熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\triangle_M u \tag{1.1}$$

の初期値問題 $u(x,0) = f(x)$ $(f \in C^\infty(M))$ の解 $u(x,t) = P_t^M f(x)$ を与える熱半群 $\{P_t^M = \mathrm{e}^{\triangle_M/2}\}$ は，より扱いが容易である．熱方程式 (1.1) の基本解 $p^M(t,x,y)$ を用いて熱半群は

$$P_t^M f(x) = \int_M f(y) p^M(t,x,y)\lambda_M(dy)$$

(λ_M は正規化された体積要素) と表される．ここまでに確率論は何ら姿を現していないが，熱半群こそが確率論と幾何学をつなぐ架け橋となっている．実際，**リーマン多様体上のブラウン運動**と呼ばれる確率変数の族 $\{X(t,x)\,|\,t \geq 0, x \in M\}$ を用いて

$$P_t^M f(x) = \mathbb{E}[f(X(t,x))]$$

と表現することができる．もう少し詳しく説明すると，$\mathcal{W}^d$ を d 次元ウィナー空間，すなわち実数半直線 $[0,\infty)$ 上で定義された原点を出発する $\mathbb{R}^d$ 値連続関数の全体とするとき，上のブラウン運動は

$$X(t,x) : \mathcal{W}^d \ni w \mapsto X(t,x;w) \in M$$

なる写像であり，$\mathbb{E}[f(X(t,x))]$ は $\mathcal{W}^d$ 上のウィナー測度に関する $f(X(t,x))$ の期待値，すなわち $f(X(t,x))$ の**ウィナー・インテグラル**を表している．さらに最近の Malliavin 解析の進展により，

$$p^M(t,x,y) = \mathbb{E}[\delta_y(X(t,x))]$$

*Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (A)(1) 14204010

†予稿 12/15 版

なる表示も与えることが可能となった (δ_y は y に集中したディラック測度であり，その『$X(t,x)$ での値』の期待値に意味づけできた)．この意味でリーマン多様体上のブラウン運動はリーマン多様体のすべての情報を内包しているといえる．問題はどのようにブラウン運動の内包する情報を引き出してやるかである．

例えば Kac により提唱されたスペクトルの問題を思い出しそう ([25, 33, 32, 34] 参照)．$-\triangle_M/2$ は非負離散スペクトラム

$$\mu_0 = 0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \dots$$

と，固有関数からなる $L^2(\lambda_M)$ の直交基底 $\{e_n\}$ を持つ．M の Θ 関数はスペクトラル関数 $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda} 1$ のラプラス変換として定義される．

$$\Theta(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} N(d\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \mathrm{e}^{-\mu_n t}.$$

基本解 $p^M(t,x,y)$ は

$$p^M(t,x,y) = \sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-\mu_n t} e_n(x) e_n(y)$$

と分解される (収束は一様収束) ので，

$$\Theta(t) = \int_M p(t,x,x)\lambda_M(dx)$$

である．$p^M(t,x,y)$ の $t \searrow 0$ での挙動を知れば $N(\lambda)$ の $\lambda \to \infty$ での挙動が分かり，$t \to \infty$ での挙動からは λ_1 が分かる．さらに $p^M(t,x,x)$ の展開

$$p^M(t,x,x) \sim t^{-d/2}\{c_0(x) + c_1(x)t + \dots\}$$

から，Θ 関数の展開

$$\Theta(t) \sim t^{-d/2}\{C_0 + C_1 t + \dots\}$$

が得られ，これら $C_0, C_1, \dots$ は幾何学的な量となっている．たとえば

$$C_0 = \mathrm{Vol}(M)/(2\pi)^{d/2}.$$

このような熱核を用いる幾何学諸量の抽出は Kac[25]，McKean-Singer[32]，そして Patodi[34] を経て指数定理へと昇華されることとなる．この例は，熱核から幾何学的諸量を取り出すことを，ブラウン運動の解析 (確率解析) を経由して行えることを示唆している．

2. 多様体上の確率微分方程式

2.1. 大域的に

リーマン多様体上のブラウン運動を構成する方法として，ベクトル場から定まる拡散過程を構成する方法を用いることが多い．ここでは，M 上の C^∞ ベクトル場 $A_0, A_1, \dots, A_N$ から定まる拡散過程の構成について述べる．確率微分方程式に関

する知識が既にあるので，確率微分方程式にうったえる，すなわち伊藤解析を用いるのが簡便ではあるが，ここでは指数写像を用いる伊藤解析を経由しない方法について解説する．

C^∞ ベクトル場 A に附随する指数写像 $\exp[A] : M \to M$ を，微分方程式

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = A_{\varphi(t)}, \quad \varphi(0) = x$$

の解 $\exp[tA](x)$ により定める．ベクトル場 $A_0, A_1, \ldots, A_m$ が可換であれば，滑らかな関数 $f_0(t), \ldots, f_N(t)$ を用いて

$$\psi(t) = \exp\left[\sum_{j=0}^{N} f_j(t) A_j\right](x)$$

と定義される関数 ψ は常微分方程式

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = \sum_{j=0}^{N} f_j'(t)(A_j)_{\psi(t)}, \quad \psi(0) = x \tag{2.1}$$

の唯一解となる．これは Stieltjes 積分を用いて次のようにも表示される;

$$d\psi(t) = \sum_{j=0}^{N} (A_j)_{\psi(t)} df_j(t), \quad \psi(0) = x$$

ベクトル場 $A_0, A_1, \ldots, A_m$ が可換でない場合も，$T_{n,m} = m2^{-n}$ とし，$\psi_n(x)$ を帰納的に

$$\psi_n(0) = x, \quad \psi_n(t) = \exp\left[\sum_{j=0}^{N} \{f_j(t) - f_j(T_{n,m})\} A_j\right]\big(\psi_n(T_{n,m})\big)$$

と定義すれば，

$$\psi(t) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(t)$$

が方程式 (2.1) の唯一解を与える．このように，$\mathbb{R}^{N+1}$ に値をとる経路

$$[0, \infty) \ni t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_0(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

がベクトル場 $A_0, \ldots, A_N$ を通して多様体 M に巻き付けられる．

$\mathcal{W}^N$ を N 次元ウィナー空間とし，$w \in \mathcal{W}^N$ とする．上の方法は全く滑らかでない経路

$$[0, \infty) \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ w^1(t) \\ \vdots \\ w^N(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

に対しても適用できる;

$(t,x)\in[0,\infty)\times M$，$w\in\mathcal{W}^N$ に対し，$X_n(t,x;w)$ を帰納的に

$$
\begin{aligned}
&X_n(0,x;w)=x,\\
&X_n(t,x;w)=\exp\left[(t-T_{n,m})A_0+\sum_{\alpha=1}^{N}\{w^\alpha(t)-w^\alpha(T_{n,m})\}A_\alpha\right]\big(X_n(T_{n,m})\big)
\end{aligned}
$$

と定義する．このとき，零集合 $E\in\mathcal{B}(\mathcal{W}^N)$ が存在し，すべての $w\notin E$ に対し，$X_n(t,x;w)$ とそのすべての x 微分が (t,x) について広義一様に収束する．したがって

$$
X(t,x;w)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}X_n(t,x;w) & (w\notin E),\\ x & (w\in E),\end{cases}
$$

とおけば，$X(\cdot,\cdot;w)\in C^{0,\infty}([0,\infty)\times M)$ である．さらに

$$
\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}A_\alpha^2+A_0
$$

とおき，対応する熱半群を

$$
P_t^{\mathcal{L}}=\mathrm{e}^{t\mathcal{L}}
$$

とおく; $f\in C^\infty(M)$ に対し，$u(x,t)=P_t^{\mathcal{L}}f(x)$ は熱方程式

$$
\frac{\partial}{\partial t}u=\mathcal{L}u,\quad u(x,0)=f(x) \tag{2.2}
$$

の解である．$\mathbb{E}$ で $\mathcal{W}^N$ 上のウィナー測度に関する期待値を表せば,

> $X(t,x;w)$ は次のように熱半群を定義する;
>
> $$P_t^{\mathcal{L}}f(x)=\mathbb{E}[f(X(t,x))].$$

上の $X(t,x,w)$ を常微分方程式に倣って確率微分方程式

$$
dX(t)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha(X(t))\circ dw^\alpha(t)+A_0(X(t))dt,\quad X(0)=x \tag{2.3}
$$

の解という．実際，任意の $f\in C^\infty(M)$ に対して，Stratonovich 積分を用いる次の等式が成立する．

$$
f(X(t,x))-f(x)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\int_0^t A_\alpha f(X(s,x))\circ dw^\alpha(s)+\int_0^t A_0f(X(s,x))ds. \tag{2.4}
$$

Stratonovich 積分の定義から

$$
M_f(t):=f(X(t,x))-f(x)-\int_0^t(\mathcal{L}f)(X(s,x))ds
$$

はマルチンゲールである，すなわち次の等式が成り立つ．

$$\mathbb{E}[M_f(t)|\mathcal{F}_s] = M_f(s), \quad t \geq s.$$

文献について
この小節の内容は直接は [41] に基づいている．[40] が新しい教科書としては整備されている．[8, 17] も参考になる．

2.2. 局所的に

上の構成はユークリッド空間上の確率微分方程式に関する知識を前提とせず拡散過程の構成を説明するためのものである．ユークリッド空間での確率微分方程式に関する知識を前提とすれば，よりナイーブな構成が可能となる．歴史的にはこのような構成方法が多様体上の拡散過程の確率微分方程式による構成のはじめであった．この構成法について説明しよう．

$\{U_i\}_{i=1}^K$，$\{V_i\}_{i=1}^K$ はともに座標近傍による M の開被覆で，

$$\overline{U_i} \subset V_i, \quad i = 1, \ldots, K$$

を満たすとする．簡単のため，$x \in U_1$ としよう．V_1 はユークリッド空間と同相であるから，この上の局所座標 $(x^1, \ldots, x^d)$ により，

$$A_\alpha = \sum_{i=1}^d \sigma_\alpha^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i x^j} + \sum_{i=1}^d b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

と表す．このとき確率微分方程式

$$dX^i(t) = \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha^i(X(t)) dw^\alpha(t) + b^i(X(t))dt, \quad i = 1, \ldots, d, \quad X(0) = x$$

の解を $X(t, w)$ とする．

$$\tau_1(w) = \inf\{t > 0 \,|\, X(t, w) \notin U_1\}$$

とおけば，$X(\tau_1(w), w) \in \partial U_1$ である．$i(w) = \min\{i \leq K \,|\, X(\tau(w), w) \in U_i\}$ とおき，$U_{i(w)}$ 上で確率微分方程式

$$\begin{aligned} &dX^i(t) = \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha^i(X(t)) dw^\alpha(t) + b^i(X(t))dt, \quad t \geq \tau_1(w) \quad i = 1, \ldots, d, \\ &X(\tau_1(w)) = X(\tau_1(w)) \end{aligned}$$

を解き，この解も $X(t, w)$ と表す．

$$\tau_2(w) = \inf\{t \geq \tau_1(w) \,|\, X(t, w) \notin U_{i(w)}\}$$

とおき，以下同様の手順を繰り返す．このようにして，逐次的に多様体の上に拡散過程が構成できる．

文献について
伊藤清氏が確率微分方程式の創始後直ちに多様体への拡張を行っている．その際に用いられたのがこのような『張り合わせ』による構成である [18, 19, 20]．最近の教科書としては [17] に詳しい．

3. ブラウン運動

コンパクト・リーマン多様体 M に値をとる確率過程 $\{X(t,x)\,|\,t\geq 0, x\in M\}$ が，M 上のブラウン運動であるとは，

(i) $P(X(0,x)=x)=1$,

(ii) $t\mapsto X(t,x;w)$ は連続,

(iii) 任意の $f\in C^\infty(M)$ に対し，

$$M_f(t)=f(X(t,x))-f(x)-\int_0^t(\triangle_M f/2)(X(s,x))ds$$

はマルチンゲールである，

という 3 条件が満たされることをいう．$X(t,x,w)$ を x を出発するブラウン運動と呼んでいる．

$$Q_tf(x)=\mathbb{E}[f(X(t,x))]$$

とおけば，(iii) から

$$Q_tf(x)=f(x)+\int_0^t Q_s(\triangle_M f/2)(x)ds$$

となる．これより，

$$P_t^Mf(x)=Q_tf(x)=\mathbb{E}[f(X(t,x))]$$

という関係式が結論できる (P_t^M は §1 で導入したラプラシアンに対する熱半群である).

M 上のブラウン運動について紹介する．

3.1. 埋め込みによる構成

リーマン多様体 M を十分高次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に埋め込み，そのリーマン計量はユークリッド空間のものから誘導されるものであるとして良い．$\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_N$ を $\mathbb{R}^N$ の標準基底とする．このとき，各 $x\in\mathbb{R}^N$ に対し，

$$P_x:\mathbb{R}^N\to T_xM$$

を直交射影とし，

$$A_\alpha(x)=P_x\boldsymbol{e}_\alpha$$

とおく．M 上の確率微分方程式

$$dX(t)=\sum_{\alpha=1}^N A_\alpha(X(t))\circ dw^\alpha(t),\quad X(0)=x \tag{3.1}$$

の解を $X(t,x;w)$ とする．

$$\sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha^2 = \triangle_M \quad \text{on } M$$

が成り立つので，$X(t,x;w)$ は x を出発する M 上のブラウン運動である．したがって

$$P_t^M f(x) = \mathbb{E}[f(X(t,x))]$$

なる関係式が成り立つ．

上では確率微分方程式 (3.1) は，リーマン多様体 M 上で考えた．埋め込み $M \subset \mathbb{R}^N$ に注意すれば，これは $\mathbb{R}^N$ 上の確率微分方程式で，特に初期値を M に制限したものと見なせる．このとき (3.1) は $\mathbb{R}^N$ 上の伊藤型の確率微分方程式

$$dX(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha(X(t))dw^\alpha(t) + (\triangle_M \boldsymbol{\iota}/2)(X(t))dt \tag{3.2}$$

とも見なせる．ただし $\iota : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}^N$,

$$\triangle_M \boldsymbol{\iota}(x) = (\triangle_M \boldsymbol{\iota}^1(x), \ldots, \triangle_M \boldsymbol{\iota}^N(x)).$$

これから分かるように，埋め込みを用いる構成法の良いところは確率微分方程式は $\mathbb{R}^N$ という大域的な座標を持つ空間上で解かれるところにある．しかしながら，そのために M 上のブラウン運動 $X(t,x)$ を構成するために用いるウィナー空間 $\mathcal{W}^N$ の次元は N と M の次元より遙かに多くなっている．

埋め込みによる構成される典型的なブラウン運動は，原点を中心とする半径 r の $\mathbb{R}^{d+1}$ 内の球面 $S^d(r)$ 上のブラウン運動である;

$$A_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{d+1} \big\{\delta_{\alpha j} - x^\alpha x^j/|x|^2\big\}(\partial/\partial x^j), \quad \alpha = 1, \ldots, d+1$$

とおき，$x \in S^d(r)$ とすれば，確率微分方程式 (3.1)

$$dX(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} A_\alpha(X(t)) \circ dw^\alpha(t), \quad X(0) = x$$

の解として $S^{d-1}(r)$ 上のブラウン運動が得られる．必要なブラウン運動 w^α の数は多様体 $S^d(r)$ の次元よりも一つ多い．

文献について

埋め込みによる構成は，[8, 40] などが詳しい．Elworthy は埋め込みによる構成を好み，Malliavin は次節の $\mathcal{O}(M)$ を用いる構成好んで使う．[40] では，埋め込みを用いる方法が “extrinsic” な方法として，次の $\mathcal{O}(M)$ が “intrinsic” な方法として両者ともに説明が行われている．

3.2. 直交枠束による構成

$\mathcal{O}(M)$ を直交枠束とする;

$$\mathcal{O}(M) = \bigcup_{x\in M} \{r : \mathbb{R}^d \to T_xM \,|\, r \text{ は等距離写像}\}.$$

θ を solder 形式, ω を Levi-Civita 接続に対応する接続形式とする; $\pi : \mathcal{O}(M) \to M$ を射影とすれば, θ は

$$\theta(X_r) = r^{-1}\pi_*(X_r), \quad r \in \mathcal{O}(M),\, X_r \in T_r\mathcal{O}(M)$$

で定義される $\mathbb{R}^d$ 値 1 形式であり, ω は

$$\omega(\lambda(a)_r) = a \quad \forall a \in \mathfrak{so}(d)$$

で与えられる $\mathfrak{so}(d)$ 値 1 形式である ($\mathfrak{so}(d) = \{a \in \mathbb{R}^{d\times d} \,|\, \text{歪対称}\}$). ただし, $O \in \mathcal{O}(d)$ の $r \in \mathcal{O}(M)$ への作用を $R_O r$ とし,

$$\lambda(a)_r = \left.\frac{dR_{\exp(ta)}r}{dt}\right|_{t=0}$$

とおく.

$$(\theta_r, \omega_r) : T_r\mathcal{O}(M) \to \mathbb{R}^d \times \mathfrak{so}(d)$$

は等距離写像となっている. とくに水平方向 $H_r\mathcal{O}(M) := \ker(\omega_r)$ に制限すれば

$$\theta_r : H_r\mathcal{O}(M) \to \mathbb{R}^d$$

も等距離写像である.

各 $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し, 水平ベクトル場 $\mathfrak{H}(\xi)$ を

$$\mathfrak{H}(\xi)_r = \left(\theta_r|_{H_r\mathcal{O}(M)}\right)^{-1}(\xi), \quad r \in \mathcal{O}(M),$$

により定義する. $\mathbb{R}^d$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_d$ を用いて $\mathcal{O}(M)$ 上のベクトル場 $\{B_k\}_{k=1}^d$ を

$$H_k = \mathfrak{H}(\boldsymbol{e}_k), \quad k = 1, \dots, d$$

と定義する.

$\mathcal{O}(M)$ 上の確率微分方程式

$$dr(t) = \sum_{\alpha=1}^d H_\alpha(r(t)) \circ dw^\alpha(t) = \mathfrak{H}(\circ dw(t)), \quad r(0) = r \tag{3.3}$$

の解を $r(t, r; w)$ と表す. さらに $X(t, r; w) = \pi(r(t, r; w))$ とおく.

$$\triangle_{\mathcal{O}(M)} = \sum_{\alpha=1}^d H_\alpha^2$$

とおけば,
$$\triangle_{\mathcal{O}(M)}(f\circ\pi)=(\triangle_M f)\circ\pi$$
が成り立つから，$r\in\pi^{-1}(x)$ ならば，$X(t,r;w)$ は x を出発するブラウン運動となる (これが M 上のブラウン運動)．このとき
$$\mathbb{E}[f(X(t,r))]$$
は $(\pi(r),t)$ の関数と見なせ[1]，この意味で次が成り立つ．
$$\boxed{P_t^M f(x)=\mathbb{E}[f(X(t,r))],\quad r\in\pi^{-1}(x)}$$

文献について

ここでは，Stroock[40] に従い，局所座標を使わないで $\mathcal{O}(M)$ のブラウン運動の構成を行った．$\mathcal{O}(M)$ を接続を用いて $\mathbb{R}^d\times O(d)$ と自明化する方法は Malliavin の周辺で最近多様体上の経路空間の解析を行うためによく用いられている ([5, 6, 9])．同じことが [29, 17] にも説明されている．[17] では，局所座標による解説が詳しい．

3.3. 確率平行移動

$\mathcal{O}(M)$ を用いる構成方法はより豊かな情報を含んでいる．

滑らかな曲線 $c:[a,b]\to M$ に沿う平行移動を $//_{c\restriction[a,t]}$ と表す; $Y\in T_{c(a)}M$ に対し，$Y(t)=//_{c\restriction[a,t]}Y\in T_{c(t)}M$ は，$\nabla_{c'(t)}Y(t)=0$ かつ $Y(0)=Y$ により定まる．$t=a$ において $r\in\mathcal{O}(M)$ を通る c の水平持ち上げ $p:[a,b]\to\mathcal{O}(M)$ は，常微分方程式

$$p'(t)=\mathfrak{H}\bigl(p(t)^{-1}c'(t)\bigr)_{p(t)},\quad p(a)=r \tag{3.4}$$

の解として得られる．さらに，c に沿う滑らかなベクトル場 $[a,b]\ni t\mapsto Y(t)\in T_{c(t)}M$ の c に沿う平行移動による引き戻しは，水平持ち上げ $p(t)$ を用いて次のように表される．

$$//_{c\restriction[a,t]}^{-1}Y(t)=rp(t)^{-1}Y(t)\quad\text{i.e. }//_{c\restriction[a,t]}=p(t)r^{-1} \tag{3.5}$$

(3.3) は

$$dr(t)=\mathfrak{H}(\circ dw(t))_{r(t)} \tag{3.6}$$

と表すことができる．$(\pi_*)_r\mathfrak{H}(\xi)=r\xi$ ($r\in\mathcal{O}(M)$，$\xi\in\mathbb{R}^d$) であるから，$X(t)=\pi(r(t))$ とあわせて

$$dX(t)=(\pi_*)_{r(t)}(\mathfrak{H}(\circ dw(t)))=r(t)(\circ dw(t)). \tag{3.7}$$

したがって (3.6) に代入すれば

$$dr(t)=\mathfrak{H}(r(t)^{-1}(\circ dX(t)))$$

となる[2]．(3.4) と比較すれば

[1] $a\in O(d)$ の $r\in\mathcal{O}(M)$ への作用を ra と表せば，$X(t,ra;w)=X(t,r;aw)$ となる．ただし，$(aw)(t)=aw(t)$．

[2] (3.7) では dX の前に無かった $\circ$ がこの式では忽然と現れたことを不審に思う人もあると思う．dX のような確率微分を通常の微分形式のように扱うには，この $\circ$ による Stratonovich 型であるという宣言がつねに必要である．例えば [17] 参照

$$\boxed{r(t,r;w) \text{ は } X(t,r;w) \text{ の水平持ち上げである}}$$

さらに (3.5) と比較すれば

$$\boxed{\begin{array}{c} //_{X\restriction[0,t]} := r(t,r;w)r^{-1} : T_{\pi(r)}M \to T_{X(t,r;w)}M \\ \text{は } X(\cdot,r;w):[0,\infty)\to M \text{ に沿う平行移動を与える．} \end{array}}$$

これをブラウン運動に沿う確率平行移動という．

文献について

この節も [40] を参考にしている．確率平行移動については $\mathbb{R}^d \times \mathcal{O}(M)$ を高次元ユークリッド空間に埋め込む形で [8] でも詳しく説明されている．この Elworthy の講義ノートでは後で触れる Chern-Gauss-Bonnet の定理のピン留めブラウン運動を使った証明も与えられている．

3.4. 巻き付けと展開

滑らかな曲線 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^d$ に沿って多様体 M を滑ることなく転がすことで，γ は M に巻き付けられ，$x\in M$ から出る M 上の曲線 $c:[a,b]\to M$ を生む; すなわち，$r\in\pi^{-1}(x)$ を通じて $\mathbb{R}^d$ と T_xM を同一視し，$r(d\gamma/dt)(t)\in T_xM$ とすれば，$c(t)$ は次の常微分方程式から定まる．

$$c(a)=x,\quad (dc/dt)(t) = //_{c\restriction[a,t]}(r(d\gamma/dt))(t),\quad t\in[a,b].$$

(3.7) と確率平行移動 $//_{X\restriction[0,t]}$ の表示を合わせれば，同じ $\mathbb{R}^d$ と T_xM の同一視のもと

$$X(0,x;w)=x,\quad dX(t,x;w) = //_{X\restriction[0,t]}\big(r(\circ dw(t))\big)$$

となり，M を滑ることなくブラウン運動 $w(t)$ に沿って転がすことで，$w(t)$ を M に巻き付けて得られる曲線が $X(t,r,w)$ であるといえる．

(3.7) は

$$dw(t) = r(t)^{-1}(\circ dX(t)) = r(t)^{-1}\big((\pi_*)_{r(t)}(\circ dr(t))\big)$$

と書き改められる．solder 形式 $\theta_r = r^{-1}(\pi_*)_r$ を用いれば

$$dw(t) = \theta_{r(t)}(\circ dr(t))$$

となる．すなわちリーマン多様体上のブラウン運動を展開してユークリッド空間上のブラウン運動が得られた．これをブラウン運動の確率展開と呼んでいる．

多様体上の確率過程 $z(t)$ と 1 形式 α に対し，

$$\int_{z[0,t]} \alpha = \int_0^t \theta(\circ dz(t))$$

で定義される確率過程を，確率線積分と呼んでいる．確率展開はこの記号のもとで

$$w(t) = \int_{r[0,t]} \theta$$

となることを意味している．

文献について

[17, 40] に詳しい．$A(t+s;w)=A(t;w(s+\cdot))$ という性質をもつ確率過程のことを加法的汎関数という．これは確率解析おいて非常に重要な確率過程である．加法的汎関数は確率線積分によって表示されることが知られている ([14]).

3.5. 局所座標では

$x_0\in M$ の局所近傍 U の局所座標を $(x^1,\dots,x^n)$ とする．この局所座標により，$\mathcal{O}(M)$ を $\mathbb{R}^d\times O(d)$ と同一視する．このとき，

$$r=(x,e)=\big((x^1,\dots,x^d),(e^i_\alpha)_{1\le i,\alpha\le d}\big)\in\mathbb{R}^d\times O(d)=\mathcal{O}(M)$$

という局所座標が導入され，この座標のもと

$$(H_\alpha)_r=\sum_{i=1}^d e^i_\alpha\frac{\partial}{\partial x^i}-\sum_{j,k=1}^d\Gamma^i_{jk}e^j_\alpha e^k_\beta\frac{\partial}{\partial e^k_\beta}$$

と表される．ただし，Γ^i_{jk} は Christofell 記号である．これより，確率微分方程式 (3.3) で定めた $r(t,r)=(X(t,r),e(t,r))$ は局所的には次の連立確率微分方程式の解として得られる．

$$\begin{cases} dX^i(t)=\displaystyle\sum_{\alpha=1}^d e^i_\alpha(t)\circ dw^\alpha(t),\\ de^i_\alpha(t)=-\displaystyle\sum_{j,k,\beta=1}^d\Gamma^i_{jk}(X(t))e^j_\alpha(t)e^k_\beta(t)\circ dw^\beta(t)\\ \qquad\quad=-\displaystyle\sum_{j,k=1}^d\Gamma^i_{jk}(X(t))e^j_\alpha(t)\circ dX^k(t).\end{cases}\tag{3.8}$$

この $(X^i(t))$ の表示からも，$X(t)$ の展開としてユークリッド空間上のブラウン運動が再現できること，$e_\alpha(t)$ は $X(t)$ に沿う平行なベクトル場であることなどが分かる．

局所座標を導入することで種々の量が簡単な表示を持ち，そのことにより $X(t)$ の挙動が詳しく解析可能となる．実際，上の確率微分方程式では直交枠が含まれた形でブラウン運動が表示されているが，ユークリッド空間上のブラウン運動の回転不変性[3]より，局所座標で表したときに直交枠を表示から消し去ることができる．このことを見よう．x を中心とする局所座標のもと，$r(t)=(X(t),e(t))$ と表示したとき，

$$e(t)e(t)^*=(g^{ij}(X(t)))_{1\le i,j\le d}$$

となる．ただし，$(g^{ij}(y))$ はリーマン計量 $(g_{ij}(y))$ の逆行列である．よって，次のような伊藤積分による表示が従う．

$$dX^i(t)=\sum_{\alpha=1}^d e^i_\alpha(t)dw^\alpha(t)-\frac12\sum_{j,k=1}^d(g^{jk}\Gamma^i_{jk})(X(t))dt.\tag{3.9}$$

[3] $a\in O(d)$ とするとき $W_a(t)=aw(t)$ もまたユークリッド空間上のブラウン運動である．

さらに

$$\sigma(y) = (\sigma^i_j(y))_{1\le i,j\le d} = \big(g^{ij}(y)\big)^{-1/2}, \quad B(t) = \int_0^t \sigma(X(s))^{-1} e(s)dw(s)$$

とおけば，$B(t)$ もまたブラウン運動であり，

$$\begin{aligned} dX^i(t) &= \sum_{\alpha=1}^d \sigma^i_\alpha(X(t))dB^\alpha(t) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^d (g^{jk}\Gamma^i_{jk})(X(t))dt, \\ &= \sum_{\alpha=1}^d \sigma^i_\alpha(X(t)) \circ dB^\alpha(t) + \sigma^i_0(X(t))dt, \quad i = 1, \dots, d \end{aligned} \tag{3.10}$$

となる．ただし，

$$\sigma^i_0(y) = -\frac{1}{2}\Big\{\sum_{j,\alpha=1}^d \sigma^j_\alpha(y)\frac{\partial\sigma^i_\alpha}{\partial x^j}(y) + \sum_{j,k=1}^d (g^{jk}\Gamma^i_{jk})(y)\Big\}.$$

文献について
局所座標を用いての解析は [17] に詳しい．

3.6.　多様体に値をとる経路の空間

マリアヴァン解析の成功に後押しされて，多様体 M に値をとる経路の空間

$$\mathcal{P}_x(T, M) = \{\gamma : [0, T] \to M \,|\, \text{連続かつ}\gamma(0) = x\}$$

上での確率変分に基づく解析が 1990 年頃から精力的に研究されている．この空間において基本となる測度はブラウン運動 $X(t, r)$ $(x = \pi(r))$ が誘導する確率測度

$$\mu_x(A) = P(\{w \,|\, X(\cdot, r; w) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_x(T, M))$$

であり[4]，そのとき考察される微分作用素は確率平行移動により定義される次の作用素である．

$$\nabla\big[f(X(t_1), \dots, X(t_n))\big] = \sum_{i=1}^n //^{-1}_{X\upharpoonright[0,t]}\partial_i f(X(t_1), \dots, X(t_n)) t_i \wedge t.$$

ただし，$f \in C^\infty(M^n)$，$\partial_i f$ は $f(x_1, \dots, x_n)$ の第 i 成分に関する微分を表す．したがって $\partial_i f(X(t_1), \dots, X(t_n)) \in T_{X(t_i)}M$ であり，T_xM を $\mathbb{R}^d$ と同一視し，この意味で $\nabla[\cdots]$ を Cameron-Martin 部分空間の元と理解する．

文献について
[1] がこの方向の一つの面白い応用例を与えている．埋め込みによるブラウン運動の構成の持つ困難 (必要以上に多いブラウン運動) を乗り越える興味深い考察がなされている．[30] からは Malliavin 周辺で展開されているこの方向の研究についての概観を得ることができる．

[4] $\mathcal{B}(\mathcal{P}_x(T, M))$ は $A = \{\gamma \,|\, \gamma(t_j) \in A_j, j = 1, \dots, n\}$ (A_j は M の開部分集合) という形をした $\mathcal{P}_x(T, M)$ の部分集合を含む最小の σ 加法族．

4. 曲率

4.1. 初期値の微分と関連して—Ricci 曲率

$\mathcal{O}(M) \ni r \mapsto r(t,r;w) \in \mathcal{O}(M)$ が滑らかな関数となることは既に述べた．したがってこの関数の微分が考えられるが，その微分に曲率形式，Ricci 曲率が出現することを見，それから Ricci 曲率から定まる確率過程により熱半群の微分が表示できることを見よう．ここでは，単に初期値に関する微分にとどまらず，マリアヴァン解析の視点から，経路に関する変分まで込めて微分を扱う．

$\mathbb{R}^d$ に値をとる確率過程 $\zeta(t)$ が

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_0^t a(s)dw(s) + \int_0^t b(s)ds$$

という形で与えられたとする．ただし，$a(t)$ は $\mathfrak{so}(d)$ 値，$b(t)$ は $\mathbb{R}^d$ 値の連続な確率過程で，$\zeta_0 \in \mathbb{R}^d$ は定数．(3.3) でブラウン運動 w を $w+\varepsilon\zeta$ で置き換えて得られる解を $r(t,r;w+\varepsilon\zeta)$ と表し，

$$\Phi(t,\varepsilon;w) = r\biggl(t, \exp\Bigl[\varepsilon\sum_{k=1}^d \zeta_0^k H_k\Bigr](r); w+\varepsilon\zeta\biggr) = r\bigl(t, \exp[\varepsilon\mathfrak{H}(\zeta_0); w+\varepsilon\zeta\bigr)$$

とおく．$(\partial\Phi/\partial\varepsilon)(t,0;w)$ は，初期値と経路に関する微分を同時にとったものであり，特に $a=0, b=0$ とすれば，初期値に関する微分を得る．solder 形式，接続形式の組 $\Theta = \begin{pmatrix}\theta\\ \omega\end{pmatrix}$ を考え，

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\zeta}(t;w)\\ \rho(t;w)\end{pmatrix} = \Theta\Bigl(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}(t,0;w)\Bigr) := (\Phi(t,\cdot;w)^*\Theta)((\partial/\partial\varepsilon)_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathfrak{so}(d)$$

とおけば，次が成り立つ．

$$\begin{cases} d\rho(t;w) = \Omega_{r(t,r;w)}(\circ dw(t), \widetilde{\zeta}(t;w)), \\ d\widetilde{\zeta}(t;w) + \dfrac{1}{2}\mathfrak{ric}_{r(t,r;w)}(\widetilde{\zeta}(t,w)) = d\zeta(t;w) + \rho(t;w)dw(t), \\ \widetilde{\zeta}(0;w) = \zeta_0, \quad \rho(0;w) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

ただしスカラー化された曲率形式 $\Omega : \mathcal{O}(M)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathfrak{so}(d)$，リッチ曲率 $\mathfrak{ric}_r : \mathcal{O}(M)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は次で与える．

$$\begin{aligned} &\Omega_r(\xi,\eta) = -\omega([\mathfrak{H}(\xi), \mathfrak{H}(\eta)]), \\ &\mathfrak{ric}_r\xi = \sum_{k=1}^d \Omega(\xi, e_k)e_k, \qquad r \in \mathcal{O}(M),\ \xi,\eta \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

(4.1) は，$d(\Phi^*\Theta) = \Phi^*(d\Theta)$ という交換関係と，構造方程式

$$d\theta = -\omega\wedge\theta, \quad d\omega = -\omega\wedge\omega + \Omega(\theta,\theta)$$

を用いて $\Phi^*\Theta$ を計算することにより示される．

$(\because)$ ζ, w はすべて微分可能として議論を進める．

$$\Phi^*\Theta = \begin{pmatrix} a'(t,\varepsilon) \\ a''(t,\varepsilon) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} b'(t,\varepsilon) \\ b''(t,\varepsilon) \end{pmatrix} d\varepsilon,$$

$(a'(t,\varepsilon), b'(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^d$，$a''(t,\varepsilon), b''(t,\varepsilon) \in \mathfrak{so}(d))$ とおく．$t=0$ のとき，ε 方向の微分は水平方向に向いているので，

$$b'(0,0) = \zeta_0, \quad b''(0,0) = 0.$$

さらに t 方向の微分は水平ベクトル場 H_k の定める方程式

$$\frac{d}{dt} r(t,r; w+\varepsilon\zeta) = \sum_{k=0}^{d} H_k(r(t,r;w+\varepsilon\zeta)) \frac{d}{dt}[w+\varepsilon\zeta](t)$$

に従う．$\theta(H_k) = \boldsymbol{e}_k$ であるから，

$$a'(t,\varepsilon) = \frac{d}{dt}(w+\varepsilon\zeta)(t), \quad a''(t,\varepsilon) = 0.$$

$d\Phi^*\Theta = \Phi^* d\Theta$ と構造方程式より，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (\partial b'/\partial t) - (d\zeta/dt) \\ \partial b''/\partial t \end{pmatrix} dt \wedge d\varepsilon = d(\Phi^*\Theta) = \Phi^*(d\Theta) \\ &= \begin{pmatrix} -\Phi^*\omega \wedge \Phi^*\theta \\ -\Phi^*\omega \wedge \Phi^*\omega + \Omega(\Phi^*\theta, \Phi^*\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b''\{(dw/dt) + t(d\zeta/dt)\} \\ \Omega\big((dw/dt) + \varepsilon(d\zeta/dt), b'\big) \end{pmatrix} dt \wedge d\varepsilon. \end{aligned}$$

$t=0$ として，

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{db'(t,0)}{dt} - b''(t,0)\frac{dt}{dt}, \quad \frac{db''(t,0)}{dt} = \Omega\left(\frac{dw}{dt}, b'(t,0)\right).$$

dw/dt は $\circ dw$ に置き換えられるので主張を得る．///

(4.1) は，ζ から始めて $\widetilde{\zeta}$，ρ を求めているが，その形から分かるように，$\widetilde{\zeta}$ を与え，ρ を決定して，その後 ζ を決めるという逆の手順もまた可能である．このことを利用して次を得る．

$$\frac{d\widetilde{\zeta}_\alpha(t;w)}{dt} + \frac{1}{2}\mathfrak{ric}_{r(t,r;w)}\widetilde{\zeta}_\alpha(t;w) = 0, \quad \widetilde{\zeta}_\alpha(0) = e_\alpha,$$
$$\widehat{\zeta}_\alpha(t;w) = r(t,r;w)[\widetilde{\zeta}_\alpha(t;w)]$$

とすれば，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し，

$$(H_\alpha)_r \mathbb{E}[f(X(t,r))] = \mathbb{E}[(df)_{X(t,r)}(\widehat{\zeta}_\alpha(t))]. \tag{4.2}$$

$$\operatorname{Grad} F = \sum_{\alpha=1}^{d} (H_\alpha F) e_\alpha, \quad F \in C^\infty(\mathcal{O}(M)),$$

とおいたとき，$\mathbb{E}[F(r(t,r))] = \mathrm{e}^{t\triangle_{\mathcal{O}(M)}/2}F(r)$ となることに注意すれば，上の等式は次の Bochner の等式の積分版である．

$$\operatorname{Grad}\triangle_{\mathcal{O}(M)}(f\circ\pi) = \triangle_{\mathcal{O}(M)}\circ\operatorname{Grad}(f\circ\pi) - \mathfrak{ric}\operatorname{Grad}(f\circ\pi), \quad \forall f\in C^\infty(M).$$

上の (4.2) は

$$\boxed{|d(P_t^M f)|^2_{T_xM} = \sum_{\alpha=1}^d \Big|\mathbb{E}\big[(df)_{X(t,r)}(\widehat{\zeta}_\alpha(t))\big]\Big|^2, \quad r\in\pi^{-1}(x)}$$

を導く．これにより，熱半群とリッチ曲率の関係が得られる．

M 上のリッチ曲率 ric_x が一様に正定値であると仮定する; すなわち，$\delta>0$ が存在し，

$$\langle \mathrm{ric}_x(Y_x), Y_x\rangle_{T_xM} \geq 2\delta|Y_x|_{T_xM} \quad Y_x\in T_xM,\ x\in M. \tag{4.3}$$

このとき，$|\widetilde{\zeta}_\alpha(t;w)|\leq \mathrm{e}^{-\delta t}$ となり，任意の $f\in C^\infty(M)$ に対し，

$$\sup_{x\in M}\left|P_t^M f(x) - \int_M f d\lambda_M\right| \leq \sqrt{d}\operatorname{diam}(M)\|df\|_\infty \mathrm{e}^{-\delta t}.$$

ただし，$\|df\|_\infty = \sup_{m\in M}|df(m)|_{T_x^*M}$．さらに，$\triangle_M$ を $L^2(\lambda_M)$ における作用素とみなせば,

$$\operatorname{Spec}(-\triangle_M)\setminus\{0\}\subset[2\gamma,\infty)$$

となる．

文献について

経路に関する変分をとる考え方は [5, 6, 9] で展開されたものである．マルチンゲールに基づく伊藤解析による証明が [40] にある．

4.2. 座標近傍でのブラウン運動の挙動から—Ricci 曲率，スカラー曲率

ブラウン運動が測地球から離脱する時刻と場所の期待値の漸近挙動に Ricci 曲率 ric，スカラー曲率 S が現れる．$x\in M$，$r\in\pi^{-1}(x)$ を固定し，$X(t;w)=X(t,r;w)$ とする．$B(x,\varepsilon)$ を半径 $\varepsilon>0$ の測地球とし，

$$\tau_\varepsilon = \inf\{t>0\,|\,X(t)\notin B(x,\varepsilon)\}$$

とおく．$t\mapsto X(t)$ の連続性より，

$$X(\tau_\varepsilon)\in\partial B(x,\varepsilon)$$

である．さらに $\tau=\inf\{t>0\,|\,|w(t)|\geq 1\}$，$c_0(\lambda)=\mathbb{E}[e^{-\lambda\tau}]$ とおく．このとき，$\phi\in C^\infty(S^{d-1})$ に対し，

$$\mathbb{E}\big[\exp(-\lambda\tau_\varepsilon/\varepsilon^2)\phi(X(\tau_\varepsilon)/\varepsilon)\big] = c_0(\lambda)I(\phi)+\varepsilon^2 I(u\phi)+\varepsilon^3 I(v\phi)+O(\varepsilon^4), \quad \varepsilon\to 0 \tag{4.4}$$

となる．ただし，I は S^{d-1} での積分を表し，測地座標を $(x^1,\ldots,x^d)$，その座標の下でのリッチ曲率 ric の成分表示を ric_{ij}，$\partial_i=\partial/\partial x^i$，とし

$$
\begin{aligned}
&u(\eta)=c_1(\lambda)\,\mathrm{ric}_{ij}(x)\eta^i\eta^j+c_2(\lambda)S(x),\\
&v(\eta)=c_3(\lambda)\partial_i\,\mathrm{ric}_{jk}(x)\eta^i\eta^j\eta^k+c_4(\lambda)\partial_iS(x)\eta^i,\quad \eta=(\eta^1,\ldots,\eta^d)\in S^{d-1},\\
&c_1=-c_0/12,\ \ c_2=-c_0'/12,\ \ c_3=-c_0/24,\ \ c_4=\varphi''/\{24\varphi\varphi'\},\ \ \varphi=1/c_0.
\end{aligned}
$$

(4.4) の左辺の期待値について説明しておこう．$\phi_\varepsilon:\partial B(x,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ を $\phi_\varepsilon(\eta)=\phi(\eta/\varepsilon)$ により定義すれば，

$$u(x)=\mathbb{E}\big[\exp(-\lambda\tau_\varepsilon/\varepsilon^2)\phi(X(\tau_\varepsilon)/\varepsilon)\big]$$

は次の Dirichlet 問題の解を与える．

$$\big\{(1/2)\triangle_M-(\lambda/\varepsilon^2)\big\}u=0,\quad u|_{\partial B(x,\varepsilon)}=\phi_\varepsilon.$$

M がユークリッド空間の場合の対応する期待値は，ユークリッド空間上のブラウン運動の時空変換不変性 $(w(\varepsilon^2\cdot)\overset{\mathrm{law}}{\sim}\varepsilon w(\cdot))$ と回転不変性 $(aw(\cdot)\overset{\mathrm{law}}{\sim}w(\cdot)\ (a\in O(d)))$，さらに離脱時間 τ_ε と離脱場所 $X(\tau_\varepsilon)$ の独立性から，

$$\mathbb{E}\big[\exp(-\lambda\tau_\varepsilon/\varepsilon^2)\phi(X(\tau_\varepsilon)/\varepsilon)\big]=\mathbb{E}[\exp(-\lambda\tau_1)]I(\phi)=c_0(\lambda)I(\phi)$$

となる．したがって (4.4) に現れる $\varepsilon^2,\varepsilon^3$ 等の係数項は多様体 M の曲がりをブラウン運動が「感じた」ことを意味している．

今ひとつの曲率の現れる場合として Onsager-Machlup 関数に関する解析がある．この場合は上では中心として固定した x を滑らかな曲線 $c:[0,T]\to M$ に置きかえる．このとき，次のような漸近挙動が成り立つ．

$$\frac{P(\max_{0\le t\le T}d(X(t),c(t))\le\delta)}{P(\max_{0\le t\le T}|w(t)|\le\delta)}\to\exp(-\mathfrak{s}(c))\quad(\delta\to0).\tag{4.5}$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{s}(c)&=\int_0^T L(c(t),c'(t))dt,\\
L(x,v)&=\frac{1}{2}|v|^2_{T_xM}+\frac{1}{12}S(x),\quad x\in M,\ v\in T_xM.
\end{aligned}
$$

この漸近挙動はさらにそれぞれの経路の終端を条件付けたもの $(X(T)=c(T)$, $w(T)=0$ という条件をそれぞれ分子分母の確率に付加する) でも成り立つが，ここではそのような『条件付き確率』については踏み込まない．

この式の意味するところを見るために密度関数のことを思い出してみよう．連続関数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ に対し，

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(B(x,\varepsilon))}\int_{B(x,\varepsilon)}f(y)dy\to f(x)$$

がほとんど至るところで成立している．ファインマン経路積分論の言葉を借りれば，ラグランジ関数を $L(x,\dot{x})$ を持つ時間的に一様な力学系のハミルトン関数は

$$H(x,p)=\sum_{j=1}^d p_j\dot{x}^j-L$$

で与えられる．ただし，$p_m = \partial L/\partial \dot{x}^m$ とおき，ルジャンドル変換 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, \dot{x}) \leftrightarrow (x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ により同一視を行っている．古典力学では体系の運動法則は

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x_j}, \quad , j = 1, \ldots, d$$

というハミルルトンの正準方程式で与えられ，同じ体系の量子力学的記述はシュレディンガー方程式

$$\sqrt{-1}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Big(x, -\sqrt{-1}\hbar \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Psi$$

によってなされる．この方程式の解 $\Psi(t,x)$ を波動関数と呼び，基本解 $G(x,t;y) = e^{-(\sqrt{-1}/\hbar)tH}(x,y)$ をプロパゲータと呼ぶ．ファインマンの考えに従えば，時刻 0 に y を出発し時刻 T に x に到着する量子力学的粒子の経路 γ のプロパゲータへの寄与 (経路の確率振幅) を足し集めたものが全確率振幅，すなわちプロパゲータである．ファインマンは，さらにこの経路の確率振幅の総和が作用積分を用いて次のような "積分" として表示できることを結論した．

$$G(x,T;y) = \int_{\gamma(0)=y, \gamma(T)=x} e^{(\sqrt{-1}/\hbar)\mathfrak{s}(\gamma)} \mathcal{D}(d\gamma).$$

経路の空間の距離は一様位相による距離

$$\max_{t \in [0,T]} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

であることに注意すれば，この表示から密度関数を見いだす作業が上の (4.5) であることが分かる．

上のどちらの漸近挙動の評価においても，ブラウン運動は測地座標もしくは曲線に沿う測地座標内に留まることを前提として良い．このため，ブラウン運動を局所的に表現する方法が有効に利用できることになる．実際，ブラウン運動の局所表現を，Cartan による測地座標 $(y^1, \ldots, y^d)$ での局所表現;

$$g_{ij}(y) = \delta_{ij} - \sum_{a,b} \frac{1}{3} R_{aibj} y^a y^b - \frac{1}{6} \sum_{a,b,c} \partial_a R_{bicj} y^a y^b y^c + O(|y|^4),$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{jk} g^{jk} \Gamma^i_{jk}(y) = -\frac{1}{3} \sum_a \mathrm{ric}_{ia}\, y^a + \sum_{a,b} \Big(\frac{1}{24} \partial_i \,\mathrm{ric}_{ab} - \frac{1}{4} \partial_a \,\mathrm{ric}_{bi} \Big) y^a y^b + O(|y|^3)$$

を合わせて，上のような極限の計算が遂行される．

文献について

測地球からの脱出時刻の漸近挙動の解析は [12] を参考にした．この研究は Pinsky[35, 36] が始めたものであるが，Pinsky 自身が本年９月に横浜市立大学において関連する講演をおこなっている (講演 OHP の PDF ファイルあり)．

Onsager-Machlup 関数に関しては，[13] を参考にしている．先行する結果としては [11, 42] があり，[17] にも説明がある．

Feynman 経路積分については，Feynman 自身に依る [10] もあるが，[37] が読みやすい．Feynman 経路積分とウィナー・インテグラルの対比については [21, 23] を参照．

5. リーマン多様体上の熱核の漸近展開

5.1. マリアバン解析

既にマリアバン解析の講演の中で触れられていることと思うが，いくつかの概念を再記しておく．

$\mathcal{W}^d$ は d 次元ウィナー空間とし，H をその Cameron-Martin 部分空間とする; H は $[0,\infty)$ 上で定義された原点を出発する $\mathbb{R}^d$ 値絶対連続関数で，微分が 2 乗可積分となるものの全体である．$\mathcal{W}^d$ でのマリアバン微分を ∇ で表す．実ヒルベルト空間 E に対し，次のような空間を定義する．

$$\mathbf{D}^{\infty}(E) = \bigcap_{s>0} \bigcap_{p\in(1,\infty)} \mathbf{D}_p^s(E), \qquad \mathbf{D}^{-\infty}(E) = \bigcup_{s>0} \bigcup_{p\in(1,\infty)} \mathbf{D}_p^{-s}(E),$$
$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\infty}(E) = \bigcap_{s>0} \bigcup_{p\in(1,\infty)} \mathbf{D}_p^s(E), \qquad \widetilde{\mathbf{D}}^{-\infty}(E) = \bigcup_{s>0} \bigcap_{p\in(1,\infty)} \mathbf{D}_p^{-s}(E).$$

5.1.1. 多様体値ウィナー汎関数

M を再びコンパクトリーマン多様体とする．$F : \mathcal{W}^d \to M$ が (マリアバン解析の意味で) 滑らかであるとは,

$$f(F) \in \mathbf{D}^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \forall f \in C^{\infty}(M)$$

となることをいう．滑らかな $F : \mathcal{W}^d \to M$ は，次のように定義されるマリアバン微分 $\nabla F(w) : H \to T_{F(w)}M$ を持つ;

$$(\nabla F(w)[h])_{F(w)} f = \nabla(f(F))(w)[h], \quad h \in H,\ f \in C^{\infty}(M).$$

F が (マリアバン解析の意味で) 非退化であるとは

$$\{\det[(\nabla F)(\nabla F)^*]\}^{-1} \in \bigcap_{p\in(1,\infty)} L^p$$

となることをいう．ただし，$H^* = H$ という同一視を用いて，$(\nabla F)^* : T^*_{F(w)}M \to H$ は ∇F の共役作用素として定義し，det は通常の $(1,1)$ テンソルに対するものである．

M 上の超関数の全体を $\mathcal{D}(M)$ とする．滑らかで非退化な $F : \mathcal{W}^d \to M$ に対し，連続線形写像

$$\Xi : \mathcal{D}(M) \ni T \mapsto T(F) \in \mathbf{D}^{-\infty} \quad \text{s.t.}\ \ \Xi(f) = f(F), \ \ \forall f \in C^{\infty}(M),$$

が定義できる．

5.1.2. 漸近展開

E 値確率変数の族 $\{F_\varepsilon\}$ に対し，オーダーを

$$F_\varepsilon = O(\varepsilon^k) \text{ as } \varepsilon \downarrow 0 \text{ in } \mathbf{D}_p^s \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-k} \|F_\varepsilon\|_{s,p} < \infty$$

と定める．

四つの空間 $\mathbf{D}(E)$ ($\mathbf{D} \in \{\mathbf{D}^\infty, \mathbf{D}^{-\infty}, \widetilde{\mathbf{D}}^\infty, \widetilde{\mathbf{D}}^{-\infty}\}$) における漸近展開

$$F_\varepsilon \sim f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots \quad \text{in } \mathbf{D}(E)$$

が次のように定義される．

$\mathbf{D} = \mathbf{D}^\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ i) $F_\varepsilon, f_0, f_1, \cdots \in \mathbf{D}^\infty(E)$,
ii) $F_\varepsilon - (f_0 + \varepsilon f_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} f_{k-1}) = O(\varepsilon^k)$ in $\mathbf{D}_p^s$ $(\forall (s,p))$.

$\mathbf{D} = \widetilde{\mathbf{D}}^\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ i) $F_\varepsilon, f_0, f_1, \cdots \in \widetilde{\mathbf{D}}^\infty(E)$,
ii) $\forall (s,k) \in (0,\infty) \times \mathbb{N}$, $\exists p > 1$ s.t.
$F_\varepsilon - (f_0 + \varepsilon f_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} f_{k-1}) = O(\varepsilon^k)$ in $\mathbf{D}_p^s$.

$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{-\infty} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall k$, $\exists s > 0$, $\exists p > 1$ s.t.
i) $F_\varepsilon, f_0, f_1, \cdots \in \mathbf{D}_p^{-s}(E)$,
ii) $F_\varepsilon - (f_0 + \varepsilon f_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} f_{k-1}) = O(\varepsilon^k)$ in $\mathbf{D}_p^{-s}$.

$\mathbf{D} = \widetilde{\mathbf{D}}^{-\infty} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall k$, $\exists s > 0$ s.t.
i) $F_\varepsilon, f_0, f_1, \cdots \in \bigcap_{p>1} \mathbf{D}_p^{-s}(E)$,
ii) $F_\varepsilon - (f_0 + \varepsilon f_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} f_{k-1}) = O(\varepsilon^k)$ in $\mathbf{D}_p^{-s}$ $(\forall p > 1)$.

次のような積公式が成り立つ．

(5.1)
$$\left.\begin{array}{ll} G_\varepsilon \sim g_0 + \varepsilon g_1 + \ldots & \text{in } \mathbf{D}^\infty \\ \Phi_\varepsilon \sim \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \ldots & \text{in } \mathbf{D}^{-\infty} \end{array}\right\} \Longrightarrow G_\varepsilon \Phi_\varepsilon \sim \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \ldots \quad \text{in } \mathbf{D}^{-\infty}.$$

ただし，ψ_i 達は形式べき級数の計算

$$(g_0 + \varepsilon g_1 + \ldots)(\phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \ldots) = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \ldots$$

によって得られる．また，$\mathbf{D}$ は $\widetilde{\mathbf{D}}$ に置き換えても成り立つ．

$F_\varepsilon \in \mathbf{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ のマリアバン微分を ∇F_ε と表し，$(\nabla F_\varepsilon)^*$ をその共役写像とする．

$$\nabla F_\varepsilon(w) : H \to \mathbb{R}, \quad (\nabla F_\varepsilon)^*(w) : \mathbb{R} \to H.$$

もし，F_ε が一様に非退化であれば，すなわち

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \det[(\nabla F_\varepsilon)(\nabla F_\varepsilon)^*] \right\|_p < \infty \quad \forall p > 1$$

となっていれば，緩増加超関数 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ と F_ε の合成は次のような漸近展開を持つ．

(5.2)
$$\boxed{T(F_\varepsilon) \sim \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \cdots \text{ in } \widetilde{\mathbf{D}}^{-\infty}}$$

(したがって $\mathbf{D}^{-\infty}$ でも)．Φ_i は次の形式的な展開式から得られる．

$$\begin{aligned} &T(f_0 + \varepsilon f_1 + \cdots) \\ &\quad = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d = 0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_d!} \partial_{x^1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x^d}^{\alpha_d} T(f_0) \prod_{j=1}^{d} \{\varepsilon f_1^j + \varepsilon^2 f_2^j + \ldots\}^{\alpha_j}. \end{aligned}$$

$$(F_\varepsilon = (F_\varepsilon^1, \ldots, F_\varepsilon^d),\ F_\varepsilon^j \sim f_0^j + \varepsilon f_1^j + \cdots).$$

5.2. 熱核の表示

コンパクトリーマン多様体 M の点 $x \in M$ に対し，$\pi(r) = x$ なる $r \in \mathcal{O}(M)$ を固定し，$X(t, r; w)$ を $X(t, x; w)$ と表す．$X(t, x)$ はマリアバン解析の意味で滑らかで非退化となっている．

($\because$) $f \in C^\infty(M)$ とする．

$$f(X(t,x)) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^t (\pi_* H_\alpha) f(X(s,x)) \circ dw^\alpha(s)$$

である．これの Malliavin 微分をとれば，

$$(\nabla X(t,x))[h]f = (\nabla\{f(X(t,x))\})[h] = \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^t (\nabla X(s,x))[h](\pi_* H_\alpha) f \circ dw^\alpha(s)$$

となる．$X(t)_*$ で $x \mapsto X(t,x)$ の微分を表せば，

$$(\nabla X(t,x))[h] = \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^t X(t)_* X(s)_*^{-1} (\pi_* H_\alpha)_{X(s,x)} \dot{h}^\alpha(s) ds$$

と表示できる．これから次が従う．

$$(\nabla X(t,x))(\nabla X(t,x))^* = \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^t (X(t)_* X(s)_*^{-1} (\pi_* H_\alpha)_{X(s,x)})^{\otimes 2} ds.$$

よって $\{\pi_* H_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ が $T_x M$ を張ることから $(\nabla X(t,x))(\nabla X(t,x))^*$ の非退化となることが得られる．///

とくに $y \in M$ に集中した Dirac 関数 δ_y との合成が可能となり，

$$\boxed{p^M(t,x,y) = \mathbb{E}[\delta_y(X(t,x))]} \tag{5.3}$$

という等式が成り立つ．とくに §1 で出てきた $\Theta(t)$ に対し，

$$\Theta(t) = \int_M \mathbb{E}[\delta_x(X(t,x))] \lambda_M(dx) \tag{5.4}$$

という表示も成り立つ (跡公式への確率解析的アプローチの芽).

5.3. 熱核の漸近展開

(5.3) を利用して，

$$\boxed{p^M(t,x,x) \sim t^{-d/2}\{c_0(x) + c_1(x)t + \dots\} \quad (t \downarrow 0)} \tag{5.5}$$

という漸近展開が成立することを見る．さらに $c_i(x)$ が曲率から得られることも見よう．次のような手順で振り返る;

i) 局所的なブラウン運動への置き換え,

ii) 局所的ブラウン運動の別表示

iii) 漸近展開の応用 (確率テーラー展開)

5.3.1. 局所的なブラウン運動への置き換え

まず，局所的なブラウン運動への置き換えについてみよう．U, V, W を $\overline{U} \subset V$, $\overline{V} \subset W$ となるような座標近傍とし，W を $\mathbb{R}^d$ の開近傍と見なし，M 上のリーマン計量 g を V 上では g，$\mathbb{R}^d \setminus W$ 上では $\mathbb{R}^d$ の平坦な計量となるように $\mathbb{R}^d$ 上の計量 $\tilde{g}$ に拡張しておく;

$$\tilde{g} : \mathbb{R}^d \text{ 上のリーマン計量}; \quad \tilde{g} = \sum_{i,j=1}^{d} g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{on } V, \quad = \sum_{i=1}^{d} dx^i dx^i \text{on } \mathbb{R}^d \setminus W.$$

$\tilde{g}$ に付随する $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動を $\tilde{X}(t, x; w)$ とする; (3.10) より，

$$d\tilde{X}^i(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_\alpha^i(\tilde{X}(t, x)) dw^\alpha(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} (\tilde{g}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i)(\tilde{X}(t, x)) dt. \tag{5.6}$$

ただし，$\tilde{g}^{-1} = (\tilde{g}^{ij})$，$\sum_\alpha \sigma_\alpha^i \sigma_\alpha^j = \tilde{g}^{ij}$，$\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ は $\tilde{g}$ に対する Levi-Civita 接続のクリストフェル記号.

このとき $\tilde{p}(t, x, y)$ で $\tilde{g}$ に付随する熱核を表せば，

$$\tilde{p}(t, x, y) = \mathbb{E}[\delta_y(\tilde{X}(t, x))]$$

となる (既知)．さらに次のような評価式が成り立つ．

$$\exists c_1, c_2, \delta > 0; \quad \sup_{x,y \in U} |p^M(t, x, y) - \tilde{p}(t, x, y)| \le c_1 e^{-c_2/t} \quad \forall t \in (0, \delta). \tag{5.7}$$

よって漸近展開 (5.5) を得るには，$p^M(t, x, x)$ の代わりに $\tilde{p}(t, x, x)$ を用いて良い．

5.3.2. 時空変換

$V_\alpha(x) = \sum_{i=1}^d \sigma_\alpha(x)^i (\partial/\partial x^i)$，

$$V_0 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{d} V_\alpha \sigma_\alpha^i + \sum_{j,k=1}^{d} (\tilde{g}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i) \right\} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とおけば，(5.6) は，Stratonovich 積分を用いて

$$d\tilde{X}(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{d} V_\alpha(\tilde{X}(t, x)) \circ dw^\alpha(t) + V_0(\tilde{X}(t, x)) dt \tag{5.8}$$

と表すことができる．$X^\varepsilon(t, x; w)$ を

$$dX^\varepsilon(t, x) = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{d} V_\alpha(X^\varepsilon(t, x)) \circ dw^\alpha(t) + \varepsilon^2 V_0(X^\varepsilon(t, x)) dt, \quad X^\varepsilon(0, x) = x \tag{5.9}$$

の解とすれば，上の式との比較から $X(\varepsilon^2, x)$ は $X^\varepsilon(1, x)$ と同一視できる．

$(\because)$ $\hat{V}_0^i(x) = -(1/2)\sum_{j,k=1}^d (\tilde{g}^{jk}\tilde{\Gamma}^i_{jk})$，$s_{n,k} = k/n$ $(0 \le k \le n,\ n \in \mathbb{N})$ とする．ブラウン運動は，$w(\varepsilon^2\cdot) \overset{\mathrm{law}}{\sim} \varepsilon w(\cdot)$ という時空変換不変性を持つので，(5.8) は次のように変形される．

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(\varepsilon^2 t, x) &= x + \lim_{n\to\infty}\Bigg\{\sum_{\alpha=1}^d \sum_{k=0}^{n-1} V_\alpha(\tilde{X}(\varepsilon^2 t s_{n,k}, x))\{w^\alpha(\varepsilon^2 t s_{n,k+1}) - w^\alpha(\varepsilon^2 t s_{n,k})\} \\
&\qquad + \hat{V}_0(\tilde{X}(\varepsilon^2 t s_{n,k}, x))\{\varepsilon^2 t/n\}\Bigg\} \\
&\sim x + \lim_{n\to\infty}\Bigg\{\varepsilon\sum_{\alpha=1}^d \sum_{k=0}^{n-1} V_\alpha(\tilde{X}(\varepsilon^2 t s_{n,k}, x))\{w^\alpha(t s_{n,k+1}) - w^\alpha(t s_{n,k})\} \\
&\qquad + \varepsilon^2 \hat{V}_0(\tilde{X}(\varepsilon^2 t s_{n,k}, x))\{t/n\}\Bigg\} \\
&= x + \varepsilon\sum_{\alpha=1}^d \int_0^t V_\alpha(\tilde{X}(\varepsilon^2 s, x))dw^\alpha(s) + \int_0^t \hat{V}_0(\tilde{X}(\varepsilon^2 s, x))ds \\
&= x + \varepsilon\sum_{\alpha=1}^d \int_0^t V_\alpha(\tilde{X}(\varepsilon^2 s, x))\circ dw^\alpha(s) + \varepsilon^2\int_0^t V_0(\tilde{X}(\varepsilon^2 s, x))ds. \quad ///
\end{aligned}$$

したがって

$$\tilde{p}(\varepsilon^2, x, x) = \mathbb{E}[\delta_x(X^\varepsilon(1,x))] = \varepsilon^{-d}\mathbb{E}\big[\delta_0\big(\{X^\varepsilon(1,x) - x\}/\varepsilon\big)\big]. \tag{5.10}$$

5.3.3. 確率テーラー展開

(5.2) と (5.10) より，$\{X^\varepsilon(1,x) - x\}/\varepsilon$ の漸近展開を得れば，熱核の対角漸近展開 (5.5) が従う．

簡単のため，$w^0(t) = t$ と約束し，(5.9) を繰り返し用いれば，$X^\varepsilon(1,x)$ を ε のオーダーで漸近展開することが可能となる．実際，Stratonovich 型確率積分は通常の連鎖定理を満たすことに注意すれば，通常の Taylor 展開と全く同様に次のような展開が帰納的に実行できる．

$$\begin{aligned}
X^\varepsilon(1,x) &= x + \sum_{\beta=0}^d \varepsilon^{2-\min\{\beta,1\}}\int_0^1 V_\beta(X^\varepsilon(s,x))\circ dw^\beta(s) \\
&= x + \sum_{\beta=0}^d \varepsilon^{2-\min\{\beta,1\}} w^\beta(1) \\
&\quad + \sum_{\beta,\gamma=0}^d \varepsilon^{4-\min\{\beta,1\}-\min\{\gamma,1\}}\int_0^1\left(\int_0^s V_\gamma[V_\beta](X^\varepsilon(u,x))\circ dw^\gamma(u)\right)\circ dw^\beta(s) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

ただし，ベクトル場 V_α をベクトルと見なすときは $[V_\alpha]$ と書いた．これをオーダーにあわせて整理しよう． そのため $\mathcal{A} = \{\emptyset\}\cup\bigcup_{n=1}\{0,1,\ldots,d\}^n$ とし，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}$ に

対し，

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{\alpha} = \emptyset, \\ p, & \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \end{cases}, \quad \|\boldsymbol{\alpha}\| = |\alpha| + \#\{j|\alpha_j = 0\}$$

とおく．$\mathbb{R}$ 値確率変数 $S^{\boldsymbol{\alpha}}$ と $\mathbb{R}^d$ 値確率変数 f_n を次で定義する．

$$S^{\boldsymbol{\alpha}} = \int_0^1 \circ dw^{\alpha_1}(t_1) \int_0^{t_1} \circ dw^{\alpha_2}(t_2) \cdots \int_0^{t_{|\boldsymbol{\alpha}|-1}} \circ dw^{|\boldsymbol{\alpha}|}(t_{|\boldsymbol{\alpha}|}),$$

$$f_n(x) = \sum_{\|\boldsymbol{\alpha}\|=n} (V_{\alpha_{|\boldsymbol{\alpha}|}} \circ \cdots V_{\alpha_2})[V_{\alpha_1}](x) S^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

このとき次のような展開が成立する．

$$\boxed{X^\varepsilon(1,x) \sim f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \cdots \ \text{ in } \mathbf{D}^\infty \text{ as } \varepsilon \downarrow 0.} \tag{5.11}$$

さらに

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \sigma_\alpha^i \sigma_\alpha^j = \tilde{g}^{ij}$$

となることに注意すれば，$\{X^\varepsilon(1,x) - x\}/\varepsilon$ は一様非退化となる．

(5.2) に現れる Φ_k を決定するために，次のような形式的な計算を行う (関数の形式的な Taylor 展開は (5.2) のものとは見かけが違う)．

$$\begin{aligned} \delta_0(f_1 + \varepsilon f_2 + \ldots) &= \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{1}{|\beta|!} \partial^\beta \delta_0(f_1) \prod_{j=1}^{|\beta|} \{\varepsilon f_2^{\beta_j} + \varepsilon^2 f_3^{\beta_j} + \ldots\} \\ &= \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \sum_{(n_j) \in \mathcal{B}(k,\beta)} \frac{1}{|\beta|!} \partial^\beta \delta_0(f_1) \prod_{j=1}^{|\beta|} f_{n_j}^{\beta_j}, \end{aligned}$$

ただし $f_n = (f_n^1, \ldots, f_n^d)$，$\mathcal{B} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, \ldots, d\}^n$，$|\beta| = 0$ $(\beta = \emptyset)$，$= n$ $(\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n))$，

$$\mathcal{B}(k,\beta) = \Big\{ (n_j)_{1 \leq j \leq |\beta|} \,|\, n_j \geq 2, \sum_{j=1}^{|\beta|} n_j = k + |\beta| \Big\}.$$

これより

$$\Phi_k = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \sum_{(n_j) \in \mathcal{B}(k,\beta)} \frac{1}{|\beta|!} \partial^\beta \delta_0(f_1) \prod_{j=1}^{|\beta|} f_{n_j}^{\beta_j}$$

とおけば，漸近展開

$$\delta_0(\{X^\varepsilon(1,x) - x\}/\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d} \{\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \ldots\} \quad \text{in } \widetilde{\mathbf{D}}^{-\infty}$$

を得る．

$f_n(-w) = (-1)^n f_n(w)$ に注意すれば，$\Phi_k(-w) = (-1)^k \Phi(w)$ となり，w と $-w$ は同じ分布を持つから

$$\mathbb{E}[\Phi_{2k+1}] = 0.$$

したがって次の熱核の漸近展開を得る.

$$\boxed{p^M(t,x,x) \sim t^{-d/2}\{c_0(x) + c_1(x)t + \dots\} \quad (t \downarrow 0), \quad c_k(x) = \mathbb{E}[\Phi_{2k}].}$$

測地座標を用いれば，$f_1(w) = w(1)$ となり，

$$\Phi_k = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \sum_{(n_j)\in\mathcal{B}(k,\beta)} \sum_{j=1}^{|\beta|} \sum_{\|\boldsymbol{\alpha}^{(j)}\|=n_j} \prod_{j=1}^{|\beta|} (V_{\alpha^{(j)}_{|\boldsymbol{\alpha}^{(j)}|}} \circ \cdots V_{\alpha^{(j)}_2})[V_{\alpha^{(j)}_1}]^{\beta_j}(x)$$
$$\times \frac{1}{|\beta|!}\partial^\beta \delta_0(w(1)) \prod_{j=1}^{|\beta|} S^{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}.$$

前半の $\prod_{j=1}^{|\beta|}(V_{\alpha^{(j)}_{|\boldsymbol{\alpha}^{(j)}|}} \circ \cdots V_{\alpha^{(j)}_2})[V_{\alpha^{(j)}_1}]^{\beta_j}(x)$ という項達から曲率の微分を含む多項式が出現し，後半の $\mathbb{E}[\frac{1}{|\beta|!}\partial^\beta\delta_0(w(1))\prod_{j=1}^{|\beta|} S^{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}]$ はその係数となる定数を与える．たとえば

$$c_0(x) = (2\pi)^{-d/2}, \quad c_1(x) = (2\pi)^{-d/2}S(x)/12,$$
$$c_2(x) = \frac{1}{720(2\pi)^{d/2}}\left\{\frac{5}{2}S(x)^2 - \|R_{ij}(x)\|^2 + \|R_{ijk\ell}(x)\|^2\right\} + \frac{1}{120}\triangle_M S(x).$$

詳しくは [44].

文献について

この節に関しては [16, 17, 47] を参考にした.

6. Gauss-Bonnet-Chern の定理

6.1. de Rham-Kodaira のラプラシアンの熱核とウィナー・インテグラル

M を向き付けられたコンパクト・リーマン多様体とする．さらに $d = \dim M = 2\ell$ と偶数次元であることを仮定する．$\Lambda^p(M)$ を M 上の p 形式の全体，$\Lambda(M) = \sum_{p=0}^d \oplus\Lambda^p(M)$ とする．外微分 d とその共役 d^* を用いて de Rham-Kodaira のラプラシアン $\Box = -(dd^* + d^*d)$ を定義する．熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Box u, \quad u|_{t=0} = \alpha \in \Lambda(M) \tag{6.1}$$

の解がブラウン運動を用いて表示できることを見よう.

$\mathbb{R}^d$ の直交基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ を固定する．$r \in \mathcal{O}(M)$ の与える等距離線形写像 $r : \mathbb{R}^d \to T_{\pi(r)}M$ を，自然に $\bigwedge^p \mathbb{R}^d \to \bigwedge^p T_x^*M$ に拡張し ($\mathbb{R}^d$ はその双対空間と同一視し，共役基底を共役基底に送る)，それもまた r で表す．$v \in \mathbb{R}^d$ に対し，$a_v^* : \bigwedge^p \mathbb{R}^d \to \bigwedge^{p+1} \mathbb{R}^d$ を

$$a_v^*(\alpha) = v \wedge \alpha$$

とおき，a_v をその共役とする．$a_i^* = a_{\mathbf{e}_i}^*$，$a_i = a_{\mathbf{e}_i}$ と略記する.

$$J_{ijkm}(r) = \langle \Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m \rangle$$

とおき，$\widetilde{J}(r):\Lambda(M)\to\Lambda(M)$ を

$$\widetilde{J}(r)=\sum_{i,j,k,m=1}^{d}J_{ijkm}(r)a_i^*a_ja_k^*a_m$$

と定義する．$\mathrm{End}(\Lambda(\mathbb{R}^d))$ 値常微分方程式

$$\frac{dM}{dt}(t)=\frac{1}{2}M(t)\widetilde{J}(r(t,r)),\quad M(0)=\mathrm{id}$$

の解を用いて (6.1) の解は

$$u(x,t)=r\mathbb{E}[M(t)r(t,r)^{-1}\alpha(X(t,r))]$$

と表される ($x=\pi(r)$)．これより (6.1) の基本解 $e(t,x,y)$ は次で与えられる．

$$\boxed{e(t,x,y)=\mathbb{E}[rM(t)r(t,r)^{-1}\delta_y(X(t,r))].} \tag{6.2}$$

6.2. Gauss-Bonnet-Chern の定理

$$\Lambda_+(M)=\sum_{p:\text{偶数}}\oplus\Lambda^p(M),\quad \Lambda_-(M)=\sum_{p:\text{奇数}}\oplus\Lambda^p(M)$$

と $\Lambda(M)$ を分解し，線形写像 $(-1)^F:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$ を次で定義しする．

$$(-1)^F\alpha=\pm\alpha,\quad \alpha\in\Lambda_\pm(M)\quad(\text{復号同順})$$

線形写像 $A:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$ のスーパートレース $\mathrm{Str}\,A$ を

$$\mathrm{Str}\,A=\mathrm{tr}\,((-1)^FA)$$

と定義する．

$$\int_M\mathrm{Str}\,e(t,x,x)\lambda_M(dx)=\chi(M)(=\text{Euler 数})$$

という関係式が，de Rham の定理と $e(t,x,y)$ の固有関数展開から結論でき，これにより

$$\mathrm{Str}\,e(t,x,x)=C(x)+o(1)\quad(t\downarrow 0)\quad(C(x):=\text{Chern 多項式}) \tag{6.3}$$

が証明できれば，Chern-Gauss-Bonnet の定理が得られる (heat equation method)．この漸近式を熱核の表現 (6.2) と漸近展開 (5.2) を通じて証明できる．

6.3. 局所座標のもと

x の近傍 U に測地座標を導入し，この座標を通じて $\mathbb{R}^d$ との同一視を行う (§5.3.1 ではチルダを付けてユークリッド空間を明示的に述べたが，ここでは簡単のため

チルダは略す)．この座標のもと $x=0$ であり，リーマン計量，クリストフェルの記号はリーマン曲率 R_{ijkm} を用いて

$$g_{ij}(y)=\delta_{ij}+\frac{1}{3}\sum_{k,m}R_{imkm}(0)y^ky^m+O(|y|^3)$$
$$\Gamma^i_{jk}(y)=-\frac{1}{3}\sum_{m}\{R_{ijkm}(0)+R_{ikjm}(0)\}y^m+O(|y|^2)$$

となる．$\sigma=g^{-1/2}$ とし，(5.9) の X^ε に関する方程式を次の伊藤型に書き改める．

$$\begin{cases} d(X^\varepsilon)^i(t)=\varepsilon\sum_{\alpha=1}^{d}\sigma^i_\alpha(X^\varepsilon(t))dw^\alpha(t)-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{j,k=1}^{d}(g^{jk}\Gamma^i_{jk})(X^\varepsilon(t))dt \\ d(e^\varepsilon)^i_j(t)=-\sum_{k,m=1}^{d}\Gamma^j_{mk}(X^\varepsilon(t))(e^\varepsilon)^k_j(t)\circ d(X^\varepsilon)^m(t), \\ (X^\varepsilon(0),e^\varepsilon(0))=(0,I) \end{cases} \tag{6.4}$$

線形写像 $\Pi^\varepsilon(t):\Lambda(\mathbb{R}^d)\to\Lambda(\mathbb{R}^d)$ を

$$\Pi^\varepsilon(t)(\mathbf{e_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e_{i_p}})=(e^\varepsilon)^{i_1}(t)\wedge(e^\varepsilon)^{i_p}(t)$$

により定める．$r^\varepsilon(t)=(X^\varepsilon(t),e^\varepsilon(t))\in\mathbb{R}^d\times O(d)$ とし，$M^\varepsilon(t)$ を次の常微分方程式の解とする．

$$\frac{dM^\varepsilon}{dt}(t)=\frac{\varepsilon^2}{2}M^\varepsilon(t)\widetilde{J}(r^\varepsilon(t)),\quad M^\varepsilon(0)=\mathrm{id} \tag{6.5}$$

(局所座標を通じて $U\times O(d)=\pi^{-1}(U)\subset\mathcal{O}(M)$ という同一視を行っている)．このとき (5.7) と同様の局所化が成立し，

$$e(\varepsilon^2,x,x)=\mathbb{E}[M^\varepsilon(1)\Pi^\varepsilon(1)\delta_0(X^\varepsilon(1))]+O(e^{-c/\varepsilon^2}) \tag{6.6}$$

となる．したがって

$$\mathrm{Str}\,e(\varepsilon^2,x,x)=\mathrm{Str}\left(\mathbb{E}[M^\varepsilon(1)\Pi^\varepsilon(1)\delta_0(X^\varepsilon(1))]\right)+O(e^{-c/\varepsilon^2})$$

である．

(6.6) の項 $\mathbb{E}[\cdots]$ の漸近展開を行う．(6.4) より，$X^\varepsilon(1)=\varepsilon w(1)+O(\varepsilon^2)$ となり，これより

$$\delta_0(X^\varepsilon(1))=\varepsilon^{-d}\delta(w(1))+O(\varepsilon^{-d+1}) \tag{6.7}$$

である．つぎに

$$\theta^\varepsilon_{ij}(t)=-\sum_{m=1}^{d}\int_0^t\Gamma^i_{mj}(X^\varepsilon(s))\circ d(X^\varepsilon)^m(s)$$

とおけば，

$$\Pi^\varepsilon(t)=I+\int_0^t\Pi^\varepsilon(t)\circ d\theta^\varepsilon_{ij}(t)a_i^*a_j$$

となる．これより，確率テーラー展開をすれば，

$$\Pi^\varepsilon(1) = I + A_1^\varepsilon + \cdots + A_\ell^\varepsilon + O(\varepsilon^{2\ell+2}). \tag{6.8}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
A_m^\varepsilon &= \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m\\ j_1,\ldots,j_m}} \int_0^1 \circ d\theta_{i_1j_1}^\varepsilon(t_1)\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}} \circ d\theta_{i_mj_m}^\varepsilon(t_m) a_{j_1}^* a_{i_1}\cdots a_{j_m}^* a_{j_m}\\
&= \varepsilon^{2m}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m\\ j_1,\ldots,j_m}} \int_0^1 \circ dC_{i_1j_1}^\varepsilon(t_1)\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}} \circ dC_{i_mj_m}^\varepsilon(t_m) a_{j_1}^* a_{i_1}\cdots a_{j_m}^* a_{j_m}\\
&\quad + O(\varepsilon^{2m+1}),\\
C_{ij}(t) &= \frac{1}{3}\sum_{k,m=1}^{d}\{R_{imjk}(0)+R_{ijmk}(0)\}\int_0^t w^k(s)\circ dw^m(s).
\end{aligned}$$

最後に (6.5) を Taylor 展開すれば，$M^\varepsilon(1)$ は次のような表示を持つ．

$$M^\varepsilon(1) = I + B_1^\varepsilon + \cdots + B_\ell^\varepsilon + O(\varepsilon^{2\ell+2}). \tag{6.9}$$

ただし

$$\begin{aligned}
B_m^\varepsilon &= \varepsilon^{2n}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n\\ j_1,\ldots,j_n\\ k_1,\ldots,k_n\\ m_1,\ldots,m_n}} \int_0^1 J_{i_1j_1k_1m_1}^\varepsilon(t_1)dt_1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} J_{i_nj_nk_nm_n}^\varepsilon(t_n)dt_n\\
&\qquad\qquad \times a_{i_1}^* a_{j_1} a_{k_1}^* a_{m_1}\cdots a_{i_n}^* a_{j_n} a_{k_n}^* a_{m_n}\\
&= \frac{\varepsilon^2}{n!}\biggl(\sum_{i,j,k,m}(R_{ijkm}(0)/2)a_i^* a_j a_k^* a_m\biggr)^n + O(\varepsilon^{2n+1}),\\
J_{ijkm}^\varepsilon(t) &= \frac{1}{2}\widetilde{J}_{ijkm}(r^\varepsilon(t)).
\end{aligned}$$

(6.7)，(6.8)，(6.9) を (6.6) に代入する．このときに

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Str}\,(a_{i_1}^*\ldots a_{i_p}^* a_{j_1}\ldots a_{j_q}) = \begin{cases}(-1)^{d(d-1)/2}, & p=q=d,\\ 0, & \text{その他},\end{cases}\\
&a_ia_j = -a_ja_i,\quad a_i^*a_j^* = -a_j^*a_i^*,\quad a_ia_j^*+a_j^*a_i = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

という関係式から

$$2n+m < d = 2\ell \implies \mathrm{Str}\,(B_nA_m) = 0$$

となることに注意すれば,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Str}\,(M^\varepsilon(1)\Pi^\varepsilon(1)) = \mathrm{Str}\,(B_\ell) + O(\varepsilon^{2\ell+1}) \\
&\quad = \frac{\varepsilon^d}{2^\ell \ell!}\mathrm{Str}\left(\left\{\sum_{i,j,k,m} R_{ijkm}(0)a_i^* a_j a_k^* a_m\right\}^\ell\right) + O(\varepsilon^{d+1}) \ \text{ in } \mathbf{D}^\infty \\
&\quad = \frac{\varepsilon^d}{2^d \ell!}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}(d)} \mathrm{sgn}\sigma \mathrm{sgn}\tau R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau(1)\tau(2)}(0)\dots R_{\sigma(d-1)\sigma(d)\tau(d-1)\tau(d)}(0) \\
&\qquad\qquad + O(\varepsilon^{d+1}) \text{ in } \mathbf{D}^\infty.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Str}\, e(\varepsilon^2, x, x) = \mathbb{E}\big[\mathrm{Str}\,(M^\varepsilon(1)\Pi^\varepsilon(1)\delta_0(X^\varepsilon(1)))\big] + O(e^{-c/\varepsilon^2}) \\
&= \frac{1}{2^{3d/2}\pi^\ell \ell!}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}(d)} \mathrm{sgn}\sigma \mathrm{sgn}\tau R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau(1)\tau(2)}(0)\dots R_{\sigma(d-1)\sigma(d)\tau(d-1)\tau(d)}(0) + O(\varepsilon) \\
&= C(x) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

よって (6.3) が示された.

文献について
この節に関しては [16, 17] を参考にした．さらなる拡張については [47, 38, 39] がある.

7. KdV 方程式のソリトン解

7.1. 無反射ポテンシャル

関数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が散乱データ $\{\eta_j, m_j > 0\}_{1\le j\le n}$ を持つ無反射ポテンシャルであるとは，行列

$$G(x) = \Big(\frac{\sqrt{m_i m_j}e^{-(\eta_i+\eta_j)x}}{\eta_i+\eta_j}\Big)_{1\le i,j\le n}$$

を用いて

$$u(x) = -2(d/dx)^2\log\det(I+G(x))$$

と表されることをいう．m_j の代わりに $m_j(t) = m_j\exp[-2\eta_j^3 t]$ を用いて定義される無反射ポテンシャルを $u(x,t)$ とすれば，すなわち

$$\begin{gathered}
G(x,t) = \Big(\frac{\sqrt{m_i(t)m_j(t)}e^{-(\eta_i+\eta_j)x}}{\eta_i+\eta_j}\Big)_{1\le i,j\le n}, \\
u(x,t) = -2(\partial/\partial x)^2\log\det(I+G(x,t))
\end{gathered}$$

とすれば，$v(x,t) = -u(x,t)$ は KdV 方程式

$$\partial_t v = (3/2)v\partial_x v + (1/4)\partial_x^3 v \tag{7.1}$$

の n ソリトン解である.

7.2. ウィナー・インテグラルによる表現

$$\mathcal{P}_n = \{p = {}^t(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \neq p_j (i \neq j)\},$$
$$\mathcal{C}_n = \{c = {}^t(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \mid c_i > 0, i = 1, \dots, n\}$$

とおく．$p \in \mathcal{P}_n$ に対し，$D = D_p = \mathrm{diag}(p_1, \dots, p_n)$,

$$\xi_p(y, w) = e^{yD} \int_0^y e^{-zD} dw(z) = w(y) - e^{yD} D \int_0^y w(z) e^{-zD} dz, \quad y \geq 0$$

と定義する (この節では n 次元ウィナー空間 $\mathcal{W}^n$ を考え，$w \in \mathcal{W}^n$ である)．$\xi_p(y)$ は Ornstein-Uhlembeck 過程と呼ばれており，次の確率微分方程式の解として得られる．

$$d\xi_p(y) = dw(y) + D\xi_p(y) dy, \quad \xi_p(0) = 0.$$

$a > 0$，$c \in \mathcal{C}_n$，と対称行列 $\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対し，

$$q_{p,c,a,\beta}(x) = -\frac{a^2}{2} \int_0^x \langle c, \xi_p(y) \rangle^2 dy + \frac{1}{2} \langle \beta \xi_p(x), \xi_p(x) \rangle.$$

とおく．

$(p, c) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{C}_n$ に対し，散乱データ η_j, m_j を次のように定義する．必要ならば並べ替えることで，$p_1, \dots, p_n$ は

$$|p_1| \leq |p_2| \leq \cdots \leq |p_n|,$$
$$\exists m \text{ s.t.} \quad p_{j(\ell)} = -p_{j(\ell)+1} > 0,\ \ell \leq m,\ \ \#\{|p_1|, \dots, |p_n|\} = n - m$$

を満たすと仮定してよい．$0 < r_1 < \cdots < r_{n-m}$ を方程式

$$1 + a^2 \sum_{j=1}^n c_j^2 / (p_j^2 - r) = 0$$

の解とする．η_j を

$$\{\eta_1, \dots, \eta_n\} = \{p_{j(\ell)}, r_j^{1/2}, \ell \leq m, j \leq n - m\}$$

と定め，m_j を

$$m_i = \begin{cases} 2\eta_i \dfrac{c_{j(\ell)+1}^2}{c_{j(\ell)}^2} \displaystyle\prod_{k \neq i} \frac{\eta_k + \eta_i}{\eta_k - \eta_i} \prod_{k \neq j(\ell), j(\ell)+1} \frac{p_k + \eta_i}{p_k - \eta_i}, & \text{if } i = j(\ell), \\ -2\eta_i \displaystyle\prod_{k \neq i} \frac{\eta_k + \eta_i}{\eta_k - \eta_i} \prod_{k=1}^n \frac{p_k + \eta_i}{p_k - \eta_i}, & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおく．

$\beta = 0$ とし，

$$q_{\mathrm{pot}}(x) = q_{p,c,a,0}(x)$$

とおく．このとき

$$\log\bigl(\mathbb{E}\bigl[\exp\bigl(q_{\mathrm{pot}}(x)\bigr)\bigr]\bigr) = -\frac{1}{2}\log\det(I+G(x)) + \frac{1}{2}\log\det(I+G(0)) - \frac{x}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i+\eta_i).$$

とくに

$$\boxed{\begin{array}{c} u(x) = 4\Bigl(\dfrac{d}{dx}\Bigr)^2 \log\bigl(\mathbb{E}\bigl[\exp\bigl(q_{\mathrm{pot}}(x)\bigr)\bigr]\bigr) \\ \text{は散乱データ } \eta_j, m_j \text{ を持つ無反射ポテンシャルを定める．} \end{array}}$$

$U \in O(n)$ が存在し，

$$D^2 + a^2 c\otimes c = U\mathrm{diag}(\eta_1^2,\dots,\eta_n^2)U^{-1}$$

と対角化できる．このとき

$$\phi(y,t) = U\bigl\{\cosh\bigl(yR+tR^3\bigr) - \sinh\bigl(yR+tR^3\bigr)R^{-1}U^{-1}DU\bigr\}U^{-1},$$
$$\beta(t) = -((\partial_y\phi)\phi^{-1})(0,t) - D$$

とし，

$$q_{\mathrm{KdV}}(x,t) = q_{p,c,a,\beta(t)}(x)$$

とおく．このとき

$$\log\bigl(\mathbb{E}\bigl[\exp\bigl(q_{\mathrm{KdV}}(x,t)\bigr)\bigr]\bigr) = -\frac{1}{2}\log\det(I+G(x,t)) + \frac{1}{2}\log\det(I+G(0,t)) - \frac{x}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i+\eta_i).$$

となる．とくに

$$\boxed{\begin{array}{l} v(x,t) = -4\Bigl(\dfrac{d}{dx}\Bigr)^2 \log\bigl(\mathbb{E}\bigl[\exp\bigl(q_{\mathrm{KdV}}(x,t)\bigr)\bigr]\bigr) \\ \text{は KdV 方程式 (7.1) の解である．} \end{array}}$$

以上は次のような対応関係が成立したことを意味している．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_n \times \mathcal{C}_n & \xrightarrow{\Phi} & \{\text{散乱データ}\} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \{q_{\mathrm{pot}}(x), q_{\mathrm{KdV}}(x,t)\} & \xrightarrow{\Psi} & \left\{\begin{array}{l}\text{無反射ポテンシャル}\\ \text{ソリトン解}\end{array}\right\} \end{array}$$

KdV 方程式の解は当然重ね合わせによって構成することはできないが，ウィナー・インテグラルの指数の肩に乗る $q_{\mathrm{KdV}}(x,t)$ の定義中の $\langle c, \xi_p(t)\rangle$ は 1 次元 Ornstein-Uhlembeck 過程 $\xi_p^1(t),\dots,\xi_p^n(t)$ を c の成分 $c_1,\dots,c_n$ という重みを付けて重ね合わせることを表しており，このレベルで重ね合わせの原理が作用して 1 ソリトン解から n ソリトン解が得られたことになる．

7.3. ウィナー空間における変数変換

これらの証明で基本となるのは以下のような Cameron-Martin[3, 4] に始まるウィナー空間上の変数変換論である．$x > 0$ を固定する．$\phi_a(y)$ を常微分方程式

$$\phi'' - (D^2 + a^2 c \otimes c)\phi = 0$$

の解とし,『$\det \phi_a(y) \neq 0,\ 0 \leq \forall y \leq x$』を仮定する．

$$\beta_{a,x}(y) = -(\phi_a' \phi_a^{-1})(x - y),$$

とし，その対称部分，歪対称部分を $\widetilde{\beta}_{a,x}(y)$，$\widehat{\beta}_{a,x}(y)$ とする．$\kappa_{a,x}(y)$ を常微分方程式

$$\kappa_{a,x}'(y) = \widetilde{\beta}_{a,x}(y)\kappa_{a,x}(y), \quad \kappa_{a,x}(x) = I$$

の解とし，線形変換 $L_{a,x} : \mathcal{W}^n \to \mathcal{W}^n$ を次で定める ($\mathcal{W}^n$ の $[0, x]$ への制限を考えている).

$$L_{a,x}[w](y) = w(y) - \kappa_{a,x}(y) \int_0^y \big(\kappa_{a,x}^{-1}\big)'(u) w(u) du.$$

このとき，任意の有界可測な $f : \mathcal{W}^n \to [0, \infty)$ に対し，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Bigg[f(\xi_p) \exp\Bigg(-\frac{a^2}{2} \int_0^x \langle c, \xi_p(y) \rangle^2 dy + \frac{1}{2} \langle (\widetilde{\beta}_{a,x}(x) - D)\xi_p(x), \xi_p(x) \rangle \\
- \frac{1}{2} \int_0^x |\widehat{\beta}_{a,x}(y)\xi_p(y)|^2 dy \Bigg) \Bigg] \\
= \big(\det \phi_a(0)\big)^{1/2} \big(e^{x \mathrm{tr} D} \det \phi_a(x)\big)^{-1/2} \mathbb{E}[f \circ L_{a,x}].
\end{aligned}$$

文献について

この節は [15] から採った．小谷眞一氏による一般論 [26, 27] の n ソリトンにおける場合の確率解析による詳細な解析となっている．無反射ポテンシャルと KdV 方程式については [43] を参照.

References

[1] S. Aida and K. D. Elworthy, Differential calculus on path and loop spaces. 1. Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces, C. R. Acad. Sci. Paris, **321** (1995), 97–102.

[2] J. M. Bismut, Large deviations and the Malliavin calculus, Birkhäuser, Boston, 1984.

[3] R.H. Cameron and W.T. Martin, The Wiener measure of Hilbert neighbourhoods in the space of real continuous functions, J. Math. Phys. M.I.T., **23** (1944), 195–209.

[4] R.H. Cameron and W.T. Martin, Evaluation of various Wiener integrals by use of certain Sturm-Liouville differential equations, Bull. A.M.S., **51** (1945), 73–90.

[5] A.-B. Cruzeiro and P. Malliavin, Renormalized differential geometry on path spaces; Structural equation and curvature, Jour. Funct. Anal. **138** (1996), 119 – 181.

[6] A.-B. Cruzeiro and P. Malliavin, Non perturbative construction of invariant measure through confinement by curvature, Jour. Math. Pures Appl. **77** (1998), 527 – 537.

[7] K. D. Elworthy, Stochastic differential equations on manifolds, Cambridge Univ. Press, 1982.

[8] K. D. Elworthy, Geometric aspects of diffusions on manifolds, Ecole d'Eté Probabilités de Saint-Flour XV-XVI 1987, 1989, P.L. Henequin ed., Lect. Notes in Math. **1362**, 1989, Springer, 276–425.

[9] S. Fang and P. Malliavin, Stochastic calculus on the path space of a Riemannian manifold, Markovian stochastic calculus, Jour. Funct. Anal. **118** (1993), 249 – 274.

[10] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, McGraw-Hill, 1965. (邦訳:ファインマン経路積分と量子力学, 北原和夫訳, マグロウヒル, 1990.)

[11] T. Fujita and S. Kotani, The Onsager-Machlup functions for diffusion processes, Jour. Math. Kyoto Univ., **22** (1982),115–130.

[12] K. Hara, Wiener functionals associated with joint distributions of exit time and position from small geodesic balls, Ann. Probab., **24** (1996), 825–837.

[13] K. Hara and Y. Takahashi, Lagrangian for pinned diffusion processes, in "Itô's sotchastic calculus and probability theory", N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima, H. Kunita eds., Springer, 1996.

[14] N. Ikeda and S. Manabe, Integrals of differential forms along the path of diffusion processes, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **15** (1979), 827–852.

[15] N. Ikeda and S. Taniguchi, Quadratic Wiener functionals, Kalman-Bucy filters, and the KdV equation, to appear in 'Stochastic Analysis and Related Topics in Kyoto, 2002'.
pdf file `http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~taniguch/`

[16] N. Ikeda and S. Watanabe, Malliavin calculus of Wiener functinals and its applications, in "From local times to global geometry, control and physics", K.D. Elworthy ed., Longman, 1986.

[17] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes, 2nd ed., North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, 1989.

[18] K. Itô, Stochastic differential equations in a differentiable manifold, Nagoya Math. Jour., **1** (1950), 35–47.

[19] K. Itô, Brownian motion in a Lie group, Proc. Japan Acad., **26** (1950), 4–10.

[20] K. Itô, Stochastic differential equations in a differentiable manifold (2), Mem. College of Sci. Univ. Kyoto, **28** (1953), 81–85.

[21] K. Itô, Wiener integral and Feynman integral, Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. II (1960), 228–238.

[22] K. Itô, The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifold, Proc. Int. Congr. Mathemati. (1962), 536–539.

[23] K. Itô, Generalized uniform complex measures in the Hilbertian metric space with their application to the Feynman integral, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. II (1965), 145-161.

[24] J. Jorgenson and S. Lang, どこでも熱核,『数学の最先端，21 世紀への挑戦』Vol.2，シュプリンガー・フェラーク東京，2002.

[25] M. Kac, Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly **73** (1966), 1–23.

[26] S. Kotani, Quadratic functionals of Gaussian processes and KdV equation, 2003 年 10 月名古屋大学集中講義ノート.

[27] S. Kotani, Construction of KdV-flow on generalized reflectionless potentials, preprint, Nov. 2003.

[28] M. Liao, Hitting distributions of small geodesic spheres, Ann. Probab., **16** (1988), 1039–1050.

[29] P. Malliavin, Géométrie différentielle stochastique, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1979.

[30] P. Malliavin, Stochastic analysis, Springer, New York, 1997.

[31] 松本裕行・小倉幸雄，確率論とラプラシアン，数学の楽しみ **12** (1999), 39–55.

[32] H. P. McKean and I. M. Singer, Curvature and the eigenvalues of the laplacian, J. Differ. Geo., **1** (1967), 43–69.

[33] S. A. Molchanov, Diffusion processes and Riemannian geometry, Russian Math. Surveys **30** (1975), 1–63.

[34] V. K. Patodi, Curvature and the eigenforms of the laplace operator, Jour. Diff. Geo., **5** (1971), 233–249.

[35] M. Pinsky, Can you feel the shape of a manifold with Brownian motion? Exposition. Math. **2** (1984), 263–271.

[36] M. Pinsky, Local stochastic differential geometry or what can you learn about a manifold by watching Browninan motion? Comptemp. Math., **73** (1988), 263–272.

[37] L. S. Schulman, Techniques and applications of path integration, Jhon Wiley & Sons, 1981. (邦訳:ファインマン経路積分, 高塚和夫訳, 講談社, 1995.)

[38] I. Shigekawa and N. Ueki, A stochastic approach to the Riemann-Roch theorem, Osaka Jour. Math., **25** (1988), 759–784.

[39] I. Shigekawa, N. Ueki, and S. Watanabe, A probabilistic proof of the Gauss-Bonnet-Chern theorem for manifolds with boundary, Osaka Jour. Math., **26** (1989), 897–930.

[40] D. W. Stroock, An introduction to the analysis of paths on a Riemannian manifold, AMS, 2000.

[41] D. W. Stroock and S. Taniguchi, Diffusions as integral curves, or Stratonovich without Itô, in "The Dynkin Festschrift; Markov processes and their applications", M. Friedlin ed., Birkhäuser, 1994, 333–369.

[42] Y. Takahashi and S. Watanabe, The probability functiionals (Onsager-Machlup functions) of diffusion processes, Proc. L.M.S. Symp. on Stochastic Integrals at Durham, Lect. notes in Math., **851** (1980), 433–463.

[43] 田中俊一・伊達悦朗，KdV 方程式，紀伊國屋，1979.

[44] H. Uemura, On a short time expansion of the fundamental solution of heat equations by the method of Wiener functionals, Jour. Math. Kyoto Univ., **27** (1987), 417–431.

[45] S. R. S. Varadhan, On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variavle coefficients, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), 431–455.

[46] S. R. S. Varadhan, Diffusion processes in a small time interval, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), 659–685.

[47] S. Watanabe, Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculs) and its applications to heat kernels, Ann. Probab., **15** (1987), 1–39.