

中心極限定理

石崎 翔

平成 23 年 3 月 23 日

1 概要

中心極限定理は、古くは 2 項分布という特別な場合で、ド・モルガンやラプラスにより証明されている。今回はそれより一般的な、伊藤 雄二著「確率論」[1]に書かれている、独立な確率変数による中心極限定理を証明する。その際、同書で多価関数 $\log$ を利用していた箇所を、指数関数を直接考察することで正確に述べなおすことが主眼である。

2 定義・命題

Def 1. (特性関数)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 $X(\omega)$ が存在したとき、

$$\phi_X(t) := E[e^{itX}] = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)} dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x)$$

を、 X (もしくは X の分布関数 F_X) の特性関数という。但し、 i は、 $\sqrt{-1}$ を表す。

以下、特性関数の性質を列挙する。(証明は省略する.)

Prop 1. (特性関数の性質)

ϕ_X が X の特性関数ならば、次の性質を満たす。

- (a) $|\phi_X(t)| \leq 1 = \phi_X(0)$.
- (b) ϕ_X は $\mathbb{R}$ 上一様連続.
- (c) X, Y が独立ならば、 $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$.

Prop 2. (F_X と ϕ_X の対応)

ϕ が分布関数 F の特性関数であるとき, F の任意の連続点 a, b ($a < b$) に対して,

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\exp[-ita] - \exp[-itb]}{it} \phi(t) dt$$

が成立する.

この結果から, 分布関数と特性関数の 1 対 1 対応は明らかである.

Prop 3. (Lévy の連続性定理)

各 n に対して ϕ_n は分布関数 F_n の特性関数であるとする. $\{\phi_n(t)\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき, $t = 0$ で連続な関数 $\phi(t)$ に収束するならば, ϕ はある分布関数 F の特性関数であり, $\{F_n\}$ は F に弱収束する.

Prop 4. 2 変数確率変数列 $\{X_{n,j} : 1 \leq j \leq k_n, n = 1, 2, \dots\}$ について,

(a) n を固定したとき, $\{X_{n,j} : 1 \leq j \leq k_n, n = 1, 2, \dots\}$ は独立.

(b) 各 n, j に対して, $E[X_{n,j}] = 0$

(c) 各 n に対して, $\sum_{j=1}^{k_n} \text{Var}[X_{n,j}] = \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2] = 1$

が成立している. このとき, 次の 2 条件は同値である.

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} P[|X_{n,j}| > \varepsilon] = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0)$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\phi_{n,j}(t) - 1| = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

3 中心極限定理

Theorem 1. (中心極限定理: *Central Limit Theorem*)

$\{X_{n,j} : 1 \leq j \leq k_n, n = 1, 2, \dots\}$ は, 先の Prop 4. の (a)~(c) を満たしているとする. このとき,

- (i) $\{X_{n,j}\}$ は先の Prop 4. の (d) を満たす.
- (ii) $n \rightarrow \infty$ のとき, $Y_n := \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数に法則収束する.

を満たすための必要十分条件は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \varepsilon] = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad \dots (*)$$

が成り立つことである.

上の (*) を, リンドバーグ条件という.

Proof. (十分条件)

(i) については, Prop 4. より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\phi_{n,j}(t) - 1| = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

を示せばよい.

$\forall t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned} |\phi_{n,j}(t) - 1| &= |E[e^{itX_{n,j}}] - 1| = |E[e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j}]| \\ &\leq E[|e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j}|] \end{aligned}$$

テイラー展開から, $|e^{i\theta} - 1 - i\theta| \leq \frac{1}{2}\theta^2 \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})$ なので,

$$|\phi_{n,j}(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2} E[X_{n,j}^2]$$

このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} |\phi_{n,j}(t) - 1| &\leq \frac{t^2}{2} \{E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \varepsilon] + E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| \leq \varepsilon]\} \\ &\leq \frac{t^2}{2} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \varepsilon] + \frac{t^2}{2} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

がすべての n, j で成立する。したがって,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\phi_{n,j}(t) - 1| &\leq \max_{1 \leq j \leq k_n} \left\{ \frac{t^2}{2} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \varepsilon] \right\} + \frac{t^2}{2} \varepsilon^2 \\ &\leq \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \varepsilon] + \frac{t^2}{2} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

ここでリンドバーグ条件から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\phi_{n,j}(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2} \varepsilon^2$$

が成立する。 $\varepsilon > 0$ は任意なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\phi_{n,j}(t) - 1| = 0$$

が成立する。

(ii) を示す. (i) より, n を十分大きな値として,

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} |\phi_{n,j}(t) - 1| < \frac{1}{2}$$

とする. 又, $\log$ を $\log 1 = 0$ となる分枝とする. $\log$ は, $D = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$ で, 正則である.

Y_n の特性関数を ϕ_{Y_n} とすると,

$$\begin{aligned} \phi_{Y_n}(t) &= \prod_{j=1}^{k_n} \phi_{n,j}(t) = \prod_{j=1}^{k_n} e^{\log \phi_{n,j}(t)} \\ &= \exp \left[\sum_{j=1}^{k_n} \log \phi_{n,j}(t) \right] \end{aligned}$$

である. ${}^1N(0, 1)$ に従う確率変数の特性関数 $\phi(t)$ は, $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ と与えられるから,

Lévy の連続性定理より, 任意の t において, 次を示せば十分である.

$$\sum_{j=1}^{k_n} \log \phi_{n,j}(t) \rightarrow -\frac{t^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

¹テキスト [1] では, これを, $\log \prod_{j=1}^{k_n} \phi_{n,j}(t) = \sum_{j=1}^{k_n} \log \phi_{n,j}(t)$ と書いてある. しかし, この $\log \prod_{j=1}^{k_n} \phi_{n,j}(t)$ が $\log$ の定義域に入るかは, 一般にはわからない.

ここで,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{k_n} \log \phi_{n,j}(t) + \frac{t^2}{2} \right| &\leq \underbrace{\left| \sum_{j=1}^{k_n} \log \phi_{n,j}(t) + \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) \right|}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\left| \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) + \frac{t^2}{2} \right|}_{(2)} \end{aligned}$$

と分けて, (1), (2) 共に $n \rightarrow \infty$ のとき, 0 に収束することを示す.

(1) について,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{k_n} \log \phi_{n,j}(t) + \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) \right| &\leq \sum_{j=1}^{k_n} |\log \phi_{n,j}(t) + 1 - \phi_{n,j}(t)| \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} |1 - (1 - \log \phi_{n,j}(t)) + 1 - \phi_{n,j}(t)| \end{aligned}$$

ここで,

$$|\log(1 - z) + z| \leq |z|^2, \quad z \in \mathbb{C}, |z| \leq \frac{1}{2}$$

から, (証明は $z = 0$ の周りでのテイラー展開を使って導くことができる.)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{k_n} \log \phi_{n,j}(t) + \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) \right| &\leq \sum_{j=1}^{k_n} |1 - \phi_{n,j}(t)|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n} |1 - \phi_{n,j}(t)| \times \max_{1 \leq j \leq k_n} |1 - \phi_{n,j}(t)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{t^2}{2} E[X_{n,j}^2] \times \max_{1 \leq j \leq k_n} |1 - \phi_{n,j}(t)| \\ &= \frac{t^2}{2} \max_{1 \leq j \leq k_n} |1 - \phi_{n,j}(t)| \quad (\because (c)) \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

一方, (2) についても,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) + \frac{t^2}{2} \right| &= \left| \sum_{j=1}^{k_n} E[e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j} + \frac{t^2}{2}X_{n,j}^2] \right| \quad (\because (b), (c)) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} E \left[|e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j} + \frac{t^2}{2}X_{n,j}^2| \right]
\end{aligned}$$

ここで, (i) と同様に, 任意の $\eta > 0$ について,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k_n} E \left[|e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j} + \frac{t^2}{2}X_{n,j}^2| \right] &= \\
&\sum_{j=1}^{k_n} E \left[|e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j} + \frac{t^2}{2}X_{n,j}^2| : |X_{n,j}| > \eta \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{k_n} E \left[|e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j} + \frac{t^2}{2}X_{n,j}^2| : |X_{n,j}| \leq \eta \right]
\end{aligned}$$

と分けると,

$$\begin{aligned}
|e^{itX_{n,j}(\omega)} - 1 - itX_{n,j} + \frac{t^2}{2}X_{n,j}^2(\omega)| &\leq t^2(X_{n,j}(\omega))^2 \quad (\forall \omega \in \Omega) \\
|e^{itX_{n,j}(\omega)} - 1 - itX_{n,j} + \frac{t^2}{2}X_{n,j}^2(\omega)| &\leq \frac{|t|^3}{6}|X_{n,j}(\omega)|^3 \quad (\forall \omega \in \Omega)
\end{aligned}$$

となるので, (テイラー展開から明らか.)

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) + \frac{t^2}{2} \right| &\leq t^2 \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \eta] \\
&+ \frac{|t|^3}{6} \sum_{j=1}^{k_n} E[|X_{n,j}|^3 : |X_{n,j}| \leq \eta] \\
&\leq t^2 \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \eta] + \frac{|t|^3\eta}{6} \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| \leq \eta] \\
&\leq t^2 \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \eta] + \frac{|t|^3\eta}{6}
\end{aligned}$$

リンドバーグ条件から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) + \frac{t^2}{2} \right| \leq \frac{|t|^3\eta}{6}$$

が成立する． $\eta > 0$ は任意なので，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) + \frac{t^2}{2} \right| = 0$$

となる．

(必要条件)

先の十分条件の中での (1) の証明では (a)~(c), (e) の条件のみを使用した． よって今回の条件においても，

$$\left| \sum_{j=1}^{k_n} \log \phi_{n,j}(t) + \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

は成立する． $\phi_{Y_n}(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (n \rightarrow \infty)$ から，

$$\exp \left[- \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) \right] \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

この結果から，

$$\begin{aligned} \exp \left[-\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) \right\} \right] &= \left| \exp \left[- \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) \right] \right| \\ &\rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるので，

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{k_n} (1 - \phi_{n,j}(t)) \right\} \rightarrow \frac{t^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

つまり，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} E[1 - \cos(tX_{n,j})] = \frac{t^2}{2}$$

となる． よって， 任意の $\eta > 0$ に対し，

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{t^2}{2} - \sum_{j=1}^{k_n} E[1 - \cos(tX_{n,j}) : |X_{n,j}| \leq \eta] \right] \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} E[1 - \cos(tX_{n,j}) : |X_{n,j}| > \eta] \quad (\#) \end{aligned}$$

が成立する．ここで，

$$1 - \cos \theta \leq \frac{\theta^2}{2} \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})$$

であるから，

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| \leq \eta] \right\} \leq (\sharp) \text{ の左辺}$$

一方，チェビシエフの不等式から，

$$(\sharp) \text{ の右辺} \leq 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} P[|X_{n,j}| > \eta] \leq \frac{2}{\eta^2}$$

以上より， $t \neq 0$ では，

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| \leq \eta] \right\} \leq \frac{4}{t^2 \eta^2}$$

となる．従って， $t \rightarrow \infty$ のとき，

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| > \eta] = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2] - \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{n,j}^2 : |X_{n,j}| \leq \eta] \right\} \rightarrow 0$$

となるので，リンドバーク条件が成立する．

□

参考文献

- [1] 「確率論」 朝倉書店 伊藤雄二（著） ISBN-13:978-4254114409