二次形式、局所大域原理、テータ級数[1]

今野拓也[2]

平成 18 年 7 月 10 日

[1] これは 2006 年度前期九州大学における数学特論 17 のノートである。

[2] 電子メール: takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ: http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~takuya/edu.html

目 次

第 **1** 講　導入、二次形式 **1**
- 1.1 導入 . . . 1
- 1.2 対称形式と二次形式 . . . 2
- 1.3 二次空間 . . . 3

第 **2** 講　**Witt** の定理、**Witt** 分解 **5**
- 2.1 Gram-Schmidt の対角化の続き . . . 5
- 2.2 Witt 分解 . . . 6

第 **3** 講　局所体とその構造 **10**
- 3.1 Witt 分解についての補足 . . . 10
- 3.2 非アルキメデス局所体の例 — p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ . . . 10
- 3.3 局所体の分類 . . . 11
- 3.4 非アルキメデス局所斜体の構造 . . . 12
- 3.5 補足：Hensel の補題 . . . 13

第 **4** 講　局所体上の斜体 **15**
- 4.1 非アルキメデス局所斜体の続き . . . 15

第 **5** 講　局所体上の二次形式 **20**
- 5.1 Hilbert 記号 . . . 20
- 5.2 非アルキメデス局所体上の二次形式 . . . 22

第 **6** 講　局所体上の二次形式、大域体 **24**
- 6.1 局所体上の二次形式の分類 . . . 24
- 6.2 大域体とアデール環 . . . 25
- 6.3 補足：弱近似定理 . . . 28

第 **7** 講　二次形式の **Hasse** 原理 **30**
- 7.1 中心的単純環 . . . 30
- 7.2 類体論の基本完全列 . . . 31
- 7.3 Hasse 原理 . . . 32

第 8 講　大域体上の二次形式 **34**
8.1　大域体上の二次空間 34

第 9 講　Weil 定数 **37**
9.1　Weil 定数とその性質 37

第 10 講　Weil 表現 **42**
10.1　シンプレクティク空間 42
10.2　Leray 不変量 43
10.3　メタプレクティク群と Weil 表現 44

第 11 講　$SL(2,F)$ の既約表現の構成 **47**
11.1　$O(E) \times SL(2,F)$ の Weil 表現 47
11.2　$O(E) \times SL(2,F)$ の局所 θ 対応 48

第 12 講　$SL(2,\mathbb{A})$ 上の保型形式の例 **52**
12.1　$SL(2,\mathbb{A})$ 上の保型形式 52
12.2　$O(E_{\mathbb{A}})$ の保型表現 54
12.3　テータリフト 55

第1講　導入、二次形式

1.1　導入

この講義では例年、初等整数論や整数論への導入的な性格を持つ基本的なテーマを解説することになっている。昨年度は整数論の基礎となる Dedekind 環や局所環の構造論を扱ったようである。今年度は局所的な理論についてそこまで踏み込まない代わりに、整数論の醍醐味である大域理論の典型例を解説しようと思い、「局所大域原理」をテーマとすることにした。

言うまでもなく局所大域原理と呼ぶべき現象の雛形は幾何学に多く見られる。例えば閉局面 M 上の曲率形式 K を積分すると M の Euler 標数 $\chi(M)$ が得られるという *Gauss-Bonnet* の定理がある。

$$\int_M K\,d\sigma = 2\pi\chi(M).$$

もう少し一般に多様体 M 上の主 S^1 束 ($U(1,\mathbb{R})$ 束) $\pi : P \to M$ 上の不変接続形式 ω に対しても、

$$d\omega = \pi^*\Omega$$

となる M 上の曲率形式 (2 次微分形式) が定まる。その De Rham コホモロジー群 $\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(M)$ でのクラス $[\Omega]$ は $\pi : P \to M$ から位相幾何的に定まる *Euler* 類 $e(P) \in \mathrm{H}^2(M,\mathbb{Z})$ の -2π 倍に (de Rham の定理で) 対応する。すなわち局所あるいは無限小的対象である微分形式を多様体全体の上で積分するとその多様体の大域的な不変量が得られる。しかも Euler 類 $e(P)$ は S^1 束 $\pi : P \to M$ が自明であるための障害 (*obstruction*) を表しているのである。

整数論の状況では例えば整数環 $\mathbb{Z}$ が多様体、素数 (素イデアル) たちが多様体の点の役割をそれぞれ果たす。$\mathbb{Z}$ あるいはその分数体 $\mathbb{Q}$ 上の対象を調べるのに、それを p を法として還元した有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の対象、あるいは局所化して得られる $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{Z}_p$ 上の対象を考察するという図式である。代数学 C で $p = 2, 3, 5$ を法とした還元を使って対称群 $\mathfrak{S}_n$ を Galois 群とする $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大を構成したことを思い出していただきたい (Dedekind の議論)。しかしこの講義ではこうした有限個の点での局所データではなく、(有限個を除く) 全ての素数での局所データを統合して大域的な帰結を引き出す議論を局所大域原理と呼びたい。

この意味の局所大域原理は整数論の中心的なテーマであり、その例も学部 4 年生の皆さんに解説するのは難しいものがほとんどである。この講義では、局所理論はとても単純ながら典型的に局所と大域の差が記述できる、二次形式を題材とすることに

した。前半では $\mathbb{Z}$ 上の $O(n)$ 束の Euler 類の理論とも言える、二次形式付きベクトル空間の局所と大域のずれの記述を解説する。このパートについては代数学 A, B, C の各科目を一通り学んだ方を対象として、できる限り自己完結でわかりやすい講義を心がけたい。続く後半では、形式的にも見える前半の結果から実効的な $SL(2)$ のアデール群上の保型形式の記述が得られる Hecke, Shalika-田中, Jacquet, Labesse-Langlands の理論を解説する。こちらもできる限り丁寧な講義を目指すが、用いる表現論の基盤となっている函数解析の結果などは講義の本旨から大きく離れるため、結果を引用するにとどめる。

成績評価については試験は行わずレポートによる。授業の中で適当な難度の問を出題するので、その中から 10 題程度を選んで解答をレポートにして提出すること。提出期限は学期末で正確な期日は学期の終わりに指定する。

なお、授業予定をはじめとするこの授業についての情報は随時ホームページ

http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~takuya/arithlec06.html

に掲載するので、参照してもらいたい。

1.2　対称形式と二次形式

以下、この講を通して F は標数が 2 でない体であるとする。F 上のベクトル空間と言う場合は有限次元ベクトル空間をさすものとする。

F 上のベクトル空間 V 上の双線型形式 (*bilinear form*) とは、写像 $(\cdot,\cdot) : V\times V \to F$ で任意の $v \in V$ に対して

$$V \ni v' \longmapsto (v,v') \in F, \quad V \ni v' \longmapsto (v',v) \in V$$

がともに線型なものであった。V の基底 $\{v_1,\dots,v_n\}$ を止めれば、任意の $v=\sum_{i=1}^n x_iv_i$, $v'=\sum_{j=1}^n x'_jv_j$ に対して

$$(v,v') = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix'_j(v_i,v_j) = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}(v_1,v_1) & \dots & (v_1,v_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (v_n,v_1) & \dots & (v_n,v_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}$$

であるから、$(\cdot,\cdot)$ は行列

$$T := \begin{pmatrix}(v_1,v_1) & \dots & (v_1,v_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (v_n,v_1) & \dots & (v_n,v_n)\end{pmatrix}$$

で一意に定まる。これを双線型形式 $(\cdot,\cdot)$ の基底 $\{v_1,\dots,v_n\}$ についての行列表示という。V 上の双線型形式 $(\cdot,\cdot)$ は

$$(v',v) = (v,v'), \quad v,v' \in V$$

を満たすとき、対称 (*symmetric*) であると言われる。もちろんこれは V の任意の基底に $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ついての行列表示 T が対称行列であることに同値である: ${}^tT = T$.

V 上の二次形式 (*quadratic form*) とは、函数 $Q : V \to F$ であって

- $Q(xv) = x^2 Q(v), x \in F, v \in V$;
- $(\cdot, \cdot)_Q : V \times V \ni (v, v') \mapsto \dfrac{1}{2}\bigl(Q(v + v') - Q(v) - Q(v')\bigr) \in F$ は双線型形式。

を満たすものである。定義から明らかに次の全単射がある。

$$\{V \text{ 上の二次形式 }\} \ni \begin{array}{ccc} Q & \longmapsto & (\cdot,\cdot)_Q \\ Q(v) := (v,v) & \longleftarrow & (\cdot,\cdot) \end{array} \in \left\{\begin{array}{c} V \text{ 上の対称} \\ \text{双線型形式} \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

1.3 二次空間

F 上のベクトル空間 V とその上の二次形式 Q の対 (V, Q) (または対応する双線型形式を取って $(V, (\cdot, \cdot)_Q)$) を F 上の二次空間 (*quadratic space*) という。

例 **1.1.** (i) $V = F$ 上の二次形式はある $a \in F$ を使って $Q(x) = ax^2$ と書ける。この二次空間 (V, Q) を (F, a) と書く。
(ii) $V = F^2$ として $Q((x, y)) = xy$ とおけば (V, Q) は二次空間。これを双曲平面 (*hyperbolic plane*) と呼び、$(\mathbb{H}, Q_{\mathbb{H}})$ (または $(\mathbb{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{H}})$) と書く。

2 つの二次空間 $(V_1, Q_1), (V_2, Q_2)$ に対して、直和 $V_1 \oplus V_2$ 上の函数 $Q_1 \oplus Q_2$ を

$$Q_1 \oplus Q_2(v_1, v_2) := Q_1(v_1) + Q_2(v_2), \quad (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$$

と定めれば、$(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2)$ は再び二次空間である。これを二次空間 (V_1, Q_1), (V_2, Q_2) の直和 (*direct sum*) という。二次空間 (V, Q) から (V', Q') への射 (*morphism*) とは、線型写像 $f : V \to V'$ であって

$$Q'(f(v)) = Q(v), \quad v \in V$$

を満たすもののこととする。さらに $f : V \to V'$ が線型同型なとき、これを (V, Q) から (V', Q') への等距写像 (*isometry*) という。$(V, Q), (V', Q')$ が等距なことを $(V, Q) \simeq (V', Q')$ と書く。特に (V, Q) から自分自身への等距写像の集合

$$O(V) = O(Q) := \{g \in GL_F(V) \mid (g.v, g.v')_Q = (v, v')_Q,\ v, v' \in V\}$$

は写像の合成を積とする群をなす。これを (V, Q) の直交群 (*orthogonal group*) という。

注意 **1.2.** $f : (V, Q) \to (V', Q')$ を二次空間の射とすると、定義から

$$(v, w)_Q = (f(v), f(w))_{Q'} = 0, \quad v \in \ker f,\ w \in V$$

である。これから $V/\ker f$ 上の二次形式 $\bar{Q}(v + \ker f) := Q(v)$ は定義可能であり、準同型定理による同型 $\bar{f} : (V/\ker f, \bar{Q}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{im} f, Q'|_{\operatorname{im} f})$ は等距写像である。

例 **1.3.** 同次元の二次空間 (V, Q), (V', Q') の基底 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\boldsymbol{v}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ を止め、そのそれぞれについての行列表示を $T := ({}^t\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_Q = \left((v_i, v_j)_Q\right)_{i,j}$, $T' := ({}^t\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}')_{Q'}$ とする。線型写像 $f : V \to V'$ の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ についての行列表示を $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j}$: $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}'A$ とすれば、V 上の二次形式 $Q' \circ f$ の $\boldsymbol{v}$ 行列表示は

$$({}^t f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v}))_{Q'} = ({}^t A {}^t\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'A)_{Q'} = {}^t A T' A$$

で与えられる。すなわち f が (V, Q) から (V', Q') への等距写像であることは、${}^t AT'A = T$ に同値である。特に、n 次対称行列 S, S' が定める二次空間 (F^n, S), (F^n, S') が等距であるためには、ある可逆行列 $A \in GL(n, F)$ に対して ${}^t AS'A = S$ であることが必要十分である。

命題 **1.4** (Gram-Schmidt の直交化)**.** (i) 任意の二次空間 (V, Q) は例 1.1 (i) の二次空間たちの有限個の直和 $\bigoplus_{i=1}^n (F, a_i)$ に等距である。
(ii) このとき a_i の $F/(F^\times)^2$ での像たちは (V, Q) から並べ替えを除いて一意に定まる。

証明. (i) V の次元についての帰納法による。$V = 0$ のときは明らか。$\dim V = n$ のとき、$Q = 0$ なら $(V, Q) \simeq \bigoplus_{i=1}^n (F, 0)$ で何も示すことはない。$Q \neq 0$ のとき、$a_1 := Q(v_1) \neq 0$ なる $v_1 \in V$ を取る。

$$V_1 := \mathrm{span}\,\{v_1\}, \quad V_1^\perp := \{v \in V \mid (v, v_1)_Q = 0\} = \ker\,(\cdot, v_1)_Q$$

とおけば、$(V, Q) = (V_1, Q|_{V_1}) \oplus (V_1^\perp, Q|_{V_1^\perp})$ かつ $(V_1, Q|_{V_1}) \simeq (F, a_1)$ である。$\dim V_1^\perp = n - 1$ であるから、帰納法の仮定により主張が従う。

(ii) これは簡単に確かめられるので読者に委ねよう。 □

例 **1.5.** 双曲平面 $(\mathbb{H}, Q_{\mathbb{H}})$ (例 1.1 (ii) 参照) の基底を $\{v_1 := (1, 1), v_2 := (1, -1)\}$ と取れば、$Q(v_1) = 1$, $Q(v_2) = -1$, $(v_1, v_2)_Q = 0$ だから、$(\mathbb{H}, Q_{\mathbb{H}}) \simeq (F, 1) \oplus (F, -1)$ である。

第2講　Wittの定理、Witt分解

2.1　Gram-Schmidtの対角化の続き

$(V,Q) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n}(F,a_i)$ を命題の通りとすれば、その等距類に対して以下の不変量が定まる。

- a_i たちのうち 0 でないものの個数を (V,Q) の階数 (*rank*) と呼び、$\mathrm{rk}\,V=\mathrm{rk}\,Q$ と書く。
- a_i たちのうち 0 でないもの全ての積の $F^\times/(F^\times)^2$ での像を (V,Q) の行列式と呼び、$\det V=\det Q$ と書く。
- $F=\mathbb{R}$ のとき $\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2\simeq\{\pm1\}$ であるから、a_i たちは $0, \pm1$ のいずれかに取れる。このとき a_i の中に現れる 1 および -1 の個数をそれぞれ p, q として、(p,q) を (V,Q) の符号数 (*signature*) といい $\mathrm{sgn}\,V=\mathrm{sgn}\,Q$ で表す。

(V,Q) が非退化 (*non-degenerate*) または ***I*** 型 (*type* ***I***) とは $\mathrm{rk}\,V=\dim V$ であることとする。これは任意の $v\neq0,\in V$ に対して $(v,w)_Q\neq0$ となる $w\in V$ が存在することに同値である。逆に $Q=0$ のとき (V,Q) は ***II*** 型であるという。このとき直交群 $O(V)$ は $GL_F(V)$ である。命題 1.4 から

> 任意の二次空間は非退化な部分空間と II 型の部分空間の直和に等距写像を除いて一意に分解する。

次の結果は符号数の定義から明らかである。

> **系 2.1.** (i) $\mathbb{C}$ 上の n 次元二次空間の等距類はその階数で分類される。
> (ii) $\mathbb{R}$ 上の n 次元二次空間の等距類は階数と符号数で分類される。

問 1. 係数体 F が実数体 $\mathbb{R}$ の場合に、Gram-Schmidt の直交化を用いて次の事実を証明せよ。
(i) $n\times m$ 行列 A の階数が m ならば、列ベクトルが正規直交な $n\times m$ 行列 Q と対角成分が正実数である m 次上三角行列 R があって $A=QR$ と書ける (***QR*** 分解)。
(ii) n 次正則行列たちのなす群を $GL_n(\mathbb{R})$ と書く。上三角な元からなるその部分群を $\boldsymbol{B}_n$, n 次直交群を $O_n(\mathbb{R}):=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\,|\,g^tg=\mathbf{1}_n\}$ と書くとき、岩澤分解 $GL_n(\mathbb{R})=\boldsymbol{B}_n\cdot O_n(\mathbb{R})$ が成り立つ。

問 **2.** やはり係数体 F は $\mathbb{R}$ であるとする。
(i) 任意の n 次対称行列 S はある直交行列 T で対角化される: ${}^tTST = D$, (D は対角行列) ことを確かめよ。
(ii) 対角成分が全て正実数である対角行列たちのなす群を $\boldsymbol{A}_n \simeq (\mathbb{R}_+^\times)^n$ と書く。*Cartan* 分解 $GL_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cdot \boldsymbol{A}_n \cdot O_n(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ。($g \in GL_n(\mathbb{R})$ に対して対称行列 ${}^tgg$ を考えよ。)
(iii) 多様体 $GL_n(\mathbb{R})$ の連結成分の個数を求めよ。(位相はもちろん n 次正方行列の空間 $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ の開部分集合としての誘導位相を考える。)

2.2 Witt 分解

(V, Q) を F 上の二次空間とする。$v \in V$ は $Q(v) = 0$ を満たすとき等方的 (*isotropic*), そうでないとき非等方的 (*anisotropic*) と呼ばれる。部分空間 $X \subset V$ が完全等方的 (*totally isotropic*) とは Q の X への制限が 0 であること、すなわち $(X, Q|_X)$ が II 型であることとする。(V, Q) は 0 以外に完全等方的部分空間を持たないとき非等方的であると言われる。

注意 **2.2.** (V, Q) が II 型でなければ、$(v, w)_Q \neq 0$ となる $v, w \in V$ が取れる。このとき

$$Q(v+w) - Q(v-w) = 4(v, w)_Q$$

だから $v + w, v - w$ のいずれか一方は非等方的である。

例 **2.3.** (i) 双曲平面 $(\mathbb{H}, Q_{\mathbb{H}})$ のベクトル $e_1 := (1, 0), e_2 := (0, 1)$ はそれぞれ等方的だから、それらの張る部分空間は完全等方的。逆に例 1.5 の v_1, v_2 は非等方的である。
(ii) 1 次元二次空間 (F, a) は ($a \neq 0$ のとき) 非等方的である。特に $\mathbb{C}$ 上の非等方的二次空間は全てこの形である。

命題 **2.4** (双曲基底の存在)**.** X を非退化な二次空間 (V, Q) の完全等方的部分空間とする。X の任意の基底 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ に対して、$\{e'_1, \ldots, e'_r\} \subset V$ であって

$$(e'_i, e'_j)_Q = 0, \quad (e_i, e'_j)_Q = \delta_{i,j}, \quad (1 \leq i, j \leq r)$$

を満たすものがある。言い換えれば $(\cdot, \cdot)_Q$ は X と $X' := \mathrm{span}\{e'_1, \ldots, e'_r\}$ の間の双対性を与え、X' も完全等方的である。

証明. $X^\perp := \{v \in V \mid (v, x)_Q = 0, \forall x \in X\}$ とおき、その勝手な補空間 Z を取る: $V = X^\perp \oplus Z$. 線型写像

$$\varphi : Z \ni z \longmapsto \big(x \mapsto (x, z)_Q\big) \in X^*$$

は同型であることに注意する。実際、$\varphi(z)=0$ ならば $z \in X^{\perp} \cap Z = 0$ だから φ は単射。また Q の非退化性から $X \ni x \mapsto (x,\cdot)_Q \in Z^*$ は単射ゆえ、$\operatorname{rk}\varphi_Z = \dim Z = \dim Z^* \geq \dim X$. よって φ は全射でもある。

さて $\{e_1^*,\ldots,e_r^*\} \subset X^*$ を $\{e_1,\ldots,e_r\}$ の双対基底として、$f_i := \varphi^{-1}(e_i^*), (1 \leq i \leq r)$ とおく。帰納的に

$$e_i' := f_i - \frac{Q(f_i)}{2(f_i,e_i)_Q}\cdot e_i - \sum_{k=1}^{i-1}(f_i,e_k')_Q \cdot e_k$$

とおけば $(e_i',e_j)_Q = (f_i,e_j)_Q = \delta_{i,j}$ であり、さらに $i>j$ のときには

$$\begin{aligned}(e_i',e_j')_Q =&(f_i,e_j')_Q - \frac{Q(f_i)}{2(f_i,e_i)_Q}\cdot(e_i,e_j')_Q - \sum_{k=1}^{i-1}(f_i,e_k')_Q\cdot(e_k,e_j')_Q \\ =&(f_i,e_j')_Q - (f_i,e_j')_Q = 0,\end{aligned}$$

$i=j$ のときには

$$(e_i',e_i')_Q = Q\Big(f_i - \frac{Q(f_i)}{2(e_i,f_i)_Q}\cdot e_i\Big) = Q(f_i) - 2\Big(f_i, \frac{Q(f_i)}{2(e_i,f_i)_Q}\cdot e_i\Big)_Q = 0$$

となって命題の条件が満たされる。 □

命題から二次空間の射

$$(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})^r \ni \big((x_1,y_1),\ldots,(x_r,y_r)\big) \longmapsto \sum_{i=1}^{r} x_ie_i + y_ie_i' \in (V,Q)$$

が得られる。

定理 2.5 (Witt の定理). 二次空間 (V,Q) の部分空間 W からの単射 $f:(W,Q|_W) \to (V,Q)$ は $O(V)$ の元 (V から V への等距写像) に延びる。

証明. 非等方的なベクトル $u \in V$ に関する鏡映 (*reflection*) を

$$r_u : V \ni v \longmapsto v - 2\frac{(u,v)_Q}{Q(u)}u \in V$$

と定める。これが $O(V)$ の元であることは容易にわかる。f がいくつかの鏡映の積に延びることを示そう。$m(W) := \dim W + 2\dim(W\cap W^{\perp})$ についての帰納法による。$m(W)=0$ のとき f は V の恒等写像に延びる。

まず W が完全等方的でないとすると、$(W,Q|_W)$ の非等方ベクトル w が取れる (注意 2.2)。$L := \operatorname{span}\{w\}, W_1 := \{v \in W \mid (v,w)_Q = 0\}$ とおけば、

(i) $W = L \oplus W_1$. (L への射影を $p_w : W \ni v \mapsto \big((v,w)_Q/Q(w)\big)w \in L$ とすれば、$L = \operatorname{im} p_W, W_1 = \ker p_W$ だから。)

(ii) $m(W_1) = m(W) - 1$. $(W^\perp \cap W = \{v \in W_1^\perp \cap W \mid (v, w)_Q = 0\} = W_1^\perp \cap W_1.\ )$

が成り立つ。(ii) と帰納法の仮定から、鏡映の有限積 $g_1 \in O(V)$ で $g_1|_{W_1} = f|_{W_1}$ となるものがある。$w' := g_1^{-1} f(w)$ とおくと

$$Q(w + w') + Q(w - w') = 2(Q(w) + Q(g_1^{-1} f(w)) = 4Q(w) \neq 0$$

だから、$w \pm w'$ の少なくとも一方は非等方的である。$w + w'$ が非等方的なとき

$$\begin{aligned} r_{w+w'} r_w(w) &= -w - 2\frac{(w + w', -w)_Q}{Q(w + w')}(w + w') \\ &= -w + 2\frac{Q(w) + (w', w)_Q}{2Q(w) + 2(w', w)_Q}(w + w') = w', \end{aligned}$$

$w - w'$ が非等方的なとき

$$r_{w-w'}(w) = w - 2\frac{Q(w) - (w', w)_Q}{2Q(w) - 2(w', w)_Q}(w - w') = w'$$

ゆえ、いずれの場合も鏡映の高々 2 個の積 $g_2 \in O(V)$ で $g_2(w) = w'$ となるものが取れる。しかも $v \in W_1$ に対して

$$(v, w')_Q = (g_1(v), f(w))_Q = (f(v), f(w))_Q = (v, w)_Q = 0$$

だから、$g_2|_{W_1} = \mathrm{id}_{W_1}$ である。よって $g := g_1 g_2 \in O(V)$ とおけばこれは有限個の鏡映の積で、(i) と $a \in F, w_1 \in W_1$ に対して

$$g(aw + w_1) = a g_1(w') + g_1(w_1) = a f(w) + f(w_1) = f(aw + w_1)$$

であることから $g|_W = f$ を満たす。

次に W が完全等方的だとする。命題 2.4 により、W の基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ から双曲基底 $\{e_1, \ldots, e_m; e_1', \ldots, e_m'\}$ および、等距写像 $(\mathbb{H}, Q_{\mathbb{H}})^m \xrightarrow{\sim} W \oplus W' \subset V$, $W' := \mathrm{span}\{e_1', \ldots, e_m'\}$ がある。$f(W)$ も完全等方的なので、$\{f(e_1), \ldots, f(e_m)\}$ に命題 2.4 を適用して、双曲基底 $\{f(e_1), \ldots, f(e_m); f(e_1)', \ldots, f(e_m)'\}$ が得られる。明らかに f は二次空間の単射

$$W \oplus W' \ni \sum_{i=1}^m x_i e_i + y_i e_i' \longmapsto \sum_{i=1}^m x_i f(e_i) + y_i f(e_i)' \in V$$

に延びる。ところが $W \oplus W'$ は非退化なことに注意すれば

$$\begin{aligned} m(W \oplus W') &= \dim(W \oplus W') = 2\dim W < 3\dim W \\ &= \dim W + 2\dim(W \cap W^\perp) = m(W) \end{aligned}$$

であるから、$W \oplus W'$ には帰納法の仮定が使えて主張が従う。 $\square$

非退化な二次空間 (V, Q) の極大な完全等方的部分空間 $X \subset V$ を取れば、命題 2.4 から完全等方的部分空間 $X' \subset V$ であって $(\cdot,\cdot)_Q$ が $X \times X'$ の双対性を与えるようなものがある。$V_\circ := (X \oplus X')^\perp$ とおけば、分解

$$(V, Q) = (X \oplus X', Q|_{X \oplus X'}) \oplus (V_\circ, Q_\circ), \quad Q_\circ := Q|_{V_\circ} \tag{2.1}$$

において $(V_\circ, Q_\circ)$ は非等方的である。実際、等方的な $v \neq 0, \in V_\circ$ があれば $X \oplus F \cdot v$ は完全等方的となって、X の極大性に矛盾する。この分解を (V, Q) の *Witt* 分解といい、$(V_\circ, Q_\circ)$ を (V, Q) の非等方核 (*anisotropic kernel*) という。

2 つの極大完全等方的部分空間 $X, Y \subset V$ が $\dim X \leq \dim Y$ を満たせば、定理 2.5 から勝手な線型単射 $f : X \hookrightarrow Y$ は等距写像 $g \in O(V)$ に延びる。$g^{-1}(Y) \supset X$ はもちろん完全等方的だから、X の極大性から $\dim X = \dim Y$ である。すなわち *Witt* 分解は等距写像を除いて一意であり、特に (V, Q) の極大完全等方的部分空間の次元は $r = \dim X$ は一意に定まる。これを (V, Q) の *Witt* 指数 (*Witt index*) と呼び、$r(V) = r(Q)$ と書く。

第3講　局所体とその構造

3.1　Witt 分解についての補足

F 上の非退化な二次空間の等距類の集合に直和で演算を定めて得られる半群を *Witt-Grothendieck* 半群、それで生成される群 $\widetilde{W}(F)$ を *Witt-Grothendieck* 群という。さらに (V,Q) と (V',Q') の積をテンソル積

$$(V,Q)\otimes(V',Q') := (V\otimes V', Q\otimes Q' : V\otimes V' \ni v\otimes v' \mapsto Q(v)Q'(v') \in F)$$

と定めることにより $\widetilde{W}(F)$ は $(F,1)$ を乗法の単位元とする可換環になる。これを F の *Witt-Grothendieck* 環という。$\widetilde{W}(F)$ を双曲平面 $(\mathbb{H}, Q_{\mathbb{H}})$ の生成する部分群で割って得られる商群を F の *Witt* 群と呼び、$\mathrm{Witt}(F)$ と書く。定義から (V,Q) の $\mathrm{Witt}(F)$ での逆元は $(V,-Q)$ である。同様に $\widetilde{W}(F)$ を双曲平面の生成するイデアルで割って得られる環 $W(F)$ を F の *Witt* 環という。

問 3. $F=\mathbb{R}$ のとき、F 上の非退化二次空間 (V,Q) の直交群 $O(V)$ がコンパクトであるためには (V,Q) が非等方的であることが必要十分なことを示せ。但し、$O(V)$ の位相は $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ のそれからの誘導位相を考えている。

問 4. $\mathrm{Witt}(\mathbb{C})$ および $\mathrm{Witt}(\mathbb{R})$ を求めよ。

3.2　非アルキメデス局所体の例 — p 進数体 $\mathbb{Q}_p$

有理素数 p を固定しておく。任意の $x\in\mathbb{Q}^\times$ は $p^m a/b$, $(m\in\mathbb{Z}, a,b\in\mathbb{Z}\smallsetminus p\mathbb{Z})$ と一意に書けることに注意して、$|x|_p := p^{-m}$ と定める。これを $|0|_p=0$ として $\mathbb{Q}$ に延ばせば $|x-y|_p$ は距離の定義条件

- $|x|_p \ge 0, x\in\mathbb{Q}$;
- $|x|_p = 0$ なら $x=0$;
- (三角不等式) $|x+y|_p \le |x|_p + |y|_p, x,y\in\mathbb{Q}$

を満たし、$\mathbb{Q}$ はこの距離の定める位相について位相体になる。この位相について $\mathbb{Q}$ を完備化したものを p 進数体と呼び $\mathbb{Q}_p$ と書く。

もう少し詳しく解説すると、$\mathbb{Q}$ 内の数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が p 進 *Cauchy* 列とは、どんなに小さい $\varepsilon>0$ に対しても $N\in\mathbb{N}$ があって $|a_n-a_m|_p<\varepsilon, \forall n,m>N$ が成り立つこと

だった。$\mathbb{Q}$ 内の p 進 Cauchy 列の集合 $F(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p$ は項別の加法、乗法について環をなし、その乗法の単位元は $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ である。

$$\mathfrak{m}(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p := \left\{(a_n)_n \in F(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$$

は容易にわかるように $F(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p$ のイデアルである。

$$d_p((a_n)_n,(b_n)_n) := \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n|_p, \quad (a_n)_n,\,(b_n)_n \in F(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p$$

とおけばこれは距離の最初と最後の条件を満たし、商環 $\mathbb{Q}_p := F(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p/\mathfrak{m}(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p$ 上の定義可能な距離を定める。$(a_n)_n \in F(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p \smallsetminus \mathfrak{m}(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p$ ならば、$(a_n^{-1})_n \in F(\mathbb{N},\mathbb{Q})_p$ であるから $\mathbb{Q}_p$ は体である。

問 **5.** 以上の考察に詳しい証明をつけよ。

実は三角不等式よりさらに強い超距離不等式

$$|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p), \quad x, y \in \mathbb{Q}_p$$

が成り立つ。これから $\mathbb{Q}_p$ のコンパクト部分集合 $\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \,|\, |x|_p \leq 1\}$ はさらに部分環になる。そのイデアル

$$p^n\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \,|\, |x|_p \leq p^{-n}\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \,|\, |x|_p < p^{1-n}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

たちはコンパクト、特に開かつ閉な 0 の基本近傍系である。任意の $x \in \mathbb{Q}_p$ は同様の性質を持つ基本近傍系 $\{x + p^n\mathbb{Z}_p\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持つ。

$\mathbb{R}$ も $\mathbb{Q}$ を稠密部分体として含む局所コンパクト位相体だが、$\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}_p$ には次の決定的な違いがある。$\mathbb{R}$ の絶対値はアルキメデスの原理

任意の $x, y \in \mathbb{R}^\times$ に対して $|nx| > |y|$ となる $n \in \mathbb{N}$ がある[1]。

を満たす。一方の $\mathbb{Q}_p$ では任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|np|_p < 1 = |1|_p$ であり、小さいものをいくら足し合わせても小さいままなのである。

3.3　局所体の分類

離散的でない局所コンパクト位相体を局所体 (*local field*) という。局所コンパクト位相群 F (加法群) 上には不変測度 dx が正実数倍を除いてただ一つある。$a \in F^\times$ に対して定まる自己同型 $F \ni x \overset{\sim}{\mapsto} ax \in F$ による dx の引き戻し $d(ax)$ は再び F 上の不変測度だから、比 $|a|_F := d(ax)/dx$ は正実数である。$|\cdot|_F : F^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ は連続準同型である。

$$|\cdot|_F : F \ni a \longmapsto \begin{cases} |a|_F & a \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & a = 0 \text{ のとき} \end{cases} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

[1] 実際、$\{|nx| \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ は上限を持たないから、連続性の公理から上に有界ではない。

を F のモジュラス (module) という。これは距離の公理を満たし、この距離により定まる位相は F の位相に一致している[2]。このモジュラスの性質により局所体の分類ができる [Wei95, I.3]。

(i) 非アルキメデス的 (*non-archimedean*) なもの。超距離不等式 (*ultrametric inequality*)

$$|x+y|_F \leq \max(|x|_F, |y|_F), \quad \forall x, y \in F$$

が成り立つ。モジュラスの像 $|F^\times|_F \subset \mathbb{R}_+^\times$ は離散部分群になる。次の 2 つの場合がある。

(a) 標数が 0 のとき、F はある素数 p に対する p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大。

(b) 標数が素数 p のとき、F はある標数 p の有限体 $\mathbb{F}_q$ (q は p 巾) 上の Laurent 級数体 $\mathbb{F}_q(\!(T)\!)$.

(ii) アルキメデス的 (*archimedean*) なもの。超距離不等式が成り立たない、あるいはアルキメデスの原理が成り立つもの。$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ のみでモジュラスの像はもちろん $\mathbb{R}_+^\times$ 全体になる。$|\cdot|_\mathbb{R}$ は通常の絶対値、$|z|_\mathbb{C} = z\bar{z}$ は絶対値の二乗である。

3.4 非アルキメデス局所斜体の構造

F を非アルキメデス局所体とする。少し考察の範囲を拡げて F 上の有限次元斜体 D の構造を調べておこう。D も局所コンパクト位相斜体だからその加法群の不変測度 dx が正実数倍を除いてただ一つある。$a \in D^\times$ のモジュラスをやはり $|a|_D := d(ax)/dx \in \mathbb{R}_+^\times$ と定める。これを $|0|_D = 0$ として D 全体に延ばしておく。

(0) $|\cdot|_D$ は距離の公理および超距離不等式を満たす。

(1) $\mathcal{O}_D := \{x \in D \,|\, |x|_D \leq 1\}$ は F の唯一の極大コンパクト部分環 ($D = F$ のときは整数環 (*integer ring*)、それ以外のときは整環 (*order*) と呼ばれる)。

証明. 実際、超距離不等式から $\mathcal{O}_D$ は加法で閉じており F のコンパクト部分環になる。コンパクト部分環 $A \subset D$ がもし $|a|_D > 1$ なる元を含めば、その巾のモジュラスは任意に大きくできてコンパクト性に反する。よって $A \subset \mathcal{O}_D$ となるから、$\mathcal{O}_D$ は相対コンパクトな部分環のうちで極大である。 □

(2) $\mathfrak{p}_D := \{x \in D \,|\, |x|_D < 1\}$ は $\mathcal{O}_D$ の唯一の極大左、右、そして両側イデアル。特に $\mathcal{O}_D^\times = \{x \in D \,|\, |x|_D = 1\}$ である。

証明. $\mathcal{O}_D$ の単元群は $\mathcal{O}_D^\times = \{x \in \mathcal{O}_D \,|\, |x|_D^{-1} = |x^{-1}|_D \leq 1\}$ だからモジュラス 1 の元全体である。再び超距離不等式から $\mathfrak{p}_D$ は $\mathcal{O}_D$ の両側イデアルである。$\mathcal{O}_D \smallsetminus \mathfrak{p}_D = \mathcal{O}_D^\times$ だから、$\mathfrak{p}_D$ は主張した極大性を満たす。 □

[2] つまり $B_r := \{x \in F \,|\, |x|_F \leq r\}, (r > 0)$ たちが F における 0 の基本近傍系をなしている。

(3) $\mathfrak{p}_D = \mathcal{O}_D\varpi_D = \varpi_D\mathcal{O}_D$ となる $\varpi_D \in F^\times$ が取れる。これを $\mathcal{O}_D$ の素元 (*prime element*) または一意化元 (*uniformizer*) という。

証明. $|D^\times|_D \subset \mathbb{R}_+^\times$ は離散的である。つまりある $q_D > 1$ があって $|D^\times|_D = q_D^{\mathbb{Z}}$ と書ける。$|\varpi_D|_D = q_D^{-1}$ となる $\varpi \in \mathcal{O}$ を取れば、これは上記の性質を持つ。 □

(4) D の剰余体 (*residue field*) $k_D := \mathcal{O}_D/\mathfrak{p}_D$ は標数 p の有限体 (従って可換である)。p を D の剰余標数 (*residual characteristic*) という。

証明. $\mathcal{O}_D$ はコンパクトで $\mathfrak{p}_D$ は開部分群だから k_D は有限である。 □

(5) k_D の位数を q_D と書けば、$|D^\times|_D = q_D^{\mathbb{Z}}$. $\mathrm{val}_D : D^\times \ni x \mapsto -\log_q |x|_D \in \mathbb{Z}$ を D の付値 (*valuation*) という。

証明. モジュラスの定義から $|\varpi_D|_D = \dfrac{\int_{\mathcal{O}_D} d(\varpi_D x)}{\int_{\mathcal{O}_D} dx} = \dfrac{\int_{\mathfrak{p}_D} dx}{\int_{\mathcal{O}_D} dx} = |k_D|^{-1}$. □

3.5 補足：Hensel の補題

$F \supset \mathcal{O} \supset \mathfrak{p} = (\varpi)$ および val は以前の通りとする。$f(X) \in \mathcal{O}[X]$, $x \in \mathcal{O}$ がある $m, r > 0, \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f(x) \in \mathfrak{p}^{2m+r}, \quad f'(x) \notin \mathfrak{p}^{m+1}$$

を満たすとする。このとき任意の

$$t \in \frac{-f(x) + \mathfrak{p}^{2m+r+1}}{f'(x)} \subset \mathfrak{p}^{2m+r-\mathrm{val}(f'(x))}$$

を取って $x' := x + t$ とおけば、

- $x' \in x + \mathfrak{p}^{m+r}$, ($\mathrm{val}(f'(x)) \le m$ ゆえ).
- $f(x') \in \mathfrak{p}^{2m+r+1}$. 実際、$f(X)$ の $X - x$ についての展開から

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k t^k, \quad \alpha_k \in \mathcal{O}$$

と書けるが、$t \in \mathfrak{p}^{m+r}$ から $\sum_{k=2}^{n} \alpha_k t^k \in \mathfrak{p}^{2m+2r}$ で、取り方から $f(x) + f'(x)t \in \mathfrak{p}^{2m+r+1}$ である。

この議論から次が従う。

補題 3.1 (Henselの補題)**.** $f(X) \in \mathcal{O}[X], x \in \mathcal{O}$ がある $m > 0, \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f(x) \in \mathfrak{p}^{2m+1}, \quad f'(x) \notin \mathfrak{p}^{m+1}$$

を満たすとき、$y \in x + \mathfrak{p}^{m+1}$ で $f(y) = 0$ となるものがある。

証明. 上の議論を繰り返し使うことにより、点列 $\{x_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ で

- $x_{r+1} - x_r \in \mathfrak{p}^{m+r}$;
- $f(x_r) \in \mathfrak{p}^{2m+r}$

を満たすものができる。最初の条件からこれはコンパクト集合 $\mathfrak{p}^{m+1}$ 内の Cauchy 列だから、その極限 $y \in \mathfrak{p}^{m+1}$ が存在する。さらに多項式函数 $f(X)$ は F の位相で連続だから、$f(y) = \lim_{r\to\infty} f(x_r) = 0$ である。 □

例 3.2. 例えば $a \in 1 + \mathfrak{p}^{2\mathrm{val}(2)+1}$ として $f(X) := X^2 - a$ を考える。$x = 1$ は

$$f(1) = 1 - a \in \mathfrak{p}^{2\mathrm{val}(2)+1}, \quad f'(1) = 2 \notin \mathfrak{p}^{\mathrm{val}(2)+1}$$

を満たすから、Hensel の補題により $f(b) = 0$, すなわち $b^2 = a$ となる $b \in 1 + \mathfrak{p}^{\mathrm{val}(2)+1}$ がある。特に $(F^\times)^2 := \{b^2 \mid b \in F^\times\} \subset F^\times$ は $1 + \mathfrak{p}^{2\mathrm{val}(F)+1}$ を含むから開部分群である。

第4講　局所体上の斜体

4.1　非アルキメデス局所斜体の続き

引き続き D を非アルキメデス局所体 F 上の有限次元斜体とする。まず $\mathcal{O}_D \twoheadrightarrow k_D$ のよい切断が取れることに注意しよう。

命題 4.1. (i) $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ の位数が有限で p と素ならば、その位数は $q_D - 1$ の約数である。
(ii) $\mathbb{Z}/(q_D-1)\mathbb{Z}$ に同型な部分群 $\mathcal{E}^{(p)} \subset D^\times$ があって、$\mathcal{E}^{(p)} \cup \{0\}$ は k_D の $\mathcal{O}_D$ での完全代表系をなす。
(iii) $\mathbb{Z}/(q_D-1)\mathbb{Z}$ に同型な任意の部分群 $\mathcal{E}_1^{(p)} \subset D^\times$ に対して、$\mathrm{Ad}(\varpi_D)\mathcal{E}^{(p)} = \mathcal{E}_1^{(p)}$ となる素元 ϖ_D がある。

証明. まず主張を 2 つ準備する。

主張 4.1.1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(1+\mathfrak{p}_D)^{p^n} \subset 1+\mathfrak{p}_D^{n+1}$.

証明. $n=0$ のときは自明。n の場合を仮定すると

$$(1+\mathfrak{p}_D)^{p^{n+1}} = \left((1+\mathfrak{p}_D)^{p^n}\right)^p \subset (1+\mathfrak{p}_D^{n+1})^p = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \mathfrak{p}_D^{k(n+1)} + \mathfrak{p}_D^{p(n+1)}$$
$$= \begin{cases} 1+p\mathfrak{p}_D^{n+1} & \text{標数 } 0 \text{ のとき} \\ 1+\mathfrak{p}_D^{p(n+1)} & \text{標数 } p \text{ のとき} \end{cases}$$

となっていずれの場合も $1+\mathfrak{p}_D^{n+2}$ に含まれる。 □

主張 4.1.2. (a) 写像 $\mu : \mathcal{O}_D \ni x \mapsto \lim_{n\to\infty} x^{q^n} \in \mathcal{O}_D$ は定義可能。
(b) $x \in \mathcal{O}_D^\times$ の $k_D^\times$ での像の位数は $\mu(x)$ の位数に一致する。

証明. (a) $x \in \mathfrak{p}_D$ に対してはもちろん $\lim_{n\to\infty} x^{q_D^n} = 0$ である。一方、$k_D \simeq \mathbb{F}_{q_D}$ は $X^{q_D} - X$ の根の集合だったから、$x \in \mathcal{O}_D^\times$ は $x^{q_D-1} \in 1+\mathfrak{p}_D$ を満たす。よって $q_D = p^{f_D}$ と書けば主張 4.1.1 から

$$x^{q_D^n(q_D-1)} \in (1+\mathfrak{p}_D)^{p^{nf_D}} \subset 1+\mathfrak{p}_D^{nf_D+1}, \quad \text{つまり} \quad x^{q_D^{n+1}} - x^{q_D^n} \in \mathfrak{p}_D^{nf_D+1}$$

を得る。特に

$$x^{q_D^n} = x + (x^{q_D} - 1) + (x^{q_D^2} - x^{q_D}) + \cdots + (x^{q_D^n} - x^{q_D^{n-1}}) \tag{4.1}$$

は Cauchy 列であるから μ は定義可能である。

(b) 主張 4.1.1 から $\mu(1+\mathfrak{p}_D)=1$ だが、実は (4.1) から $\mu(x)\equiv x \pmod{\mathfrak{p}_D}$ なので $\mu^{-1}(1)=1+\mathfrak{p}_D$ である。これと $\mu(x^n)=\mu(x)^n$ から主張を得る。 □

(i) $\varepsilon\in\mathcal{O}^\times$ の位数 n が p と素とすると、n は q_D と互いに素だから、$q_D^m\equiv 1 \pmod n$ となる $m\in\mathbb{N}$ がある。これは $\varepsilon^{q_D^{km}}=\varepsilon, \forall k\in\mathbb{N}$ を意味するから、μ は $\langle\varepsilon\rangle$ 上では恒等写像になる。これと主張 4.1.2 (b) から主張が従う。

(ii) k_D での像が $k_D^\times$ を生成する $x\in\mathcal{O}_D^\times$ を取れば、主張 4.1.2 から $\mathcal{E}^{(p)}:=\langle\mu(x)\rangle\simeq\mathbb{Z}/(q_D-1)\mathbb{Z}$. さらに (i) の証明の議論から、自然な射影は同型 $\mathcal{E}^{(p)}\xrightarrow{\sim}k_D^\times$ を与える。

(iii) $D^\times$ の内部自己同型 $\mathrm{Ad}(a):D^\times\ni x\mapsto axa^{-1}\in D^\times$ は $\mathcal{O}_D\supset\mathfrak{p}_D$ を保つから k_D の自己同型を定める。しかも $\mathcal{O}_D^\times$ の元は可換な $k_D^\times$ の内部自己同型、つまり恒等写像で作用する。よって準同型

$$D^\times/\mathcal{O}_D^\times\ni a\longmapsto\big(\mathrm{Ad}(a)|_{\mathcal{O}_D}\mod\mathfrak{p}_D\big)\in\mathrm{Aut}(k_D)$$

を得る。勝手な素元 ϖ'_D を取れば $\mathrm{Aut}(k_D)=\mathrm{Gal}(k_D/\mathbb{F}_p)$ だから、f_D の約数 r があって

$$\mathrm{Ad}(\varpi'_D)\bar{x}=\bar{x}^{p^r},\quad\forall x\in k_D \tag{4.2}$$

と書ける。

さて、自然な射影を介して同型 $\mathcal{E}^{(p)}\ni\varepsilon\xrightarrow{\sim}\bar\varepsilon\in k_D^\times\ni\bar\varepsilon_1\xleftarrow{\sim}\varepsilon_1\in\mathcal{E}_1^{(p)}$ が作れる。(4.2) から $\mathrm{Ad}(\varpi'_D)\varepsilon\equiv\varepsilon_1^{p^r}\pmod{\mathfrak{p}_D}$, あるいは

$$\varpi'_D\equiv\varepsilon_1^{p^r}\varpi'_D\varepsilon^{-1}\pmod{\mathfrak{p}_D^2},\quad\forall\varepsilon\in\mathcal{E}^{(p)}$$

である。そこで $\varpi_D:=-\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{(p)}}\varepsilon_1^{p^r}\varpi'_D\varepsilon^{-1}$ とおけば、右辺の各項は $\mathfrak{p}_D^2$ を法として ϖ'_D に合同だから

$$\varpi_D\equiv(1-q_D)\varpi'_D\equiv\varpi'_D\pmod{\mathfrak{p}_D^2}$$

となって ϖ_D は素元である。また $\gamma\in\mathcal{E}^{(p)}$ に対して

$$\varpi_D\gamma=-\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{(p)}}\varepsilon_1^{p^r}\varpi'_D\varepsilon^{-1}\gamma=-\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{(p)}}(\gamma_1\varepsilon_1)^{p^r}\varpi'_D\varepsilon^{-1}=\gamma_1^{p^r}\varpi_D$$

であるから、$\mathrm{Ad}(\varpi_D)\mathcal{E}^{(p)}=\mathcal{E}_1^{(p)}$ を満たす。 □

問 6. 奇素数 p に対して、$\mathbb{Q}_p$ 上の二次形式 $Q(x,y)=x^2+y^2$ が双曲的であるためには、$p\equiv 1 \pmod 4$ が必要十分であることを示せ。($\mathbb{Q}_p$ が 1 の 4 乗根をいつ含むかを考えよ。)

$|z|_D=|z|_F^{\dim_F D}, (z\in F^\times)$ から $\mathcal{O}_F=\mathcal{O}_E\cap F, \mathfrak{p}_F=\mathfrak{p}_E\cap F$ が成り立つ。よって

$$k_F\ni(z \bmod \mathfrak{p}_F)\longmapsto(z \bmod \mathfrak{p}_D)\in k_D$$

は定義可能で、k_D は k_F の拡大体になる。その拡大次数 $f_{D/F}$ を D/F のモジュラス次数 (*modular degree*) という。E/F の分岐指数 (*ramification index*) を $e_{E/F} := \mathrm{val}_D(\varpi_F)$ と定めれば、

$$q_F^{-\dim_F D} = |\varpi_F|_F^{\dim_F D} = |\varpi_F|_D = q_D^{-\mathrm{val}_D(\varpi_F)} = (q_F^{f_{E/F}})^{-e_{E/F}}$$

から $\dim_F D = e_{E/F} f_{E/F}$ である。$e_{D/F} = 1$ のとき D は F 上不分岐 (*unramified*) であるという。

特に体拡大 E/F が不分岐ならば、次が成り立つ。

(1) ε を E 内の 1 の原始 $q_E - 1$ 乗根の一つとして $E = F(\varepsilon)$. ($F(\varepsilon) \subset E$ かつ $[F(\varepsilon) : F] \geq f_{F(\varepsilon)/F} = f_{E/F} = [E : F]$ だから。) 特に E は $X^{q_E} - X \in F[X]$ の分解体だから E/F は Galois 拡大でその F 同型類は $[E : F]$ だけで決まる。また $\mathcal{O}_F$ の素元は $\mathcal{O}_E$ の素元でもある。

(2) $\mathrm{Gal}(E/F)$ の元は $\mathcal{E}^{(p)}$ への作用で決まるから、自然な準同型

$$\mathrm{Gal}(E/F) \ni \tau \longmapsto (\tau|_{\mathcal{O}_E} \bmod \mathfrak{p}_E) \in \mathrm{Gal}(k_E/k_F)$$

は同型。特に $\mathrm{Gal}(E/F)$ は $\Phi_{E/F}(x) \equiv x^{1/q_F} \pmod{\mathfrak{p}}$, ($x \in \mathcal{O}_E$) を満たす唯一の生成元 (幾何的 *Frobenius* 元) を持つ。

F 上の有限次元斜体 D はその中心が F に一致するとき、F 上の中心的斜体 (*central division algebra*) と呼ばれる。

定理 **4.2.** D を非アルキメデス局所体 F 上の中心的斜体とする。
(i) $e_{D/F} = f_{D/F}$. この共通の値を n と書く。(従って $\dim_F D = n^2$ である。)
(ii) D は F の n 次不分岐拡大 E を共役を除いてただ一つ含む。
(iii) $\mathcal{O}_D$ の素元 ϖ_D で次を満たすものがある。

(a) ϖ_D^n は $\mathcal{O}_F$, 従って $\mathcal{O}_E$ の素元。

(b) $\{1, \varpi_D, \ldots, \varpi_D^{n-1}\}$ は $\mathcal{O}_D$ の自由 $\mathcal{O}_E$ 基底。

(c) ϖ_D は E を正規化し、$\mathrm{Ad}(\varpi_D)|_E$ は $\mathrm{Gal}(E/F) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を生成する。

証明. $\mathcal{E}^{(p)} \subset \mathcal{O}_D^\times$ およびそれに対して命題 4.1 の条件を満たす ϖ_D を取る。$E := F(\mathcal{E}^{(p)})$ とおけば、上の特徴付け (1) から E/F は不分岐拡大で $[E : F] = \log_{q_F} q_D = f_{D/F}$ である。$n := f_{D/F}$ と書けば (ii) が従う。

$D = \bigcup_{N \in \mathbb{Z}} \varpi_D^N \mathcal{O}_D$ であり、各 $x \in \varpi_D^N \mathcal{O}_D$ は "非アルキメデス小数展開"

$$x = \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n \varpi_D^N, \quad \varepsilon_n \in \mathcal{E}^{(p)} \cup \{0\} \tag{4.3}$$

を持つから、$F = \{z \in D \mid \mathrm{Ad}(\varpi)z = \mathrm{Ad}(\varepsilon)z = z, \varepsilon \in \mathcal{E}^{(p)}\}$ である。$\mathrm{Ad}(\varpi_D)$ は $\mathcal{E}^{(p)}$, 従って E を保つから $\mathrm{Gal}(E/F)$ の元を定めている。その固定体 $E^{\mathrm{Ad}(\varpi_D)}$ は F だから、Galois 理論の基本定理により $\mathrm{Ad}(\varpi_D)|_E$ は $\mathrm{Gal}(E/F)$ を生成する。よって (iii) (c) が示された。

上から E の、すなわち $\mathcal{E}^{(p)}$ の $\langle \varpi_D \rangle$ での中心化群は $\langle \varpi_D^n \rangle$ である。つまり $E^\times = \langle \varpi_D^n, \mathcal{E}^{(p)} \rangle$ である。これと (4.3) から (iii) (a), (b) が従う。特に $\dim_E D = n$ だから $e_{D/F} f_{D/F} = \dim_F D = \dim_E D[E:F] = n^2$ となって (i) が得られる。 □

系 4.3. 非アルキメデス局所体 F 上の n^2 次元中心的斜体の同型類の集合は $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ と一対一対応している。

証明. F の n 次不分岐拡大を E と書き、簡単のために $\sigma := \Phi_{E/F}$ と略記する。

定理 4.2 から、F 上の n^2 次元中心的斜体 D は E を含み、E とそれを正規化する素元 ϖ_D で生成される。$\mathrm{Ad}(\varpi_D)|_E$ は $\mathrm{Gal}(E/F) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を生成するから、

$$\sigma = \mathrm{Ad}(\varpi_D)^{-k}|_E$$

となる $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ がただ一つある。σ も $\mathrm{Gal}(E/F)$ を生成するので $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ である。(E, ϖ_D) は $D^\times$ 共役を除いて一意だから k は D の同型類から一意に定まる。

逆に $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ に対して、$km \equiv 1 \pmod{n}$ となる $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を取って

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & & & \\ & \sigma^m(z) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{m(n-1)}(z) \end{pmatrix} \middle| \, z \in E \right\} \simeq E, \quad \varpi_D := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \varpi_F \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{M}_n(E)$ の部分環は F 上の n^2 次元中心的斜体で、$\sigma = \mathrm{Ad}(\varpi_D)^{-k}|_E$ を満たす。 □

注意 4.4. (i) 上の系の証明で D に対応する $k/n \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ を D の不変量と呼び、$\mathrm{inv}_F(D)$ と書く。

(ii) 系の証明後半の実現から、D は行列環 $\mathbb{M}_n(E)$ への $\mathrm{Gal}(E/F)$ 作用を

$$\sigma_D^m := \mathrm{Ad}(\varpi_D) \circ \sigma^m$$

と内部自己同型でひねったものになっている。このことを D は $\mathbb{M}_n(F)$ の内部形式 (*inner form*) であるという。

(iii) $\mathbb{M}_n(F)$ の内部形式はある $dm = n$ となる $d, m \in \mathbb{N}$ と F 上の d^2 次元中心的斜体 D を使って $\mathbb{M}_m(D)$ と書ける。$\mathrm{inv}_F(\mathbb{M}_m(D)) := \mathrm{inv}_F(D)$ と定めることで、系 4.3 の全単射は一対一対応

$$\mathrm{inv}_F : \{\mathbb{M}_n(F) \text{ の内部形式の同型類}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

に延びる。

問 7. 非アルキメデス局所体 F 上の中心的斜体 D でその逆環 D^{opp} と同型なものを分類せよ。

第5講　局所体上の二次形式

5.1　Hilbert 記号

F を標数が 2 でない体とする。$a \in F^\times$ に対して 2 次元アーベル F 代数 $E_a := F[X]/(X^2-a)$ が定まる。$x \in E_a^\times$ を E_a の F 線型同型と見たものの行列式 $\det(x|_{E_a}) \in F^\times$ を x の $(E_a/F$ での$)$ ノルムといい、$\mathrm{N}_{E_a/F}(x)$ と書く。$\mathrm{N}_{E_a/F} : E_a^\times \to F^\times$ は準同型であり、F 上の二次空間 $(E_a, \mathrm{N}_{E_a/F})$ は $(F,1)\oplus(F,-a)$ に等距である。F の ***Hilbert* 記号** (*Hilbert symbol*) $(\cdot,\cdot)_F : F^\times \times F^\times \to \{\pm 1\}$ を

$$\begin{aligned}(a,b)_F = 1 \quad &\iff \quad ax^2+by^2=1,\ \exists x,y\in F\\ &\iff \quad b \in \mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times) \quad \iff \quad a \in \mathrm{N}_{E_b/F}(E_b^\times)\end{aligned}$$

により定める。

補題 5.1. $E_a \simeq E_b$ であるためには $\mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times) = \mathrm{N}_{E_b/F}(E_b^\times)$ であることが必要十分。

証明. 必要性は明らかである。逆に $\mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times) = \mathrm{N}_{E_b/F}(E_b^\times)$ とすれば、任意の $(x,y) \in F^2$ に対して $x^2-ay^2 = x'^2-by'^2$ となる $(x',y') \in F^2$ がある。すなわち $(V,Q) := (F,1)\oplus(F,-a)\oplus(F,-1)\oplus(F,b)$ として

$$F^2 \ni (x,y) \longmapsto (x,y,x',y') \in V$$

の像は 2 次元完全等方的部分空間である。よって命題 2.4 から $(V,Q) \simeq (\mathbb{H}, Q_{\mathbb{H}})$ でなくてはならないから、双方の対角化を比較して $a = b \mod (F^\times)^2$ である。 □

$a,b \in F^\times$ を取る。F ベクトル空間 $B = B_{a,b} := F\cdot 1 \oplus F\cdot i \oplus F\cdot j \oplus F\cdot ij$ に乗法を

$$i^2 = a\cdot 1, \quad j^2 = b \cdot 1, \quad ij = -ji$$

と定めて得られる F 代数を (a,b) に付随する**四元数環** (*quaternion algebra*) という。例えば Hamilton の四元数体は $\mathbb{R}$ 上の $(-1,-1)$ に付随する四元数環である。B からその逆環への同型

$$\iota : B \ni x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij \longmapsto x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 ij \in B^{\mathrm{opp}}$$

を B の**主対合** (*main involution*) という。また

$$\nu_B : B \ni b \longmapsto b^\iota b \in F$$

を B の被約ノルム (*reduced norm*) という。$b = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij$ とすれば $\nu_B(b) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$ だから、(B, ν_B) は二次空間である。

補題 5.2. (i) $B_{a,b}$ の同型類は a, b の $F^\times/(F^\times)^2$ でのクラスのみに依存する。
(ii) $B = B_{a,b}$ について次の 3 条件は同値である。
(a) B は斜体。
(b) (B, ν_B) は非等方的。
(c) $(a, b)_F = -1$.

証明. (i) 例えば a を ac^2 で置き換えることは基底元 i を $c \cdot i$ で置き換えることに同値だから主張は明らか。

(ii) (a) $\Leftrightarrow$ (b) $b \in B$ が $\nu_B(b) \neq 0$ を満たせば、$\nu_B(b)^{-1} \iota b \in B$ は b の逆元だから、(a) は $\nu_B(b) = 0$ ならば $b = 0$ であること、つまり (b) に同値である。
(b) $\Rightarrow$ (c) 対偶を示す。もし $(a, b)_F = 1$ なら $1 - ax^2 - by^2 = 0$, つまり $\nu_B(1 + xi + yj) = 0$ となる $x, y \in F$ があるから、ν_B は等方的である。
(c) $\Rightarrow$ (b) やはり対偶を示す。$(B, \nu_B) \simeq (F, 1) \oplus (F, -a) \oplus (F, -b) \oplus (F, ab)$ が等方的なら、その行列表示の対角化は $(1, -1)$ を成分に含む。つまり $-a, -b, ab$ のいずれかが -1 に (平方数を法として) 等しい。a または b が 1 ならもちろん $(a, b)_F = 1$ であり、$ab = -1$ なら $ax^2 + by^2$ は双曲二次形式 xy に等距だからやはり $(a, b)_F = 1$ である。 □

命題 5.3. F を局所体とする。
(i) $(a, b)_F = (b, a)_F$ で $(a, \cdot)_F : F^\times/\mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times) \to \{\pm 1\}$ は準同型。
(ii) $a \in F^\times \setminus (F^\times)^2$ なら、$(a, \cdot)_F : F^\times/\mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times) \to \{\pm 1\}$ は同型。

証明. (i) の前半は定義から明らかである。それ以外の主張を示すため、$F \neq \mathbb{C}$ の場合に

$$F^\times/\mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

を証明しよう。$F = \mathbb{R}$ の場合は明らかだから F は非アルキメデス的だとしてよい。$b, c \in F^\times \setminus \mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times)$ として $bc \in \mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times)$ を示せばよい。$(a, b)_F = (a, c)_F = -1$ だから、補題 5.2 から $B_{a,b}$, $B_{a,c}$ はいずれも F 上 4 次元の中心的斜体 (F 上の四元斜体) である。ところが系 4.3 から F 上の四元斜体の同型類は一つしかないから、$B_{a,b} \simeq_F B_{a,c}$ で二次形式 $\nu_{B_{a,b}}, \nu_{B_{a,c}}$ は互いに等距である。すなわち

$$(F, -b) \oplus (F, ab) \simeq (F, -c) \oplus (F, ac)$$

でなくてはならない。$b = c \mod (F^\times)^2$ の場合にはもちろん $bc \in (F^\times)^2 \subset \mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times)$ である。$ab = -c \mod (F^\times)^2$ の場合は $bc = -a \mod (F^\times)^2$ だからやはり $bc \in \mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times)$ である。 □

5.2　非アルキメデス局所体上の二次形式

二次空間 $(V,Q) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r}(F,q_i) \oplus \bigoplus_{i=r+1}^{n}(F,0)$, ($q_i \in F^\times/(F^\times)^2$) の *Hasse* 不変量を

$$\varepsilon(V) = \varepsilon(Q) := \prod_{1 \le i < j \le n} (q_i, q_j)_F \in \{\pm 1\}$$

と定める。

例 **5.4.** 例えば $F = \mathbb{R}$ のとき、(V,Q) の符号数を $\operatorname{sgn} Q = (p,q)$ として

$$\varepsilon(Q) = (-1,-1)_{\mathbb{R}}^{q(q-1)/2} = (-1)^{q(q-1)/2}.$$

命題 **5.5.** (V,Q) を非アルキメデス局所体 F 上の二次空間、$\alpha \in F^\times$ とする。$Q(v) = \alpha$ となる $v \in V$ があるためには次のいずれかが成り立つことが必要十分。
(i) $\operatorname{rk} Q = 1$ で、$\det Q = \alpha \mod (F^\times)^2$.
(ii) $\operatorname{rk} Q = 2$ で、$(\alpha, -\det Q)_F = \varepsilon(Q)$.
(iii) $\operatorname{rk} Q = 3$ で、(a) $\det Q \ne -\alpha \mod (F^\times)^2$ か、(b) $\det Q = -\alpha \mod (F^\times)^2$ で $\varepsilon(Q) = (-1, -\det Q)_F$.
(iv) $\operatorname{rk} Q \ge 4$.

証明. (i) は自明。

(ii) $(V,Q) \simeq (F,a) \oplus (F,b)$ とすれば、$Q(x,y) = ax^2 + by^2 = \alpha$ となる $(x,y) \in V$ があるためには $(a\alpha, b\alpha)_F = 1$ が必要十分。

$$(a\alpha, b\alpha)_F = (a,\alpha)_F(\alpha,b)_F(\alpha,\alpha)_F(a,b)_F = (-\det Q, \alpha)_F\varepsilon(Q)$$

から主張を得る。

(iii) $(V,Q) \simeq (F,a) \oplus (F,b) \oplus (F,c)$ と書けば、$Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 = \alpha$ となる $(x,y,z) \in V$ があるためには

$$ax^2 + by^2 = \beta = \alpha w^2 - cz^2, \quad x,y,z,w \in F$$

と書ける $\beta \in F$ があることが必要十分。これは (ii) から

$$(\beta, -ab)_F = (a,b)_F, \quad (\beta, \alpha c)_F = (\alpha, -c)_F \tag{5.1}$$

を満たす $\beta \in F$ の存在に同値である。これを $\mathbb{F}_2$ ベクトル空間 $F^\times/(F^\times)^2$ 上の β についての線型方程式系と見る。$\dim_{\mathbb{F}_2} F^\times/(F^\times)^2 \ge 2$ だから[1]、(5.1) は 2 つの方程式が整合している限り解を持つ。不整合になるのは

$$-ab = \alpha c \mod (F^\times)^2 \quad \text{かつ} \quad (a,b)_F \ne (\alpha, -c)_F$$

[1]例えば 1 の $q_F - 1$ 乗根 ε と任意の素元 ϖ_F は $\mathbb{F}_2$ 上線型独立である。

のとき、言い換えれば $\det Q = -\alpha \mod (F^\times)^2$ かつ

$$\begin{aligned}(a,b)_F \neq &(-abc,-c)_F = (-abc,-1)_F(a,c)_F(b,c)_F(-c,c)_F \\ =&(-\det Q,-1)_F(a,c)_F(b,c)_F,\end{aligned}$$

つまり $\varepsilon(Q) \neq (-\det Q,-1)_F$ のときである。

(iv) 上と同様に $Q(x,y,z,w) = u(x^2 - ay^2 - bz^2 + bcw^2)$, $(u,a,b,c \in F^\times)$ と書ける。もし $a \neq c \mod (F^\times)^2$ ならば、$\mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times), \mathrm{N}_{E_c/F}(E_c^\times) \subset F^\times$ は補題 5.1 から異なる指数 2 の部分群だから $\mathrm{N}_{E_a/F}(E_a^\times)\mathrm{N}_{E_c/F}(E_c^\times) = F^\times$. よって

$$b = \frac{x^2 - ay^2}{z^2 - cw^2} \quad \text{つまり} \quad x^2 - ay^2 - bz^2 + bcw^2 = 0$$

となる $(x,y,z,w) \in V$ がある。言い換えれば Q は等方的だから $Q(V) = F$ である。一方 $a = c \mod (F^\times)^2$ なら $Q = u \cdot \nu_{B_{a,b}}$ である。$B = B_{a,b}$ が斜体でなければ ν_B は等方的だからやはり $Q(V) = F$. B が四元斜体 D のときには、D は定理 4.2 から不分岐二次拡大 E_ε/F (ε は 1 の原始 $q_F^2 - 1$ 乗根) と分岐二次拡大 $E_\varpi := F(\varpi_D)/F$ を含む。容易にわかる通り $\nu_{D/F}|_{E_a} = \mathrm{N}_{E_a/F}$ だから[2]

$$F^\times \supset \nu_{D/F}(D^\times) \supset \mathrm{N}_{E_\varepsilon/F}(E_\varepsilon^\times)\mathrm{N}_{E_\varpi/F}(E_\varpi^\times) = F^\times.$$

(Hamilton 四元数体 $\mathbb{H}$ の場合: $\nu_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}(\mathbb{H}^\times) = \mathbb{R}_+^\times$ と比較せよ。) □

系 **5.6.** 非アルキメデス局所体 F 上の 5 次元以上の非退化二次空間 (V,Q) は双曲平面を含む。

証明. (V,Q) が 5 次元のときを示せば十分である。$(V,Q) = (V_1,Q_1) \oplus (F,a)$, $(\dim V_1 = 4)$ と書けば、命題 5.5 (iv) から $Q_1(v_1) = -a$ となる v_1, つまり (V,Q) の等方的ベクトル $(v_1,1)$ がある。これと命題 2.4 から系が従う。 □

問 **8.** F を $\mathbb{C}$ でない局所体とする。
(i) $F^\times/(F^\times)^2$ は $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間であることを確かめよ。
(ii) Hilbert 記号 $(\cdot,\cdot)_F$ は $\mathbb{F}_2$ ベクトル空間 $F^\times/(F^\times)^2$ 上の非退化二次形式であることを示せ。

[2]例えば、D を系 4.3 の証明のように実現すれば $\nu_{D/F}$ は det の制限になっていることからわかる。

第6講　局所体上の二次形式、大域体

6.1　局所体上の二次形式の分類

定理 6.1. 標数が 2 でない非アルキメデス局所体 F 上の 2 つの非退化二次空間が等距であるためには、それらの階数、行列式、Hasse 不変量が全て一致することが必要十分。

証明. 必要性は明らか。十分性を階数についての帰納法で証明する。$(V, Q), (V', Q')$ が $\operatorname{rk} Q = \operatorname{rk} Q' = n$, $\det Q = \det Q' \mod (F^\times)^2$, $\varepsilon(Q) = \varepsilon(Q')$ を満たすとする。$n = 1$ のときは明らか。$n \geq 2$ のとき、仮定と命題 5.5 から $Q(v_1) = \alpha = Q'(v_1')$ となる $v_1 \in V$, $v_1' \in V'$, $\alpha \in F^\times$ がある。$V_1 := (F \cdot v_1)^\perp$, $V_1' := (F \cdot v_1')^\perp$, $Q_1 := Q|_{V_1}$, $Q_1' := Q'|_{V_1'}$ とおけば、

$$(V, Q) \simeq (F, \alpha) \oplus (V_1, Q_1), \quad (V', Q') \simeq (F, \alpha) \oplus (V_1', Q_1')$$

かつ

$$\operatorname{rk} Q_1 = \operatorname{rk} Q_1' = n - 1, \quad \det Q_1 = \det Q/\alpha = \det Q'/\alpha = \det Q_1',$$
$$\varepsilon(Q_1) = \varepsilon(Q)(\alpha, \det Q_1)_F = \varepsilon(Q')(\alpha, \det Q_1')_F = \varepsilon(Q_1')$$

である。帰納法の仮定から $(V_1, Q_1) \simeq (V_1', Q_1')$ ゆえ、$(V, Q) \simeq (V', Q')$ を得る。　□

この定理と命題 5.5 (とその証明の議論) から、標数が 2 でない非アルキメデス局所体上の非退化二次空間は 25 ページの表 6.1 のように分類される。表からわかる通り、$\operatorname{rk} Q = 1$ で $\varepsilon(Q) = -1$, $\operatorname{rk} Q = 2$ で $\det Q = \varepsilon(Q) = -1$ 以外の全ての可能性が起こる。

表 6.1: 非アルキメデス局所体上の非退化二次空間

階数	(V,Q)	行列式	Hasse 不変量
1	(F,α)	α	1
2	$(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})$	-1	1
	$(E_\alpha,\mathrm{N}_{E_\alpha/F}),(\alpha\in F^\times\smallsetminus(F^\times)^2)$	$-\alpha$	1
	$(E_\alpha,\beta\mathrm{N}_{E_\alpha/F}),\begin{pmatrix}\alpha,\beta\in F^\times\\(\alpha,\beta)_F=-1\end{pmatrix}$	$-\alpha$	-1
$2m+1$	$(F,\alpha)\oplus(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})^{\oplus m}$	$(-1)^m\alpha$	$((-1)^{m(m-1)/2}\alpha^m,-1)_F$
$(m\geq 1)$	$(D^0,\nu_{D/F}\|_{D^0})\oplus(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})^{\oplus m-1}$	$(-1)^{m-1}$	$-(-1,-1)_F^{m(m+1)/2}$
	$(D^0,-\alpha\nu_{D/F}\|_{D^0})\oplus(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})^{\oplus m-1}$	$(-1)^m\alpha$	$-((-1)^{m(m-1)/2}\alpha^m,-1)_F$
	$(\alpha\in F^\times\smallsetminus(F^\times)^2)$		
$2m$	$(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})^{\oplus m}$	$(-1)^m$	$(-1,-1)_F^{m(m-1)/2}$
$(m\geq 2)$	$(E_\alpha,\mathrm{N}_{E_\alpha/F})\oplus(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})^{\oplus m-1}$	$(-1)^m\alpha$	$((-1)^{m(m-1)/2}\alpha^{m-1},-1)_F$
	$(\alpha\in F^\times\smallsetminus(F^\times)^2)$		
	$(E_\alpha,\beta\mathrm{N}_{E_\alpha/F})\oplus(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})^{\oplus m-1}$	$(-1)^m\alpha$	$-((-1)^{m(m-1)/2}\alpha^{m-1},-1)_F$
	$(\alpha,\beta\in F^\times,(\alpha,\beta)_F=-1)$		
	$(D,\nu_{D/F})\oplus(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})^{\oplus m-2}$	$(-1)^m$	$-(-1,-1)_F^{m(m-1)/2}$

6.2　大域体とアデール環

大域体とその素点　大域体 (*global field*) とは、

- 代数体 (*algebraic number field*). 有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体。
- 1 変数有理函数体 $\mathbb{F}_p(X)$ の有限次拡大、すなわち有限体上の有理函数体 $\mathbb{F}_q(T)$.

の総称である。大域体 F の完備化 (*completion*) とは、局所体 K への準同型 $\iota : F \hookrightarrow K$ であって $\iota(F)$ が K で稠密なもののこととする。完備化 $\iota : F \hookrightarrow K, \jmath : F \hookrightarrow L$ は次の図式を可換にする位相体の同型 $\phi : K \xrightarrow{\sim} L$ があるとき、同値であると言われる。

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, equal] \arrow[d, "\iota"'] & F \arrow[d, "\jmath"] \\ K \arrow[r, "\phi"] & L \end{tikzcd}$$

F の完備化の同値類を F の素点 (*place*) という。F の素点 v に対してその値域となる F の完備化を F_v と書く。F_v がアルキメデス的か否かに応じて v はアルキメデス素点、非アルキメデス素点であるという。

例 **6.2.** 有理数体 $\mathbb{Q}$ の素点は次の 2 種類である。

(i) アルキメデス素点は $\infty : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ のみ。実際、$\mathbb{R}$ は唯一のアルキメデス原理を満たす $\mathbb{Q}$ の完備化であった。

(ii) 非アルキメデス素点は各素数 p に対する $p : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ である。実際、標数 0 の非アルキメデス局所体はある $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大だが、その中で $\mathbb{Q}$ が稠密になるためには $\mathbb{Q}_p$ 自身でなくてはならない。

補題 6.3. E/F を大域体の有限次拡大、$w : E \hookrightarrow L$ を素点とする。
(i) $w(F)$ の閉包 K は局所体。特に L/K は有限次拡大で、$w|_F : F \hookrightarrow K$ は F の素点 v を定める。
(ii) $L = K(E)$ (K 上 E で生成される体) である。

証明. (i) K は局所コンパクト位相体 L の閉部分体だから局所コンパクト位相体である。$|a|_L < 1$ となる $a \in K^\times$ があれば点列 $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は集積するから、K が離散的だとすると $|K^\times|_L = \{1\}$, つまり $K \subset \mathcal{O}_L$ でなくてはならない。$\mathcal{O}_L$ のコンパクト性からこれは K が有限体であることを意味し、F が無限体であることに矛盾する。以上から K は非離散局所コンパクト位相体である。$|\cdot|_L$ の K への制限は $|\cdot|_K$ の拡大次数巾だから、$[L : K]$ は有限である。

(ii) $K(E)$ は有限次元 K ベクトル空間だから、$L \supset K(E) = (K(E)$ の閉包$) \supset (E$ の閉包$) = L$ である。 □

上の補題の状況において E の素点 w は F の素点 v を割るといい、$w|v$ と書く。この補題により大域体 F の素点の分類ができる。

(i) F の標数が 0 のとき。

(a) アルキメデス素点。自然な同型 $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{r_1} \oplus \mathbb{C}^{r_2}$ がある。
- 右辺の最初の r_1 個の成分への射影 $p_i : \mathbb{R}^{r_1} \oplus \mathbb{C}^{r_2} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ との合成 $v_i : F \hookrightarrow F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \overset{p_i}{\twoheadrightarrow} \mathbb{R}$ が F の実素点を与える。
- 残りの r_2 個の成分への射影 $q_i : \mathbb{R}^{r_1} \oplus \mathbb{C}^{r_2} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ との合成 $u_i : F \hookrightarrow F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \overset{q_i}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}$ が複素素点を与える。

(b) 非アルキメデス素点。各 p に対して $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ は有限個の非アルキメデス局所体の直和 $\bigoplus_{i=1}^r K_i$ に同型である。右辺の第 i 射影 $p_i : F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \twoheadrightarrow K_i$ との合成 $v_i : F \hookrightarrow F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \twoheadrightarrow K_i$ たちが、$\mathbb{Q}$ の素点 p を割る F の素点。

(ii) F の標数が $p > 0$ のとき。$F = \mathbb{F}_q(T)$ と書く。

(a) $v_\infty : \mathbb{F}_q(T) \hookrightarrow \mathbb{F}_q(\!(T^{-1})\!)$.

(b) 既約多項式 $\varpi \in \mathbb{F}_q[T]$ に対応する素点

$$v_\varpi : \mathbb{F}_q(T) \longrightarrow \left(\varprojlim_n \mathbb{F}_q[T]/(\varpi^n)\right) \otimes_{\mathbb{F}_q[T]} \mathbb{F}_q(T) \simeq \mathbb{F}_{q^{\deg \varpi}}(\!(X)\!)$$

アデール環　F を大域体とし、その素点の有限集合 S で全てのアルキメデス素点を含むものに対して

$$\mathbb{A}(S) := \prod_{v\in S} F_v \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v$$

とおく。ただし $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{F_v}$ は非アルキメデス局所体 F_v の整数環である。コンパクト位相環の直積 $\prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v$ は Tychonov の定理によりコンパクトだから、$\mathbb{A}(S)$ は直積位相に関して局所コンパクト位相環になり、$S \subset T$ のとき $\mathbb{A}(S) \subset \mathbb{A}(T)$ は開部分環である。合併

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F := \bigcup_S \mathbb{A}(S) = \varinjlim_S \mathbb{A}(S)$$

を F のアデール環 (*adele ring*) という。

命題 **6.4.** (i) 有限次元 F ベクトル空間 V に対して、$V_{\mathbb{A}} := V \otimes_F \mathbb{A}$ は局所コンパクト位相 $\mathbb{A}$ 加群。
(ii) V は対角埋め込み $V \ni \xi \mapsto (\xi)_v \in \mathbb{A}$ により $V_{\mathbb{A}}$ の離散部分群と同一視され、商 $V_{\mathbb{A}}/V$ はコンパクト群である。

証明. (i) $\mathbb{A}$ が局所コンパクト位相環であることは明らか。$V_{\mathbb{A}}$ は $\mathbb{A}$ の有限直積だから局所コンパクト位相群になる。

(ii) $F = V = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p(T)$ の場合を示せば、再び Tychonov の定理から一般の場合が従う。ここではより難しい $\mathbb{Q}$ の場合のみ証明する。$\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_p \mathbb{Z}_p$ (p は全ての素数を走る) と書く。次を示せば十分である。

主張 **6.4.1.** (1) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{A}$ の離散部分環。
(2) $(0,1) \times \widehat{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$ の基本領域である。

証明. (1) 0 が $\mathbb{Q}$ の中で $\mathbb{A}$ の位相に関して孤立していることを見ればよい。$\mathbb{A}$ の開部分集合 $(-1,1) \times \widehat{\mathbb{Z}}$ と $\mathbb{Q}$ の交わりは $(-1,1)$ 内の整数、すなわち 0 のみからなるのでこれは明らか。

(2) $\mathbb{Q}(p) := \{a/p^n \mid a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\}$ とすれば、$x \in p^{-n}\mathbb{Z}_p$ は “p 進小数展開”

$$x = \sum_{k=-n} x_k p^k, \quad x_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

を持つから $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}(p) + \mathbb{Z}_p$ が成り立つ。特に $x = (x_v)_v \in \mathbb{A}(S)$ の $p \in S$ での成分は $x_p = \xi(p) + z_p$, $(\xi(p) \in \mathbb{Q}(p),\, z_p \in \mathbb{Z}_p)$ と書けるから、

$$x = \sum_{p\in S} \xi(p) + (x_\infty, (z_p)_{p\in S}, (x_p)_{p\notin S}) \in \mathbb{Q} + \mathbb{A}(\infty)$$

である。すなわち $\mathbb{Q}+\mathbb{A}(\infty) = \mathbb{A}$ が示された。一方、$\mathbb{A}$ の元が $\xi+x = \eta+y$, $(\xi, \eta \in \mathbb{Q}$, $x, y \in \mathbb{A}(\infty))$ と二通りに書けるためには、明らかに

$$x - y \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{A}(\infty) = \mathbb{Q} \cap \widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

が必要十分である。 □

6.3　補足：弱近似定理

講義では解説しなかったが、次節で必要となる弱近似定理を解説しておこう。F を大域体とする。まず F の完備化の同値性を言い換える。

補題 6.5. 大域体 F の完備化 $\iota : F \hookrightarrow K, \jmath : F \hookrightarrow L$ が同値であるためには、$\alpha \in F$ に対して $|\alpha|_K < 1$ ならば $|\alpha|_L < 1$ が成り立つことが必要十分である。

証明. 必要性。$|\alpha|_K < 1$ は点列 $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が K で 0 に収束することに同値だから、条件は必要である。

十分性。$|\gamma|_L > 1$ となる F を取る。仮定から $|\gamma|_K > 1$ だから $|\gamma|_L = |\gamma|_K^\lambda$ となる $\lambda > 0$ がある。F 上で $|\cdot|_L = |\cdot|_K^\lambda$ となることを示せばよい。それには $\alpha \in F^\times$ に対して $|\alpha|_K = |\gamma|_K^\nu, (\nu \in \mathbb{R})$ と書いたとき、$|\alpha|_L = |\gamma|_L^\nu$ であることを言えばよい。

ν より大きい有理数 a/b に対しては、$|\alpha|_K = |\gamma|_K^\nu < |\gamma|_K^{a/b}$ から $|\alpha^b/\gamma^a|_K < 1$ が成り立つ。これは仮定から $|\alpha^b/\gamma^a|_L < 1$ を意味するから $|\alpha|_L < |\gamma|_L^{a/b}$ が従う。これが ν より大きい任意の a/b に対して成立するから、有理数の稠密性と指数函数の単調性、連続性から $|\alpha|_L \leq |\gamma|_L^\nu$ を得る。同様に ν より小さい任意の有理数 a/b に対して $|\alpha|_K > |\gamma|_K^{a/b}$ が成り立つことが示せるから、$|\alpha|_L \geq |\gamma|_L^\nu$ も従う。 □

定理 6.6 (弱近似定理). F の素点の有限集合 S に対して、F は $F_S := \prod_{v\in S} F_v$ で稠密である。

証明. $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ と書く。

主張 6.6.1. $|\gamma|_{v_1} > 1, |\gamma|_{v_i} < 1, (2 \leq \forall i \leq n)$ を満たす $\gamma \in F$ がある。

証明. n に関する帰納法による。$n = 2$ のとき対偶を示す。$|\alpha|_{v_2} < 1$ なら $|\alpha|_{v_1} < 1$ であるとすると、補題 6.5 により $v_1 = v_2$ となるから主張が従う。n のとき、

$$|\alpha|_{v_1} > 1, \quad |\alpha|_{v_2}, \ldots, |\alpha|_{v_{n-1}} < 1$$

なる $\alpha \in F$ があったとする。$n = 2$ の場合から $|\beta|_{v_1} > 1, |\beta|_{v_n} < 1$ を満たす $\beta \in F$ がある。もし $|\alpha|_{v_n} \leq 1$ なら $|\alpha^m\beta|_{v_i} < 1, (2 \leq \forall i \leq n-1)$ となる $m \in \mathbb{N}$ を使って $\gamma := \alpha^m\beta$ とおけばよい。そうでない場合には

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha^m}{1+\alpha^m} = \begin{cases} 1 & (F_{v_1}, F_{v_n} \text{ 内で}) \\ 0 & (F_{v_2}, \ldots, F_{v_{n-1}} \text{ 内で}) \end{cases}$$

に注意すれば、$\gamma = \alpha^m\beta/(1+\alpha^m)$ が主張を満たすような $m \in \mathbb{N}$ が取れる。 □

主張 6.6.2. 任意の $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ に対して、$|\delta - 1|_{v_1} < \varepsilon_1, |\delta|_{v_i} < \varepsilon_i, (2 \leq \forall i \leq n)$ となる $\delta \in F$ がある。

証明. 主張 6.6.1 の γ を使って $\delta_m := \gamma^m/(1+\gamma^m)$ とおけば、$\{\delta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は F_{v_1} では 1, $F_{v_2},\ldots,F_{v_n}$ では 0 に収束する。 □

さて定理を証明しよう。任意の $(x_v)_{v\in S}\in F_S$ と $\varepsilon>0$ に対して $F\subset F_{v_i}$ の稠密性から、

$$|x_{v_i}-\xi_i|_{v_i}<\frac{\varepsilon}{3},\quad 1\le i\le n$$

となる $\xi_1,\ldots,\xi_n\in F$ が取れる。次に主張 6.6.2 から各 $1\le j\le n$ に対して

$$|\delta_j-1|_{v_j}<\frac{\varepsilon}{3|\xi_j|_{v_j}},\quad |\delta_j|_{v_i}<\frac{\varepsilon}{3(n-1)|\xi_j|_{v_i}},\ (i\neq j)$$

となる $\delta_i\in F$ がある。そこで $\xi:=\sum_{j=1}^{n}\delta_j\xi_j\in F$ とおけば、

$$\begin{aligned}|x_{v_i}-\xi|_{v_i}\le|x_{v_i}-\xi_i|_{v_i}+|\xi_i-\xi|_{v_i}&\le\frac{\varepsilon}{3}+|\xi_i-\delta_i\xi_i|_{v_i}+\sum_{j\neq i}|\delta_j\xi_j|_{v_i}\\&=\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\sum_{j\neq i}\frac{\varepsilon}{3(n-1)}=\varepsilon\end{aligned}$$

が任意の $v_i\in S$ で成り立つ。 □

第7講　二次形式のHasse原理

7.1　中心的単純環

(非可換) 環 A 上の加群 M が単純 (*simple*)、あるいは既約 (*irreducible*) とは 0 と自分自身以外に部分 A 加群が存在しないことをいう。また単純 A 加群の直和に同型な A 加群を半単純 (*semisimple*)、または完全可約 (*completely reducible*) な A 加群という。半単純 A 加群 M の任意の部分加群は M の直和因子である。A 自身が (0) と自身以外に両側イデアルを持たない、すなわち正則 $A \times A$ 加群として単純なときこれを単純環という。この節では F を任意の体として単純 F 代数を考察しよう。

補題 7.1 (Schur の補題)**.** 単純 A 加群 M の自己準同型環 $\mathrm{End}_A(M)$ は斜体である。

証明. $\phi \in \mathrm{End}_A(M)$ が 0 でなければ、その核は M の真部分加群ゆえ 0 であり、その像は M の非自明部分加群ゆえ M 自身である。すなわち ϕ は M の A 自己同型だから可逆である。 □

命題 7.2. A を F 代数、M を F 上有限次元な忠実半単純 A 加群とする。このとき $\mathrm{End}_A(M)$ の $\mathrm{End}_F(M)$ での中心化環は A 自身である。

証明. 簡単のために $B := \mathrm{End}_A(M)$ と書く。定義から $A \subset \mathrm{Cent}\,(B, \mathrm{End}_F(M)) = \mathrm{End}_B(M)$ は明らかである。任意の $\phi \in \mathrm{End}_B(M)$ が A に属することを示そう。

主張 7.2.1. $x \in M$ に対して $\phi(x) \in A.x$.

証明. 半単純 A 加群 M の部分 A 加群 $A.x$ は直和因子だから、A 射影 $p : M \twoheadrightarrow A.x$ がある。$p \in B$ だから $\phi(p(x)) = p(\phi(x)) \in \mathrm{im}\, p = A.x$ である。 □

M の F 基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ をとる。A 加群 $M^{\oplus n}$ は再び命題の条件を満たしており、$\mathrm{End}_A(M^{\oplus n}) = \mathbb{M}_n(B)$ である。特に $\phi^{\oplus n} \in \mathrm{Cent}\,(\mathbb{M}_n(B), \mathrm{End}_F(M^{\oplus n}))$ だから、主張 7.2.1 から

$$\big(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)\big) = \big(a.v_1, \dots, a.v_n\big), \quad \exists a \in A.$$

すなわち $\phi = a \in A$ である。 □

系 **7.3.** 単純な有限 (次元) F 代数はある F 上の斜体 D 上の行列環 $\mathbb{M}_n(D)$ に同型。

証明. A を単純有限 F 代数とする。F 上有限次元な単純 A 加群 M を取れば (例えば A 自身の非自明な左イデアルのうち次元が最小のものを取ればよい)、補題 7.1 から $D^{\mathrm{opp}} := \mathrm{End}_A(M)$ は F 上の斜体であり、命題 7.2 から $A = \mathrm{End}_{D^{\mathrm{opp}}}(M)$ である。M の D^{opp} 基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を固定すれば、D^{opp} の逆環を D として同型 $\mathrm{End}_{D^{\mathrm{opp}}}(M) \simeq \mathbb{M}_n(D)$ が定まる (下の問 10 参照)。 □

F 上の中心的単純環 (*central simple algebra*) とは、F 上の有限単純代数 A でその中心 $Z(A)$ が F に一致するものである。系 7.3 によれば F 上の中心的斜体上の行列環ということになる。

問 **9.** A を F 代数、M を F 上有限次元な半単純 A 加群とする。$\mathrm{End}_A(M)$ は F 上のある斜体 D_i たちの上の行列環 $\mathbb{M}_{n_i}(D_i)$ たちの直和に同型であることを示せ。

問 **10.** D を F 上の斜体、M を F 上有限次元な左 D 加群とする。
(i) M の D 上の基底および次元の概念を定義せよ。
(ii) M が D 上 n 次元ならば、$\mathrm{End}_D(M) \simeq \mathbb{M}_n(D^{\mathrm{opp}})$ であることを示せ。

7.2　類体論の基本完全列

ここからは F を大域体とする。F 上の中心的単純環 A に対し、F の各素点での完備化 $A_v := A \otimes_F F_v$ は F_v 上の中心的単純環になる。特に F_v 上の中心的斜体 D_v があって $A_v \simeq \mathbb{M}_{n_v}(D_v)$ と書ける。$\dim_{F_v} D_v = d_v^2$ と書けば、

$$\dim_F A = \dim_{F_v} A_v = (d_v n_v)^2$$

が成り立つ。$n := d_v n_v$ は v によらない。D_v の不変量 (注意 4.4 参照) $\mathrm{inv}_{F_v}(D_v) \in (\mathbb{Z}/d_v\mathbb{Z})^\times$ を A_v の不変量ともいい、$\mathrm{inv}(A_v) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書く。大域類体論から次の事実を引用しよう。

事実 **7.4.** 体 K 上の n^2 次元中心的単純環の同型類の集合を $\mathrm{Br}_n(K)$ と書く。大域体 F に対し、

$$\mathrm{Br}_n(K) \ni A \longmapsto (\mathrm{inv}(A_v)) \in \bigoplus_v \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

は定義可能な単射で、その像は $\bigoplus_v \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni \kappa_v \mapsto \sum_v \kappa_v \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の核に等しい。

注意 **7.5.** F の分離閉包 $\bar{F}$ を固定し、それに含まれる F の有限次拡大 E についてのアデール環 $\mathbb{A}_E$ の帰納極限を $\bar{\mathbb{A}} := \varinjlim_E \mathbb{A}_E$ と書く。上の事実は Galois コホモロジー群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{F}^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

の言い換えである。この完全列を類体論の基本完全列という。これの証明については [CF86, VII 章] を参照されたい。

系 **7.6.** $\alpha, \beta \in F^\times$ に対して $\prod_v (\alpha, \beta)_{F_v} = 1$ が成り立つ。

証明. 補題 5.2 から、$a, b \in F_v^\times$ に対して $(a, b)_{F_v} = (-1)^{2\mathrm{inv}(B_{a,b})}$ が成り立つ。事実 7.4 (ii) から $\sum_v \mathrm{inv}(B_{\alpha,\beta})_v = 0 \in \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ であるから系が従う。 □

7.3 Hasse 原理

大域体 F 上の二次空間の分類も上の事実 7.4 と類似した記述を持つ。まず事実の前半に当たる主張を証明しよう。以下、F の標数は 2 でないとする。

定理 **7.7** (Hasse-Minkowski)**.** (V, Q) を非退化な二次空間とする。
(i) $\dim_F V \geq 3$ ならば、有限個を除く全ての素点 v で $(V_v := V \otimes_F F_v, Q_v := Q \otimes_F F_v)$ は等方的である。
(ii) $\dim_F V$ が任意のとき、(V, Q) が等方的であるためには任意の v で (V_v, Q_v) が等方的であることが必要十分である。

証明. (i) 必要なら Q を定数倍して $V = F^3, Q(x, y, z) = x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2, (\alpha, \beta \in F^\times)$ の場合に示せば十分である。F 上の中心的四元数環 $B = B_{\alpha,\beta}$ を考えると、事実 7.4 の射の定義可能性から、有限個を除く全ての v で $B_v \simeq \mathbb{M}_2(F_v)$ である。これと補題 5.2 から主張が従う。

(ii) 必要性は自明である。十分性を $\dim_F V$ について場合分けして証明する。$\dim_F V = 1$ なら Q も Q_v も常に非等方的である。

$\dim_F V = 2$ のとき、やはり定数倍して $Q(x, y) = x^2 - \alpha y^2, (\alpha \in F^\times)$ であるとしてよい。仮定から任意の v で $(\alpha, x)_{F_v} = 1, \forall x \in F_v^\times$ だから、任意の $\beta \in F^\times$ に対して $(\alpha, \beta)_{F_v} = 1, \forall v$ が成り立つ。言い換えれば $\mathrm{inv}(B_{\alpha,\beta})_v = 0, \forall v$ だから事実 7.4 により $B_{\alpha,\beta} \simeq \mathbb{M}_2(F)$ を得る。よってその被約ノルム

$$x^2 - \alpha y^2 - \beta(z^2 - \alpha w^2)$$

は β によらず双曲的でなければならず、従って Q 自身も等方的である。

$\dim_F V = 3$ のとき、$Q(x, y, z) = x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2, (\alpha, \beta \in F^\times)$ であるとしてよい。仮定から任意の v で $(\alpha, \beta)_{F_v} = 1$, すなわち $\mathrm{inv}(B_{\alpha,\beta})_v = 0$ であるから、上と同様にして $B_{\alpha,\beta} \simeq \mathbb{M}_2(F)$ である。これは補題 5.2 から $(\alpha, \beta)_F = 1$, すなわち Q が等方的であることを意味する。

$\dim_F V = 4$ のとき、$Q(x,y,z,w) = x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \beta\gamma w^2$, $(\alpha,\beta,\gamma \in F^\times)$ であるとしてよい。Q が等方的なことは、ある $(x,y,z,w) \neq 0, \in F^4$ に対して $Q(x,y,z,w) = 0$, すなわち

$$\beta = \frac{x^2 - \alpha y^2}{z^2 - \gamma w^2} \in \mathrm{N}_{E_\alpha/F}(E_\alpha^\times)\mathrm{N}_{E_\gamma/F}(E_\gamma^\times) = \mathrm{N}_{E_\alpha.E_\gamma/E_{\alpha\gamma}}((E_\alpha.E_\gamma)^\times) \cap F^\times$$

に同値である。(右の等式については下の問 11 参照。) α または γ が F の平方数ならこの条件は常に成り立つ。そうでないときには F を $E_{\alpha\gamma}$ で置き換えて $\dim_F V = 3$ のときの議論を適用すれば主張が得られる。(仮定から $E_{\alpha\gamma}$ の任意の素点 w で $(\alpha,\beta)_{E_{\alpha\gamma,w}} = 1$ だから、$(\alpha,\beta)_{E_{\alpha\gamma}} = 1$, つまり $\beta \in \mathrm{N}_{E_\alpha.E_\gamma/E_{\alpha\gamma}}((E_\alpha.E_\gamma)^\times)$ が従う。)

$\dim_F V \geq 5$ のときは次元についての帰納法を用いる。まず $(V,Q) = (F^2,P) \oplus (V',Q')$, $\dim_F V' \geq 3$ と書ける。

- 定理の (i) から F の素点の有限集合 S があって、$v \notin S$ では Q' は等方的。
- 仮定から各 $v \in S$ では

  $$-P(x_v,y_v) = c_v = Q'(\boldsymbol{x}_v), \quad \exists(x_v,y_v;\boldsymbol{x}_v) \neq 0$$

  が成り立つ。$(F_v^\times)^2 \subset F_v^\times$ は開部分群だったので (v がアルキメデス的なら明らか、非アルキメデス的なら例 3.2 参照)、弱近似定理 6.6 と P の連続性から

  $$-P(\xi,\eta) =: \gamma \equiv c_v \mod (F_v^\times)^2, \quad \forall v \in S$$

  となる $(\xi,\eta) \in F^2$ がある。

今、$(V_1,Q_1) := (V',Q') \oplus (F,-\gamma)$ は $v \notin S$ でも $v \in S$ でも等方的だから、帰納法の仮定から F 上で等方的、つまり $Q'(\xi') = \gamma$ となる $\xi' \neq 0, \in V'$ がある。このとき $Q(\xi,\eta;\xi') = 0$ である。 □

問 11. F を標数が 2 でない体とする。$\alpha,\gamma \in F^\times$ に対して $\mathrm{N}_{E_\alpha.E_\gamma/E_{\alpha\gamma}}((E_\alpha.E_\gamma)^\times) \cap F^\times = \mathrm{N}_{E_\alpha/F}(E_\alpha^\times)\mathrm{N}_{E_\gamma/F}(E_\gamma^\times)$ を確かめよ。

第8講　大域体上の二次形式

8.1　大域体上の二次空間

大域体上の二次空間をその局所成分によって分類しよう。

定理 8.1. F を標数が 2 でない大域体とする。
(i) $\left\{\begin{array}{l} F \text{ 上の } n \text{ 次元非退化} \\ \text{二次空間の等距類} \end{array}\right\} \ni (V,Q) \mapsto (V_v,Q_v) \in \prod_v \left\{\begin{array}{l} F_v \text{ 上の } n \text{ 次元非退化} \\ \text{二次加群の等距類} \end{array}\right\}$
は定義可能な単射。
(ii) その像は

(a) $(\det Q(v))_v \in F^\times \pmod{\prod_v (F_v^\times)^2}$,

(b) 有限個を除く全ての v で $\varepsilon(Q(v)) = 1$ で、$\prod_v \varepsilon(Q(v)) = 1$

を満たす $\big(V(v),Q(v)\big)_v$ たちからなる。

証明. (i) F 上の n 次元非退化二次空間 (V,Q), (V',Q') が $(V_v,Q_v) \simeq (V'_v,Q'_v), \forall v$ を満たすとして、$(V,\mathbb{Q}) \simeq (V',Q')$ となることを n についての帰納法で証明する。$n=0$ のとき何も示すことはない。n のとき、各 v で $(V_v \oplus V'_v, Q_v \oplus -Q'_v)$ は等方的だから Hasse-Minkowski の定理 7.7 により $(V \oplus V', Q \oplus -Q')$ も同様である。つまり

$$Q(\xi) = \alpha = Q(\xi'), \quad \exists\xi \neq 0, \in V,\ \xi' \neq 0, \in V',\ \alpha \in F^\times$$

が成り立つ。$V_1 \subset V, V'_1 \subset V'$ をそれぞれ ξ, ξ' の直交補空間とし、そこへの Q, Q' の制限をそれぞれ Q_1, Q'_1 と書く。F の各素点 v で

$$(V_v,Q_v) = (F_v,\alpha) \oplus (V_{1,v},Q_{1,v}) \simeq (V'_v,Q'_v) = (F_v,\alpha) \oplus (V'_{1,v},Q'_{1,v})$$

であるから、対角化の一意性 (命題 1.4) から $(V_{1,v},Q_{1,v}) \simeq (V'_{1,v},Q'_{1,v})$ である。よって帰納法の仮定から $(V_1,Q_1) \simeq (V'_1,Q'_1)$ が従う。

(ii) 条件 (a), (b) を満たす $\big(V(v),Q(v)\big)_v$ に対して、$(V_v,Q_v) \simeq (V(v),Q(v)), \forall v$ なる F 上の二次空間 (V,Q) を n についての帰納法で構成する。必要なら $Q(v)$ をその等距類の元で取り替えて、$\det Q(v)$ が v によらない $\delta \in F^\times$ であるとしてよい。$n=1$ のときは自明である。

$n=2$ のとき、$Q(v)(x,y)=a_v x^2+a_v\delta y^2$, ($a_v\in F_v^\times$) と書ける。$-\delta\in(F^\times)^2$ なら全ての素点 v で $Q(v)$ は双曲的だから、$(V,Q)=(\mathbb{H},Q_{\mathbb{H}})$ とすればよい。それ以外の場合、仮定は

$$1=\prod_v \varepsilon(Q(v))=\prod_v (a_v,a_v\delta)_{F_v}=\prod_v (a_v,-\delta)_{F_v}$$

となる。これは $\sum_v \mathrm{inv}(B_{a_v,-\delta})=0\in\dfrac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ を意味する (系 7.6 の証明参照) から、事実 7.4 により $\alpha,\beta\in F^\times$ があって $(B_{\alpha,\beta})_v\simeq B_{a_v,-\delta}$, $\forall v$ が成り立つ。$\nu_{B_{\alpha,\beta}}\oplus -\delta$ は全ての素点で等方的だから、F 上でも等方的である (定理 7.7)。$-\delta\neq 1\pmod{(F^\times)^2}$ としたから、必要なら $\alpha,\beta,-\alpha\beta$ を入れ替えて $-\delta=\beta\pmod{(F^\times)^2}$ であるとしてよい。そこで $(V,Q):=(F,\alpha)\oplus(F,\alpha\delta)$ とおけば $\det Q=\delta\pmod{(F^\times)^2}$ であり、任意の素点 v で

$$\begin{aligned}(-1,-1)_{F_v}\varepsilon(Q_v)&=(-1,-1)_{F_v}(\alpha,-\delta)_{F_v}=\varepsilon(\nu_{(B_{\alpha,-\delta})_v})\\&=\varepsilon(\nu_{B_{a_v,-\delta}})=(-1,-1)_{F_v}(a_v,-\delta)_{F_v}=(-1,-1)_{F_v}\varepsilon(Q(v))\end{aligned}$$

が成り立つ。局所体上の 2 次元二次空間はその行列式と Hasse 不変量で一意に決まるから証明終わり。

$n=3$ のとき、$S:=\{v\,|\,\varepsilon(Q(v))\neq(-\delta,-1)_{F_v}\}$ とおく。$(B_{-\delta,-1})_v$ は有限個を除く全ての v で $\mathbb{M}_2(F_v)$ に同型だから、条件 (b) と併せて S は有限集合であることがわかる。$\prod_v (F_v^\times)^2\subset F_S^\times$ は開部分群だから (例 3.2)、弱近似定理 6.6 から $-\alpha\delta\notin(F_v^\times)^2$, $\forall v\in S$ となる $\alpha\in F^\times$ が取れる。このとき

- $v\in S$ では $\alpha\delta\neq -1$ だから、F 上の 2 次元非退化な二次空間 $(V_1(v),Q_1(v))$ で

$$\det(Q_1(v))=\alpha\delta,\quad \varepsilon(Q_1(v))=(\alpha,\alpha\delta)_{F_v}\varepsilon(Q(v)) \tag{8.1}$$

  となるものがある (25 ページの表 6.1 参照)。

- $v\notin S$ でも、$\alpha\delta=-1$ の場合には S の定義から

$$(\alpha,\alpha\delta)_{F_v}\varepsilon(Q(v))=(\alpha,-1)_{F_v}(-\delta,-1)_{F_v}=(1,-1)_F=1$$

  となるから、やはり常に (8.1) を満たす F_v 上の 2 次元非退化二次空間 $(V_1(v),Q_1(v))$ が取れる。

これらは明らかに条件 (a), (b) を満たすから、F 上の 2 次元二次空間 (V_1,Q_1) で $(V_{1,v},Q_{1,v})\simeq(V_1(v),Q_1(v)),\forall v$ となるものがある。そこで $(V,Q):=(V_1,Q_1)\oplus(F,\alpha)$ とおけば、$\det Q=\alpha\det Q_1=\delta\pmod{(F^\times)^2}$ であり、任意の素点 v で

$$\varepsilon(Q_v)=(\alpha,\det Q_1)_{F_v}\varepsilon(Q_{1,v})=\varepsilon(Q(v))$$

が成り立つ。3 次元でも局所体上の二次空間は行列式と Hasse 不変量だけで決まるから証明終わり。

$n \geq 4$ のときには実素点 v での符号 $\operatorname{sgn} Q(v) = (p_v, q_v)$ が問題になる。F の実素点 v での F_v 内の正，負の数の集合をそれぞれ F_v^+, F_v^- と書く。弱近似定理 6.6 により、$\alpha \in F^\times$ であって

$$\alpha \in \begin{cases} F_v^+ & v \text{ は実で } p_v \neq 0 \text{ のとき} \\ F_v^- & v \text{ は実で } p_v = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となるものが取れる。$n \geq 4$ だから実でない素点では $Q(v)(x_v) = \alpha$ となる $x_v \in V(v)$ がある (命題 5.5)。よって α の取り方から、全ての素点 v で $(V(v), Q(v)) \simeq (V_1(v), Q_1(v)) \oplus (F_v, \alpha)$ と書ける。3 次元のときと同様に、

$$\det Q_1(v) = \alpha\delta \in F^\times, \quad \varepsilon(Q_1(v)) = (\alpha, \alpha\delta)_{F_v} \varepsilon(Q(v))$$

は条件 (a), (b) を満たす。よって帰納法の仮定から F 上の $n-1$ 次元非退化二次空間 (V_1, Q_1) であって

$$\det Q_1 = \alpha\delta, \quad \varepsilon(Q_{1,v}) = (\alpha, \alpha\delta)_{F_v} \varepsilon(Q(v)),\ \forall v;$$
$$\operatorname{sgn}(Q_{1,v}) = \begin{cases} (p_v - 1, q_v) & v \text{ は実で } p_v \neq 0 \text{ のとき} \\ (p_v, q_v - 1) & v \text{ は実で } p_v = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となるものが取れる。このとき $(V, Q) := (V_1, Q_1) \oplus (F, \alpha)$ が定理の条件を満たすことは明らかである。 □

注意 8.2. $\mathbb{R}$ 上の二次空間 (V, Q) に対して $\operatorname{sgn} Q = (p, q)$ と書けば、すぐわかるように

$$\det Q = (-1)^q, \quad \varepsilon(Q) = (-1, -1)_{\mathbb{R}}^{q(q-1)/2} = \begin{cases} 1 & q \equiv 0, 1 \pmod 4 \text{ のとき} \\ -1 & q \equiv 2, 3 \pmod 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。従って代数体 F の各素点での二次空間の族 $\{((V(v), Q(v))\}_v$ たちが F 上の二次空間から来ていれば、その任意の実素点 v での符号数 (p_v, q_v) を勝手な $(p_v + 4k_v, q_v - 4k_v)$, $(k_v \in \mathbb{Z})$ で置き換えたものもやはり F 上の二次空間から来ている。

第9講　Weil定数

前回までの結果はWeil定数と呼ばれる数の性質に内包される [Wei64]。

9.1　Weil定数とその性質

F を標数が2でない局所体とし、その加法群の非自明指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を固定する。すると F の任意の指標は $\psi^a(x) := \psi(ax), \exists a \in F$ と書ける。F がアルキメデス的な場合には $\psi_{\mathbb{R}}(x) := e^{2\pi i x}$, $\psi_{\mathbb{C}}(z) := \psi_{\mathbb{R}}(z + \bar{z})$ と書く。F が非アルキメデス的なときには、制限 $\psi|_{\mathfrak{p}^{-n}}$ が自明であるような最大の $n \in \mathbb{Z}$ を ψ の位数 (*order*) といい $\mathrm{ord}\,\psi$ と書く。

F 上の非退化二次空間 (V, Q) を取り、その上のSchwartz-Bruhat函数の空間を $\mathcal{S}(V)$ と書く。つまり $\mathcal{S}(V)$ は F がアルキメデス的なら V 上の滑らかな急減少函数の空間、非アルキメデス的ならコンパクト台付き局所定数函数の空間を表す。V の加法群としての不変測度 dv を固定すれば *Fourier* 変換

$$\mathcal{F}_Q\phi(v) := \int_V \phi(v')\psi((v, v')_Q)\,dv', \quad \phi \in \mathcal{S}(V)$$

が定義される。特に *Fourier* 逆公式

$$\int_V \mathcal{F}_Q\phi(v')\overline{\psi((v, v')_Q)}\,dv' = \phi(v)$$

が成り立つような dv が一意に存在するが、これを V 上の自己双対測度 (*self-dual measure*) という。以下、dv は自己双対測度に取るものとする。

定理 9.1. (i) F 上の非退化二次空間 (V, Q) に対して、絶対値1の複素数 $\gamma_\psi(V) = \gamma_\psi(Q)$ であって

$$\int_V \phi(v)\psi\Big(\frac{Q(v)}{2}\Big)\,dv = \gamma_\psi(Q)\int_V \mathcal{F}_Q\phi(v)\psi\Big(-\frac{Q(v)}{2}\Big)\,dv$$

を満たすものがただ一つある。
(ii) $Q \mapsto \gamma_\psi(Q)$ はWitt群の指標 $\gamma_\psi : \mathrm{Witt}(F) \to \mathbb{C}^1$ を定める。

証明. (i) (V, Q) の対角化 (命題 1.4) とFubiniの定理から、$(V, Q) = (F, a)$ の場合

$$\int_F \phi(x)\psi^a\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\,dx = \gamma_\psi(a)\int_F \mathcal{F}_a\phi(x)\psi^a\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\,dx, \quad \exists\gamma_\psi(a) \in \mathbb{C}^1 \tag{9.1}$$

を示せば十分。$f(x) := \psi^a(-x^2/2), \xi_\phi(x) := \phi(-x)\psi^a(x^2/2), (\phi \in \mathcal{S}(F))$ と書けば、

$$\begin{aligned} f * \xi_\phi(x) =& \int_F \psi^a\Big(-\frac{(x+y)^2}{2}\Big)\phi(y)\psi^a\Big(\frac{y^2}{2}\Big)\,dy \\ =&\psi^a\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\int_F \phi(y)\psi^a(-xy)\,dy = \psi^a\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\mathcal{F}_a\phi(-x). \end{aligned} \tag{9.2}$$

そこで

$$\int_F f * \xi_{\phi_0}(x)\,dx = \int_F \psi^a\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\mathcal{F}_a\phi_0(x)\,dx \neq 0$$

である $\phi_0 \in \mathcal{S}(F)$ を取って、

$$\gamma_\psi(a) := \int_F \xi_{\phi_0}(x)\,dx\Big(\int_F f * \xi_{\phi_0}(x)\,dx\Big)^{-1}$$

と定める。すると

$$\begin{aligned} \int_F f * \xi_{\phi_0}(x)\,dx \int_F \phi(x)\psi^a\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\,dx =& \int_F\int_F f * \xi_{\phi_0}(x+y)\xi_\phi(-y)\,dy\,dx \\ =&\int_F f * \xi_{\phi_0} * \xi_\phi(x)\,dx = \int_F\int_F \xi_{\phi_0}(-y) f * \xi_\phi(x+y)\,dy\,dx \\ =&\int_F \xi_{\phi_0}(x)\,dx \int_F f * \xi_\phi(x)\,dx \end{aligned}$$

(9.2) と $\gamma_\psi(a)$ の定義式から

$$=\gamma_\psi(a)\int_F f * \xi_{\phi_0}(x)\,dx \int_F \mathcal{F}_a\phi(x)\psi^a\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\,dx.$$

両辺を $\int_F f * \xi_{\phi_0}(x)\,dx$ で割れば式 (9.1) が得られる。

次に (9.1) の左辺が消えないような $\phi_1 \in \mathcal{S}(F)$ を取る。Fourier 変換の定義から $\overline{\mathcal{F}_a\phi(x)} = \mathcal{F}_{-a}\overline{\phi}(x) = \mathcal{F}_a^{-1}\overline{\phi}(x)$ であることに注意して、(9.1) を 2 回使うと

$$\begin{aligned} \int_F \phi(x)\psi^a\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\,dx =& \gamma_\psi(a)\int_F \mathcal{F}_a\phi(x)\psi^a\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\,dx \\ =&\gamma_\psi(a)\overline{\int_F \mathcal{F}_a^{-1}\overline{\phi}(x)\psi^a\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\,dx} = \gamma_\psi(a)\overline{\gamma_\psi(a)}\overline{\int_F \overline{\phi(x)}\psi^a\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\,dx} \\ =&\gamma_\psi(a)\overline{\gamma_\psi(a)}\int_F \phi(x)\psi^a\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\,dx. \end{aligned}$$

よって $\gamma_\psi(a) \in \mathbb{C}^1$ もわかる。

(ii) $\gamma_\psi(Q)$ が (V, Q) の等距類のみに依存することは明らかである (下の問 12 参照)。やはり $\overline{\mathcal{F}_Q\phi(v)} = \mathcal{F}_{-Q}\overline{\phi}(v)$ に注意すれば、$\gamma_\psi(Q)$ の定義式の複素共役を取ったものは

$$\int_V \overline{\phi(v)}\psi\Big(-\frac{Q(v)}{2}\Big)\,dv = \overline{\gamma_\psi(Q)}\int_V \mathcal{F}_{-Q}\overline{\phi}(v)\psi\Big(\frac{Q(v)}{2}\Big)\,dv$$

となる。これは $\gamma_\psi(-Q)$ の定義式そのものだから $\gamma_\psi(-Q) = \overline{\gamma_\psi(Q)} = \gamma_\psi(Q)^{-1}$ が得られる。よって γ_ψ は $\mathrm{Witt}(F)$ の指標である。 □

$\gamma_\psi(Q)$ を (V,Q) の *Weil* 定数という。

問 **12.** (i) $a,c\in F^\times$ のとき $\gamma_\psi(ac^2)=\gamma_\psi(a)$ であることを示せ。
(ii) $\gamma_{\psi_\mathbb{R}}(a)=e^{\mathrm{sgn}\,(a)\pi i/4}$, $(a\in\mathbb{R}^\times)$ および $\gamma_{\psi_\mathbb{C}}(c)=1$, $(\forall c\in\mathbb{C}^\times)$ を示せ。(Gauss 分布 $e^{-\pi x^2}$, $e^{-\pi z\bar z}$ の Fourier 変換を用いよ。)

補題 **9.2.** (i) $F=\mathbb{C}$ のとき $\gamma_\psi(Q)=1.$
(ii) $F=\mathbb{R}$ のとき $\mathrm{sgn}\,Q=(p,q)$ として、$\gamma_{\psi_\mathbb{R}^a}(Q)=e^{\mathrm{sgn}\,(a)(p-q)\pi i/4}$.
(iii) F が非アルキメデス的でその剰余標数が奇数であるとする。$\mathrm{ord}\,\psi=0$ ならば $\gamma_\psi(a)=1, a\in\mathcal{O}^\times$ が成り立つ。

証明. (i), (ii) は問 12 から直ちに従う。
(iii) このとき $a\in\mathcal{O}^\times$ に対して ψ^a 自己双対な測度は $\mathcal{O}$ の測度が 1 となるものである。$\phi\in\mathcal{S}(F)$ として $\mathcal{O}\subset F$ の特性函数を取れば、(9.1) の両辺の積分がともに 1 になることは容易にわかる。 □

命題 **9.3.** $F\not\simeq\mathbb{C}$ のとき、D を F 上の唯一の四元斜体とすると $\gamma_\psi(\nu_D)=-1.$

証明. $F=\mathbb{R}$ のときは補題 9.2 (ii) から直接確かめられる。F が非アルキメデス的なときを証明しよう。
まず ν_D の $F^\times$ 倍は再び ν_D に等距だから、$\gamma_\psi(\nu_D)$ は ψ によらない。そこで表記を簡単にするため $\mathrm{ord}\,\psi=0$ としておく。$\mathcal{O}_D$ は定理 4.2 の素元 ϖ_D と 1 の原始 q_F^2-1 乗根 $\varepsilon_D\in D$ を使って、$\mathcal{O}_D=\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}\varepsilon_D\oplus\varpi_D(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}\varepsilon_D)$ と書ける。特に ν_D に付随する対称双線型形式 $(x,y)_D=\tau_D(xy)$ に関する $\mathcal{O}_D$ の双対格子は、$\varpi_D^2=\varpi$ が F の素元であることに注意して

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_D^* :=&\{x\in F\,|\,\tau_D(xy)\in\mathcal{O},\ \forall y\in\mathcal{O}_D\}\\ =&\left\{\begin{array}{l|c} x_1+x_2\varepsilon_D & x_1y_1+x_2y_2\varepsilon_D^2+x_3y_3\varpi_D^2, x_4y_4\varepsilon_D^2\varpi_D^2\in\mathcal{O}\\ +x_3\varpi_D+x_4\varepsilon_D\varpi_D & \forall y_1+y_2\varepsilon_D+y_3\varpi_D+y_4\varepsilon_D\varpi_D\in\mathcal{O}_D\end{array}\right\}\\ =&\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}\varepsilon_D\oplus\mathfrak{p}^{-1}\varpi_D\oplus\mathfrak{p}^{-1}\varepsilon_D\varpi_D=\varpi_D^{-1}(\mathcal{O}\varpi_D\oplus\mathcal{O}\varepsilon_D\varpi_D\oplus\mathcal{O}_D\oplus\mathcal{O}_D\varepsilon_D)\\ =&\mathfrak{p}_D^{-1}\end{aligned}$$

で与えられる。
さて、$\phi\in\mathcal{S}(D)$ を $\mathfrak{p}_D^{\mathrm{val}(2)}$ の特性函数とすれば

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D\phi(x)&=\int_D\phi(x)\psi\Big(\frac{\tau_D(xy)}{2}\Big)\,dy=\int_{\mathfrak{p}_D^{\mathrm{val}(2)}}\psi\Big(\frac{\tau_D(xy)}{2}\Big)\,dy\\ &=\begin{cases}\mathrm{meas}\,\mathfrak{p}_D^{\mathrm{val}(2)} & \tau_D(\frac{1}{2}x\mathfrak{p}_D^{\mathrm{val}(2)})\subset\mathcal{O}\text{ のとき}\\ 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}\end{aligned}$$

は $\{x\in D\mid 2^{-1}\varpi_D^{\mathrm{val}(2)}x\in\mathcal{O}_D^*\}=\mathfrak{p}_D^{\mathrm{val}(2)-1}$ の特性函数の正定数 $c:=\mathrm{meas}\,\mathfrak{p}_D^{\mathrm{val}(2)}$ 倍に等しい。(定理 4.2 から $\mathrm{val}_D(2)=2\mathrm{val}(2)$ であることに注意。) よって $D^\times$ 上の不変測度 $d_Dx^\times:=d_Dx/|x|_D$ を使って

$$\int_D\mathcal{F}_D\phi(x)\psi\Big(-\frac{\nu_D(x)}{2}\Big)\,d_Dx=c\sum_{n=\mathrm{val}(2)-1}^{\infty}\int_{\varpi_D^n\mathcal{O}_D^\times}\psi\Big(-\frac{\nu_D(x)}{2}\Big)|x|_D\,d_Dx^\times$$

$|\cdot|_D=|\nu_D(\cdot)|_F^2$ から $D^1:=\ker\nu_D\subset\mathcal{O}_D^\times$ はコンパクトで、$\nu_D:\mathcal{O}_D^\times/D^1\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}^\times$ は同型だから

$$=c\cdot\mathrm{meas}\,D^1\sum_{n=\mathrm{val}(2)-1}^{\infty}\int_{\varpi^n\mathcal{O}^\times}\psi\Big(-\frac{x}{2}\Big)|x|_F^2\,dx^\times.$$

ここで $d_Dx^\times/d_{D^1}x=dx^\times:=dx/|x|_F$ となる D^1 上の不変測度 $d_{D^1}x$ についての D^1 の測度を $\mathrm{meas}\,D^1$ と書いた。さらに

$$\int_{\varpi^n\mathcal{O}^\times}\psi\Big(-\frac{x}{2}\Big)|x|_F^2\,dx^\times=\int_{\mathfrak{p}^n\smallsetminus\mathfrak{p}^{n+1}}\psi\Big(-\frac{x}{2}\Big)|x|_F\,dx$$
$$=\begin{cases}q^{-2n}(1-q^{-1}) & n\geq\mathrm{val}(2)\text{ のとき}\\ -q^{1-\mathrm{val}(2)}\int_{2\mathcal{O}}\psi(-x/2)\,dx=-q^{1-2\mathrm{val}(2)} & n=\mathrm{val}(2)-1\text{ のとき}\end{cases}$$

だから、結局

$$\int_D\mathcal{F}_D\phi(x)\psi\Big(-\frac{\nu_D(x)}{2}\Big)\,d_Dx=c\cdot\mathrm{meas}\,D^1\Big(-q^{1-2\mathrm{val}(2)}+\sum_{n=\mathrm{val}(2)}^{\infty}q^{-2n}(1-q^{-1})\Big)$$
$$=-c\cdot\mathrm{meas}\,D^1\frac{q^{1-2\mathrm{val}(2)}}{1+q^{-1}}$$

が従う。これと
$$\int_D\phi(x)\psi\Big(\frac{\nu_D(x)}{2}\Big)\,d_Dx=\int_{\mathfrak{p}_D^{\mathrm{val}(2)}}d_Dx>0$$
を Weil 定数の定義式 (定理 9.1) に代入して、$\gamma_\psi(\nu_D)\in\mathbb{C}^1\cap\mathbb{R}_{<0}=\{-1\}$ を得る。 □

系 **9.4.** (i) $a,b\in F^\times$ に対して $\dfrac{\gamma_\psi(1)\gamma_\psi(ab)}{\gamma_\psi(a)\gamma_\psi(b)}=(a,b)_F$. 一般に Weil 定数 $\gamma_\psi(Q)$ は 1 の 8 乗根である。
(ii) $\gamma_\psi(Q)=\gamma_\psi(1)^{\mathrm{rk}Q-1}\gamma_\psi(\det Q)\varepsilon(Q)$.

証明. (i) 補題 5.2 と命題 9.3 から $\gamma_\psi(\nu_{B_{a,b}})=(a,b)_F$ である。一方、$(B_{a,b},\nu_{B_{a,b}})\simeq(F,1)\oplus(F,-a)\oplus(F,-b)\oplus(F,ab)$ と定理 9.1 から

$$\gamma_\psi(\nu_{B_{a,b}})=\frac{\gamma_\psi(1)\gamma_\psi(ab)}{\gamma_\psi(a)\gamma_\psi(b)}$$

ゆえ最初の主張が従う。特に任意の $c \in F^{\times}$ に対して

$$\gamma_\psi(c)^4 = \gamma_{\psi^c}(1)^4 = \frac{\gamma_{\psi^c}(1)\gamma_{\psi^c}(1)}{\gamma_{\psi^c}(-1)\gamma_{\psi^c}(-1)} = (-1,-1)_F \in \{\pm 1\}$$

であるから、後半の主張が得られる。

(ii) $\mathrm{rk}Q$ についての帰納法による。階数 1 のときは自明である。一般の場合、$Q \simeq Q_1 \oplus q$ と書けば

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) =& \gamma_\psi(1)^{\mathrm{rk}Q_1}\gamma_\psi(q\det Q_1)\varepsilon(Q_1)(q,\det Q_1)_F \\
\overset{\text{(i)}}{=}& \gamma_\psi(1)^{\mathrm{rk}Q_1}\gamma_\psi(q\det Q_1)\varepsilon(Q_1)\frac{\gamma_\psi(q)\gamma_\psi(\det Q_1)}{\gamma_\psi(1)\gamma_\psi(q\det Q_1)} \\
=& \gamma_\psi(1)^{\mathrm{rk}Q_1-1}\gamma_\psi(\det Q_1)\varepsilon(Q_1)\gamma_\psi(q)
\end{aligned}$$

帰納法の仮定から

$$=\gamma_\psi(Q_1)\gamma_\psi(q) = \gamma_\psi(Q).$$

□

第10講　Weil表現

前講に引き続き、F は標数が 2 でない局所体とする。

10.1　シンプレクティク空間

F 上の (有限次元) 線型空間 W と、その上の非退化交代形式、すなわち双線型形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle : W \times W \to F$ であって

- $\langle w, w'\rangle = -\langle w', w\rangle,\ w, w' \in W$;
- $W \ni w \mapsto [w' \mapsto \langle w, w'\rangle] \in W^*$ は線型同型

を満たすものの対 $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を F 上のシンプレクティク空間という。部分空間 $Y \subset W$ が完全等方的とは、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ の $Y \times Y$ への制限が 0 であることとする。シンプレクティク空間の場合には極大完全等方的部分空間を *Lagrange* 部分空間 (*Lagrangian subspace*) という。W の Lagrange 部分空間の集合を $\Omega(W)$ と書こう。2つの完全等方的部分空間 $Y, Y' \subset W$ が互いに双対とは、$Y \ni y \mapsto [y' \mapsto \langle y, y'\rangle] \in Y'^*$ が同型なこととする。

命題 10.1. $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を F 上のシンプレクティク空間とする。
(i) (Witt 基底の存在) 完全等方的部分空間 $Y \subset W$ とその基底 $\{e_1, \dots, e_r\}$ に対して、$\{e'_1, \dots, e'_r\} \subset W$ であって

$$\langle e_i, e'_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad \langle e'_i, e'_j\rangle = 0, \quad (1 \le i, j \le r)$$

を満たすものがある。
(ii) 完全等方的部分空間 $Y, Y' \subset W$ 互いに双対ならば、$Y \in \Omega(W)$ であることと $Y' \in \Omega(W)$ であることは同値である。そのとき $Y^\perp = Y$ および $W = Y \oplus Y'$ が成り立つ。この分解を $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ の偏極 (*polarization*) という。特に $Y \in \Omega(W)$ であるためには $Y^\perp := \{w \in W \mid \langle w, y\rangle = 0,\ y \in Y\} = Y$ が必要十分である。

証明. これは2.2節と全く同様の議論により証明できる。交代形式には非等方的ベクトルが存在しないことに注意せよ。 □

注意 **10.2.** 命題から特に任意のシンプレクティク空間は横ベクトルの空間 F^{2n} と $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$ で表される交代形式

$$\langle (y_1', y_1), (y_2', y_2) \rangle = y_1' {}^t y_2 - y_1 {}^t y_2', \quad y_i, y_i' \in F^n$$

の対に等距である。

$(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の等距変換のなす群

$$Sp(W) := \{ g \in \mathrm{End}_F(W) \,|\, \langle w.g, w'.g \rangle = \langle w, w' \rangle, \, \forall w, w' \in W \}$$

を W のシンプレクティク群という。$Y \in \Omega(W)$ の固定化群 $P_Y := \mathrm{Stab}(Y, Sp(W))$ を $Sp(W)$ の *Siegel* 放物型部分群と呼ぶ。そのユニポテント根基は $U_Y := \{ g \in P_Y \,|\, g|_Y = \mathrm{id}_Y \}$ であり、$Y' \cap Y = \{0\}$ である (つまり Y と双対な) $Y' \in \Omega(W)$ を取るごとに P_Y の *Levi* 成分 $M_Y := \mathrm{Stab}(Y', P_Y)$ が定まる。

例 **10.3.** $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (F^{2n}, \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{smallmatrix}\right))$ で $Y = \{ (0, \ldots, 0; x_1, \ldots, x_n) \in W \}$, $Y' := \{ (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in W \}$ と取れば、$P_Y = M_Y U_Y$ は

$$M_Y = \left\{ m_Y(a) := \begin{pmatrix} a & \\ & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in GL(n, F) \right\},$$
$$U_Y = \left\{ u_Y(b) := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & b \\ & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \,\middle|\, b = {}^t b \in \mathbb{M}_n(F) \right\}$$

で与えられる。

10.2 Leray 不変量

Lagrange 部分群の順序付き三つ組 $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \Omega(W)^3$ に対して、$Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$ 上の二次形式 Q_{Y_1, Y_2, Y_3} を

$$Q_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) := \langle y_1, y_2 \rangle + \langle y_2, y_3 \rangle + \langle y_3, y_1 \rangle$$

と定める。二次空間 $(Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3, Q_{Y_1, Y_2, Y_3})$ の $\mathrm{Witt}(F)$ でのクラスを (Y_1, Y_2, Y_3) の *Leray* 不変量といい、$L(Y_1, Y_2, Y_3)$ と書く [Ler74]。定義から直ちに次がわかる。

補題 **10.4.** (i) $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して $L(Y_{\sigma(1)}, Y_{\sigma(2)}, Y_{\sigma(3)}) = \mathrm{sgn}\,(\sigma) L(Y_1, Y_2, Y_3)$.
(ii) (Y_1, Y_2, Y_3), $(Y_1', Y_2', Y_3') \in \Omega(W)^3$ が $Y_i \cap Y_j = Y_i' \cap Y_j' = \{0\}$, $(1 \leq i < j \leq 3)$ を満たすとき、$g.(Y_1, Y_2, Y_3) = (Y_1', Y_2', Y_3')$ となる $g \in Sp(W)$ があるためには、$L(Y_1, Y_2, Y_3) = L(Y_1', Y_2', Y_3')$ が必要十分である。

証明. (i) および (ii) の必要性は明らかである。逆に $L(Y_1, Y_2, Y_3) = L(Y'_1, Y'_2, Y'_3)$ だとしよう。$(Y'_1, Y'_2).g = (Y_1, Y_2)$ となる $g \in Sp(W)$ があるから、必要なら (Y'_1, Y'_2, Y'_3) を $(Y'_1, Y'_2, Y'_3).g$ で置き換えて、$(Y_1, Y_2) = (Y'_1, Y'_2)$ だとしてよい。交わりについての仮定から $Q_{Y_1,Y_2,Y_3}, Q_{Y_1,Y_2,Y'_3}$ はともに非退化で、仮定はこれらが等距であることに同値である。すなわち $a_i \in \mathrm{Aut}_F(Y_i), (i = 1, 2)$ と $h : Y_3 \xrightarrow{\sim} Y'_3$ があって、$(y_1, y_2, y_3) \in Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$ に対して

$$\langle y_1, y_2\rangle + \langle y_2, y_3\rangle + \langle y_3, y_1\rangle = \langle y_1.a_1, y_2.a_2\rangle + \langle y_2.a_2, y_3.h\rangle + \langle y_3.h, y_1.a_1\rangle$$

が成り立つ。そこでまず $y_3 = 0$ とすれば、$\langle y_1, y_2\rangle = \langle y_1.a_1, y_2.a_2\rangle$ から $m_{Y_2}(a_1) := a_1 \oplus a_2$ が $Sp(W)$ の Siegel Levi 部分群 $M_{Y_2} := \mathrm{Stab}\,(Y_1, P_{Y_2})$ に属することがわかる。続いて y_1, y_2 を順に 0 にすることにより、$\langle y_3, y_i\rangle = \langle y_3.h, y_i.a_i\rangle, (i = 1, 2)$, すなわち

$$\langle y_3, w\rangle = \langle y_3.h, w.m_{Y_2}(a_1)\rangle = \langle y_3.hm_{Y_2}(a_1)^{-1}, w\rangle, \quad y_3 \in Y_3,\ w \in W$$

を得る。言い換えれば$y_3.h = y_3.m_{Y_2}(a_1)$であるから、$(Y_1, Y_2, Y_3).m_{Y_2}(a_1) = (Y_1, Y_2, Y'_3)$ が従う。 □

10.3 メタプレクティク群と Weil 表現

F 上のシンプレクティク空間 $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して、$W \oplus F$ に演算を

$$(w_1; z_1)(w_2; z_2) := \Big(w_1 + w_2; z_1 + z_2 + \frac{\langle w_1, w_2\rangle}{2}\Big), \quad w_i \in W,\ z_i \in F$$

と定めて得られる群 $\mathcal{H}(W)$ を W の *Heisenberg* 群という。$\mathcal{H}(W)$ の中心は第二成分 F であり、偏極 $W = Y' \oplus Y$ を取れば$Y \oplus F \subset \mathcal{H}(W)$ は極大アーベル部分群である。

F の非自明指標 ψ を $\psi : Y \oplus F \ni (y; z) \mapsto \psi(z) \in \mathbb{C}^\times$ と延ばす。それから $\mathcal{H}(W)$ への L^2 誘導表現、すなわち

$$H(Y) := \left\{ \begin{array}{c} \phi : \mathcal{H}(W) \to \mathbb{C} \\ \text{可測} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi((y; z)h) = \psi(z)\phi(h), \\ & y \in Y, z \in F, h \in \mathcal{H}(W) \\ \text{(ii)} & \int_{Y'} |\phi(y'; 0)|^2\, dy' < \infty \end{array} \right\}$$

上の $\mathcal{H}(W)$ の右移動表現 ρ_ψ を $\mathcal{H}(W)$ の ψ*-Schrödinger* 表現という。$H(Y) \simeq L^2(Y')$ と同一視したとき、ρ_ψ は

$$\rho_\psi(y', y; z)\phi(x') = \psi\Big(z + \frac{\langle 2x' + y', y\rangle}{2}\Big)\phi(x' + y'), \quad y', x' \in Y',\ y \in Y,\ z \in F$$

で与えられる。次の事実を引用しよう。

事実 10.5 (ユニタリ表現の Schur の補題)**.** G を局所コンパクト位相群とする。G の既約ユニタリ表現 (π, V) に対して $\mathrm{End}_G(\pi) \simeq \mathbb{C}$ である。

事実 10.6 (Stone-von-Neumann の定理)**.** $(\rho_\psi, L^2(Y'))$ は中心 F が ψ で作用する $\mathcal{H}(W)$ の (ユニタリ同値を除いて唯一の) 既約ユニタリ表現である。

$Sp(W)$ は $\mathcal{H}(W)$ に $(w;z).g := (w.g;z)$, $w \in W$, $z \in F$, $g \in Sp(W)$ と作用する。この作用に関する半直積 $\mathcal{J}(W) := \mathcal{H}(W) \rtimes Sp(W)$ を W の *Jacobi* 群という。$g \in Sp(W)$ に対して、$g.\rho_\psi : h \mapsto \rho_\psi(h.g)$ は再び中心 F が ψ で作用する $\mathcal{H}(W)$ の既約ユニタリ表現である。よって事実 10.6 から、$\mathcal{H}(W)$ 等距写像 $\omega_g : g.\rho_\psi \xrightarrow{\sim} \rho_\psi$ が $\mathbb{C}^1$ 倍を除いてただ一つ存在する。特に $\omega_{g_1} \circ \omega_{g_2}, \omega_{g_1 g_2}$ はともに $g_1 g_2.\rho_\psi = g_1.(g_2.\rho_\psi)$ から ρ_ψ への同型だから、定数倍を除いて一致する。すなわち $H(Y)$ 上のユニタリ変換の群を $U(H(Y))$ と書くとき、

$$Sp(W) \ni g \longmapsto (\omega_g \mod \mathbb{C}^1) \in U(H(Y))/\mathbb{C}^1$$

は準同型である。このことを $g \mapsto \omega_g$ は $Sp(W)$ の $H(Y)$ の射影表現 (*projective representation*) であるという。この射影表現は次のように記述できる。

$Y_1, Y_2 \in \Omega(W)$ に対して、同型

$$A_{Y_2,Y_1} : Y_1/Y_1 \cap Y_2 \ni y + Y_1 \cap Y_2 \longmapsto \langle y, \cdot \rangle \in (Y_2/Y_1 \cap Y_2)^*$$

が定まる。$g \in Sp(W)$ に対して $\rho_\psi(g) : H(Y) \xrightarrow{\sim} H(Y)$ を

$$\big(\rho_\psi(g)\phi\big)(h) := |A_{Y.g,Y}|_F^{1/2} \int_{Y.g/Y.g\cap Y} \phi((y;0)h.g)\, d\bar{y}$$

と定義する。但し、Y 上の不変測度 dy を止めて $Y.g$ 上にはそれを g で移した測度を取る。$Y.g \cap Y$ 上の測度 du を選ぶたびに $Y/Y.g \cap Y$ 上の測度 $d\bar{y} = dy/du$ および $Y.g/Y.g \cap Y$ 上の測度 $d(\bar{y}.g) = d(y.g)/du$ が定まる。$(Y.g/Y.g \cap Y)^*$ 上には $d(\bar{y}.g)$ の ψ に関する双対測度 $d(\bar{y}.g)^*$ を取り、これと $d\bar{y}$ に関する $A_{Y.g,Y}$ のモジュラスを

$$|A_{Y.g,Y}|_F := \frac{dA_{Y.g,Y}(\bar{y})}{d(\bar{y}.g)^*}$$

と書いた。こうして定まる $\rho_\psi(g)$ は du の取り方によらず、$\mathcal{H}(W)$ 等距写像 $\rho_\psi(g) : g.\rho_\psi \xrightarrow{\sim} \rho_\psi$ を定めていることは容易に確かめられる。更に次が成り立つ。

命題 10.7. $g_1, g_2 \in Sp(W)$ に対して、$\rho_\psi(g_1) \circ \rho_\psi(g_2) = \gamma_\psi(L(Y, Y.g_2^{-1}, Y.g_1))\rho_\psi(g_1 g_2)$.

これの証明は時間の都合で割愛する。次の問は Weil 定数の定義そのものから従う。

問 13. $Y \cap Y.g_2 = Y.g_2 \cap Y.g_1 g_2 = Y \cap Y.g_1 g_2 = \{0\}$ のときに命題 10.7

$$\rho_\psi(g_1 g_2) = \gamma_\psi(L(Y, Y.g_2, Y.g_1 g_2))\rho_\psi(g_1) \circ \rho_\psi(g_2)$$

を証明せよ。

命題 10.7 から $c_\psi(g_1,g_2) := \gamma_\psi(L(Y,Y.g_2^{-1},Y.g_1))$ は $Sp(W)$ 上の $\mathbb{C}^1$ 値 (正確には 1 の 8 乗根の群に値を持つ) 2 コサイクルである:

$$c_\psi(g_2,g_3)c_\psi(g_1g_2,g_3)^{-1} = c_\psi(g_1,g_2g_3)^{-1}c_\psi(g_1,g_2), \quad g_1,g_2,g_3 \in Sp(W).$$

これに付随する $Sp(W)$ の $\mathbb{C}^1$ による中心拡大 $Mp_\psi(W) = Sp(W)\times\mathbb{C}^1$:

$$(g_1,z_1)(g_2,z_2) := (g_1g_2, z_1z_2c_\psi(g_1,g_2)), \quad (g_i \in Sp(W),\, z_i \in \mathbb{C}^1)$$

を W のメタプレクティク群という。定義と命題 10.7 から

$$\omega_\psi : Mp_\psi(W) \ni (g,z) \longmapsto z\rho_\psi(g) \in U(H(Y))$$

は $Mp(W)$ のユニタリ表現である。これを $Mp_\psi(W)$ の *Weil* 表現あるいは振動子表現 (*oscillator representation*) という。

命題 10.8 (ω_ψ の明示公式)**.** $W = Y' \oplus Y$ の Witt 基底 $\{e'_1,\dots,e'_n;e_1,\dots,e_n\}$ を止めて、$H(Y) = L^2(Y') = L^2(F^n)$ と同一視したとき、ω_ψ は次の公式で特徴付けられる。

$$\omega_\psi(m_Y(a),z)\phi(y') = z|\det a|_F^{1/2}\phi(y'.a), \quad (a \in GL(n,F)) \tag{10.1}$$

$$\omega_\psi(u_Y(b),z)\phi(y') = z\psi\Big(\frac{y'b^ty'}{2}\Big)\phi(y'), \quad (b = {}^tb \in \mathbb{M}_n(F)) \tag{10.2}$$

$$\omega_\psi\Big(\begin{pmatrix}\mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n\\ \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n\end{pmatrix}, z\Big)\phi(y') = \int_{F^n}\phi(y)\psi(-y'^ty)\,dy \tag{10.3}$$

第11講　$SL(2,F)$ の既約表現の構成

前講に引き続き F は標数が 2 でない局所体であるとする。

11.1　$O(E)\times SL(2,F)$ の Weil 表現

F 上の 2 次元非退化二次空間は、

$$\gamma E := (E, \gamma \mathrm{N}_{E/F}), \quad \gamma \in F^\times \mod \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$$

と書かれていた (表 6.1 参照)。但し E は F の二次拡大か $F\oplus F$ であり、$\mathrm{Aut}_F(E)\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明な元 σ を使って $\mathrm{N}_{E/F}: E\ni z\mapsto z\sigma(z)\in F$ とおいた。$\mathrm{Tr}_{E/F}: E\ni z\mapsto z+\sigma(z)\in F$ として、付随する対称双線型形式は

$$(z,z')_{\gamma E} := \frac{\gamma \mathrm{Tr}_{E/F}(z\sigma(z'))}{2}, \quad z,z'\in E$$

で与えられる。γE の直交群は γ によらず、$SO(E)=\{z\in E\,|\,\mathrm{N}_{E/F}(z)=1\}$ として $O(E)=SO(E)\rtimes\langle\sigma\rangle$ である。$E=E_\alpha$ となる $\alpha\in F^\times$ を止め、

$$\omega_{E/F}: F^\times \ni x \longmapsto (x,\alpha)_F \in \{\pm 1\}$$

と書く。これは同型 $\omega_{E/F}: F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \xrightarrow{\sim} \{\pm1\}$ を与えているのだった。*Langlands* の λ 因子 $\lambda(E/F,\psi) := \gamma_\psi(\mathrm{N}_{E/F}) = \gamma_\psi(1)/\gamma_\psi(\alpha)$ を用意しておく。

シンプレクティク空間 $(W=F^2, \langle\cdot,\cdot\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right))$ のシンプレクティク群は $Sp(W)=SL(2,F)$ だった。このとき

$$(\mathbb{W} := E\otimes_F W, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle := (\cdot,\cdot)_{\gamma E}\otimes\langle\cdot,\cdot\rangle)$$

は F 上の 4 次元シンプレクティク空間である。定義から準同型

$$\iota_{\gamma E,W} = \iota_W\times\iota_{\gamma E}: O(E)\times SL(2,F)\ni (g,g')\longmapsto g\otimes g'\in Sp(\mathbb{W})$$

がある。偏極 $W=Y\oplus Y'$, $Y:=\{(0,y)\,|\,x\in F\}$, $Y':=\{(y',0)\,|\,y'\in F\}$ を使って、偏極 $\mathbb{W}=\mathbb{Y}\oplus\mathbb{Y}'$ を $\mathbb{Y}:=\gamma E\otimes_F Y$, $\mathbb{Y}':=\gamma E\otimes_F Y'$ と定める。メタプレクティク 2 コサイクル $\gamma_\psi(L(\mathbb{Y},\mathbb{Y}.g_2^{-1},\mathbb{Y}.g_1))$, $(g_1,g_2\in Sp(\mathbb{W}))$ に対するメタプレクティク群 $1\to\mathbb{C}^1\to Mp(\mathbb{W})\to Sp(\mathbb{W})\to 1$ を思い出す (10.3 節)。

以上のもとで次の定理を引用する。

定理 11.1 ([Kud94] 定理 3.1)**.** $g' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,F)$ に対して

$$\beta_{\gamma E}(g') := \begin{cases} \overline{\lambda(E/F,\psi)}\omega_{E/F}(\gamma c) & c \neq 0 \text{ のとき} \\ \omega_{E/F}(d) & c = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めれば、

$$\widetilde{\iota}_{\gamma E,W} : O(E) \times SL(2,F) \ni (g,g') \longmapsto (\iota_{\gamma E,W}(g,g'), \beta_{\gamma E}(g')) \in Mp(\mathbb{W})$$

は定義可能な準同型である。

$Mp(\mathbb{W})$ の Weil 表現 $(\omega_\psi, L^2(\mathbb{Y}') = L^2(E))$ と定理の準同型を合成することにより、$O(E) \times SL(2,F)$ の Weil 表現

$$\omega_{\gamma E,W} = \omega_W \times \omega_{\gamma E} : O(E) \times SL(2,F) \xrightarrow{\widetilde{\iota}_{\gamma E,W}} Mp(\mathbb{W}) \xrightarrow{\omega_\psi} U(L^2(\mathbb{Y}'))$$

が得られる。命題 10.8 と定理 11.1 から次が得られる。

命題 11.2. $(\omega_{\gamma E,W}, L^2(E))$ は次の明示公式たちで特徴付けられる。

$$\omega_W(g)\phi(z) = \phi(g^{-1}.z), \quad g \in O(E) \tag{11.1}$$

$$\omega_{\gamma E}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right)\phi(z) = \omega_{E/F}(a)|a|_F\phi(az), \quad a \in F^\times \tag{11.2}$$

$$\omega_{\gamma E}\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\phi(z) = \psi^\gamma\left(\frac{\mathrm{N}_{E/F}(z)b}{2}\right)\phi(z), \quad b \in F \tag{11.3}$$

$$\omega_{\gamma E}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\phi(z) = \overline{\lambda(E/F,\psi^\gamma)}\int_E \phi(z')\psi_E^\gamma\left(-\frac{z\sigma(z')}{2}\right)dz'. \tag{11.4}$$

11.2 $O(E) \times SL(2,F)$ の局所 θ 対応

まず $O(E) = SO(E) \rtimes \langle\sigma\rangle$ の既約ユニタリ表現を分類しよう。指標 $\eta : E^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ は指標 $\eta_u : SO(E) \ni z/\sigma(z) \mapsto \eta(z) \in \mathbb{C}^\times$ を与える。(Hilbert の定理 90 から任意の $g \in SO(E)$ は $g = z/\sigma(z)$, $(z \in E^\times)$ と書けることに注意せよ。) 次の補題は Mackey 理論と局所類体論の簡単な演習問題である。

補題 11.3. (i) 指標 $\eta : E^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ が $\eta^2 \neq \mathbb{1}$ を満たすとき、誘導表現 $\tau_\eta := \mathrm{ind}_{SO(E)}^{O(E)}\eta_u$ は $O(E)$ の既約表現。$\tau_\eta \simeq \tau_{\eta'}$ であるためには $\eta' = \eta^{\pm 1}$ が必要十分。
(ii) $\eta^2 = \mathbb{1}$ のときには二次元半単純 F 代数 E' があって $\eta = \omega_{K/E}, (K := E\otimes_F E')$ と書ける。このとき $\mathrm{ind}_{SO(E)}^{O(E)}\eta_u$ は 2 つの指標 $\tau_K^\pm$ の直和。これらは $\tau_K^\pm(\sigma) = \pm 1$ で区別される。$\tau_K^\pm = \tau_{K'}^\pm$ であるためには $K \simeq_E K'$ が必要十分。特に $K \simeq_F E^2$ のとき、$\tau_K^+ = \mathbb{1}_{O(E)}, \tau_K^- = \mathrm{sgn}_{O(E)}$ である。
(iii) $O(E)$ の任意の既約ユニタリ表現は上記 (i), (ii) のいずれかの表現に同型である。

以下、$L^2(E)$ の代わりに $\omega_{\gamma E,W}$ 不変で稠密な部分空間 $\mathcal{S}(E)$ を考える。$O(E)$ が既約ユニタリ表現 τ で作用する $\mathcal{S}(E)$ の極大商空間を $\mathcal{S}(E,\tau)$ と書き、その上の $SL(2,F)$ の表現を $\theta_{\psi^\gamma}(\tau,W)$ で表す。

E/F が二次拡大の場合 $SO(E)$ はコンパクトであることに注意して、指標 $\eta : E^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$p_\eta : \mathcal{S}(E) \ni \phi(z) \longmapsto \int_{SO(E)} \phi(g.z)\eta_u(g)\,dg \in \mathcal{S}(E)$$

とおく。

命題 11.4. 指標 $\eta : E^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ を取る。
(i) 補題 11.3 の記号で、

$$p_\eta : \mathcal{S}(E) \twoheadrightarrow \mathcal{S}(E,\eta_u) := \begin{cases} \mathcal{S}(E,\tau_\eta) & \eta^2 \neq \mathbb{1} \text{ のとき} \\ \mathcal{S}(E,\tau_K^+) \oplus \mathcal{S}(E,\tau_K^-) & \eta = \omega_{K/E} \neq \mathbb{1} \text{ のとき} \\ \mathcal{S}(E,\mathbb{1}_{O(E)}) & \eta = \mathbb{1} \text{ のとき} \end{cases}$$

は全射 $O(E)\times SL(2,F)$ 準同型。
(ii) $\eta^2 \neq \mathbb{1}$ のとき $\theta_{\psi^\gamma}(\tau_\eta, W) := (\omega_{\gamma E}, \mathcal{S}(E,\eta_u))$ は $SL(2,F)$ の離散系列表現[a]である。
(iii) $\eta = \omega_{K/E} \neq \mathbb{1}$ のとき、$\theta_{\psi^\gamma}(\tau_K^\pm, W) := (\omega_{\gamma E}, \mathcal{S}(E,\tau_K^\pm))$ は $SL(2,F)$ の既約超カスプ表現[b]。
(iv) $\eta = \mathbb{1}$ のとき $\theta_{\psi^\gamma}(\mathbb{1}, W) := (\omega_{\gamma E}, \mathcal{S}(E,\mathbb{1}_{O(E)}))$ は $SL(2,F)$ の極限離散系列表現、$\theta_{\psi^\gamma}(\mathrm{sgn}_{O(E)}, W) = 0$ である。

[a] すなわちその行列成分が $SL(2,F)$ 上で二乗可積分である。
[b] つまり行列成分が $SL(2,F)$ 上の函数としてコンパクト台を持つ。

証明. (i) のみ証明する。(ii)–(iv) は (i) と局所 θ 対応の誘導原理と呼ばれる結果 [Kud86], [MVW87, 3 章] から従うのだが、ここでは解説しない。$SO(E)$ はコンパクトなので $\mathcal{S}(E) = \bigoplus_\eta \mathrm{im}\,p_\eta$ は明らかである。容易にわかる通り $\omega_W(g)p_\eta(\phi) = \eta_u(g)p_\eta(\phi)$,

$(g \in SO(E))$ だから、$\eta^2 \neq \mathbb{1}$ ならば $\operatorname{im} p_\eta = \mathcal{S}(E, \tau_\eta)$ である。$\eta = \omega_{K/E} \neq \mathbb{1}$ のときにはさらに、

$$\begin{aligned}\omega_W(\sigma)p_\eta(\phi)(z) &= \int_{SO(E)} \phi(g.\sigma(z))\eta_u(g)\,dg = \int_{SO(E)} \phi((g\sigma(z)/z).z)\eta_u(g)\,dg \\ &= \int_{SO(E)} \phi(g.z)\eta_u(g \cdot z/\sigma(z))\,dg = \omega_{K/E}(z)p_\eta(\phi)(z)\end{aligned}$$

であるから $\operatorname{im} p_\eta \cap \mathcal{S}(\mathrm{N}_{K/E}(K^\times)) = \mathcal{S}(E, \tau_K^+), \operatorname{im} p_\eta \cap \mathcal{S}(E^\times \smallsetminus \mathrm{N}_{K/E}(K^\times)) = \mathcal{S}(E, \tau_K^-)$ を得る。η が自明なときだけ、$\operatorname{im} p_\eta$ は 0 にも台を持ち $\mathrm{N}_{K/E}(K) = E$ だから $\operatorname{im} p_\eta = \mathcal{S}(E, \mathbb{1}_u)$ を得る。 □

$E = F^2$ のとき　$\gamma E = (\mathbb{H}, Q_{\mathbb{H}})$ だから $O(E) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right) \mid a \in F^\times\right\} \rtimes \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\rangle$ はコンパクトでない。指標 $\eta : F^\times \times F^\times/\Delta F^\times \to \mathbb{C}^\times$ は $\eta_u : F^\times \ni x \mapsto \eta(x,1) \in \mathbb{C}^\times$ と同一視される。$F = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の場合はよく知られているので、ここでは非アルキメデス的な場合のみを解説する。

(1) $(\omega_{\gamma E,W}, \mathcal{S}(E))$ を部分 Fourier 変換

$$\mathcal{F}_X : \mathcal{S}(E) \ni \phi \longmapsto \mathcal{F}_X\phi(x', x) := \int_F \phi\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} \psi^\gamma\Big(\frac{xy'}{2}\Big)\,dy' \in \mathcal{S}(W)$$

したものは、次の明示公式で特徴付けられる。但し、測度は $(x,y) \mapsto \psi^\gamma(xy/2)$ についての自己双対測度を用いるものとする。

$$\omega_W\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\Big)\varphi(w) = |a|_F^{-1}\varphi(a^{-1}.w), \quad a \in F^\times \tag{11.5}$$

$$\omega_W\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\Big)\varphi(w) = \int_W \varphi(w')\psi^\gamma\Big(\frac{\langle w', w\rangle}{2}\Big)\,dw' \tag{11.6}$$

$$\omega_{\gamma E}(g')\varphi(w) = \varphi(w.g'), \quad g' \in SL(2,F). \tag{11.7}$$

これを $\omega_{\gamma E,W}$ の混合模型という。

(2) この混合模型の $SO(E) \times SL(2,F)$ への制限を考える。W の $SO(E) \times SL(2,F)$ 軌道は $\{0\}$ と 0 以外のベクトルからなる W^* である。

(a) $\{0\}$ に台を持つ $\mathcal{S}(\{0\}) = \mathbb{C}\delta_0$ (Dirac 超函数) は $|\cdot|_F^{-1} \otimes \mathbb{1}_{SL(2,F)}$ に同型である。

(b) W^* の原点 $(0,1)$ を取り、$\varphi \in \mathcal{S}(W)$ に対して

$$\begin{aligned}p_\eta(\varphi)(g') &:= \int_{F^\times} \omega_W\Big(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}\Big)\varphi((0,1).g')\eta_u(t)^{-1}\,dt^\times \\ &= \int_{F^\times} \varphi((0,t).g')\eta_u(t)|t|_F\,dt^\times\end{aligned}$$

と定める。これは $\mathcal{S}(W)$ から

$$I(\eta_u) := \left\{ \phi : SL(2,F) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) g) = \eta_u(a)|a|_F \phi(g) \\ \text{(ii)} & \phi \text{ は局所定数} \end{array} \right\}$$

上の $SL(2,F)$ の右移動表現への非自明な $SL(2,F)$ 準同型を与える。この表現を η_u からの主系列表現という。

これらの考察から次の命題が導かれる。

命題 11.5. (i) $\eta_u^2 \neq \mathbb{1}$ のとき $\theta_\psi(\tau_\eta, W) \simeq I(\eta_u)$ は $SL(2,F)$ の既約主系列表現である。
(iii) $\eta_u = \omega_{E'/F} \neq \mathbb{1}$ のとき、$I(\eta_u)$ は 2 つの極限離散系列表現 $\theta_\psi(\tau^{\pm}_{E'^2}, W)$ の直和に同型である。
(iv) $\eta_u = \mathbb{1}$ のとき $\theta_\psi(\mathbb{1}_{O(E)}, W) \simeq I(\mathbb{1})$ は既約主系列表現、$\theta_\psi(\mathrm{sgn}_{O(E)}, W) = 0$ である。

問 **14.** 命題 11.2 の公式から混合模型の式 (11.5), (11.6), (11.7) を導け。

第12講　$SL(2,\mathbb{A})$ 上の保型形式の例

12.1　$SL(2,\mathbb{A})$ 上の保型形式

まずは $SL(2,\mathbb{A})$ 上の保型形式の現代的な定義を簡潔に復習する。

F を標数が 2 でない大域体としてそのアデール環を $\mathbb{A}$ と書く (6.2 節参照)。全てのアルキメデス素点を含む F の素点の有限集合 S に対して $\mathbb{A}(S)^\times := \prod_{v\in S} F_v^\times \times \mathcal{O}_v^\times$ は局所コンパクト位相環になる。その合併、あるいは位相的帰納極限

$$\mathbb{A}^\times = \bigcup_S \mathbb{A}(S)^\times = \varinjlim_S \mathbb{A}(S)^\times$$

を F のイデール群という。3.4 節 (2) から

$$|\cdot|_\mathbb{A} : \mathbb{A}^\times \ni (x_v)_v \longmapsto \prod_v |x_v|_v \in \mathbb{R}_+^\times$$

は実際には有限積であり定義可能な準同型を定める。これをイデールノルムといい、その核を $\mathbb{A}^1$ と書く。F が代数体ならば $|\mathbb{A}^\times|_\mathbb{A} = \mathbb{R}_+^\times \simeq \mathbb{R}$ であり、$\mathbb{F}_q(T)$ の場合には $|\mathbb{A}^\times|_\mathbb{A} = q^\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ となる。

事実 12.1. $F^\times \subset \mathbb{A}^1$ (*Artin* の積公式) であり、$\mathbb{A}^1/F^\times$ はコンパクト位相群になる。

$SL(2)$ のアデール有理点の群

$$SL(2,\mathbb{A}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{A} \\ ad-bc=1 \end{matrix} \right\}$$

を考える。$SL(2)$ の上三角行列からなる Borel 部分群を $B=TU$ と書く。ここで

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2) \right\}, \quad U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix} \in SL(2) \right\}$$

である。極大コンパクト部分群 $\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$ を

$$\mathbf{K}_v := \begin{cases} SO(2,\mathbb{R}) & v\,\text{が実のとき} \\ SU(2,\mathbb{R}) & v\,\text{が複素のとき} \\ SL(2,\mathcal{O}_v) & v\,\text{が非アルキメデスのとき} \end{cases}$$

と定めれば、岩澤 (および *Langlands*) 分解

$$SL(2,\mathbb{A}) = B(\mathbb{A})\mathbf{K} = U(\mathbb{A})T(\mathbb{A})^1\mathfrak{A}\mathbf{K} \tag{12.1}$$

が成り立つ (第 2 講の問 1 参照)。ここで

$$T(\mathbb{A})^1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{A}^1 \right\}, \quad \mathfrak{A} := \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R}_+^\times \right\}$$

と書いた。但し $\mathbb{R}_+^\times$ は $F_\infty^\times = \prod_v F_v^\times$ に対角に埋め込まれているものとする。

命題 **12.2** (Mikowski リダクション)**.** $U(\mathbb{A}) = U(F)\Omega^U$, $T(\mathbb{A})^1 = T(F)\Omega^T$ となるコンパクト部分集合 $\Omega^U \subset U(\mathbb{A})$, $\Omega^T \subset T(\mathbb{A})^1$ を取り (命題 6.4 (ii), 事実 12.1)、$\Omega := \Omega^U\Omega^T \subset B(\mathbb{A})$ とおく。このとき $c > 0$ があって、

$$SL(2,\mathbb{A}) = SL(2,F)\Omega\mathfrak{A}_B(c)\mathbf{K}$$

が成り立つ。但し、$\mathfrak{A}_B(c) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{A} \,\middle|\, a > c \right\}$ と書いた。

系 **12.3.** $SL(2,F)\backslash SL(2,\mathbb{A})$ の右 $SL(2,\mathbb{A})$ 不変測度についての全測度は有限である。

証明. $SL(2,\mathbb{A})$ 上の右不変測度による $\Omega\mathfrak{A}_B(c)\mathbf{K}$ の測度が有限であることを見ればよい。これはその不変測度が

$$\int_{SL(2,\mathbb{A})} f(g)\,dg = \int_{\mathbf{K}}\int_{\mathfrak{A}}\int_{T(\mathbb{A})^1}\int_{U(\mathbb{A})} f(utak)\,du\,dt\,a^{-2}\,\frac{da}{a}\,dk$$

で与えられることから明らか。 □

定義 **12.4.** $SL(2,\mathbb{A})$ のユニタリ表現 $(R, L(SL(2)))$:

$$L(SL(2)) := \left\{ \begin{matrix} \phi : SL(2,\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \\ \text{可測} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \text{(i)} & \phi(\gamma g) = \phi(g),\ \gamma \in SL(2,F) \\ \text{(ii)} & \int_{SL(2,F)\backslash SL(2,\mathbb{A})} |\phi(g)|^2\,dg < +\infty \end{matrix} \right\}$$

$$[R(g)\phi](x) := \phi(xg), \quad g \in SL(2,\mathbb{A}),\ \phi \in L(SL(2))$$

の既約部分商を $SL(2,\mathbb{A})$ の (既約) 保型表現という。既約保型表現 (π, V) は更に R の部分表現のとき、離散的であると言われる。さらにそれが R の部分表現 $(R_0, L_0(SL(2)))$:

$$L_0(SL(2)) := \left\{ \phi \in L(SL(2)) \,\middle|\, \int_{F\backslash\mathbb{A}} \phi\Big(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)\,dx = 0,\ \forall' g \in SL(2,\mathbb{A}) \right\}$$

の部分表現であるとき、(π, V) は (既約) カスプ表現であるという。

12.2　$O(E_{\mathbb{A}})$ の保型表現

E を F の (分離) 二次拡大とし、E/F の Galois 群の生成元を σ と書く。二次空間 $(E, \mathrm{N}_{E/F})$ の直交群 $O(E)$ の $\mathbb{A}$ 有理点の群 $O(E_{\mathbb{A}})$ は "制限直積"

$$O(E_{\mathbb{A}}) = \varinjlim_{S} \Big(\prod_{v\in S} O(E_v) \times \prod_{v\notin S} \mathbf{K}(E_v) \Big)$$

で与えられる。但し、

- E_v/F_v が二次拡大のとき $\mathbf{K}(E_v) := O(E_v)$ とおく。
- $E_v \simeq F_v \oplus F_v$ のとき、$O(E_v) = F_v^\times \rtimes \langle\sigma\rangle$, $(\sigma(x) = 1/x)$ だった。$\mathbf{K}(E_v) := \{x \in F_v \,|\, |x|_v = 1\} \rtimes \langle\sigma\rangle$ とおく。

と書いた。$O(E_{\mathbb{A}})$ は無限個の連結成分を持つことに注意せよ。$SL(2)$ の場合と同様に

$$L(O(E)) := \left\{ \begin{array}{c} \phi : O(E_{\mathbb{A}}) \to \mathbb{C} \\ \text{可測} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi(\gamma g) = \phi(g),\ \gamma \in O(E) \\ \text{(ii)} & \int_{O(E)\backslash O(E_{\mathbb{A}})} |\phi(g)|^2 \, dg < +\infty \end{array} \right\}$$

上の $O(E_{\mathbb{A}})$ の右正則表現を考える。

命題 12.5. 指標 $\eta : \mathbb{A}_E^\times/E^\times\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ と、$\eta_v^2 = \mathbb{1}$ である素点の有限集合 Σ に対して、補題 11.3 の記号で

$$\tau_\eta(\Sigma) := \bigotimes_{v\in\Sigma} \tau_{K_v}^- \otimes \bigotimes_{\substack{v\notin\Sigma \\ \eta_v^2=\mathbb{1}}} \tau_{K_v}^+ \otimes \bigotimes_{v;\eta_v^2\neq\mathbb{1}} \tau_{\eta_v}$$

と定める。但し $\eta_v^2 = \mathbb{1}$ である場合には $\eta_v = \omega_{K_v/E_v}$ と書いている。このとき、Hilbert 直和分解

$$L(O(E)) \simeq \bigoplus_{\substack{\eta:\mathbb{A}_E^\times/E^\times\mathbb{A}^\times\to\mathbb{C}^\times \\ \mathrm{mod}\ \langle\sigma\rangle}} \bigoplus_{\Sigma;|\Sigma|\ \text{は偶数}} \tau_\eta(\Sigma)$$

が成り立つ。

証明. (概略) これは $SO(E)$ の場合の結果 (トーラスの Langlands 対応の一例)

$$L(SO(E)) \simeq \bigoplus_{\eta:\mathbb{A}_E^\times/E^\times\mathbb{A}^\times\to\mathbb{C}^\times} \eta_u$$

から従う。補題 11.3 から

$$\mathrm{ind}_{SO(E_{\mathbb{A}})}^{O(E_{\mathbb{A}})} \eta_u \simeq \bigoplus_{\Sigma} \tau_\eta(\Sigma)$$

だが、右辺の既約表現のうち $\langle\sigma\rangle \subset O(E) \subset O(E_{\mathbb{A}})$ で不変になるのは $|\Sigma|$ が偶数のものだけである。 □

12.3 テータリフト

$\gamma \in F^\times$ に対して F 上の二次空間 $\gamma E = (E, \gamma \mathrm{N}_{E/F})$ を考える。$\mathbb{A}/F$ の非自明な指標 $\psi = \bigotimes_v \psi_v$ を固定すれば、各素点 v で $O(E_v) \times SL(2, F_v)$ の Weil 表現 $(\omega_{\gamma E_v, W_v}, \mathcal{S}(E_v))$ が定まる。

補題 **12.6.** F_v が非アルキメデス的でその剰余標数が 2 でないとする。さらに E_v/F_v が不分岐で、$\gamma \in \mathcal{O}_v^\times, \psi_v$ が $\mathcal{O}_v$ 上自明で $\varpi_v^{-1}\mathcal{O}_v$ では非自明とする。このとき $\mathcal{O}_{E_v}$ の特性函数 $1_{\mathcal{O}_{E_v}} \in \mathcal{S}(E_v)$ は $\omega_{W_v}(\mathbf{K}(E_v)) \times \omega_{\gamma E_v}(\mathbf{K}_v)$ で不変である。

証明. $\mathcal{O}_{E_v}$ は $\mathbf{K}(E_v)$ 不変だから $\omega_{W_v}(\mathbf{K}(E_v))$ 不変性は明らか。$\omega_{\gamma E_v}(SL(2, \mathcal{O}_v))$ 不変性は命題 11.2 の明示公式から容易に確かめられる。$1_{\mathcal{O}_{E_v}}$ の ψ_E^γ-Fourier 変換は自分自身であることに注意せよ。 □

補題から制限テンソル積

$$\left(\omega_{\gamma E, W} := \bigotimes_v \omega_{\gamma E_v, W_v}, \mathcal{S}(E_{\mathbb{A}}) := \varinjlim_S \bigotimes_{v \in S} \mathcal{S}(E_v) \otimes \bigotimes_{v \notin S} 1_{\mathcal{O}_{E_v}}\right)$$

は $O(E_{\mathbb{A}}) \times SL(2, \mathbb{A})$ の滑らかな表現である。これを (大域的) *Weil* 表現という。$\Phi \in \mathcal{S}(E_{\mathbb{A}})$ に付随するテータ核函数を

$$\theta_\Phi(g, g') := \sum_{\xi \in E} \omega_{\gamma E, W}(g, g')\Phi(\xi), \quad g \in O(E_{\mathbb{A}}),\ g' \in SL(2, \mathbb{A})$$

と定める。$\omega_{\gamma E, W}(g, g')\Phi$ は急減少だから右辺の級数は絶対収束する。

命題 12.5 の $L(O(E))$ の各既約成分 τ の $L(O(E))$ での実現 (等型部分空間) を $L(\tau)$, その中の $SO(E_{\mathbb{A}})$ 固有ベクトルの有限線型結合の空間を $\mathcal{A}(\tau)$ と書く。$f \in L(\tau)$ と $\Phi \in \mathcal{S}(E_{\mathbb{A}})$ に対してテータ積分

$$\Theta_\Phi(f, g') := \int_{O(E)\backslash O(E_{\mathbb{A}})} \overline{f(g)} \theta_\Phi(g, g')\, dg$$

が定まる。

定理 **12.7.** τ を $O(E_{\mathbb{A}})$ の既約保型表現とする。
(i) 任意の $f \in L(\tau), \Phi \in \mathcal{S}(E_{\mathbb{A}})$ に対して $\Theta_\Phi(f) \in L_0^2(SL(2))$.
(ii) $\tau = \tau_\eta(\Sigma)$ が任意の $v \in \Sigma$ で $\eta_v \neq \mathbb{1}$ を満たすとき、

$$\Theta(\tau_\eta(\Sigma), W) := \mathrm{cl.span}\,\{\Theta_\Phi(f) \mid \Phi \in \mathcal{S}(E_{\mathbb{A}}),\ f \in L(\tau)\}$$

は $SL(2, \mathbb{A})$ の既約カスプ表現である。それ以外のとき $\Theta(\tau_\eta(\Sigma), W) = 0$.

関連図書

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[Kud86] S. S. Kudla. On the local theta correspondence. *Invent. Math.*, Vol. 83, pp. 229–255, 1986.

[Kud94] S.S. Kudla. Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs. *Israel J. Math.*, Vol. 87, pp. 361–401, 1994.

[Ler74] Jean Leray. Complèment à la théorie d'Arnold de líndice de Maslov. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. XXVI, pp. 33–53. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.

[MVW87] C. Mœglin, M.-F. Vignéras, and J.-L. Waldspurger. *Correspondences de Howe sur un corps p-adique*. Springer Verlag, 1987. Lecture Notes in Math. 1291.

[Wei64] A. Weil. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, Vol. 111, pp. 143–211, 1964.

[Wei95] André Weil. *Basic number theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the second (1973) edition.