GL_2 上の保型形式と L 函数
第 3 部 GL_2 の標準 L 因子

今野拓也

takuya@math.kyushu-u.ac.jp

九州大学大学院数理学研究院

第 3 部のメニュー

第 3 部のメニュー

- Hecke の量指標 L 因子 (Tate による)

第 3 部のメニュー

- Hecke の量指標 L 因子 (Tate による)
- 非アルキメデス標準 L 因子

第 3 部のメニュー

- Hecke の量指標 L 因子 (Tate による)
- 非アルキメデス標準 L 因子
- アルキメデス標準 L 因子

第 3 部のメニュー

- Hecke の量指標 L 因子 (Tate による)
- 非アルキメデス標準 L 因子
- アルキメデス標準 L 因子
- 局所逆定理

1. Hecke の量指標 L 因子

1.1. 非アルキメデス局所理論

1. Hecke の量指標 L 因子

1.1. 非アルキメデス局所理論

- F ; 非アルキメデス局所体。
- $|\,|_F$, $\mathcal{O} \supset \mathfrak{p} = (\varpi)$, $k_F \simeq \mathbb{F}_q$, val_F ; 以前の通り。

1. Hecke の量指標 L 因子

1.1. 非アルキメデス局所理論

- F ; 非アルキメデス局所体。
- $|\ |_F$, $\mathcal{O} \supset \mathfrak{p} = (\varpi)$, $k_F \simeq \mathbb{F}_q$, val_F ; 以前の通り。
- $\psi : F \to \mathbb{C}^1$; 非自明指標。$\mathrm{ord}\psi := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, (\psi|_{\mathfrak{p}^n}) = \mathbb{1}\}$.

1. Hecke の量指標 L 因子

1.1. 非アルキメデス局所理論

- F ; 非アルキメデス局所体。
- $|\ |_F$, $\mathcal{O} \supset \mathfrak{p} = (\varpi)$, $k_F \simeq \mathbb{F}_q$, val_F ; 以前の通り。
- $\psi : F \to \mathbb{C}^1$; 非自明指標。$\mathrm{ord}\psi := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (\psi|_{\mathfrak{p}^n}) = \mathbb{1}\}$.
- $\mathcal{S}(F)$; F 上の Schwartz-Bruhat 函数の空間。$d_\psi x$; ψ 自己双対測度：

$$\widehat{\Phi}(x) := \int_F \Phi(y)\psi(xy)\, d_\psi y \implies \int_F \widehat{\Phi}(y)\psi(-xy)\, d_\psi y = \Phi(x)$$

1. Hecke の量指標 L 因子

1.1. 非アルキメデス局所理論

- F ; 非アルキメデス局所体。
- $|\,|_F$, $\mathcal{O} \supset \mathfrak{p} = (\varpi)$, $k_F \simeq \mathbb{F}_q$, val_F ; 以前の通り。
- $\psi : F \to \mathbb{C}^1$; 非自明指標。$\mathrm{ord}\psi := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (\psi|_{\mathfrak{p}^n}) = \mathbb{1}\}$.
- $\mathcal{S}(F)$; F 上の Schwartz-Bruhat 函数の空間。$d_\psi x$; ψ 自己双対測度：

$$\widehat{\Phi}(x) := \int_F \Phi(y)\psi(xy)\, d_\psi y \implies \int_F \widehat{\Phi}(y)\psi(-xy)\, d_\psi y = \Phi(x)$$

$\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$, $\Phi \in \mathcal{S}(F)$ に対する Tate のゼータ積分：

$$Z(s,\chi,\Phi) := \int_{F^\times} \Phi(x)\chi(x)|x|_F^s\, dx^\times.$$

1.1. 非アルキメデス局所理論 (2)

形式的には $N \in \mathbb{N}$ s.t.

1.1. 非アルキメデス局所理論 (2)

形式的には $N \in \mathbb{N}$ s.t. (a) $\mathrm{supp}\Phi \subset \mathfrak{p}^{-N}$,

1.1. 非アルキメデス局所理論 (2)

形式的には $N \in \mathbb{N}$ s.t. (a) $\mathrm{supp}\Phi \subset \mathfrak{p}^{-N}$, (b) $\Phi(x+\mathfrak{p}^N) = \Phi(x)$ を使って

1.1. 非アルキメデス局所理論 (2)

形式的には $N \in \mathbb{N}$ s.t. (a) supp$\Phi \subset \mathfrak{p}^{-N}$, (b) $\Phi(x + \mathfrak{p}^N) = \Phi(x)$ を使って

$$Z(s, \chi, \Phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\chi(\varpi)q^{-s})^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\, dx^\times$$

1.1. 非アルキメデス局所理論 (2)

形式的には $N \in \mathbb{N}$ s.t. (a) $\mathrm{supp}\Phi \subset \mathfrak{p}^{-N}$, (b) $\Phi(x+\mathfrak{p}^N) = \Phi(x)$ を使って

$$Z(s,\chi,\Phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\chi(\varpi)q^{-s})^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times$$

- χ が不分岐なとき

$$= \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\chi(\varpi)^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times\right) q^{-ns}$$

$$+ \frac{\mathrm{meas}(\mathcal{O}^\times)\Phi(0)\chi(\varpi)^N q^{-Ns}}{1-\chi(\varpi)q^{-s}};$$

1.1. 非アルキメデス局所理論 (2)

形式的には $N \in \mathbb{N}$ s.t. (a) supp$\Phi \subset \mathfrak{p}^{-N}$, (b) $\Phi(x+\mathfrak{p}^N) = \Phi(x)$ を使って

$$Z(s,\chi,\Phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\chi(\varpi)q^{-s})^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times$$

- χ が不分岐なとき

$$= \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\chi(\varpi)^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times\right) q^{-ns} + \frac{\mathrm{meas}(\mathcal{O}^\times)\Phi(0)\chi(\varpi)^N q^{-Ns}}{1-\chi(\varpi)q^{-s}};$$

- χ が分岐しているとき

$$= \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\chi(\varpi)^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times\right) q^{-ns}.$$

1.1. 非アルキメデス局所理論 (2)

定理 3.1. (i) $Z(s,\chi,\Phi)$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束、q^{-s} の有理函数になる。

(ii) $L(s,\chi) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-\chi(\varpi)q^{-s}} & \chi \text{ が不分岐のとき} \\ 1 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$ (L 因子)

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{Z(s,\chi,\Phi)}{L(s,\chi)} \in \mathbb{C}[q^s, q^{-s}], \quad Z(s,\chi,\Phi_\chi) = L(s,\chi), \exists \Phi_\chi \in \mathcal{S}(F).$$

(iii) χ ; 不分岐、$\Phi = 1_{\mathcal{O}}$; $\mathcal{O}$ の特性函数 $\Longrightarrow Z(s,\chi,1_{\mathcal{O}}) = \mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times \cdot L(s,\chi)$.

(iv) $\exists!\ \varepsilon(s,\chi,\psi)$; s の指数函数 (ε 因子, 局所定数) s.t.

$$\frac{Z(1-s,\chi^{-1},\widehat{\Phi})}{L(1-s,\chi^{-1})} = \varepsilon(s,\chi,\psi)\frac{Z(s,\chi,\Phi)}{L(s,\chi)} \quad \text{(局所函数等式)}$$

局所定数の計算

局所定数の計算

- ψ を $\psi^a, (a \in F^\times)$ で取り替えると、

$$\boxed{\varepsilon(s, \chi, \psi^a) = \chi(a)|a|_F^{s-1/2}\varepsilon(s, \chi, \psi).}$$

局所定数の計算

- ψ を $\psi^a, (a \in F^\times)$ で取り替えると、

$$\boxed{\varepsilon(s, \chi, \psi^a) = \chi(a)|a|_F^{s-1/2}\varepsilon(s, \chi, \psi).}$$

- χ ; 不分岐 & $\mathrm{ord}\psi = 0 \Longrightarrow \varepsilon(s, \chi, \psi) = 1.$

局所定数の計算

- ψ を ψ^a, $(a \in F^\times)$ で取り替えると、

$$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi^a) = \chi(a)|a|_F^{s-1/2}\varepsilon(s,\chi,\psi).}$$

- χ ; 不分岐 & $\mathrm{ord}\psi = 0 \Longrightarrow \varepsilon(s,\chi,\psi) = 1.$

$\therefore \chi$ が不分岐のとき、$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi) = \chi(\varpi)^{\mathrm{ord}\psi} q^{(1/2-s)\mathrm{ord}\psi}.}$

局所定数の計算

- ψ を $\psi^a, (a \in F^\times)$ で取り替えると、

$$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi^a) = \chi(a)|a|_F^{s-1/2}\varepsilon(s,\chi,\psi).}$$

- χ ; 不分岐 & $\mathrm{ord}\psi = 0 \Longrightarrow \varepsilon(s,\chi,\psi) = 1.$

$\therefore \chi$ が不分岐のとき、$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi) = \chi(\varpi)^{\mathrm{ord}\psi} q^{(1/2-s)\mathrm{ord}\psi}.}$

χ が分岐しているとき、$\Phi_\chi(x) := \begin{cases} \chi^{-1}(x) & x \in \mathcal{O}^\times \\ 0 & x \notin \mathcal{O}^\times \end{cases}$ として

局所定数の計算

- ψ を ψ^a, $(a \in F^\times)$ で取り替えると、

$$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi^a) = \chi(a)|a|_F^{s-1/2}\varepsilon(s,\chi,\psi).}$$

- χ ; 不分岐 & $\mathrm{ord}\psi = 0 \Longrightarrow \varepsilon(s,\chi,\psi) = 1.$

$\therefore \chi$ が不分岐のとき、$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi) = \chi(\varpi)^{\mathrm{ord}\psi} q^{(1/2-s)\mathrm{ord}\psi}.}$

χ が分岐しているとき、$\Phi_\chi(x) := \begin{cases} \chi^{-1}(x) & x \in \mathcal{O}^\times \\ 0 & x \notin \mathcal{O}^\times \end{cases}$ として

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(s,\chi,\psi) &= \frac{Z(1-s,\chi^{-1},\widehat{\Phi}_\chi)L(s,\chi)}{L(1-s,\chi^{-1})Z(s,\chi,\Phi_\chi)} \\ &= q^{a(\chi)+\mathrm{ord}\psi/2} q^{-(a(\chi)+\mathrm{ord}\psi)s}(1-q^{-1}) \int_{\varpi^{-a(\chi)-\mathrm{ord}\psi}\mathcal{O}^\times} \chi^{-1}(x)\psi(x)\,dx^\times. \end{aligned}}$$

- $a(\chi) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (\chi|_{1+\mathfrak{p}^n}) = \mathbb{1}\}$; χ の導手。

1.2. アルキメデス局所理論

1.2. アルキメデス局所理論

- $\mathcal{S}(F)$; F 上の Schwartz 空間 (滑らかで急減少な函数の空間)。

1.2. アルキメデス局所理論

- $\mathcal{S}(F)$; F 上の Schwartz 空間 (滑らかで急減少な函数の空間)。
- $\psi(x) = \begin{cases} \exp(2\pi i a x) & F = \mathbb{R} \\ \exp(2\pi i \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(ax)) & F = \mathbb{C} \end{cases} \quad (a = F^{\times})$

1.2. アルキメデス局所理論

- $\mathcal{S}(F)$; F 上の Schwartz 空間 (滑らかで急減少な函数の空間)。
- $\psi(x) = \begin{cases} \exp(2\pi i a x) & F = \mathbb{R} \\ \exp(2\pi i \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(ax)) & F = \mathbb{C} \end{cases} \quad (a = F^{\times})$

  として、ψ 標準函数の空間 :

$$\mathcal{S}_\psi(F) := \begin{cases} \{e^{-\pi|a|x^2} P(x) \mid P(x) \in \mathbb{C}[x]\} & F = \mathbb{R} \\ \{e^{-2\pi|a|_{\mathbb{C}}^{1/2} x\bar{x}} P(x, \bar{x}) \mid P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]\} & F = \mathbb{C} \end{cases}$$

1.2. アルキメデス局所理論

- $\mathcal{S}(F)$; F 上の Schwartz 空間 (滑らかで急減少な函数の空間)。
- $$\psi(x) = \begin{cases} \exp(2\pi i a x) & F = \mathbb{R} \\ \exp(2\pi i \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(ax)) & F = \mathbb{C} \end{cases} \qquad (a = F^\times)$$

  として、ψ 標準函数の空間：

$$\mathcal{S}_\psi(F) := \begin{cases} \{e^{-\pi|a|x^2} P(x) \mid P(x) \in \mathbb{C}[x]\} & F = \mathbb{R} \\ \{e^{-2\pi|a|_{\mathbb{C}}^{1/2} x\bar{x}} P(x, \bar{x}) \mid P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]\} & F = \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi \in \mathcal{S}_\psi(F) \Rightarrow \widehat{\Phi} \in \mathcal{S}_\psi(F).$$

1.2. アルキメデス局所理論

- $\mathcal{S}(F)$; F 上の Schwartz 空間 (滑らかで急減少な函数の空間)。
- $$\psi(x) = \begin{cases} \exp(2\pi i a x) & F = \mathbb{R} \\ \exp(2\pi i \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(ax)) & F = \mathbb{C} \end{cases} \quad (a = F^\times)$$

  として、ψ 標準函数の空間：

  $$\mathcal{S}_\psi(F) := \begin{cases} \{e^{-\pi|a|x^2}P(x) \mid P(x) \in \mathbb{C}[x]\} & F = \mathbb{R} \\ \{e^{-2\pi|a|_{\mathbb{C}}^{1/2}x\bar{x}}P(x,\bar{x}) \mid P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]\} & F = \mathbb{C} \end{cases}$$

  $$\Longrightarrow \quad \Phi \in \mathcal{S}_\psi(F) \Rightarrow \widehat{\Phi} \in \mathcal{S}_\psi(F).$$
- $\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$, $\Phi \in \mathcal{S}_\psi(F)$

  $$Z(s,\chi,\Phi) := \int_{F^\times} \Phi(x)\chi(x)|x|_F^s\, dx^\times.$$

1.2. アルキメデス局所理論 (2)

1.2. アルキメデス局所理論 (2)

(i) $F = \mathbb{R}$ のとき、$\chi(x) = |x|_{\mathbb{R}}^{\lambda}\mathrm{sgn}(x)^{\epsilon}$, $(\lambda \in \mathbb{C}, \epsilon = 0, 1)$, $dx^{\times} := dx/|x|_{\mathbb{R}}$,

1.2. アルキメデス局所理論 (2)

(i) $F = \mathbb{R}$ のとき、$\chi(x) = |x|_{\mathbb{R}}^{\lambda}\mathrm{sgn}(x)^{\epsilon}$, $(\lambda \in \mathbb{C}, \epsilon = 0, 1)$, $dx^{\times} := dx/|x|_{\mathbb{R}}$,
$\Phi_n(x) := e^{-\pi|a|x^2}x^n$, $(n \in \mathbb{N})$ として

$$Z(s, \chi, \Phi_n) = \begin{cases} (\pi|a|)^{-(n+\lambda+s)/2}\Gamma\left(\dfrac{n+\lambda+s}{2}\right) & n \in \epsilon + 2\mathbb{Z} \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

1.2. アルキメデス局所理論 (2)

(i) $F = \mathbb{R}$ のとき、$\chi(x) = |x|_{\mathbb{R}}^{\lambda}\mathrm{sgn}(x)^{\epsilon}$, ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\epsilon = 0, 1$), $dx^{\times} := dx/|x|_{\mathbb{R}}$,
$\Phi_n(x) := e^{-\pi|a|x^2}x^n$, ($n \in \mathbb{N}$) として

$$Z(s,\chi,\Phi_n) = \begin{cases} (\pi|a|)^{-(n+\lambda+s)/2}\Gamma\left(\dfrac{n+\lambda+s}{2}\right) & n \in \epsilon + 2\mathbb{Z} \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

(ii) $F = \mathbb{C}$ のとき、$\chi(z) = |z|_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{m/2}$, ($\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$), $dz^{\times} = \dfrac{dx\,dy}{|z|_{\mathbb{C}}}$,

1.2. アルキメデス局所理論 (2)

(i) $F = \mathbb{R}$ のとき、$\chi(x) = |x|_{\mathbb{R}}^{\lambda}\mathrm{sgn}(x)^{\epsilon}$, $(\lambda \in \mathbb{C}, \epsilon = 0, 1)$, $dx^{\times} := dx/|x|_{\mathbb{R}}$,
$\Phi_n(x) := e^{-\pi|a|x^2}x^n$, $(n \in \mathbb{N})$ として

$$Z(s, \chi, \Phi_n) = \begin{cases} (\pi|a|)^{-(n+\lambda+s)/2}\Gamma\left(\dfrac{n+\lambda+s}{2}\right) & n \in \epsilon + 2\mathbb{Z} \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

(ii) $F = \mathbb{C}$ のとき、$\chi(z) = |z|_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{m/2}$, $(\lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z})$, $dz^{\times} = \dfrac{dx\,dy}{|z|_{\mathbb{C}}}$,
$\Phi_{n,n'}(z) := e^{-2\pi|a|_{\mathbb{C}}^{1/2}z\bar{z}}z^n\bar{z}^{n'}$, $(n, n' \in \mathbb{N})$ として

$$Z(s, \chi, \Phi_{n,n'}) = \begin{cases} \pi|a|_{\mathbb{C}}^{m/4}(2\pi|a|_{\mathbb{C}})^{-(m/2+n+\lambda+s)}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+n+\lambda+s\right) & \\ \qquad\qquad n' = m + n \text{ のとき} & \\ 0 \quad \text{それ以外のとき} & \end{cases}$$

1.2. アルキメデス局所理論 (3)

定理 3.2. (i) $Z(s,\chi,\Phi)$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し、$s \in \mathbb{C}$ の有理型函数に延びる。

(ii) $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$,

$$L(s,\chi) := \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\lambda+\epsilon) & F=\mathbb{R},\ \chi = |\ |_{\mathbb{R}}^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\epsilon} \text{ のとき} \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\lambda-|m|/2) & F=\mathbb{C},\ \chi(z) = |z|_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{m/2} \text{ のとき} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{Z(s,\chi,\Phi)}{L(s,\chi)} \text{ は } s \text{ の整型函数、} \quad Z(s,\chi,\Phi_\chi) = L(s,\chi),\ \exists\Phi_\chi \in \mathcal{S}_\psi(F).$$

(iii) $\exists!\ \varepsilon(s,\chi,\psi)$; 指数函数 (ε 因子, 局所定数) s.t.

$$\frac{Z(1-s,\chi^{-1},\widehat{\Phi})}{L(1-s,\chi^{-1})} = \varepsilon(s,\chi,\psi)\frac{Z(s,\chi,\Phi)}{L(s,\chi)} \quad \text{(局所函数等式)}$$

アルキメデス局所定数

- $F = \mathbb{R}$ のとき。$\chi = |\ |^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\epsilon}$, $\psi := \exp(2a\pi i\cdot)$. $\Phi_\chi := \Phi_\epsilon$ として、

アルキメデス局所定数

- $F = \mathbb{R}$ のとき。$\chi = |\ |^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\epsilon}$, $\psi := \exp(2a\pi i\cdot)$. $\Phi_\chi := \Phi_\epsilon$ として、

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon(s,\chi,\psi) &= \chi(a)|a|_{\mathbb{R}}^{s-1/2}\frac{Z(1-s,\chi^{-1},i^{\epsilon}\Phi_\chi)}{L(1-s,\chi^{-1})}\\ &= (\mathrm{sgn}(a)i)^{\epsilon}|a|^{\lambda+s-1/2}.\end{aligned}}$$

アルキメデス局所定数

- $F=\mathbb{R}$ のとき。$\chi = |\ |^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\epsilon}$, $\psi := \exp(2a\pi i\cdot)$. $\Phi_\chi := \Phi_\epsilon$ として、

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon(s,\chi,\psi) &= \chi(a)|a|_{\mathbb{R}}^{s-1/2}\frac{Z(1-s,\chi^{-1},i^{\epsilon}\Phi_\chi)}{L(1-s,\chi^{-1})}\\ &= (\mathrm{sgn}(a)i)^{\epsilon}|a|^{\lambda+s-1/2}.\end{aligned}}$$

- $F=\mathbb{C}$ のとき。$\chi(z) = |z|_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{m/2}$,

$$\Phi_\chi(z) = \begin{cases}(2\pi)^{-1}\Phi_{0,m}(z) & m \geq 0 \text{ のとき}\\ (2\pi)^{-1}\Phi_{-m,0}(z) & m < 0 \text{ のとき}\end{cases} \quad \text{として}$$

アルキメデス局所定数

- $F = \mathbb{R}$ のとき。$\chi = |\ |^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\epsilon}$, $\psi := \exp(2a\pi i\cdot)$. $\Phi_\chi := \Phi_\epsilon$ として、

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon(s,\chi,\psi) &= \chi(a)|a|_{\mathbb{R}}^{s-1/2}\frac{Z(1-s,\chi^{-1},i^{\epsilon}\Phi_\chi)}{L(1-s,\chi^{-1})}\\ &= (\mathrm{sgn}(a)i)^{\epsilon}|a|^{\lambda+s-1/2}.\end{aligned}}$$

- $F = \mathbb{C}$ のとき。$\chi(z) = |z|_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{m/2}$,

$$\Phi_\chi(z) = \begin{cases}(2\pi)^{-1}\Phi_{0,m}(z) & m \geq 0 \text{ のとき}\\ (2\pi)^{-1}\Phi_{-m,0}(z) & m < 0 \text{ のとき}\end{cases} \quad \text{として}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon(s,\chi,\psi) &= \chi(a)|a|_{\mathbb{C}}^{s-1/2}\frac{Z(1-s,\chi^{-1},i^{|m|}\bar{\Phi}_\chi)}{L(1-s,\chi^{-1})}\\ &= i^{|m|}(a/\bar{a})^{m/2}|a|_{\mathbb{C}}^{\lambda+s-1/2}\end{aligned}}$$

2. 非アルキメデス標準 L 因子

F ; 非アルキメデス局所体。$q := |\mathcal{O}/\mathfrak{p}|$; 剰余体の位数。

2.1. 不分岐因子

2. 非アルキメデス標準 L 因子

F ; 非アルキメデス局所体。$q := |\mathcal{O}/\mathfrak{p}|$; 剰余体の位数。

2.1. 不分岐因子

$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) := C_c(\boldsymbol{K}\backslash G(F)/\boldsymbol{K})$ (畳み込み代数) ; 不分岐 Hecke 環

2. 非アルキメデス標準 L 因子

F ; 非アルキメデス局所体。$q := |\mathcal{O}/\mathfrak{p}|$; 剰余体の位数。

2.1. 不分岐因子

$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) := C_c(\boldsymbol{K}\backslash G(F)/\boldsymbol{K})$ (**畳み込み代数**) ; 不分岐 Hecke 環

$$\mathrm{Irr}\,(T(F)/T(\mathcal{O})) \ni |\ |_F^{s_1} \boxtimes |\ |_F^{s_2} \longmapsto (q^{-s_1}, q^{-s_2}) \in (\mathbb{C}^\times)^2 =: \widehat{T}$$

2. 非アルキメデス標準 L 因子

F ; 非アルキメデス局所体。$q := |\mathcal{O}/\mathfrak{p}|$; 剰余体の位数。

2.1. 不分岐因子

$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) := C_c(\boldsymbol{K}\backslash G(F)/\boldsymbol{K})$ (畳み込み代数) ; 不分岐 Hecke 環

$$\mathrm{Irr}\,(T(F)/T(\mathcal{O})) \ni |\ |_F^{s_1} \boxtimes |\ |_F^{s_2} \longmapsto (q^{-s_1}, q^{-s_2}) \in (\mathbb{C}^\times)^2 =: \widehat{T}$$

$\Longrightarrow$

$$S : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \ni h \overset{\sim}{\longmapsto} \Big((q^{-s_1}, q^{-s_2}) \mapsto \mathrm{tr} I_B^G(|\ |_F^{s_1} \boxtimes |\ |_F^{s_2}, h)\Big) \in \mathbb{C}[\widehat{T}]^{\mathfrak{S}_2}$$

佐武同型

2. 非アルキメデス標準 L 因子

F ; 非アルキメデス局所体。$q := |\mathcal{O}/\mathfrak{p}|$; 剰余体の位数。

2.1. 不分岐因子

$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) := C_c(\boldsymbol{K}\backslash G(F)/\boldsymbol{K})$ (畳み込み代数) ; 不分岐 Hecke 環

$$\mathrm{Irr}\,(T(F)/T(\mathcal{O})) \ni |\,|_F^{s_1} \boxtimes |\,|_F^{s_2} \longmapsto (q^{-s_1}, q^{-s_2}) \in (\mathbb{C}^\times)^2 =: \widehat{T}$$

$\Longrightarrow$

$$S : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \ni h \overset{\sim}{\longmapsto} \Big((q^{-s_1}, q^{-s_2}) \mapsto \mathrm{tr} I_B^G(|\,|_F^{s_1} \boxtimes |\,|_F^{s_2}, h)\Big) \in \mathbb{C}[\widehat{T}]^{\mathfrak{S}_2}$$

佐武同型

- $\mathrm{tr}\pi(h) := \mathrm{tr}\displaystyle\int_{G(F)} h(g)\pi(g)\,dg$; 許容表現 π の指標超函数

2. 非アルキメデス標準 L 因子

F ; 非アルキメデス局所体。$q := |\mathcal{O}/\mathfrak{p}|$; 剰余体の位数。

2.1. 不分岐因子

$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) := C_c(\boldsymbol{K}\backslash G(F)/\boldsymbol{K})$ (畳み込み代数) ; 不分岐 Hecke 環

$$\mathrm{Irr}\,(T(F)/T(\mathcal{O})) \ni |\;|_F^{s_1} \boxtimes |\;|_F^{s_2} \longmapsto (q^{-s_1}, q^{-s_2}) \in (\mathbb{C}^\times)^2 =: \widehat{T}$$

$\Longrightarrow$

$$S : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \ni h \xrightarrow{\sim} \Big((q^{-s_1}, q^{-s_2}) \mapsto \mathrm{tr} I_B^G(|\;|_F^{s_1} \boxtimes |\;|_F^{s_2}, h)\Big) \in \mathbb{C}[\widehat{T}]^{\mathfrak{S}_2}$$

佐武同型

- $\mathrm{tr}\pi(h) := \mathrm{tr}\displaystyle\int_{G(F)} h(g)\pi(g)\,dg$; 許容表現 π の指標超函数

$T_{\mathfrak{p}}$; $\boldsymbol{K}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}\boldsymbol{K}$ の特性函数、$R_{\mathfrak{p}}$; $\varpi\boldsymbol{K}$ の特性函数 $\in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$.

2.1. 不分岐因子 (2)

例 **3.3 (**佐武同型の計算例**)**

- $S(q^{-1/2}T_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{tr} : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2 \in \mathbb{C}$;
- $S(R_{\mathfrak{p}}) = \det : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2 \in \mathbb{C}$.

2.1. 不分岐因子 (2)

例 **3.3 (佐武同型の計算例)**

- $S(q^{-1/2}T_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{tr} : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2 \in \mathbb{C}$;
- $S(R_{\mathfrak{p}}) = \det : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2 \in \mathbb{C}$.

一般に $\mathrm{GL}_n(F)$ の佐武同型を明示的に書くことは難しい。

2.1. 不分岐因子 (2)

例 3.3 (佐武同型の計算例)

- $S(q^{-1/2}T_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{tr} : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2 \in \mathbb{C}$;
- $S(R_{\mathfrak{p}}) = \det : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2 \in \mathbb{C}$.

一般に $\mathrm{GL}_n(F)$ の佐武同型を明示的に書くことは難しい。

$\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$; 不分岐

2.1. 不分岐因子 (2)

例 **3.3 (佐武同型の計算例)**

- $S(q^{-1/2}T_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{tr} : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2 \in \mathbb{C}$;
- $S(R_{\mathfrak{p}}) = \det : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2 \in \mathbb{C}$.

一般に $\mathrm{GL}_n(F)$ の佐武同型を明示的に書くことは難しい。

$\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$; 不分岐

$$\rightsquigarrow \quad \alpha(\pi), \beta(\pi) \text{ ; } X^2 - \mathrm{tr}\pi(q^{-1/2}T_{\mathfrak{p}})X + \mathrm{tr}\pi(R_{\mathfrak{p}}) \text{ の根}$$

2.1. 不分岐因子 (2)

例 **3.3 (佐武同型の計算例)**

- $S(q^{-1/2}T_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{tr} : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2 \in \mathbb{C}$;
- $S(R_{\mathfrak{p}}) = \det : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2 \in \mathbb{C}$.

一般に $\mathrm{GL}_n(F)$ の佐武同型を明示的に書くことは難しい。

$\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$; 不分岐

$$\rightsquigarrow \quad \alpha(\pi), \beta(\pi) \; ; \; X^2 - \mathrm{tr}\pi(q^{-1/2}T_{\mathfrak{p}})X + \mathrm{tr}\pi(R_{\mathfrak{p}}) \text{ の根}$$

$$\begin{aligned} L(s,\pi) :=& \frac{1}{(1-\alpha(\pi)q^{-s})(1-\beta(\pi)q^{-s})} \\ =& \frac{1}{1-\pi(T_{\mathfrak{p}})q^{-s-1/2}+\pi(R_{\mathfrak{p}})q^{-2s}} \quad \text{(標準 } L \text{ 因子)} \end{aligned}$$

2.2. 標準 L 因子の定義

定理 3.5. 無限次元の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ はただ一つの ψ-Whittaker 模型を持つ。

2.2. 標準 L 因子の定義

定理 3.5. 無限次元の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ はただ一つの ψ-Whittaker 模型を持つ。

証明　Whittaker 模型の存在は次の完全列から従う。

$$0 \longrightarrow \mathrm{ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\pi_{U,\psi} \otimes \psi_U) \longrightarrow \pi|_{B(F)} \longrightarrow \delta_B^{1/2}\pi_B \otimes \mathbb{1}_{U(F)} \longrightarrow 0$$

一意性は Gelfand-Kazhdan, Shalika による。 □

2.2. 標準 L 因子の定義

定理 3.5. 無限次元の $\pi \in \operatorname{Irr} G(F)$ はただ一つの ψ-Whittaker 模型を持つ。

証明　Whittaker 模型の存在は次の完全列から従う。

$$0 \longrightarrow \operatorname{ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\pi_{U,\psi} \otimes \psi_U) \longrightarrow \pi|_{B(F)} \longrightarrow \delta_B^{1/2}\pi_B \otimes \mathbb{1}_{U(F)} \longrightarrow 0$$

一意性は Gelfand-Kazhdan, Shalika による。 $\square$

- $\pi \in \operatorname{Irr} G(F)$; 無限次元。$\mathcal{W}_\psi(\pi)$; その Whittaker 模型。

2.2. 標準 L 因子の定義

定理 3.5. 無限次元の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ はただ一つの ψ-**Whittaker 模型**を持つ。

証明　Whittaker 模型の存在は次の完全列から従う。

$$0 \longrightarrow \mathrm{ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\pi_{U,\psi} \otimes \psi_U) \longrightarrow \pi|_{B(F)} \longrightarrow \delta_B^{1/2}\pi_B \otimes \mathbb{1}_{U(F)} \longrightarrow 0$$

一意性は Gelfand-Kazhdan, Shalika による。 $\square$

- $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$; 無限次元。$\mathcal{W}_\psi(\pi)$; その Whittaker 模型。
- $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$, $\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ として、

$$Z(s, \chi, W; g) := \int_{F^\times} W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\chi(a)|a|_F^{s-1/2}\, da^\times$$

Jacquet-Langlands のゼータ積分

2.2. 標準 L 因子の定義 (2)

定理 3.7. (i) $Z(s,\chi,W;g)$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し、q^{-s} の有理函数になる。

(ii) $\exists!\ L(s,\pi\times\chi) = \dfrac{1}{\text{定数項が 1 の } q^{-s} \text{ の多項式}} \in \{Z(s,\chi,W;g) \mid W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)\}$

$$\text{s.t.} \quad \forall W \in \mathcal{W}_\psi(\pi), \quad \frac{Z(s,\chi,W;g)}{L(s,\pi\times\chi)}\ ;\ s \text{ の整型函数。}$$

(iii) $\exists!\ \varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)$; 指数函数 s.t.

$$Z(1-s,\chi^{-1},W^\vee;wg) = \gamma(s,\pi\times\chi,\psi)\omega_\pi^{-1}(\det g)Z(s,\chi,W;g),$$

- $\gamma(s,\pi\times\chi,\psi) := \dfrac{\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)L(1-s,\pi^\vee\times\chi^{-1})}{L(s,\pi\times\chi)}$.
- $W^\vee(g) := \omega_\pi(\det g)^{-1}W(g) \in \mathcal{W}_\psi(\pi^\vee)$.

標準 L 因子の計算

標準 L 因子の計算

- $L(s,\pi) := L(s,\pi\times\mathbb{1}),\ \varepsilon(s,\pi,\psi) := \varepsilon(s,\pi\times\mathbb{1},\psi).$

標準 L 因子の計算

- $L(s,\pi) := L(s,\pi\times\mathbb{1})$, $\varepsilon(s,\pi,\psi) := \varepsilon(s,\pi\times\mathbb{1},\psi)$.

  $\Longrightarrow$

$$L(s,\pi\times\chi) = L(s,\chi(\det)\pi),$$

$$\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi) = \varepsilon(s,\chi(\det)\pi,\psi).$$

標準 L 因子の計算

- $L(s,\pi) := L(s,\pi\times\mathbb{1})$, $\varepsilon(s,\pi,\psi) := \varepsilon(s,\pi\times\mathbb{1},\psi)$.
  $\Longrightarrow$
  $$L(s,\pi\times\chi) = L(s,\chi(\det)\pi),$$
  $$\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi) = \varepsilon(s,\chi(\det)\pi,\psi).$$
- 以下、第 2 部で分類した既約表現に対する $L(s,\pi)$, $\varepsilon(s,\pi,\psi)$ を計算してみよう。

2.3. 局所 Hecke 写像

2.3. 局所 Hecke 写像

$E = F^2 \rightsquigarrow (\omega_{F^2}, \mathcal{S}(F^2))$; $\mathrm{O}(F^2) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現：

2.3. 局所 Hecke 写像

$E = F^2 \rightsquigarrow (\omega_{F^2}, \mathcal{S}(F^2))$; $\mathrm{O}(F^2) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現：

$$\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi\left(g^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right), \quad g \in \mathrm{O}(F^2),$$

$$\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |a|_F \Phi\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix},$$

$$\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \psi(bxy)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\omega_{F^2,\psi}(w^{-1})\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{F^2} \Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\psi(-xy' - x'y)\, dx'\, dy'.$$

2.3. 局所 Hecke 写像

$E = F^2 \rightsquigarrow (\omega_{F^2}, \mathcal{S}(F^2))$; $\mathrm{O}(F^2) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現：

$$\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi\left(g^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right), \quad g \in \mathrm{O}(F^2),$$

$$\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |a|_F\Phi\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix},$$

$$\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \psi(bxy)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\omega_{F^2,\psi}(w^{-1})\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{F^2}\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\psi(-xy' - x'y)\,dx'\,dy'.$$

$\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \Phi\begin{pmatrix} ax \\ y \end{pmatrix}$ により $\mathrm{SL}_2(F)$ から $G(F)$ の表現に延びる。

2.3. 局所 Hecke 写像 (2)

部分 Fourier 変換 $\widetilde{\Phi}(x, y) := \int_F \Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \psi(yy')\, dy'$ で混合模型へ：

2.3. 局所 Hecke 写像 (2)

部分 Fourier 変換 $\widetilde{\Phi}(x,y) := \int_F \Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\psi(yy')\,dy'$ で混合模型へ：

$$\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}\right)\widetilde{\Phi}(x,y) = |t|_F^{-1}\widetilde{\Phi}(t^{-1}(x,y)), \quad \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(F^2),$$

$$\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\widetilde{\Phi}(x,y) = \int_{F^2}\widetilde{\Phi}(x',y')\psi(x'y-xy')\,dx'\,dy',$$

$$\omega_{F^2,\psi}(g)\widetilde{\Phi}(x,y) = \widetilde{\Phi}((x,y)g), \quad g \in G(F).$$

2.3. 局所 Hecke 写像 (3)

$\Phi \in \mathcal{S}(F^2)$, $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Irr} F^\times$,

2.3. 局所 Hecke 写像 (3)

$\Phi \in \mathcal{S}(F^2)$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$,

$$f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(g) := \chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2} \frac{Z(1, \chi_1\chi_2^{-1}, \omega_{F^2,\psi}(g)\widetilde{\Phi}(0,\cdot))}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}$$

$$= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})} \int_{F^\times} \widetilde{\Phi}((0,t)g)\chi_1\chi_2^{-1}(t)\, dt$$

2.3. 局所 Hecke 写像 (3)

$\Phi \in \mathcal{S}(F^2)$, χ_1, $\chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$,

$$f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(g) := \chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2} \frac{Z(1, \chi_1\chi_2^{-1}, \omega_{F^2,\psi}(g)\widetilde{\Phi}(0,\cdot))}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}$$

$$= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})} \int_{F^\times} \widetilde{\Phi}((0,t)g)\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt$$

補題 3.8. (i) $|\chi_1\chi_2^{-1}| = |\ |_F^\sigma$ として、$\sigma > -1$ のとき、上の積分は絶対収束して

$$(\omega_{F^2,\psi}, \mathcal{S}(F^2)) \ni \Phi \longmapsto f_{\Phi,\chi_1,\chi_2} \in I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)\,;$$ 全射 $G(F)$ 準同型。

(ii) $\forall \chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, G(F)$,

$$(\omega_{F^2,\psi}, \mathcal{S}(F^2)) \ni \Phi \mapsto f_{\Phi,\chi_1,\chi_2} \in I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)\,;$$ 0 でない $G(F)$ 準同型。

(iii) $\mathbb{C}^2 \ni (s,t) \mapsto f_{\Phi,\chi_1|\ |_F^s,\chi_2|\ |_F^t}(g) \in \mathbb{C}$ は整型。

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子

主系列表現のとき

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子

主系列表現のとき

命題 3.9. $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Irr} F^\times$ with $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\ |_F^{\pm 1}$. $\pi = \pi(\chi_1, \chi_2)$ とする。
(i) $\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2} : \pi \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_\psi(\pi)$; $G(F)$ 準同型 (Whittaker 汎函数) given by

$$\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}(f)(g) := \int_{U(F)} f(w^{-1}ug)\overline{\psi_U(u)}\,du.$$

(ii) $L(s,\pi) = L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$, $\varepsilon(s,\pi,\psi) = \varepsilon(s,\chi_1,\psi)\varepsilon(s,\chi_2,\psi)$.
(iii) χ_1, χ_2 ; 不分岐 & $\operatorname{ord}\psi = 0$ ならば

$$Z(s, \mathbb{1}, \Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}(f^0); 1) = \operatorname{vol}\mathcal{O}^\times \cdot L(s,\pi).$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子

主系列表現のとき

命題 3.9. $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ with $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\ |_F^{\pm 1}$. $\pi = \pi(\chi_1, \chi_2)$ とする。
(i) $\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2} : \pi \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_\psi(\pi)$; $G(F)$ 準同型 (Whittaker 汎函数) given by

$$\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}(f)(g) := \int_{U(F)} f(w^{-1}ug)\overline{\psi_U(u)}\, du.$$

(ii) $L(s,\pi) = L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$, $\varepsilon(s,\pi,\psi) = \varepsilon(s,\chi_1,\psi)\varepsilon(s,\chi_2,\psi)$.
(iii) χ_1, χ_2 ; 不分岐 & $\mathrm{ord}\,\psi = 0$ ならば

$$Z(s, \mathbb{1}, \Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}(f^0); 1) = \mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times \cdot L(s,\pi).$$

[証明] (i) は次とSchrödinger 模型の明示公式から従う。

$$W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(g) := \Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}(f_{\Phi,\chi_1,\chi_2})(g)$$
$$= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times} \omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} t \\ t^{-1}\end{pmatrix}\chi_1\chi_2^{-1}(t)\, dt^\times$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (2)

$$\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(x)\Phi_2(y) \text{ のとき}$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (2)

$$\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(x)\Phi_2(y) \text{ のとき}$$

$$Z(s, \mathbb{1}, W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; g) = \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1, \chi_1\chi_2^{-1})} Z(s, \chi_1, \Phi_1) Z(s, \chi_2, \Phi_2)$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (2)

$\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(x)\Phi_2(y)$ のとき

$$Z(s, \mathbb{1}, W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; g) = \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1, \chi_1\chi_2^{-1})} Z(s, \chi_1, \Phi_1) Z(s, \chi_2, \Phi_2),$$

$$\Longrightarrow \quad L(s, \pi(\chi_1, \chi_2)) = L(s, \chi_1) L(s, \chi_2)$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (2)

$\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(x)\Phi_2(y)$ のとき

$$Z(s, \mathbb{1}, W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; g) = \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1, \chi_1\chi_2^{-1})} Z(s, \chi_1, \Phi_1) Z(s, \chi_2, \Phi_2),$$

$$\Longrightarrow \quad L(s, \pi(\chi_1, \chi_2)) = L(s, \chi_1) L(s, \chi_2),$$

$$Z(1-s, \mathbb{1}, W^{\vee}_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; wg)$$

$$= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1, \chi_1\chi_2^{-1})} \omega_\pi(\det g)^{-1} Z(1-s, \chi_1^{-1}, \widehat{\Phi}_1) Z(1-s, \chi_2^{-1}, \widehat{\Phi}_2)$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (2)

$\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_1(x)\Phi_2(y)$ のとき

$$Z(s, \mathbb{1}, W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; g) = \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1, \chi_1\chi_2^{-1})} Z(s, \chi_1, \Phi_1)Z(s, \chi_2, \Phi_2),$$

$$\Longrightarrow \quad L(s, \pi(\chi_1, \chi_2)) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2),$$

$$Z(1-s, \mathbb{1}, W^{\vee}_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; wg)$$

$$= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1, \chi_1\chi_2^{-1})}\omega_\pi(\det g)^{-1} Z(1-s, \chi_1^{-1}, \widehat{\Phi}_1)Z(1-s, \chi_2^{-1}, \widehat{\Phi}_2),$$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon(s, \pi, \psi) = \varepsilon(s, \chi_1, \psi)\varepsilon(s, \chi_2, \psi).$$

$\square$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (3)

Steinberg 表現の場合

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (3)

Steinberg 表現の場合

命題 3.10. $\chi_1 := \chi|\ |_F^{1/2}$, $\chi_2 := \chi|\ |_F^{-1/2}$.

(i) $\mathcal{W}_\psi(\mathrm{St}(\chi)) = \left\{ W_{\Phi,\chi_1,\chi_2} \,\middle|\, \Phi \in \mathcal{S}(F^2) \text{ s.t. } \int_F \Phi\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0 \right\}$.

(ii) $L(s, \mathrm{St}(\chi)) = L(s+1/2, \chi)$,

$$\varepsilon(s, \mathrm{St}(\chi), \psi) = \varepsilon(s+1/2, \chi, \psi)\varepsilon(s-1/2, \chi, \psi)\frac{L(1/2-s, \chi^{-1})}{L(s-1/2, \chi)}.$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (3)

Steinberg 表現の場合

命題 3.10. $\chi_1 := \chi|\ |_F^{1/2}$, $\chi_2 := \chi|\ |_F^{-1/2}$.

(i) $\mathcal{W}_\psi(\mathrm{St}(\chi)) = \left\{ W_{\Phi,\chi_1,\chi_2} \,\middle|\, \Phi \in \mathcal{S}(F^2) \text{ s.t. } \int_F \Phi\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0 \right\}$.

(ii) $L(s, \mathrm{St}(\chi)) = L(s + 1/2, \chi)$,

$\varepsilon(s, \mathrm{St}(\chi), \psi) = \varepsilon(s + 1/2, \chi, \psi)\varepsilon(s - 1/2, \chi, \psi)\dfrac{L(1/2 - s, \chi^{-1})}{L(s - 1/2, \chi)}$.

[証明] (i) の条件は

$$f \in \mathrm{St}(\chi) \iff 0 = \langle f, \chi^{-1}(\det)\rangle = c\int_{U(F)} f(w^{-1}u)\,du.$$

$I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2}) \times I_B^G(\chi^{-1}|\ |_F^{-1/2} \boxtimes \chi^{-1}|\ |_F^{1/2})$ の duality

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (3)

Steinberg 表現の場合

命題 3.10. $\chi_1 := \chi|\ |_F^{1/2}$, $\chi_2 := \chi|\ |_F^{-1/2}$.

(i) $\mathcal{W}_\psi(\mathrm{St}(\chi)) = \left\{ W_{\Phi,\chi_1,\chi_2} \,\middle|\, \Phi \in \mathcal{S}(F^2) \text{ s.t. } \int_F \Phi\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0 \right\}$.

(ii) $L(s, \mathrm{St}(\chi)) = L(s+1/2, \chi)$,

$\varepsilon(s, \mathrm{St}(\chi), \psi) = \varepsilon(s+1/2, \chi, \psi)\varepsilon(s-1/2, \chi, \psi)\dfrac{L(1/2-s, \chi^{-1})}{L(s-1/2, \chi)}$.

[証明] (i) の条件は

$$f \in \mathrm{St}(\chi) \iff 0 = \langle f, \chi^{-1}(\det)\rangle = c\int_{U(F)} f(w^{-1}u)\,du,$$

$$\int_F f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(w^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dx = \int_{F^\times}\int_F \widetilde{\Phi}(t,x)\,dx\,|t|_F\,dt^\times$$

から従う。

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (4)

$$W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \frac{\chi(\det g)|\det g|_F}{\zeta(2)}\chi(a)|a|_F \int_{F^\times} \omega_{F^2}(g)\Phi\begin{pmatrix} at \\ t^{-1} \end{pmatrix} dt$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (4)

$$W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \frac{\chi(\det g)|\det g|_F}{\zeta(2)} \chi(a)|a|_F \int_{F^\times} \omega_{F^2}(g)\Phi\begin{pmatrix} at \\ t^{-1} \end{pmatrix} dt$$

$\varphi(a)$ とおく, $\in \mathcal{S}(F)$!

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (4)

$$W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \frac{\chi(\det g)|\det g|_F}{\zeta(2)}\chi(a)|a|_F \int_{F^\times} \omega_{F^2}(g)\Phi\begin{pmatrix} at \\ t^{-1} \end{pmatrix} dt$$

$\varphi(a)$ とおく, $\in \mathcal{S}(F)$!

$\Longrightarrow$

$$Z(s, \mathbb{1}, W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; g) = \frac{\chi(\det g)|\det g|_F}{\zeta(2)} Z(s+1/2, \chi, \varphi). \square$$

2.4. 非超カスプ既約表現の L, ε 因子 (4)

$$W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \frac{\chi(\det g)|\det g|_F}{\zeta(2)} \chi(a)|a|_F \int_{F^\times} \omega_{F^2}(g)\Phi\begin{pmatrix} at \\ t^{-1} \end{pmatrix} dt$$

$\varphi(a)$ とおく, $\in \mathcal{S}(F)$!

$$\Longrightarrow$$

$$Z(s, \mathbb{1}, W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; g) = \frac{\chi(\det g)|\det g|_F}{\zeta(2)} Z(s+1/2, \chi, \varphi). \ \square$$

$\chi(\det) \twoheadleftarrow I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2})$ に対しては

$$L(s, \chi(\det)) := L(s+1/2, \chi)L(s-1/2, \chi),$$

$$\varepsilon(s, \chi(\det), \psi) := \varepsilon(s+1/2, \chi, \psi)\varepsilon(s-1/2, \chi, \psi).$$

と定義する。

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子

- E/F ; 分離二次拡大、$\mathrm{Gal}(E/F) = \langle \sigma \rangle$, $\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$ with $\sigma(\omega) \neq \omega$.
- $G(F)_E = \{g \in G(F) \mid \det g \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$.

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子

- E/F ; 分離二次拡大、$\mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle$, $\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$ with $\sigma(\omega) \neq \omega$.
- $G(F)_E = \{g \in G(F) \mid \det g \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$.

命題 3.11. (i) $(\pi(\omega,\psi), \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}) \subset \mathcal{S}(E), \in \mathrm{Irr}\, G(F)_E$.

$$\mathcal{W}(\pi(\omega,\psi)) := \{W_\Phi(g) := \omega_{E,\psi}(g)\Phi(1) \mid \Phi \in \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}\}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{W}_\psi(\pi(\omega)) = \mathrm{ind}_{G(F)_E}^{G(F)} \mathcal{W}(\pi(\omega,\psi)).$$

(ii) $L(s,\pi(\omega)) = L_E(s,\omega)$, $\varepsilon(s,\pi(\omega),\psi) = \lambda(E/F,\psi)\varepsilon_E(s,\omega,\psi_E)$.

Langlands の λ 因子 (ある 1 の 4 乗根)

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子

- E/F ; 分離二次拡大、$\mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle, \omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$ with $\sigma(\omega) \neq \omega$.
- $G(F)_E = \{g \in G(F) \mid \det g \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$.

命題 **3.11.** (i) $(\pi(\omega,\psi), \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}) \subset \mathcal{S}(E), \in \mathrm{Irr}\, G(F)_E$.

$$\mathcal{W}(\pi(\omega,\psi)) := \{W_\Phi(g) := \omega_{E,\psi}(g)\Phi(1) \mid \Phi \in \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}\}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{W}_\psi(\pi(\omega)) = \mathrm{ind}_{G(F)_E}^{G(F)} \mathcal{W}(\pi(\omega,\psi)).$$

(ii) $L(s,\pi(\omega)) = L_E(s,\omega)$, $\varepsilon(s,\pi(\omega),\psi) = \lambda(E/F,\psi)\varepsilon_E(s,\omega,\psi_E)$.

- 一般に $\pi \in \mathrm{Irr}_0\, G(F) \Longrightarrow \{W(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)) \mid W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)\} \subset \mathcal{S}(F^\times)$

$$\Longrightarrow L(s,\pi) = 1.$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子

- E/F ; 分離二次拡大、$\mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle, \omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$ with $\sigma(\omega) \neq \omega$.
- $G(F)_E = \{g \in G(F) \mid \det g \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$.

命題 3.11. (i) $(\pi(\omega,\psi), \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}) \subset \mathcal{S}(E), \in \mathrm{Irr}\, G(F)_E$.

$$\mathcal{W}(\pi(\omega,\psi)) := \{W_\Phi(g) := \omega_{E,\psi}(g)\Phi(1) \mid \Phi \in \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}\}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{W}_\psi(\pi(\omega)) = \mathrm{ind}_{G(F)_E}^{G(F)} \mathcal{W}(\pi(\omega,\psi)).$$

(ii) $L(s,\pi(\omega)) = L_E(s,\omega), \varepsilon(s,\pi(\omega),\psi) = \lambda(E/F,\psi)\varepsilon_E(s,\omega,\psi_E)$.

- 一般に $\pi \in \mathrm{Irr}_0\, G(F) \Longrightarrow \{W((\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})) \mid W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)\} \subset \mathcal{S}(F^\times)$

$$\Longrightarrow L(s,\pi) = 1.$$

[証明] (i) $\mathcal{W}(\pi(\omega,\psi))$ は $\pi(\omega,\psi)$ の Whittaker 模型：

$$\omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(v) = \psi(b\mathrm{N}_{E/F}(v))\Phi(v).$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (2)

$\gamma \in F^\times \smallsetminus \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$.

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (2)

$\gamma \in F^\times \smallsetminus \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. $\forall W \in \mathcal{W}_\psi(\pi(\omega))$, $\exists\, \Phi, \Phi^\gamma \in \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}$ s.t.

$$W(g) = \begin{cases} \pi(\omega,\psi)(g)\Phi(1) & g \in G(F)_E \text{ のとき} \\ \pi(\omega,\psi)\left(g\begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi^\gamma(1) & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L,ε 因子 (2)

$\gamma \in F^\times \setminus \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. $\forall W \in \mathcal{W}_\psi(\pi(\omega))$, $\exists\, \Phi, \Phi^\gamma \in \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}$ s.t.

$$W(g) = \begin{cases} \pi(\omega,\psi)(g)\Phi(1) & g \in G(F)_E \text{ のとき} \\ \pi(\omega,\psi)\left(g\begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi^\gamma(1) & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

$F^\times = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \sqcup \gamma\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ と併せて

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (2)

$\gamma \in F^\times \setminus \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. $\forall W \in \mathcal{W}_\psi(\pi(\omega))$, $\exists\, \Phi, \Phi^\gamma \in \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}$ s.t.

$$W(g) = \begin{cases} \pi(\omega,\psi)(g)\Phi(1) & g \in G(F)_E \text{ のとき} \\ \pi(\omega,\psi)\left(g\begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi^\gamma(1) & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

$F^\times = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \sqcup \gamma\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ と併せて

$$\begin{aligned} Z(s, \mathbb{1}, W, 1) = & \int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)|z|_E^{s-1/2}\, dz^\times \\ & + \int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \gamma\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)|z|_E^{s-1/2}|\gamma|_F^{s-1/2}\, dz^\times \\ = & Z_E(s,\omega,\Phi) + |\gamma|_F^{s-1/2} Z_E(s,\omega,\Phi^\gamma). \end{aligned}$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (2)

$\gamma \in F^\times \smallsetminus \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. $\forall W \in \mathcal{W}_\psi(\pi(\omega))$, $\exists\, \Phi, \Phi^\gamma \in \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}$ s.t.

$$W(g) = \begin{cases} \pi(\omega,\psi)(g)\Phi(1) & g \in G(F)_E \text{ のとき} \\ \pi(\omega,\psi)\left(g\begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\Phi^\gamma(1) & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

$F^\times = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \sqcup \gamma \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ と併せて

$$\begin{aligned} Z(s,\mathbb{1},W,1) = & \int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)|z|_E^{s-1/2}\,dz^\times \\ & + \int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \gamma\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)|z|_E^{s-1/2}|\gamma|_F^{s-1/2}\,dz^\times \\ = & Z_E(s,\omega,\Phi) + |\gamma|_F^{s-1/2} Z_E(s,\omega,\Phi^\gamma). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow L(s,\pi(\omega)) = L_E(s,\omega)$.

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (3)

Weil 表現の式：$\omega_{E,\psi}(w)\Phi(v) = \lambda(E/F,\psi)\displaystyle\int_E \Phi(v')\psi_E(v\sigma(v'))\,dv'$ から

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (3)

Weil 表現の式：$\omega_{E,\psi}(w)\Phi(v) = \lambda(E/F,\psi)\int_E \Phi(v')\psi_E(v\sigma(v'))\,dv'$ から

$$W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w\right) = \omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\lambda(E/F,\psi)\sigma(\widehat{\Phi})(1)$$

$$= \lambda(E/F,\psi)\widehat{\Phi}(\sigma(z))\omega(z)|z|_E^{1/2},$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (3)

Weil 表現の式：$\omega_{E,\psi}(w)\Phi(v) = \lambda(E/F,\psi)\int_E \Phi(v')\psi_E(v\sigma(v'))\,dv'$ から

$$W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w\right) = \omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\lambda(E/F,\psi)\sigma(\widehat{\Phi})(1)$$

$$= \lambda(E/F,\psi)\widehat{\Phi}(\sigma(z))\omega(z)|z|_E^{1/2},$$

$$W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z)\gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w\right) = W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\omega_{E/F}(\gamma)|\gamma|_F\lambda(E/F,\psi)\widehat{\Phi}^{\gamma}(\gamma\sigma(\cdot))$$

$$= -\lambda(E/F,\psi)\widehat{\Phi}^{\gamma}(\gamma\sigma(z))\omega(z)|z|_E^{1/2}|\gamma|_F.$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (3)

Weil 表現の式：$\omega_{E,\psi}(w)\Phi(v) = \lambda(E/F,\psi)\int_E \Phi(v')\psi_E(v\sigma(v'))\,dv'$ から

$$W\left(\begin{pmatrix}\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}w\right) = \omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\lambda(E/F,\psi)\sigma(\widehat{\Phi})(1)$$

$$= \lambda(E/F,\psi)\widehat{\Phi}(\sigma(z))\omega(z)|z|_E^{1/2},$$

$$W\left(\begin{pmatrix}\mathrm{N}_{E/F}(z)\gamma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}w\right) = W\left(\begin{pmatrix}\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma^{-1}\end{pmatrix}w\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\omega_{E/F}(\gamma)|\gamma|_F\lambda(E/F,\psi)\widehat{\Phi}^{\gamma}(\gamma\sigma(\cdot))$$

$$= -\lambda(E/F,\psi)\widehat{\Phi}^{\gamma}(\gamma\sigma(z))\omega(z)|z|_E^{1/2}|\gamma|_F.$$

$$W^{\vee}(g) = \omega_{\pi(\omega)}(\det g)^{-1}W(g) = (\omega|_{F^\times})\cdot\omega_{E/F}(\det g)^{-1}W(g).$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (4)

代入して

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (4)

代入して

$$Z(1-s,\mathbb{1},W^\vee;w)$$

$$=\int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w\right)\omega(\mathrm{N}_{E/F}(z))^{-1}|z|_E^{1/2-s}\,dz^\times$$

$$-\int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \gamma\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\omega(\mathrm{N}_{E/F}(z))^{-1}|z|_E^{1/2-s}\,dz^\times\omega(\gamma)^{-1}|\gamma|_F^{1/2-s}$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (4)

代入して

$$
\begin{aligned}
&Z(1-s,\mathbb{1},W^\vee;w)\\
&\qquad=\int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} w\right)\omega(\mathrm{N}_{E/F}(z))^{-1}|z|_E^{1/2-s}\,dz^\times\\
&-\int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \gamma\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\omega(\mathrm{N}_{E/F}(z))^{-1}|z|_E^{1/2-s}\,dz^\times\omega(\gamma)^{-1}|\gamma|_F^{1/2-s}\\
&\qquad=\lambda(E/F,\psi)\Big(Z_E(1-s,\omega^{-1},\widehat{\Phi})+|\gamma|_F^{s-1/2}Z_E(1-s,\omega^{-1},\widehat{\Phi}^\gamma)\Big).
\end{aligned}
$$

2.5. 二面体型超カスプ表現の L, ε 因子 (4)

代入して

$$
\begin{aligned}
&Z(1-s,\mathbb{1},W^\vee;w)\\
&\qquad =\int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} w\right)\omega(\mathrm{N}_{E/F}(z))^{-1}|z|_E^{1/2-s}\,dz^\times\\
&-\int_{E^\times} W\left(\begin{pmatrix} \gamma\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\omega(\mathrm{N}_{E/F}(z))^{-1}|z|_E^{1/2-s}\,dz^\times\omega(\gamma)^{-1}|\gamma|_F^{1/2-s}\\
&\qquad =\lambda(E/F,\psi)\Big(Z_E(1-s,\omega^{-1},\widehat{\Phi})+|\gamma|_F^{s-1/2}Z_E(1-s,\omega^{-1},\widehat{\Phi}^\gamma)\Big).
\end{aligned}
$$

$Z(s,\mathbb{1},W,1)=Z_E(s,\omega,\Phi)+|\gamma|_F^{s-1/2}\,Z_E(s,\omega,\Phi^\gamma)$ と見較べて

$$
\varepsilon(s,\pi(\omega),\psi)=\lambda(E/F,\psi)\varepsilon_E(s,\omega,\psi_E).
$$

$\square$

3. アルキメデス標準 L 因子

$F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$!

3. アルキメデス標準 L 因子

$F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$!

- 単一の既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群に複数の $G(F)$ の既約表現が対応する!

3. アルキメデス標準 L 因子

$F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$!

- 単一の既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群に複数の $G(F)$ の既約表現が対応する!
  $\Longrightarrow$ Whittaker 模型には増大度の条件が必要。

3. アルキメデス標準 L 因子

$F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$!

- 単一の既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群に複数の $G(F)$ の既約表現が対応する!

  $\Longrightarrow$ Whittaker 模型には増大度の条件が必要。

補題 3.12. $\forall \pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$, $\exists!$ $\mathcal{W}_\psi(\pi)$; 次を満たす函数の空間：

- $W(ug) = \psi_U(u) W(g)$, $(u \in U(F), g \in G(F))$;
- $\dim \mathrm{span}\, \{G(F) \ni g \mapsto W(gk) \in \mathbb{C} \,|\, k \in \boldsymbol{K}\} < \infty$ ($\boldsymbol{K}$ 有限);
- $\exists C, r > 0$ s.t. $W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = C|a|_F^r$, $(a \in F^\times$, 緩増加$)$

s.t. $\quad (R, \mathcal{W}_\psi(\pi)) \simeq \pi \quad$ $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群同型。

3. アルキメデス標準 L 因子 (2)

定理 3.13. $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$, $\dim \pi = \infty$.

(i) $Z(s,\chi,W;g)$, $(W \in \mathcal{W}_\psi(\pi))$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し、$s \in \mathbb{C}$ の有理型函数に解析接続される。

(ii) $\exists!\ L(s,\pi\times\chi) \in \{\, e^{\lambda s} Z(s,\chi,W;g) \mid \lambda \in \mathbb{R},\ W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)\}$

$\exists!\ \varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)$; 指数函数 s.t.

- $\forall W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$, $\dfrac{Z(s,\chi,W;g)}{L(s,\pi\times\chi)}$; 整型。
- $L(s,\pi\times\chi)$ は $\Gamma(s+a)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s+b)$ の形の函数の有限積。
- 局所函数等式：

$$Z(1-s,\chi^{-1},W^\vee;wg) = \gamma(s,\pi\times\chi,\psi)\omega_\pi^{-1}(\det g) Z(s,\chi,W;g).$$

  - $\gamma(s,\pi\times\chi,\psi) := \dfrac{\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)L(1-s,\pi^\vee\times\chi^{-1})}{L(s,\pi\times\chi)}$

3. アルキメデス標準 L 因子 (3)

- $F=\mathbb{R}$ のとき $\psi(x)=\exp(2\pi iax)$, ($a\in\mathbb{R}^\times$),
  $F=\mathbb{C}$ のとき $\psi(z)=\exp(2\pi i(tz+\overline{tz}))$, ($t\in\mathbb{C}^\times$) と書く。

3. アルキメデス標準 L 因子 (3)

- $F=\mathbb{R}$ のとき $\psi(x)=\exp(2\pi iax)$, ($a\in\mathbb{R}^\times$),
  $F=\mathbb{C}$ のとき $\psi(z)=\exp(2\pi i(tz+\overline{tz}))$, ($t\in\mathbb{C}^\times$) と書く。

  $\Longrightarrow \lambda(\mathbb{C}/\mathbb{R},\psi)=i^{\mathrm{sgn}(a)}$.

3. アルキメデス標準 L 因子 (3)

- $F=\mathbb{R}$ のとき $\psi(x)=\exp(2\pi iax)$, ($a\in\mathbb{R}^\times$),
  $F=\mathbb{C}$ のとき $\psi(z)=\exp(2\pi i(tz+\overline{tz}))$, ($t\in\mathbb{C}^\times$) と書く。

  $\Longrightarrow \lambda(\mathbb{C}/\mathbb{R},\psi)=i^{\mathrm{sgn}(a)}$.

無限次元既約 $(\mathfrak{g},\boldsymbol{K})$ 加群の L,ε 因子は次の通り。

3. アルキメデス標準 L 因子 (3)

- $F=\mathbb{R}$ のとき $\psi(x)=\exp(2\pi iax)$, ($a\in\mathbb{R}^\times$),
  $F=\mathbb{C}$ のとき $\psi(z)=\exp(2\pi i(tz+\overline{tz}))$, ($t\in\mathbb{C}^\times$) と書く。

  $\Longrightarrow \lambda(\mathbb{C}/\mathbb{R},\psi)=i^{\mathrm{sgn}(a)}$.

無限次元既約 $(\mathfrak{g},\boldsymbol{K})$ 加群の L,ε 因子は次の通り。

π	$L(s,\pi)$	$\varepsilon(s,\pi,\psi)$
$\pi(\omega_\lambda^{k-1})$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $k\geq 2$, $\in\mathbb{Z}$	$\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+\lambda+\dfrac{k-1}{2}\right)$	$i^{\mathrm{sgn}(a)}(\mathrm{sgn}(a)i)^{k-1}$ $\times\lvert a\rvert_{\mathbb{R}}^{2(s+\lambda)-1}$
$\pi(\chi_1,\chi_2)$, ($F=\mathbb{R}$) $\chi_i=\lvert\ \rvert_{\mathbb{R}}^{\lambda_i}\mathrm{sgn}^{\epsilon_i}$	$\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\lambda_1+\epsilon_1)$ $\times\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\lambda_2+\epsilon_2)$	$(\mathrm{sgn}(a)i)^{\epsilon_1+\epsilon_2}$ $\times\lvert a\rvert_{\mathbb{R}}^{2s+\lambda_1+\lambda_2-1}$
$\pi(\chi_1,\chi_2)$, ($F=\mathbb{C}$) $\chi_i(z)=\lvert z\rvert_{\mathbb{C}}^{\lambda_i}(z/\bar{z})^{k_i/2}$	$\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\lambda_1+\lvert k_1\rvert/2)$ $\times\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\lambda_2+\lvert k_2\rvert/2)$	$i^{\lvert k_1\rvert+\lvert k_2\rvert}(t/\bar{t})^{(k_1+k_2)/2}$ $\times\lvert t\rvert_{\mathbb{C}}^{2s+\lambda_1+\lambda_2-1}$

4. 局所逆定理

4. 局所逆定理

定理 4.14. $\pi, \pi' \in \operatorname{Irr} G(F)$; 無限次元、$\omega_\pi = \omega_{\pi'}$.

$$\pi \simeq \pi' \iff \forall \chi \in \operatorname{Irr} F^\times, \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \chi, \psi).$$

4. 局所逆定理

定理 4.14. $\pi, \pi' \in \mathrm{Irr}\, G(F)$; 無限次元、$\omega_\pi = \omega_{\pi'}$.

$$\pi \simeq \pi' \Longleftrightarrow \forall \chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times, \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \chi, \psi).$$

非アルキメデス的な場合も含め、$\mathrm{Irr}\, G(F)$ が $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ で分類できた!

4. 局所逆定理

定理 4.14. $\pi, \pi' \in \operatorname{Irr} G(F)$; 無限次元、$\omega_\pi = \omega_{\pi'}$.

$$\pi \simeq \pi' \iff \forall\chi \in \operatorname{Irr} F^\times, \gamma(s, \pi\times\chi, \psi) = \gamma(s, \pi'\times\chi, \psi).$$

非アルキメデス的な場合も含め、$\operatorname{Irr} G(F)$ が $\gamma(s, \pi\times\chi, \psi)$ で分類できた!

[証明] (アイディア) $\gamma(\pi\times\chi, \psi) := \gamma(0, \pi\times\chi, \psi)$ と書く。

4. 局所逆定理

定理 4.14. $\pi, \pi' \in \mathrm{Irr}\, G(F)$; 無限次元、$\omega_\pi = \omega_{\pi'}$.

$$\pi \simeq \pi' \iff \forall \chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times, \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \chi, \psi).$$

非アルキメデス的な場合も含め、$\mathrm{Irr}\, G(F)$ が $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ で分類できた!

[証明] (アイディア) $\gamma(\pi \times \chi, \psi) := \gamma(0, \pi \times \chi, \psi)$ と書く。

$$A_\pi : \pi \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_\psi(\pi) \ni W \longmapsto \varphi_W(x) := W\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{S}(F)\ ;\ \text{単射 !}$$

4. 局所逆定理

定理 4.14. $\pi, \pi' \in \operatorname{Irr} G(F)$; 無限次元、$\omega_\pi = \omega_{\pi'}$.

$$\pi \simeq \pi' \iff \forall\chi \in \operatorname{Irr} F^\times, \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \chi, \psi).$$

非アルキメデス的な場合も含め、$\operatorname{Irr} G(F)$ が $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ で分類できた!

[証明] (アイディア) $\gamma(\pi \times \chi, \psi) := \gamma(0, \pi \times \chi, \psi)$ と書く。

$$A_\pi : \pi \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_\psi(\pi) \ni W \longmapsto \varphi_W(x) := W\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{S}(F) \text{ ; 単射 !}$$

$\mathcal{K}_\psi(\pi)$; π の $\operatorname{im} A_\pi$ での実現 (Kirillov 模型)。

4. 局所逆定理

定理 4.14. $\pi, \pi' \in \mathrm{Irr}\, G(F)$; 無限次元、$\omega_\pi = \omega_{\pi'}$.

$$\pi \simeq \pi' \Longleftrightarrow \forall\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times, \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \chi, \psi).$$

非アルキメデス的な場合も含め、$\mathrm{Irr}\, G(F)$ が $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ で分類できた!

[証明] (アイディア) $\gamma(\pi \times \chi, \psi) := \gamma(0, \pi \times \chi, \psi)$ と書く。

$$A_\pi : \pi \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_\psi(\pi) \ni W \longmapsto \varphi_W(x) := W\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{S}(F)\ ;\ \text{単射 !}$$

$\mathcal{K}_\psi(\pi)$; π の $\mathrm{im} A_\pi$ での実現 (Kirillov 模型)。

$$\pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)\varphi_W(x) = W\left(d\begin{pmatrix} 1 & bx/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \omega_\pi(d)\psi\left(\frac{bx}{d}\right)\varphi_W\left(\frac{ax}{d}\right)$$

4. 局所逆定理 (2)

(i) $\mathrm{Irr}\, F^\times \ni \chi \mapsto \gamma(\pi \times \chi, \psi) \in \mathbb{C}$ が整型のとき。

4. 局所逆定理 (2)

(i) $\mathrm{Irr}\, F^\times \ni \chi \mapsto \gamma(\pi \times \chi, \psi) \in \mathbb{C}$ が整型のとき。

- π は超カスプ表現。$\mathcal{K}_\psi(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$. $\Longrightarrow \pi|_{B(F)}$ は決まっている。

4. 局所逆定理 (2)

(i) $\mathrm{Irr}\, F^\times \ni \chi \mapsto \gamma(\pi \times \chi, \psi) \in \mathbb{C}$ が整型のとき。

- π は超カスプ表現。$\mathcal{K}_\psi(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$. $\Longrightarrow \pi|_{B(F)}$ は決まっている。
- 局所函数等式を φ_W で書くと

$$Z(1/2 - s, (\chi\omega_\pi)^{-1}, \pi(w)\varphi_W) = \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) Z(s - 1/2, \chi, \varphi_W).$$

φ_W の Fourier 変換の $\chi| \,|_F^{s-1/2}$ での値と見る!

4. 局所逆定理 (2)

(i) $\mathrm{Irr}\, F^\times \ni \chi \mapsto \gamma(\pi \times \chi, \psi) \in \mathbb{C}$ が整型のとき。

- π は超カスプ表現。$\mathcal{K}_\psi(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$. $\Longrightarrow \pi|_{B(F)}$ は決まっている。
- 局所函数等式を φ_W で書くと

$$Z(1/2 - s, (\chi\omega_\pi)^{-1}, \pi(w)\varphi_W) = \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) Z(s - 1/2, \chi, \varphi_W).$$

φ_W の Fourier 変換の $\chi|\,|_F^{s-1/2}$ での値と見る!

$\Longrightarrow$

$\varphi_W|_{B(F)}$ と $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ から、$\pi(w)\varphi_W|_{B(F)} = \varphi_W|_{U(F)wB(F)}$ が決まる。

4. 局所逆定理 (2)

(i) $\mathrm{Irr}\, F^\times \ni \chi \mapsto \gamma(\pi \times \chi, \psi) \in \mathbb{C}$ が整型のとき。

- π は超カスプ表現。$\mathcal{K}_\psi(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$. $\Longrightarrow$ $\pi|_{B(F)}$ は決まっている。
- 局所函数等式を φ_W で書くと

$$Z(1/2 - s, (\chi\omega_\pi)^{-1}, \pi(w)\varphi_W) = \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) Z(s - 1/2, \chi, \varphi_W).$$

φ_W の Fourier 変換の $\chi|\,|_F^{s-1/2}$ での値と見る!

$\Longrightarrow$

$\varphi_W|_{B(F)}$ と $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ から、$\pi(w)\varphi_W|_{B(F)} = \varphi_W|_{U(F)wB(F)}$ が決まる。

$\Longrightarrow$

$G(F) = B(F) \sqcup B(F)wU(F)$ から $(\pi, \mathcal{K}_\psi(\pi))$ が決まる。

4. 局所逆定理 (2)

(i) Irr $F^\times \ni \chi \mapsto \gamma(\pi \times \chi, \psi) \in \mathbb{C}$ が整型のとき。

- π は超カスプ表現。$\mathcal{K}_\psi(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$. $\Longrightarrow \pi|_{B(F)}$ は決まっている。
- 局所函数等式を φ_W で書くと

$$Z(1/2 - s, (\chi\omega_\pi)^{-1}, \pi(w)\varphi_W) = \gamma(s, \pi \times \chi, \psi) Z(s - 1/2, \chi, \varphi_W).$$

φ_W の Fourier 変換の $\chi|\,|_F^{s-1/2}$ での値と見る!

$\Longrightarrow$

$\varphi_W|_{B(F)}$ と $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ から、$\pi(w)\varphi_W|_{B(F)} = \varphi_W|_{U(F)wB(F)}$ が決まる。

$\Longrightarrow$

$G(F) = B(F) \sqcup B(F)wU(F)$ から $(\pi, \mathcal{K}_\psi(\pi))$ が決まる。

(ii) Irr $F^\times \ni \chi \mapsto \gamma(\pi \times \chi, \psi) \in \mathbb{C}$ が 2 つの零点 χ_1^{-1}, χ_2^{-1} を持つとき。

$\Longrightarrow \pi \simeq \pi(\chi_1, \chi_2)$ etc.

第２部、３部のまとめ

F ; 局所体。

第 2 部、3 部のまとめ

F ; 局所体。

$\mathrm{GL}_2(F)$ の 既約ユニタリ表現	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{GL}_2(F)$ のユニタリ化可能 既約許容表現 / $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群

第 2 部、3 部のまとめ

F ; 局所体。

$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{GL}_2(F)\text{ の}\\ \text{既約ユニタリ表現}\end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\mathrm{GL}_2(F)\text{ のユニタリ化可能}\\ \text{既約許容表現} / (\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})\text{ 加群}\end{array}}$

$\cap$

$\boxed{\mathrm{GL}_2(F)\text{ の既約許容表現}}$

第2部、3部のまとめ

F ; 局所体。

$\boxed{\mathrm{GL}_2(F)\text{ の既約ユニタリ表現}}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\mathrm{GL}_2(F)\text{ のユニタリ化可能既約許容表現}/(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})\text{ 加群}}$

$\cap$

$\boxed{\mathrm{GL}_2(F)\text{ の既約許容表現}}$

$\updownarrow$

$\boxed{2\text{ 次の } L, \varepsilon \text{ 因子 } (\gamma \text{ 因子})}$

第２部、３部のまとめ

F ; 局所体。

$\boxed{\text{GL}_2(F) \text{ の既約ユニタリ表現}} \longleftrightarrow \boxed{\text{GL}_2(F) \text{ のユニタリ化可能既約許容表現} / (\mathfrak{g}, \boldsymbol{K}) \text{ 加群}}$

$\cap$

$\boxed{\text{GL}_2(F) \text{ の既約許容表現}}$

$\updownarrow$

$\boxed{2 \text{ 次の } L, \varepsilon \text{ 因子} (\gamma \text{ 因子})}$