13　マルコフ分割

Axiom A を満たす微分同相写像については，その力学系としての構造を具体的に表現する方法がある．それが マルコフ分割（**Markov partition**） である．マルコフ分割によって，**Axiom A** 力学系の構造は記号力学系によってほぼ完全に表現できるようになった．この意味で，マルコフ分割というアイデアは画期的なものである．

非遊走集合を分割し，それによって力学系を記号力学系に対応させるという方法は，**Smale** の **horseshoe map** ですでに明確に使われているが，そのような軌道あるいは軌道構造の記号化というアイデア自体はそれ以前から，いろいろなところで現れているようだ．

Coven - Nitecki は [**CN**] において記号力学系の歴史について詳しく論じている．

Hadamard (1898) は，負曲率曲面上の測地流の周期軌道を解析するために，周期軌道を記号化して表現するという方法を用いた．
その後，主に負曲率多様体上の測地流に関して，**Birkhoff, Artin, Nielsen** などがその軌道の記号化に関わるいくつかの結果を生み出し，そして **Morse-Hedlund** が **"Symbolic Dynamics"(1938, 1940)** と題する論文を発表した．

しかし **Coven** と **Netecki** は，現在のような形の **Symbolic Dynamics** を初めて明確に記述したのは **Hedlund** [**Hed**] **(1944)** だと述べている．

力学系のマルコフ分割について言えば，**Adler-Weiss** [**AW**] **(1967)** が $\mathbf{T}^2$ 上の **toral automorphism** に対してマルコフ分割を構成することにより，対応する記号力学系を使って測度論的性質を調べた．

Sinai [**Sin**] **(1968)** は **Anosov map** に対してマルコフ分割を構成した．

その他，特定の **Axiom A** 微分同相写像についてマルコフ分割を構成したという結果が **1967** 年〜**1970** 年にかけていろいろ出ている．

一般の **Axiom A** 微分同相写像については，**Bowen** [**B1**] **(1970)** がマルコフ分割の存在を証明したが，**Sinai** [**Sin**] の方法を参考にしたと書いている．

以下は **R.Bowen**「**Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms**」[**B2**] に基づいている（記号も基本的に **Bowen** のもの）．

このセクションでは，M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^1-微分同相写像，$\Lambda \subset M$ を f-不変なコンパクト双曲型集合で，局所積構造を持つものとする．

定義 52. ここで Λ が局所積構造を持つ とは，ある $\epsilon \geq \eta > 0$ が存在して，$\forall x \in \Lambda$ と $\forall (p,q) \in V_\eta(x) = (W^s_\eta(x) \cap \Lambda) \times (W^u_\eta(x) \cap \Lambda)$ に対して $W^s_\epsilon(p) \cap W^u_\epsilon(q)$ が Λ の 1 点となることをいう．

f が **Axiom A** を満たす場合，$\Omega(f)$ のスペクトル分解で得られる基本集合 Ω_i などがこの条件を満たす．

また，$\overline{\mathbf{Per}(f)}$ が双曲型集合なら，局所積構造を持つことを示すことができる．

$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ には双曲性と適合したノルムが入っているものとする．すなわち，ある $0 < \lambda < 1$ があって，任意の $n \geq 0$ に対して次が成り立つとする．

$$|Df^n(v)| \leq \lambda^n |v| \quad (\forall v \in E^s), \qquad |Df^{-n}(v)| \leq \lambda^n |v| \quad (\forall v \in E^u)$$

元のノルムと同値なノルムで，これを満たすものは存在する．

双曲型集合に関する（不）安定多様体定理から次が成り立つ．

$$f^{-1}(W^s_\epsilon(f(p)) \supset W^s_\epsilon(p), \qquad f(W^u_\epsilon(f^{-1}(p)) \supset W^u_\epsilon(p)$$

さらに $\epsilon \geq \eta > 0$ を小さく取り直すことによって，$p, q \in \Lambda$ がある $x \in \Lambda$ で $(p, q) \in V_\eta(x)$ なら，次が成り立つようにする．

$$f^{-1}(W^s_\epsilon(f(p))) \cap f(W^u_\epsilon(f^{-1}(q))) = W^s_\epsilon(p) \cap W^u_\epsilon(q)$$

定義 53. 以下の **(i), (ii)** を満たすとき $R \subset \Lambda$ を 矩形（**rectangle**） という．

(i) R の直径は局所積構造が成り立つくらい小さい（今の場合は η より小さい）．

(ii) $p, q \in R \implies W^s_\epsilon(p) \cap W^u_\epsilon(q) \in R$

さらに次の **(3)** を満たすとき矩形 R は **proper** であるという．

(iii) $R = \overline{\mathrm{int}(R)}$

R が矩形のとき $p \in R$ に対し

$$W^s(p, R) = W^s_\epsilon(p) \cap R, \qquad W^u(p, R) = W^u_\epsilon(p) \cap R$$

と決める．

定義 54. 以下の **(i)〜(iv)** を満たすとき，有限個の **proper** な矩形の集まり $\mathcal{R} = \{R_j\}_{j=1}^m$ を Λ の マルコフ分割 という．

(i) $\Lambda = \bigcup_{j=1}^m R_j$

(ii) $i \neq j \implies \mathrm{int}(R_i) \cap \mathrm{int}(R_j) = \emptyset$

(iii) $z \in \mathrm{int}(R_i) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_j))$ ならば

$$f(W^u(z, R_i)) \supset W^u(f(z), R_j), \quad f(W^s(z, R_i)) \subset W^s(f(z), R_j)$$

(iv) $z \in \mathrm{int}(R_i) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_j))$ ならば

$$\mathrm{int}(R_j) \cap f(W^u(z, R_i) \cap \mathrm{int}(R_i)) = W^u(f(z), R_j) \cap \mathrm{int}(R_j)$$

$$\mathrm{int}(R_i) \cap f^{-1}(W^s(f(z), R_j) \cap \mathrm{int}(R_j)) = W^s(z, R_i) \cap \mathrm{int}(R_i)$$

注意 32. (1) マルコフ分割の基本的な定義は (i), (ii), (iii) である．(iv) は，$f(R_i)$ が R_j を 1 回通過してから再度交わるような状況を排除するためにある．従って，全ての矩形のサイズが十分小さい場合には (iv) は必要ない．

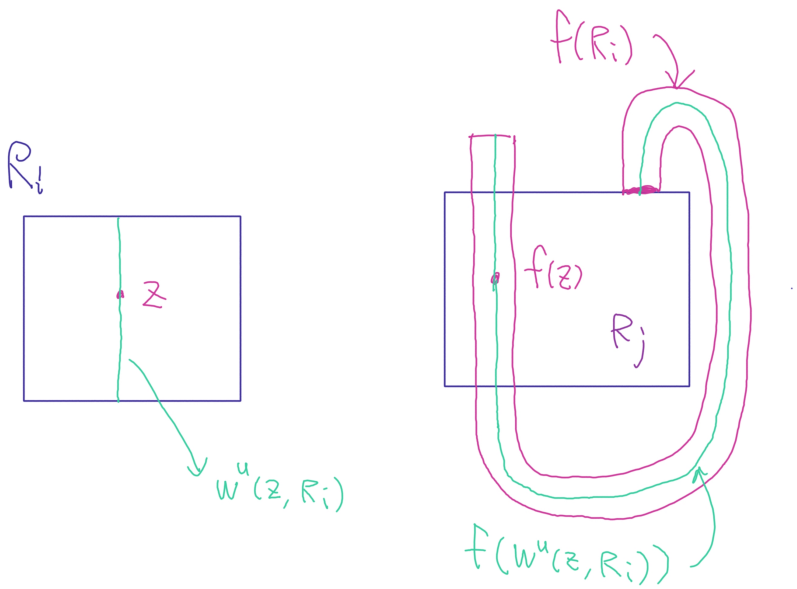
(2) (iv) ではやたらと interior が出てくるが，例えば

$$\mathrm{int}(R_j) \cap f(W^u(z, R_i) \cap \mathrm{int}(R_i)) = W^u(f(z), R_j) \cap \mathrm{int}(R_j)$$

で interior をやめると

$$R_j \cap f(W^u(z, R_i)) = W^u(f(z), R_j)$$

となる．図のような場合は，interior があれば認められるが無ければ排除される．interior を付けていた方が条件としては緩いし，マルコフ分割から記号力学系への対応を作る場合にはそれで十分．



定理 27 (Bowen [B1] (1970)). M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^1-微分同相写像，$\Lambda \subset M$ を f-不変なコンパクト双曲型集合で局所積構造を持つものとする．このとき Λ のマルコフ分割が存在する．
また，矩形の直径の最大値がいくらでも小さなマルコフ分割が存在する．

[証明の大まかなアイデア：]
$\gamma > 0$ をいろいろな条件を満たすような小さな数とする（具体的には，局所積構造や Λ 上の擬軌道追跡性などを使う際に都合が良いくらいに小さくとる）．

具体的には，まず $\eta > 0$ を局所積構造が成り立つサイズとする．すなわち， $x \in \Lambda$ に対して $V_\eta = (W^s_\eta(x) \cap \Lambda) \times (W^u_\eta(x) \cap \Lambda)$ が局所積座標を与える．

$\beta > 0$ を，任意の β-擬軌道が $\eta/2$-追跡されるような定数とする．

$K > 0$ を，任意の $x, y \in \Lambda$ に対して，

$$d(f(x), f(y)) \leq K\, d(x, y)$$

となる定数とする．$\gamma > 0$ を

$$\gamma \leq \min\{\beta/(K+1),\ \beta/2,\ \eta/2\}$$

を満たす定数とする．

$$\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_r\} \subset \Lambda$$

を Λ の γ-稠密点集合とする．この意味は，
「任意の $x \in \Lambda$ に対してある $p_i \in \mathcal{P}$ で $d(x, p_i) < \gamma$ となるものがある」
というもの．Λ はコンパクトなので $\mathcal{P}$ は有限集合でとれる．

$r \times r$-行列 $B = (b_{ij})$ を

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (d(f(p_i), p_j) < \beta) \\ 0 & (d(f(p_i), p_j) \geq \beta) \end{cases}$$

と決める．

$f(p_i)$ に対して必ずある p_j があって $d(f(p_i), p_j) < \gamma < \beta$ となるので，$B = \{b_{ij}\}$ には全ての成分が 0 となる行は無い．

Σ_B を B で定まる有限型の（両側）**sub-shift** とする．すなわち $\Sigma_B \subset \{1, \cdots, r\}^{\mathbf{Z}}$ で，

$$s = (s_j) \in \Sigma_B \iff b_{s_j s_{j+1}} = 1 \quad (\forall j \in \mathbf{Z})$$

シリンダー集合

$$C_j = \{\ s \in \Sigma_B \mid s_0 = j\ \}$$

を考える．

C_j は閉かつ開集合で互いに **disjoint** であり $\Sigma_B = \bigcup_{j=1}^{r} C_j$ である．

$\{C_j\}$ は Σ_B のマルコフ分割に相当するものを与えるが，Σ_B の矩形やマルコフ分割はちゃんと定義していないのでマルコフ分割だと言うことはできない（ 実際上はマルコフ分割だが，以下の議論で特にそれが必要となることはない）．

定理の証明の基本的なアイデアは，このマルコフ分割（に相当するもの）を使って Λ のマルコフ分割を定義する，というもの．

Λ の分割を実際に Λ 上で構成しようとすると，できるかどうかも分からないかなり面倒な話になってくるので，これは非常に良いアイデア．

Σ_B を Λ に対応させるために写像

$$\theta : \Sigma_B \to \Lambda$$

を以下のように定義する．

$s \in \Sigma_B$ に対して Λ の点列 $\{p_{s_j}\}$ が決まる．$s \in \Sigma_B$ の定義から

$$d(f(p_{s_j}),\, p_{s_{j+1}}) < \beta$$

である．すなわち点列 $\{p_{s_j}\}$ は β-擬軌道である．追跡補題から，この擬軌道を $\eta/2$-追跡する点 $z \in \Lambda$ がただ一つ存在する．

$$\theta(s) = z$$

と決める．θ は連続であることが証明できる（証明略）．

θ は単射とは限らないが全射ではある．

なぜなら，任意の $z \in \Lambda$ に対して，z の軌道 $\{f^j(z)\}$ の各点に対して，必ずある p_{s_j} で $d(f^j(z), p_{s_j}) < \gamma$ となるものがある．

$s = \{s_j\}$ とすると $s \in \Sigma_B$ である．なぜなら，

$$\begin{aligned} d(f(p_{s_j}), p_{s_{j+1}}) &\leq d(f(p_{s_j}), f^{j+1}(z)) + d(f^{j+1}(z), p_{s_{j+1}}) \\ &\leq K\, d(p_{s_j}, f^j(z)) + d(f^{j+1}(z), p_{s_{j+1}}) \\ &\leq K\,\gamma + \gamma = (K+1)\gamma < \beta \end{aligned}$$

となるから．またこれは $\{p_{s_j}\}$ が β-擬軌道となることを言っており，これを $\eta/2$ 追跡する Λ の点が一意的に決まるが，$\gamma < \eta/2$ なのでそれは z となり，この $s \in \Sigma_B$ について $\theta(s) = z$ となる．

$$T_j = \theta(C_j)$$

とすると，各 T_j は矩形となり，さらに $\{T_j\}$ は Λ を **cover** していることを示すことができるが，これらは重なっている可能性があるので，これ自体ではマルコフ分割にはならない．これを使ってマルコフ分割を構成することになる．

命題 16. $\{T_j\}_{j=1,\cdots,r}$ は次を満たす．

(1) 各 T_j は矩形である．

(2) $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{r} T_j$

(3) $s \in \Sigma_B$ に対して $z = \theta(s)$ とすると

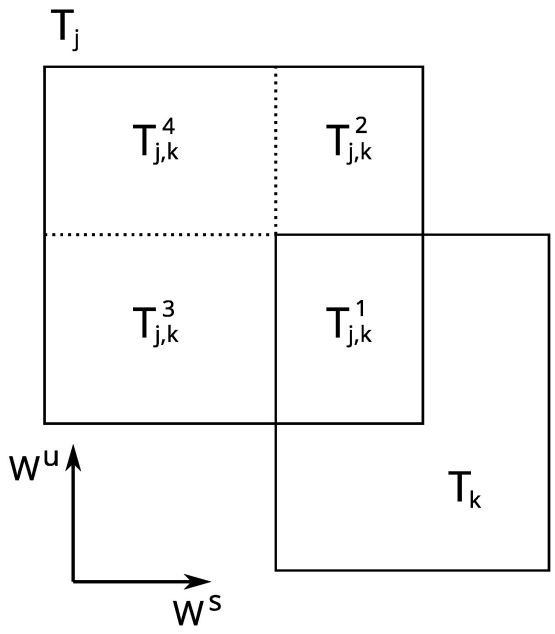
$$\begin{aligned} f(W^s(z, T_{s_0})) &\subset W^s(f(z), T_{s_1}) \\ f(W^u(z, T_{s_0})) &\supset W^u(f(z), T_{s_1}) \end{aligned}$$

[命題 16 の証明は省略]

$\mathcal{T} = \{T_j\}_{j=1,\cdots,r}$ はオーバーラップしている可能性があるので，これらを内部が交わらないようにうまく細分してマルコフ分割を作る．

T_j を固定して $T_j \cap T_k \neq \emptyset$ となる T_k を使って T_j を次のように細分する．

$$
\begin{aligned}
T^1_{j,k} &= T_j \cap T_k \\
&= \{\ x \in T_j \mid W^u(x,T_j) \cap T_k \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad W^s(x,T_j) \cap T_k \neq \emptyset\ \} \\
T^2_{j,k} &= \{\ x \in T_j \mid W^u(x,T_j) \cap T_k \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad W^s(x,T_j) \cap T_k = \emptyset\ \} \\
T^3_{j,k} &= \{\ x \in T_j \mid W^u(x,T_j) \cap T_k = \emptyset \quad \text{かつ} \quad W^s(x,T_j) \cap T_k \neq \emptyset\ \} \\
T^4_{j,k} &= \{\ x \in T_j \mid W^u(x,T_j) \cap T_k = \emptyset \quad \text{かつ} \quad W^s(x,T_j) \cap T_k = \emptyset\ \}
\end{aligned}
$$



$x \in \Lambda$ に対して

x を含むようなあらゆる $T^n_{j,k}$ の $\mathrm{int}(T^n_{j,k})$ の共通部分を $R(x)$

として，これらの集まりをマルコフ分割としたい．

どれかの T_k の境界の延長線上に乗っているような x は $\mathrm{int}(T^n_{j,k})$ には入らないので，

$$Z^* = \{\ x \in \Lambda \mid \text{任意の } T_k \in \mathcal{T}^*(x) \text{ に対して } W^s_\epsilon(x) \cap \partial^s(T_k) = \emptyset \text{ かつ } W^u_\epsilon(x) \cap \partial^u(T_k) = \emptyset\ \}$$

とする．ここで

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^*(x) &= \{\ T_k \in \mathcal{T} \mid x \in T_j \text{ となるある } T_j \text{ で } T_k \cap T_j \neq \emptyset\ \} \\
\partial^s(R) &= \{\ x \in R \mid x \notin \mathrm{int}\,(W^u(x,R))\ \} \\
\partial^u(R) &= \{\ x \in R \mid x \notin \mathrm{int}\,(W^s(x,R))\ \}
\end{aligned}
$$

Z^* は Λ の中で **open, dense** になる．

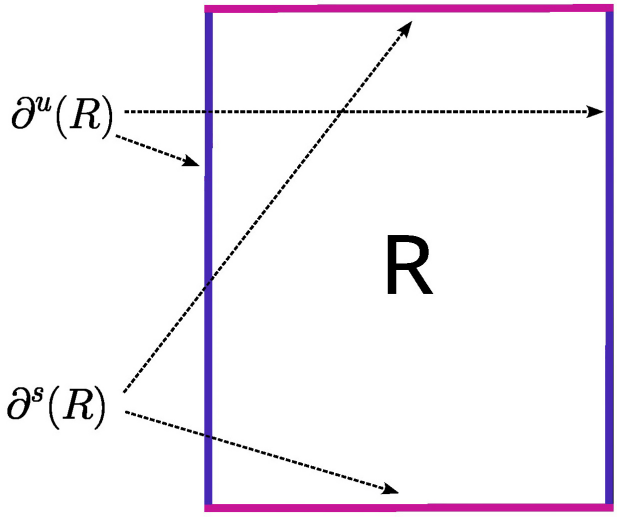
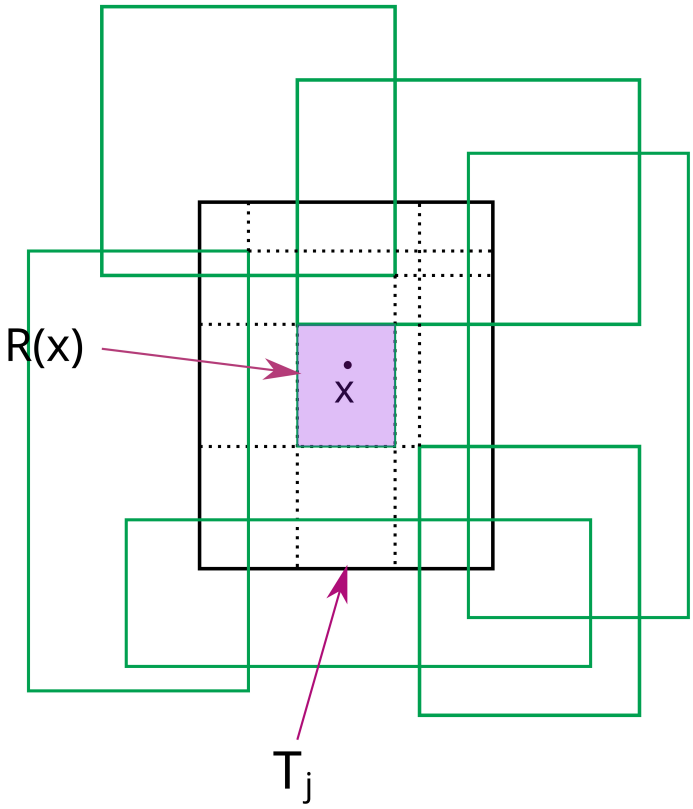


図 35: $\partial^s(R)$ と $\partial^u(R)$



$x \in Z^*$ に対して，x を含むようなあらゆる $T^n_{j,k}$ の $\mathrm{int}(T^n_{j,k})$ の共通部分を $R(x)$ とすると次が成り立つ．

命題 17.

(1) $x, y \in Z^*$ に対し $R(x) = R(y)$ または $R(x) \cap R(y) = \emptyset$ が成り立つ．

(2) $x \in Z^*$ に対し $\partial(R(x)) \cap Z^* = \emptyset$ である．

(3) $R(x) \neq \emptyset$ ならば $\overline{R(x)}$ は矩形である．

(4) $x \in Z^*$ に対し $\mathrm{int}(\overline{R(x)}) = R(x)$ である．すなわち矩形 $\overline{R(x)}$ は **proper** である．

T_j や $T^n_{j,k}$ は有限個しかないので，異なる $\overline{R(x)}$ は有限個しかない．これらの集まりがマルコフ分割となる．

13.1 Toral automorphism のマルコフ分割の例

$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{T}^2$ 上の **Anosov** 微分同相写像を定める．

L の固有値は

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

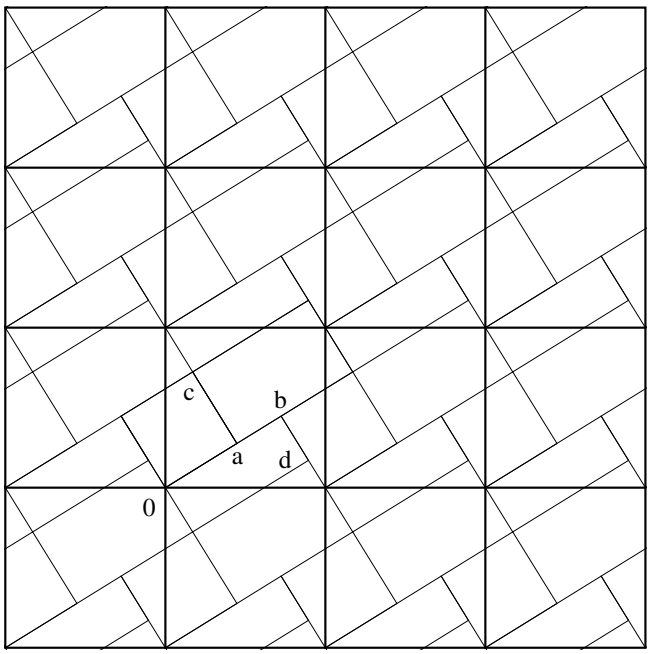
であり，

$$\lambda_1 \approx 2.618, \qquad \lambda_2 \approx 0.382$$

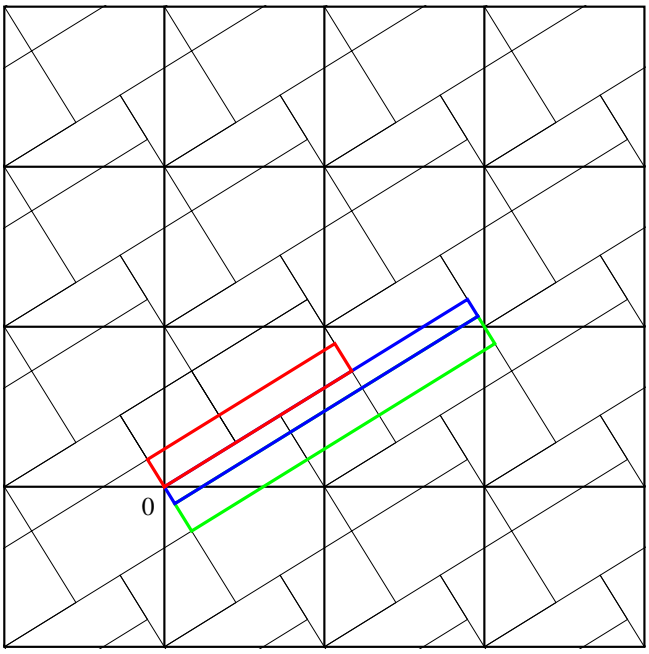
である．固有ベクトルは，

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.236 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.236 \\ 2 \end{pmatrix}$$

矩形は **3** 個でサイズは大きいが，マルコフ分割の例としては次のものがある．



矩形の L による像は次のようになる．



注意 33. マルコフ分割の説明図は 2 次元の場合を描いている．このイメージで行けば，3 次元以上の矩形は直方体のようなものになると思うかもしれないが，実は全くそうではない．
Bowen は
“Markov partitions are not smooth” (Proc.AMS. Vol.71, No.1 1978)
において
「$\mathbf{T}^3$ 上の **toral automorphism** から得られる **Anosov** 微分同相写像について，そのマルコフ分割の矩形の境界は区分的に滑らかな曲面にはならない.」
ということを証明している．

13.2 マルコフ分割から記号力学系へ

これまでと同様に，$\Lambda \subset M$ を f-不変なコンパクト双曲型集合で局所積構造を持つものとし，$\mathcal{R} = \{R_j\}_{j=1}^m$ を Λ の マルコフ分割 とする．またそれぞれの矩形のサイズは（いろいろな条件が成り立つように）十分に小さいものとする．

$m \times m$-行列 A を次のように決める．

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \textbf{if} \quad f(\mathrm{int}(R_i)) \cap \mathrm{int}(R_j) \neq \emptyset \\ 0 & \textbf{if} \quad f(\mathrm{int}(R_i)) \cap \mathrm{int}(R_j) = \emptyset \end{cases}$$

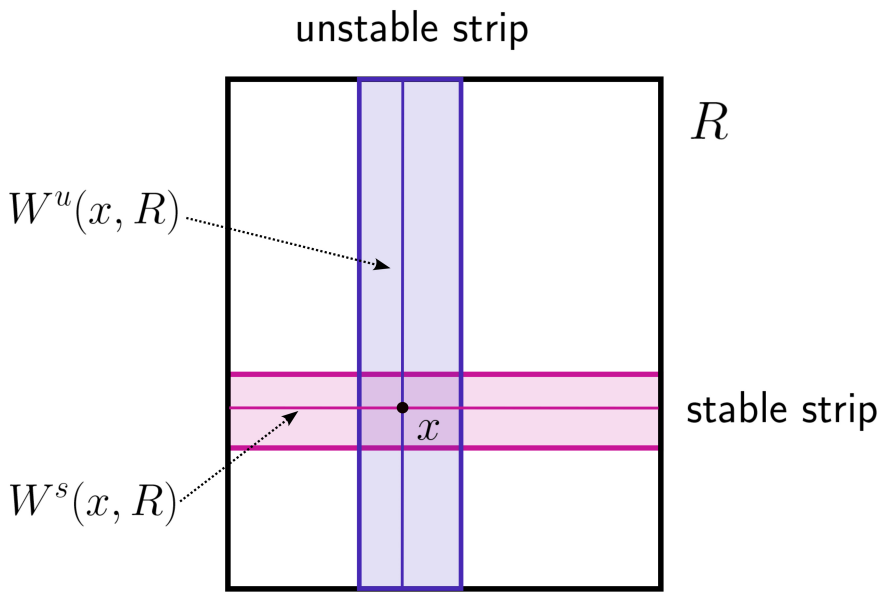
次が成り立つ．

定理 28. 全射連続写像 $\pi : \Sigma_A \to \Lambda$ が存在し $\pi\sigma = (f|_\Lambda)\pi$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma_A \arrow[d, "\pi"] \\ \Lambda \arrow[r, "f"'] & \Lambda \end{tikzcd}$$

なぜこれが成り立つのかについての概略は以下のとおり．

定義 55. R を Λ の矩形とする．$S \subset R$ が **(un)stable strip** であるとは，$\forall x \in S$ に対して $W^s(x, R) \subset S$ ($W^u(x, R) \subset S$) となること．



命題 18. S を R の **stable strip** とする．このとき次が成り立つ（**unstable strip** でも同様）．

(1) S は矩形である．

(2) $\forall x \in R$ に対して $S \cap W^u(x, R) \neq \emptyset$ ．

(3) $x \in R$, $y \in S$ なら $S = [W^u(x, R) \cap S, W^s(y, R)]$ ．

ここで局所積構造を持つ範囲にある集合 A, B に対して

$$[A, B] = \{\ W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(y)\ \text{（これは 1 点）} \mid x \in A,\ y \in B\ \}$$

[証明略]

命題 19. $\mathrm{int}(R_i) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_j)) \neq \emptyset$ とする．
もし S が R_j (**resp.** $\mathrm{int}(R_j)$) の **stable strip** ならば，$f^{-1}(S) \cap R_i$ (**resp.** $f^{-1}(S) \cap \mathrm{int}(R_i)$) は R_i (**resp.** $\mathrm{int}(R_i)$) の **stable strip** である（ **unstable strip** でも同様）．

系 2. $(a_0, \cdots, a_r)$ を A の許容列とする．このとき，

(1) $\bigcap_{s=0}^{r} f^{-s}(R_{a_s})$ (**resp.** $\bigcap_{s=0}^{r} f^{-s}(\mathrm{int}(R_{a_s}))$) は **non-empty** な R_{a_0} (**resp.** $\mathrm{int}(R_{a_0})$) の **stable strip** である．

(2) $\bigcap_{s=0}^{r} f^{r-s}(R_{a_s})$ (**resp.** $\bigcap_{s=0}^{r} f^{r-s}(\mathrm{int}(R_{a_s}))$) は **non-empty** な R_{a_r} (**resp.** $\mathrm{int}(R_{a_r})$) の **unstable strip** である．

$a = (a_i) \in \Sigma_A$ とする．$n \in \mathbf{N}$ に対して

$$F_n = \bigcap_{s=-n}^{n} f^{-s}(R_{a_s})$$

とすると，F_n は R_{a_0} における **stable strip** と **unstable strip** の共通部分であり，空ではないコンパクト集合である．F_n は $n \to \infty$ の時に縮小列となり，

$$F_\infty = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(R_{a_n})$$

は 1 点であることを示すことができる．$\pi : \Sigma_A \to \Lambda$ を

$$\pi(a) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(R_{a_n})$$

と決める．

$H \subset \Lambda$ を

$$H = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}\left(\Lambda - \bigcup_{s=1}^{m} \partial R_s\right)$$

と決める．
明らかに H は f-不変であり，Λ における **open dense set** の可算個の共通部分なので **residual set** である．従って Λ で **dense** である．

定理 29.

(1) π は連続である．

(2) π は全射である．

(3) π は H 上では単射である．

(4) $\pi(C_i) = R_i$ ．ここで $C_i = \{\ a \in \Sigma_A \mid a_0 = i\ \}$ ．

[証明略]

$\pi : \Sigma_A \to \Lambda$ は単射ではないが，逆像の数には上限がある．

定理 30. $\pi : \Sigma_A \to \Lambda$ をマルコフ分割 $\mathcal{R} = \{R_j\}_{j=1}^m$ から上記のように定まる写像とする．この時，任意の $x \in \Lambda$ に対して $\pi^{-1}(x)$ の元の個数は最大 m^2 である．

この定理の証明では，次の補題が本質的である．

補題 10. $a = (a_0 \cdots a_n)$, $b = (b_0 \cdots b_n)$ を 2 つの許容列で，$a_0 = b_0$, $a_n = b_n$ となるものとする．
もし $0 \le \forall i \le n$ で $R_{a_i} \cap R_{b_i} \neq \emptyset$ ならば $a = b$ である．

補題 10 の証明：
系 2 より，$\bigcap_{s=0}^n f^{-s}(\mathrm{int}(R_{a_s}))$，$\bigcap_{s=0}^n f^{-s}(\mathrm{int}(R_{b_s}))$ はそれぞれ **non-empty** な $\mathrm{int}(R_{a_0})$，$\mathrm{int}(R_{b_0}) = \mathrm{int}(R_{a_0})$ の **stable strip** である．
従って，ある $x \in \bigcap_{s=0}^n f^{-s}(\mathrm{int}(R_{a_s}))$，$y \in \bigcap_{s=0}^n f^{-s}(\mathrm{int}(R_{b_s}))$ が存在するが，これらは次を満たす．

$$f^i(x) \in \mathrm{int}(R_{a_i}), \quad f^i(y) \in \mathrm{int}(R_{b_i}) \qquad (0 \le \forall i \le n)$$

矩形の直径は局所積構造を満たすサイズ $\eta > 0$ の $1/2$ より小さいとしておけば，$R_{a_i} \cap R_{b_i} \neq \emptyset$ なので，

$$d(f^i(x), f^i(y)) \le \mathbf{diam}\, R_{a_i} + \mathbf{diam}\, R_{b_i} < \eta$$

となり $[f^i(x), f^i(y)]$ が定義される．

$a_0 = b_0$ なので $[x, y] \in \mathrm{int}(R_{a_0}) = \mathrm{int}(R_{b_0})$ であり，$a_n = b_n$ なので $[f^n(x), f^n(y)] \in \mathrm{int}(R_{a_n}) = \mathrm{int}(R_{b_n})$ である．

$[f^i(x), f^i(y)] = f^i([x, y])$ となっているが，$[x, y] = W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ であり $[x, y] \in \mathrm{int}(R_{a_0})$ なので $f^i([x, y]) \in W^s(f^i(x), \mathrm{int}(R_{a_i}))$ である．

同様に $[f^n(x), f^n(y)] \in \mathrm{int}(R_{b_n})$ なので，$f^i([x, y]) = f^{-(n-i)}([f^n(x), f^n(y)]) \in W^u(f^i(x), \mathrm{int}(R_{b_i}))$ である．

$\mathrm{int}(R_{a_i}) \cap \mathrm{int}(R_{b_i}) \neq \emptyset$ なので $a_i = b_i$ である．■

定理 30 の証明：
ある $x \in \Lambda$ があって $\pi^{-1}(x)$ に $m^2 + 1$ 個以上の元が含まれているとする．
$s^1, \cdots, s^{m^2+1}$ をその中の相異なる $m^2 + 1$ 個の列とする．
n を十分大きくとると，許容列

$$(s^i_{-n} \cdots s^i_0 \cdots s^i_n)$$

は全て異なる列であるようにできる．
(s^i_{-n}, s^i_n) というペアを考えると，s^i_j は $\{1, \cdots, m\}$ のどれかなので，このペアは最大 m^2 個の組み合わせしかない．
従って，ある i, j で $s^i_{-n} = s^j_{-n}$，$s^i_n = s^j_n$ となる．

しかしこのような場合，補題 **10** から

$$(s^i_{-n} \cdots s^i_0 \cdots s^i_n) = (s^j_{-n} \cdots s^j_0 \cdots s^j_n)$$

となり矛盾．■

この定理 **30** から次のことが分かる．

系 3. $\pi^{-1}(\mathbf{Per}(f|\Lambda)) = \mathbf{Per}(\sigma_A)$

問題 8. この系を証明せよ．

14　構造安定性

構造安定性についての研究は，**Andronov-Pontryagin, Peixoto** を経て **1960** 年代中頃には「構造安定性予想」に行きついた．この予想は **Smale** と **Palis** によるものだと思われる [**Pal4**].

[構造安定性予想]

$$\text{構造安定} \iff \textbf{Axiom A} + \text{強横断性条件}$$

この予想について，2 次元多様体上の **flow** に関する **Peixoto** の結果の後，**Anosov** [**Ano**] (**1967**) と **Moser** [**Mos**] (**1969**) が，**Anosov** 微分同相写像と **Anosov flow** の場合を証明した．
Moser の証明はそれまでのものとはかなり異なり，細かな幾何学的な議論は行わず，かなり解析的な方法であり，**Banach** 空間上の不動点定理に持ち込むというアイデアが面白い．

「**Morse-Smale** 系が構造安定か？」という問題は，非遊走集合が有限集合なので，わりと簡単に証明できるかと思いきや，これがかなり難しかった．しかしブラジル人として **Peixoto** の仕事を発展させたいという強い思いがあったのかもしれないが，**Palis** が 3-次元以下の多様体の場合に証明した [**Pal1**] (**1969**) ．一般次元では **Palis-Smale** が **1970** 年に証明した [**PS**].

一般の場合で
「**Axiom A** ＋ 強横断性条件 $\Longrightarrow$ 構造安定」
を最初に証明したのは **J.Robbin** [**Rob**] (**1971**) である．ここでは，C^2-微分同相写像が「**Axiom A** ＋ 強横断性条件」を満たすならば C^1-構造安定であることを証明している．

その証明方法は，**Anosov** 微分同相写像が構造安定であることを示した **Moser** の方法を参考にしている．

C.Robinson は [**R2**] (**1976**) において，これが C^1 微分同相写像で成り立つことを証明した．

また **flow** の場合には，**C.Robinson** が [**R1**] (**1975**) において，C^1-**flow** が「**Axiom A** ＋ 強横断性条件」を満たすならば C^1-構造安定であることを証明している．

14.1　安定性予想の逆問題

これらの結果は，**Axiom A** という構造が良く分かる仮定の元に構造安定性を証明する，という結果だが，その逆，すなわち構造安定性を仮定して **Axiom A** が成り立つことを証明するのは難しく，2 次元多様体についても未解決だった．

この逆問題については，f の C^1-構造安定性を仮定して $\Omega(f)$ が双曲型集合になることを示せば良いことが分かっていた．

S.T.Liao [Li] (1980) は 2-次元多様体の場合にこれを証明した．

図 36: Liao ShanTao (1920 – 1997)

それとは独立に **Sannami [San1] (1981), [San2] (1983)** は 2-次元多様体上の C^2 微分同相写像について，これが成り立つことを証明した．証明方法は **Liao [Li]** のものとは異なる．

一般次元では，**R.Mañé [Man] (1987)** が証明したが，そこでは **Mañé** が開発した「**Ergodic Closing Lemma**」が重要な道具となっている．

この逆問題については，

$$\mathcal{F}^1(M) = \mathrm{int}\{\ f \in \mathbf{Diff}^1(M) \mid f \text{ の周期点は全て双曲型 }\}$$

としたとき

$$f \in \mathcal{F}^1(M) \implies \Omega(f) \text{ は双曲型集合}$$

を証明すれば良いということは知られていた．
2 次元では，**Liao, Sannami** はそれを証明したが，一般次元での **Mañé** の証明は，構造安定性を仮定していた．

最終的にこの $\mathcal{F}^1(M)$-予想を証明したのは 林修平 **[Hay1] (1992)** である．

Flow の場合の安定性予想の逆問題は，特異点の周辺での挙動を扱うのが難しく，長いこと未解決だったが，これも最終的に 林修平 **[Hay2] (1997)** によって解決された．

彼は C^1-**Connecting Lemma** を証明し，それを使うことによってこの問題を解決したが，この **Connecting Lemma** はその後，多くの人たちによっていろいろな問題の解決に利用されてゆくことになる．

注意 34. これらの逆問題の解決には C^1-**Closing Lemma**, C^1-**Connecting Lemma** が本質的に使われているため，C^r $(r \geq 2)$ では未解決．すなわち，

$$f \text{ が } C^r\text{-構造安定 } (r \geq 2) \text{ ならば } \Omega(f) \text{ は双曲型集合か？}$$

は未解決である．
この問題が大問題というよりも，$r \geq 2$ で C^r-**Closing Lemma**, C^r-**Connecting Lemma** が成り立つのか？　というのが大きな問題と言える．

14.2 Ω-安定性

構造安定性よりもやや弱い安定性も考えられた．

定義 56. M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（$r \geq 1$）とする．f が C^r-Ω-安定（Ω-stable） とは，$\mathbf{Diff}^r(M)$ における f の近傍 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $g \in \mathcal{U}$ に対しある位相同型写像 $h : \Omega(g) \to \Omega(f)$ で $h\, g|_{\Omega(g)} = f|_{\Omega(f)}\, h$ となるものが存在すること．

$$\begin{tikzcd}
\Omega(g) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & \Omega(g) \arrow[d, "h"] \\
\Omega(f) \arrow[r, "f"'] & \Omega(f)
\end{tikzcd}$$

定義 57. $f : M \to M$ を **Axiom A** を満たす微分同相写像とし，$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \Omega_m$ をスペクトル分解とする．

(1) 基本集合の列 $\Omega_{k_1}, \cdots, \Omega_{k_m}$ （$m \geq 2$）が **cycle** とは，$\Omega_{k_i} \neq \Omega_{k_j}$ （$i \neq j$）であり $W^u(\Omega_{k_i}) \cap W^s(\Omega_{k_{i+1}}) \neq \emptyset$ となること（$k_{m+1} = k_1$ とする）．

(2) f が **No-Cycle Property** を満たすとは，**cycle** を持たないこと．

Palis [Pal2] (1970) は，**Axiom A** を満たす Ω-安定な微分同相写像は **No-Cycle Property** を満たさなければならないことを証明している．

Cycle があると Ω-explosion という現象が起きる.

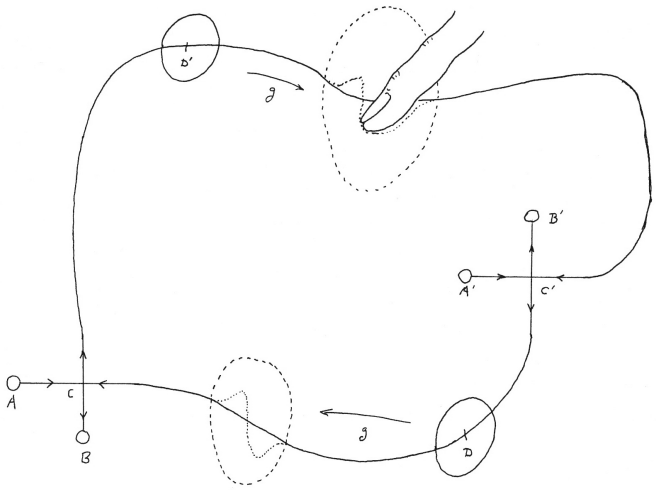


図 37: Old $\Omega = \{\ A, B, C, A', B', C'\ \}$ （ Nitecki [Nit] から引用 ）

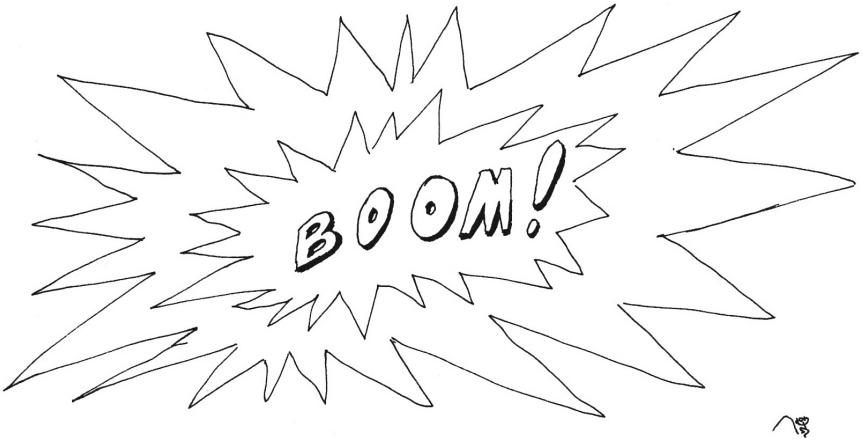


図 38: Ω-explosion （ Nitecki [Nit] から引用 ）

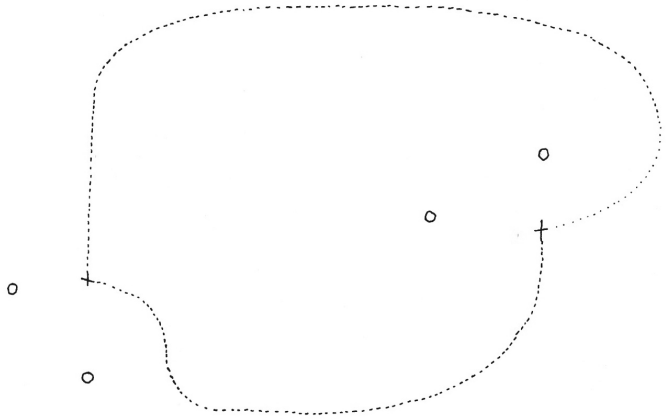


図 39: A new Ω （ Nitecki [Nit] から引用 ）

このことから，Ω-安定になるためには **No-Cycle Property** が必要だということが分かる．
Smale [Sm6] (1970) は次を証明した．

定理 31 (Smale (1970)). 微分同相写像 f が **Axiom A** と **No-Cycle Property** を満たすならば Ω-安定である．

構造安定性と同様に，次のことが予想された．

予想 3 (Ω-安定性予想).

$$\Omega\text{-安定} \iff \textbf{Axiom A} \ + \ \textbf{No-Cycle Property}$$

Ω-安定性予想についても，構造安定性予想と同様に逆問題が残ったが，これについても

$$f \in \mathcal{F}^1(M) \implies \Omega(f) \text{ は双曲型集合}$$

を示せば良いことは分かっていたので，構造安定性予想の逆問題の解決と同時に解決された．

ただし，林による $\mathcal{F}^1(M)$-予想の解決 **(1992)** の前に，**Palis [Pal3] (1988)** は Ω-安定性予想の逆問題を解決している．

彼は 「$\mathcal{F}^1(M) \Rightarrow$ **Axiom A**」 そのものではなく，
$\mathcal{F}^1(M) \cap \{\textbf{Axiom A}\}$ が $\mathcal{F}^1(M)$ で稠密となることを示すことによって「Ω-安定 $\Rightarrow$ **Axiom A**」 を証明している．

14.3 構造安定性，Ω-安定性は稠密な性質か？

Peixoto [Pei2] (1962) は 2 次元多様体 M 上において，構造安定なベクトル場全体の集合は M 上の C^1 ベクトル場全体の集合の中で開かつ稠密になることを示した．

一般次元の微分同相写像や **flow** についても同様のことが成り立つのか？ というのが **1960** 年代では重要な問題となっていたが，それが成り立たないことを **Smale** 自身が示した **[Sm4]**．

定理 32 (Smale (1966)). ある開集合 $\mathcal{U} \subset \mathbf{Diff}(\mathbf{T}^3)$ が存在し，任意の $f \in \mathcal{U}$ は構造安定ではない．

この段階ではまだ
「**Axiom A** は稠密か？」,「Ω-安定性は稠密か？」
という問題が残されていたが，これに対して否定的な解答を与えたのもまた **Smale** 自身だった **[AS]**．

定理 33 (Abraham - Smale (1970)). ある開集合 $\mathcal{N} \subset \mathbf{Diff}^r(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^2)$ ($1 \leq r \leq \infty$) で，$\forall g \in \mathcal{N}$ は **Axiom A(a)** を満たさず，かつ **Ω-stable** でもない，となるものが存在する．

基本的なアイデアは，ある $f \in \mathbf{Diff}^r(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^2)$ で次のようなものが存在することを示すというもの．

f は **2** つの互いに交わらない双曲型集合不変集合 Λ_1, Λ_2 を持ち，その（不）安定次元が異なり，さらに Λ_1 から Λ_2 への軌道と Λ_2 から Λ_1 への軌道があって，これらが全て $\Omega(f)$ に含まれている．

これにより，f は **Axiom A(a)** を満たさないことが分かる．さらにこの現象が f の近傍 N の微分同相写像で "安定的に" に起こることを示す．

このアイデアは，「安定的 (robust) に双曲型ではない」ような力学系の一つの重要なタイプ「**hetero-dimensional cycle**」を与えており，その後の「安定的に非双曲型の力学系」の重要なモデルである **blender** に繋がって行く．

注意 35.

(1) **C.P.Simon [Sim]** は **1972** 年に $\mathbf{T}^3$ 上で同様の例を構成している．

(2) **R.Williams [Wil]** は **1970** 年に，ある開集合 $\mathcal{U} \subset \mathbf{Diff}(\mathbf{T}^2)$ で任意の $f \in \mathcal{U}$ は構造安定とはならないものが存在することを証明している．

15 Newhouse 現象

構造安定性は稠密か？ という問題に対して **Newhouse [New1] (1970)** は，
「$\mathbf{Diff}^2(\mathbf{S}^2)$ 上のある開集合 $\mathcal{U}$ が存在し，$\forall f \in \mathcal{U}$ に対し $\Omega(f)$ は双曲型集合ではない」
ということを証明した．これにより $\forall f \in \mathcal{U}$ は C^2-構造安定ではないことになる．

この **Newhouse** の例は $\mathbf{S}^2$ 上のものだが，その構成法から，任意の 2 次元多様体上で構成できるという利点はある．
しかし，C^2-位相の開集合で **Axiom A(a)** ではないというものであって，C^1-位相の開集合で **Axiom A(a)** ではない，というよりはちょっと弱い．

またその構成法は，**horseshoe map** の一部を不自然に変形して安定多様体と不安定多様体の接触を作り出すというもので，証明のための評価も面倒であり，一見しただけでは，あまり深い結果には見えない．

しかしこの **Newhouse** の発見がその後 **Newhouse 現象** と呼ばれ,「ホモクリニック分岐理論」へと繋がっていくことになる．

Newhouse の結果は，構造安定性の稠密性の反例という意味よりもむしろ，**ホモクリニック接触（homoclinic tangency）** という，非線形系では広く自然に発生する現象があると，そこでは極めて複雑な構造の変化が起きていることを明らかにしたという点で，非線形現象の解明に関わる大きな発見と言える．

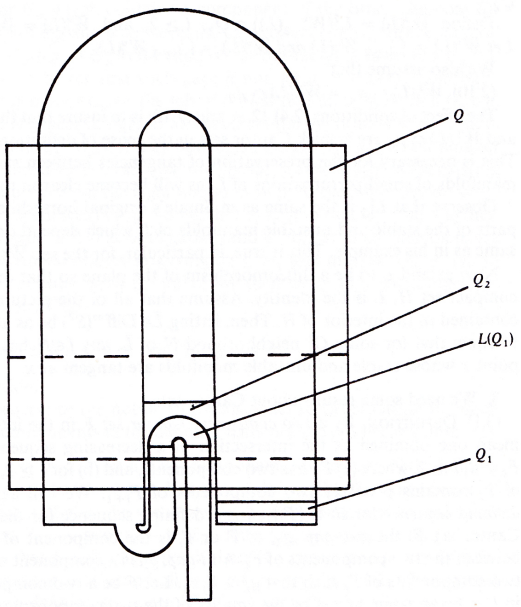


図 40: Newhouse [New1] から引用

定義 58. M を C^∞-多様体，$f : M \to M$ を微分同相写像，Λ_1，Λ_2 を f のコンパクト双曲型集合，$x \in \Lambda_1$，$y \in \Lambda_2$ とする．
$z \in W^s(x) \cap W^u(y)$ において $W^s(x)$ と $W^u(y)$ が横断的に交わっていないとき，これらは z において **ホモクリニック接触（homoclinic tangency）** を持つという．

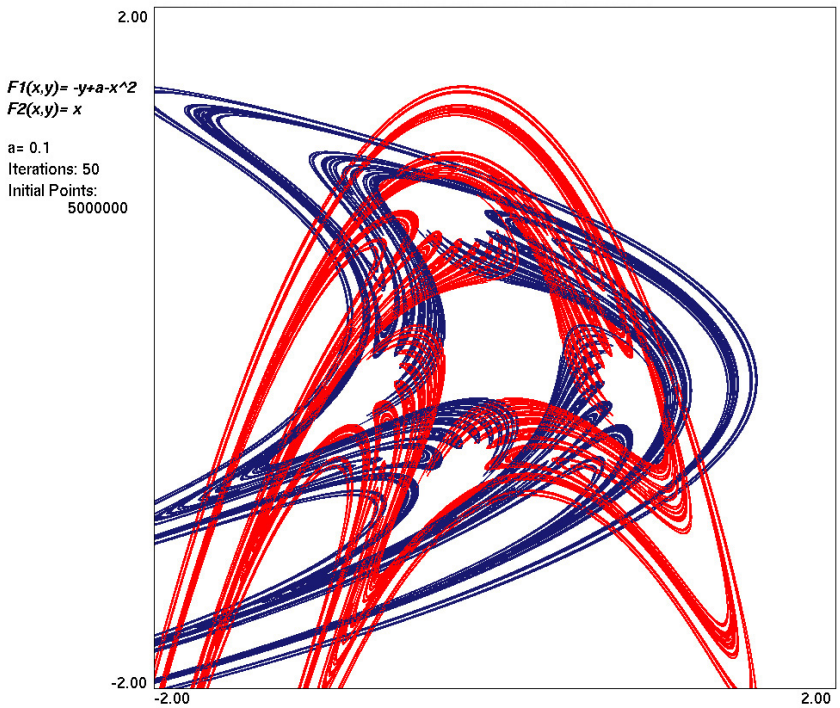


図 41: Hénon map の不動点の安定多様体と不安定多様体

15.1 Cascades of homoclinic tangency

M を 2 次元 C^∞-多様体，$\phi_\mu : M \to M$ を M 上の C^2-微分同相写像の 1-パラメーター族であって，

(1) ϕ_μ はサドル不動点 p_μ を持ち，p_μ は μ に関して連続.

(2) $W^s(p_0)$ と $W^u(p_0)$ は q においてホモクリニック接触を持つ.

となるようなものとする.

定義 59. ϕ_μ が q において **generic** な 2 次の **homoclinic tangency** を持つ とは，q のまわりにおいて，ある μ に **depend** した局所座標があって，$W^s(p_0)$ が $x_2 = 0$ と表され，$W^u(p_0)$ が

$$x_2 = ax_1^2 + b\mu, \qquad (\ a \neq 0 \quad b \neq 0\ )$$

と表されること（ このような **family** は **generic** に存在することが知られている）.

Homoclinic tangency を持つ **generic** な **1-parameter family** には，その **tangency** 以外に，そこに収束する無限の接触が存在することが知られている．すなわち，

定理 34 (Cascades of Homoclinic tangency)**.** ϕ_μ を q において **generic** な 2 次の **homoclinic tangency** を持つ 1-**parameter family** とする．この時，パラメーターの列 $\mu_n \to 0$ があり，ϕ_{μ_n} は **homoclinic tangency** q_{μ_n} で，$q_{\mu_n} \to q$ となるようなものを持つ.

15.2 Newhouse 現象

ホモクリニック接触が存在すると，それに収束する無数の接触以外に，そのまわりでさらに複雑な現象が起きていることが Newhouse によって発見された [New1], [New3], [New4]．それは，

(1) Persistent homoclinic tangency

(2) Genericity of Infinitely many sinks

という 2 つの現象である．これらを総称して Newhouse 現象 という．

定義 60. 開集合 $\mathcal{U} \subset \mathbf{Diff}^2(M)$ が persistent homoclinic tangency を持つとは，連続写像

$$\Lambda : \mathcal{U} \to \{\ M \text{ の compact subset 全体 }\}$$

で以下を満たすものが存在すること．

- $\forall \phi \in \mathcal{U}$ に対し $\Lambda(\phi)$ は ϕ の saddle type 双曲型集合でありその中で周期点が稠密．
- $\forall \phi \in \mathcal{U}$ に対して，ϕ にいくらでも近いある $\psi \in \mathcal{U}$ が存在して，$W^u(\Lambda(\psi))$ と $W^s(\Lambda(\psi))$ は接触を持つ．

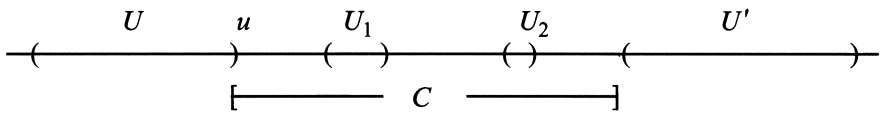
定理 35 (Newhouse 現象). M を 2 次元多様体，$\phi \in \mathbf{Diff}^2(M)$ は saddle 周期点 p を持ち，$W^u(p)$ と $W^s(p)$ は tangency を持っているとする．
この時，ϕ のいくらでも近くに，persistent homoclinic tangency を持つ開集合 $\mathcal{U} \subset \mathbf{Diff}^2(M)$ が存在する．
さらに，もし $|\det(d\phi)_p| < 1$ ならば，ある residual set $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ が存在し，任意の $\psi \in \mathcal{R}$ は無限個の sink を持つ．

注意 36. この Newhouse 現象については，高次元での類似の結果も得られてはいるが，基本的には “2-次元的” な現象である．
3 次元以上では，全く異なるメカニズムで robust non-hyperbolic 現象が起きることが分かっている．

15.3 Persistent tangencies

Persistent homoclinic tangency には，Cantor 集合の thickness というものが関係している．

R 上の Cantor 集合 K に対して thickness という量が定義される．これは Cantor 集合の “太さ” を表す数値．



u における **thickness** $\tau(K,u)$ は，

$$\tau(K,u) = \frac{\ell(C)}{\ell(U)}$$

で定義される．K の **thickness** $\tau(K)$ は，

$$\tau(K) = \inf_{u:\ \textbf{boundary point}} \tau(K,u)$$

で定義される．

定理 36 (Gap Lemma)**.** K_1, K_2 を **Cantor set** とし，$\tau(K_1)\cdot\tau(K_2) > 1$ であるとする．このとき，次の３つのケースのうち，どれか一つが成立している．

(1) K_1 は K_2 のある **gap** に含まれる．

(2) K_2 は K_1 のある **gap** に含まれる．

(3) $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Persistent homoclinic tangency の証明では，$W^s(\Lambda_1)$ と $W^u(\Lambda_2)$ の断面の **thickness** について，$W^s(\Lambda_1)$ の **thickness** がいくらでも大きなものが取れることを示すことによって $\tau(K_1)\cdot\tau(K_2) > 1$ となることを保証し，$W^s(\Lambda_1)$ と $W^u(\Lambda_2)$ が常に接触を持つことを示す．

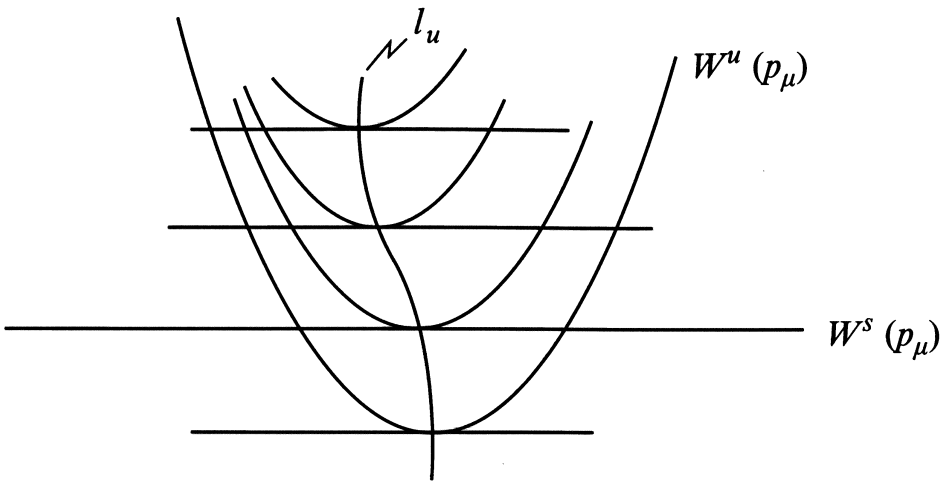


図 42: Palis-Takens [PT] から引用

15.4 Invariant Cantor sets in the Tent map

$W^s(\Lambda_1)$ の **thickness** がいくらでも大きなものが取れることを示すために，**Tent map** について，**thickness** がいくらでも大きな **invariant Cantor set** が存在することを利用する．

それを使って **Logistic map** （2 次関数）でも，**thickness** がいくらでも大きな **invariant Cantor set** が存在することを示す．

なお，$\phi \in \mathbf{Diff}^2(M)$ の双曲型集合 $\Lambda(\phi)$ の（不）安定多様体の断面の **thickness** は ϕ に関して連続に変化するが，これは C^1 では成り立たない．これが，**Newhouse** 現象が C^2-位相を仮定している大きな理由の一つである．

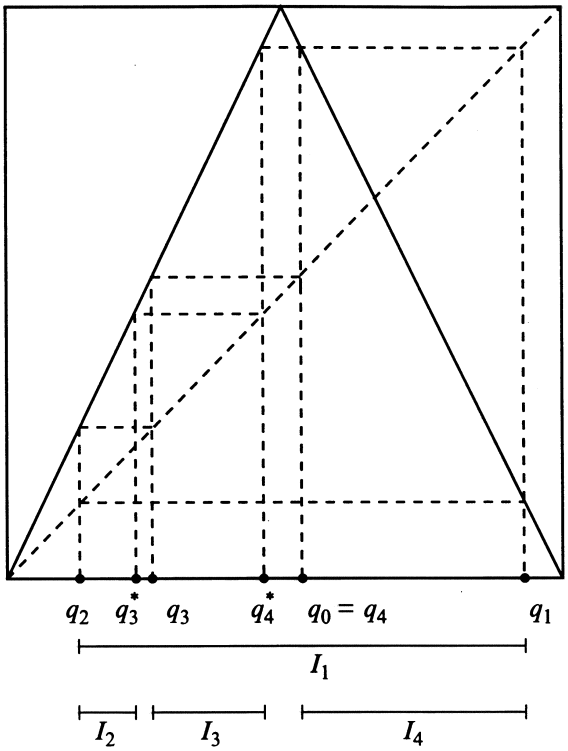


図 43: Palis-Takens [PT] から引用

15.5 無限個の sink について

ホモクリニック接触の近くで **sink** をどのように作るか，という問題について **Newhouse** は「ホモクリニック接触の近くでは，**horseshoe map** の生成過程を含むような構造の分岐が無数に起きている」という事実を発見しそれを利用している．

Yorke-Alligood [YA] (1983) は，**horseshoe** の生成過程で 2 冪分岐が起きることを示しており，**dissipative** ならば **sink** が発生するような無数の分岐が起きることになって，それが証明に使われる．

ただ **horseshoe map** の生成過程では，さらにそれ以上のことが起きており，ホモクリニック接触の近くで，いかに複雑な分岐が発生しているかが予想できる．

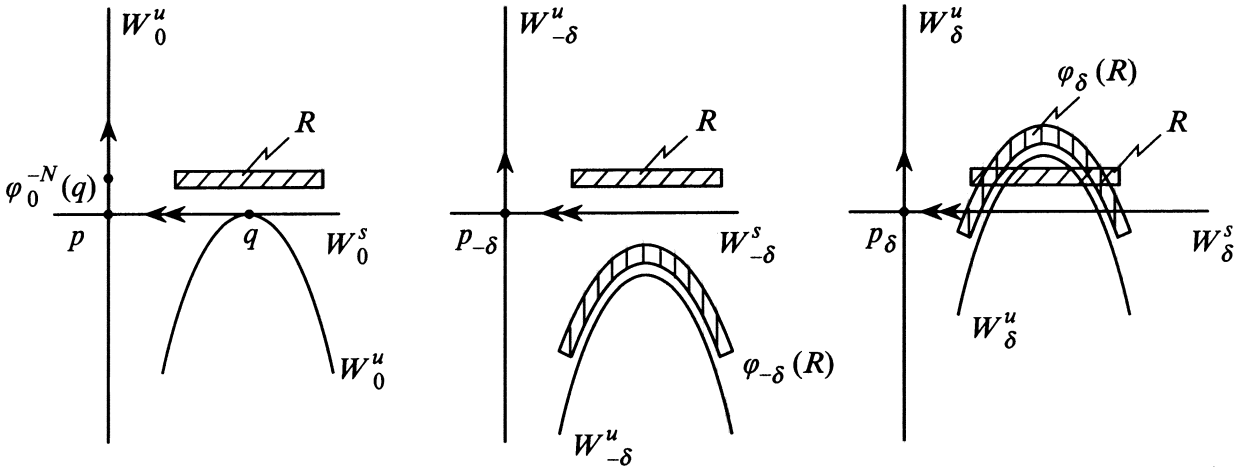


図 44: Palis-Takens [PT] から引用

16 Heterodimensional cycle

Lorenzo Díaz [D1], [D2] (1995) は，微分同相写像 f が安定次元の異なる **2** つの周期点を持ち，それらがある種の **cycle** を持っているなら，f を C^1 でわずかに変化させても安定多様体と不安定多様体の接触が消えない（**Axiom A** ではない）という現象を発見した．

このような現象は 3 次元以上でのみ起きることだが，その条件は非常に自然なもので C^2 という条件も必要無く，3 次元以上の多くの非線形系で普通に起きている可能性がある．

これは非常に重要な発見であり **Díaz 現象** と名付けられても良いものだが，その後すぐにそのメカニズムがモデル化され **Bonatti-Díaz [BD] (1996)** によって **blender** と名付けられた．

定義 61. M を C^∞-多様体，$f : M \to M$ を微分同相写像，P，Q を f の双曲型周期点とする．$\dim(W^u(P)) \neq \dim(W^u(Q))$ であって $W^s(P) \cap W^u(Q) \neq \emptyset$，$W^u(P) \cap W^s(Q) \neq \emptyset$ のとき，f は **heterodimensional cycle** を持つという．

注意 37. **(1)** **Heterodimensional cycle** はちょっと長いので，略して **HDC** と書くことにする（これはここだけ．他では使われていない．）

(2) f が **HDC** を持つなら $\dim M \geq 3$ である．

(3) f が P, Q で **HDC** を持つとき，

$$\dim(W^s(P)) = p_s, \qquad \dim(W^u(P)) = p_u$$
$$\dim(W^s(Q)) = q_s, \qquad \dim(W^u(Q)) = q_u$$

$\dim M = n$ とすると，

$$p_s + p_u = n, \qquad q_s + q_u = n$$

だが，$p_u \neq q_u$ なので $p_u < q_u$ なら $n = p_s + p_u < p_s + q_u$ より $W^s(P) \cap W^u(Q)$ は 1 次元以上の交わりを持つことになり，$n = q_s + q_u > q_s + p_u$ より $W^u(P) \cap W^s(Q)$ は横断的な交わりにはならない．

以下では **HDC** の最も単純な例について述べるが，本質的な部分はほとんどこの例の中にあると言っても良いかもしれない．

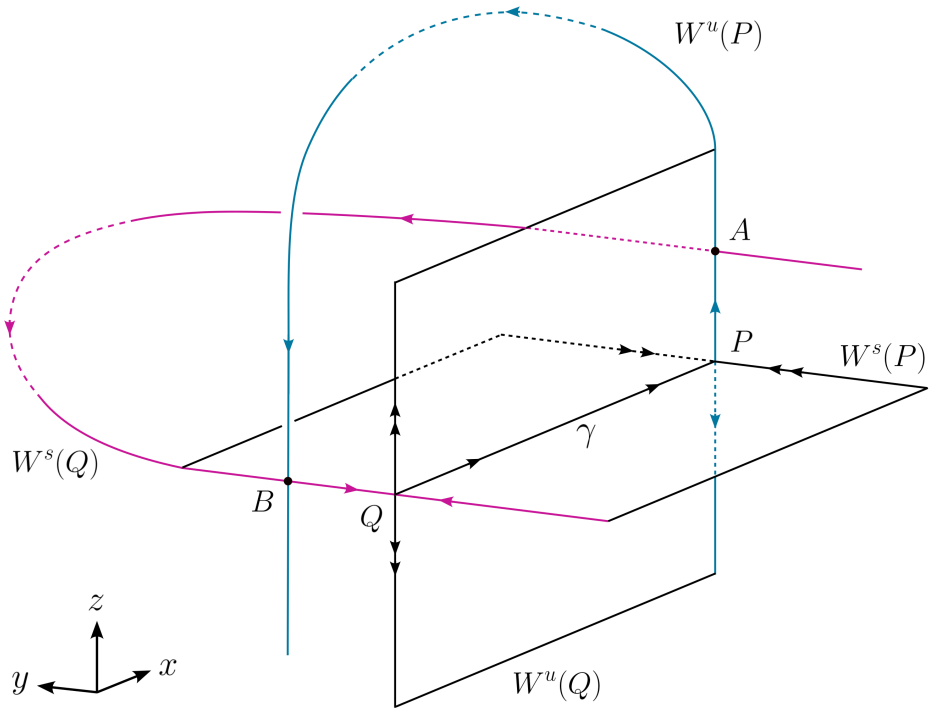


図 45: Heterodimensional cycle

微分同相写像の族 $f_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ （$-1 \le t \le 1$）で，
$[-1,4] \times [-2,2] \times [-2,2]$ 上では次のようになっているものを考える．

(1) f_t は双曲型不動点 $P_t = (3,0,0)$，$Q_t = (0,0,0)$ を持つ．

(2) $\dim(W^s(P_t)) = 2$，$\dim(W^u(P_t)) = 1$，
$\dim(W^s(Q_t)) = 1$，$\dim(W^u(Q_t)) = 2$

(3) $W^s(P_t) \cap W^u(Q_t) = \gamma = [0,3] \times (0,0)$

(4) $(3,0) \times [-2,2] \subset W^u(P_t)$，$\{0\} \times [-2,2] \times \{0\} \subset W^s(Q_t)$

(5) $A = (3,0,1)$，$B = (0,1,0)$ とすると，ある $\ell > 0$ があって $f_0^\ell(A) = B$

(6) $A, B \in W^u(P_0) \cap W^s(Q_0)$

(7) ある $a > 0$ があって，$U_P = [2,4] \times [-2,2] \times [-a,a]$ ，$U_Q = [-1,1] \times [-2,2] \times [-a,a]$ 上で f_t はアファイン写像であり，Df_t の P_t，Q_t における x-方向の固有値はそれぞれ $0 < \lambda < 1$ と $\beta > 1$

(8) A のある近傍 U_A があって，そこでは f_0^ℓ は

$$(x,y,z) \mapsto (x-3,\ 1-y,\ 1-z)$$

となっている．

(9) U_A において f_t^ℓ は

$$(x,y,z) \mapsto (x-3+t,\ 1-y,\ 1-z)$$

となっている．

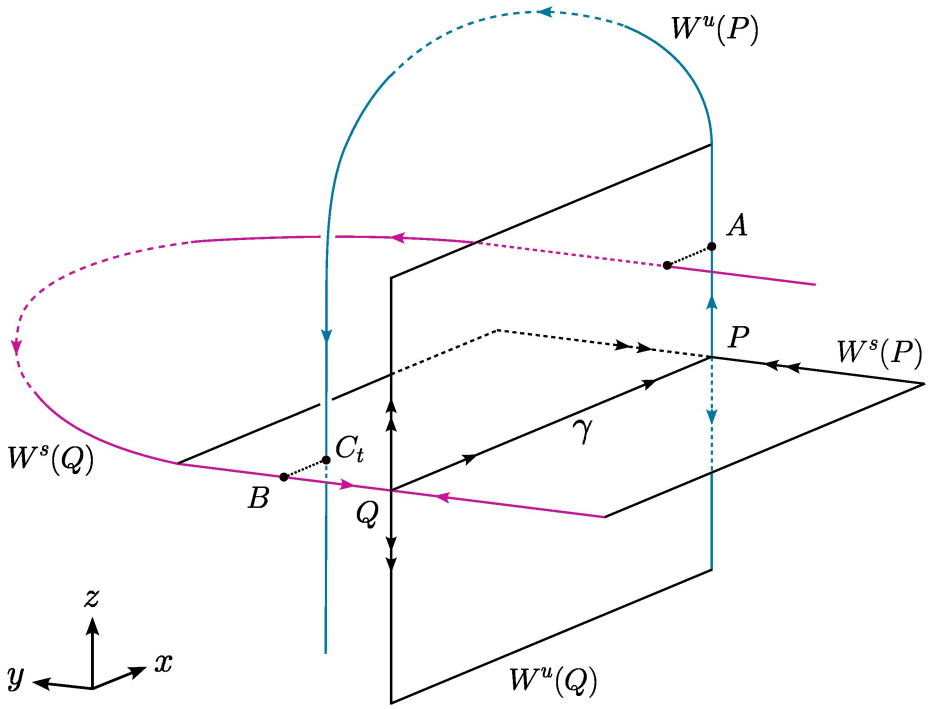


図 46: $W^u(P_t)$ and $W^s(Q_t)$ of f_t

t をわずかに $t > 0$ としたとき，$W^u(P) \pitchfork W^s(P)$ となる点 C_t が B の近くに発生する．

これが f_t の作用でどのように動くか，ということだが，$W^s(P)$ 上では f_t の作用によって γ 上に近づいて行くので，x-座標の動きを見ることにする．

$f_t|_\gamma : \gamma \to \gamma$ は $\gamma = [0,3]$ 上の 1-次元写像と見なせる．
これを $f : [0,3] \to [0,3]$ とすると，$f'(0) = \beta > 1$，$f'(3) = \lambda < 1$ となっている．

また，$[3-t, 3]$ では $x \mapsto x - 3 + t$ という写像ともなっているので，

$$g_t(x) = x - 3 + t$$

とすると，γ 上では $\{f, g_t\}$ という **Iterated Function System** となっている．

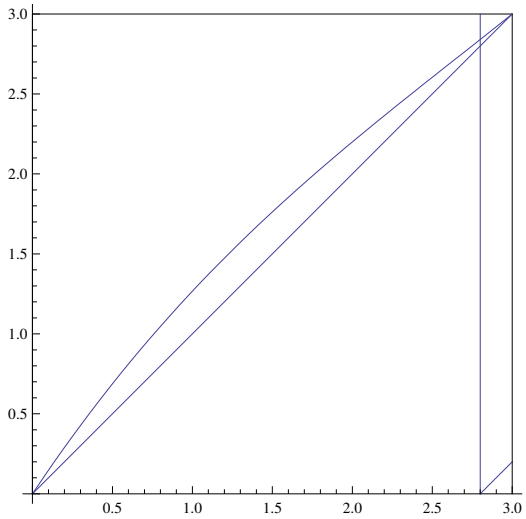


図 47: $\beta = 1.5,\ \ \lambda = 0.8,\ \ t = 0.2$

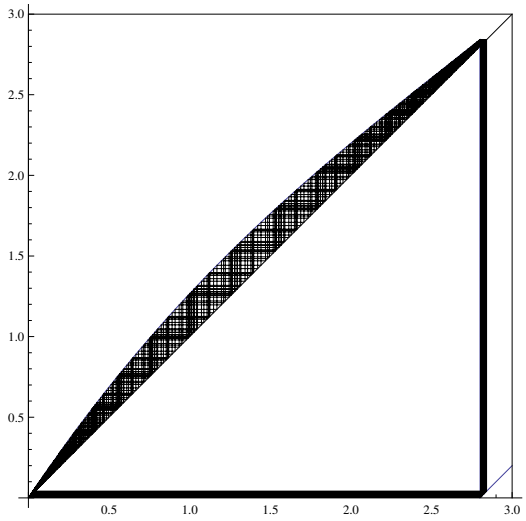


図 48: $\beta = 1.5,\ \ \lambda = 0.8,\ \ t = 0.2$ ： $x = 0.2$ の 500-iterates

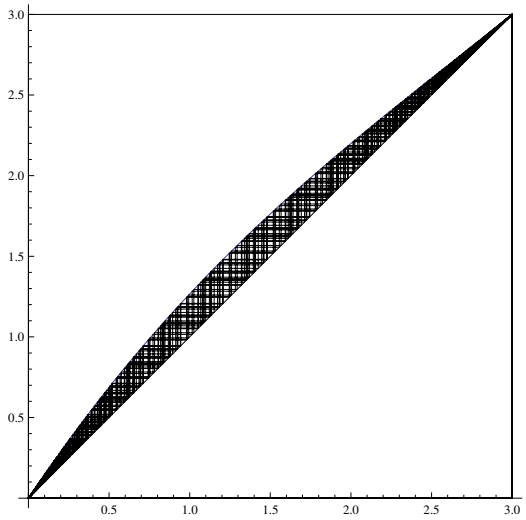


図 49: $\beta = 1.5,\ \ \lambda = 0.8,\ \ t = 0.00001$ ： $x = 0.2$ の 2000-iterates

$$\Gamma = \{\ f_t^m(C_t) \mid m \in \mathbf{N}\ \} \subset W^s(P_t)$$

とすると，Γ の x-座標の値は γ 上で稠密になる．

x-座標だけではなく，$W^s(P_t)$ 上での Γ の点の分布がどうなっているのか，ということについては，$f_t^m(C_t)$ の x-座標の値が $3-t$ にかなり近いと，そ $f_t^{m+1}(C_t)$ の x-座標の値は 0 にかなり近い．すなわち，$W^s(Q_t)$ にかなり近い．

そうすると，f_t の作用で $f_t^{m+k}(C_t)$ は Q_t にかなり近づいて行く．そして，その後に γ に沿って P に向かっていく．

Γ の x-座標の値は $[0,3]$ で稠密になっているので，$3-t$ にいくらでも近い値が存在する．そうすると，Γ の点は γ にいくらでも近いものが存在することになる．すなわち，

$$\gamma \subset \overline{\Gamma}$$

が成り立つことになる．

f^{-1} を考えることにより，同様のことが $W^s(Q_t) \cap W^u(Q_t)$ についても成り立ち，

$$\overline{W^s(Q_t)} \supset W^s(P_t)$$

となる．

以上から，共に 1 次元の $W^u(P_t)$ と $W^s(Q_t)$ は γ の近くでそれぞれ稠密に存在していることになり，いくらでも小さな摂動によって，横断的ではない交わりが発生することになる．

さらにこれは，$t > 0$ がある程度小さければ常に成り立つことであり **robust** な性質ということになる．

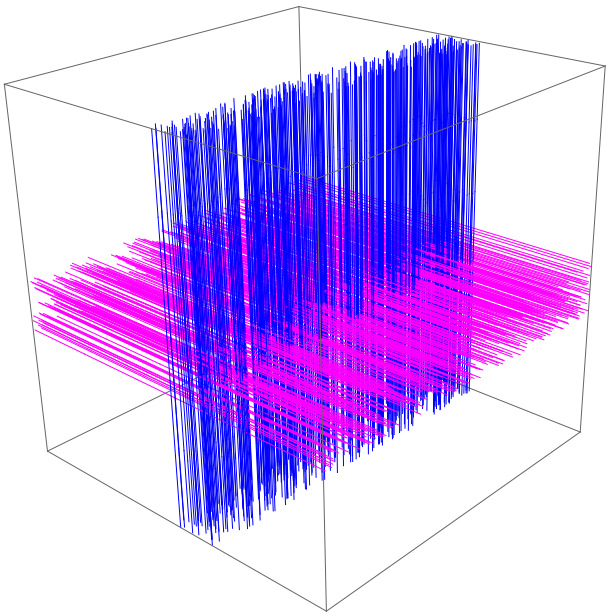


図 50: γ の近くの $W^u(P_t)$ と $W^s(Q_t)$ のイメージ図

17　Palis 予想

Peixoto と Smale，そして Peixoto の学生であった Kupka, Sotomayor たちが上げた成果によって，1960 年代から IMPA (Institute de Mathemática Pura e Aplicada) は力学系の分野では注目されてはいたが，その後さらに 1970 年以降，現在へと至る力学系理論の発展において，世界の重要な拠点としての存在感をますます高めていくことになる．その IMPA の力学系グループを作り上げたのは，1968 年に UC Berkeley からブラジルに戻った Jacob Palis だった．

彼自身と彼が育てた多くの研究者たちは数々の重要な成果を上げ，力学系理論の発展に大きく貢献して行ったが，同時にそれは **IMPA** という研究所自体の発展にもつながることになった．

図 51: 左から Peixoto, Smale, Palis

図 52: 現在の IMPA (1980 年に建設された)

構造安定性やより弱い安定性である Ω-安定性も，力学系全体の中で稠密にはならなかった．

「**Find an open and dense subset of dynamically stable systems.**」

という，**Peixoto** 以来の力学系の **"lost dream"** を **Jacob Palis** は失っておらず，数多くの結果が出揃って力学系定性理論の全体像が見えてきた **2000** 年〜**2008** 年頃にかけて,「力学系の稠密性」についてのいくつかの予想を提出した [**Pal4**], [**Pal5**], [**Pal6**]．それらを総称して **Palis 予想** という．

図 53: Jacob Palis

17.1 力学系の幾何学的構造に関する Palis 予想

予想 4 (予想 1). **Any dynamical system can be C^r approximated by a hyperbolic one with the no-cycle property or by one exhibiting homoclinic tangencies or heterodimensional cycles.**

予想 **1** に関しては，次の結果がある．

(1) **Pujals-Sambarino [PujSam] (2000)** は，コンパクト 2-次元多様体上で C^1 に関しては成り立つことを証明した．2-次元多様体上では **heterodimensional cycle** は無いので，任意の微分同相写像は，**Axiom A** を満たすかホモクリニック接触を持つもので C^1-近似される．

(2) 一般次元の C^1 に関しては，**Crovisier [Cro] (2011)** が次のことを示した．

「コンパクト多様体上の任意の微分同相写像は，ホモクリニック接触を持つもの，**heterodimensional cycle** を持つもの，あるいは鎖回帰集合が **center** 次元が 2 以下の **partially hyperbolic** なピースに分解するもの，のどれかで C^1-近似される.」

17.2 エルゴード論的観点からの Palis 予想

1970 年代あたりから，微分可能力学系の研究においてエルゴード理論が重要な役割を果たすようになってきた．**Palis** もそれを認識しており，そのような観点からの予想も提出している．

予想 5 (予想2). **There is a dense set D of dynamics such that:**

- **Any element of D has finitely many attractors whose union of basins of attraction has total probability.**
- **The attractors of the elements in D support a physical (SRB) measure.**
- **Stochastic stability of attractors: The attractors of elements in D are stochastically stable in their basins of attraction.**

注意 38. Newhouse 現象があるので，generic な D ということにはならない．

この予想については，辻井正人氏の重要な結果がある．

定理 37 (辻井 [T] (2005)). **Partially hyperbolic surface endomorphisms of class C^r with one-dimensional uniformly expanding subbundle and r large enough, say $r \geq 19$, generically (residually) carry finitely many ergodic SRB measures whose union of basins of attraction has total Lebesgue probability.**