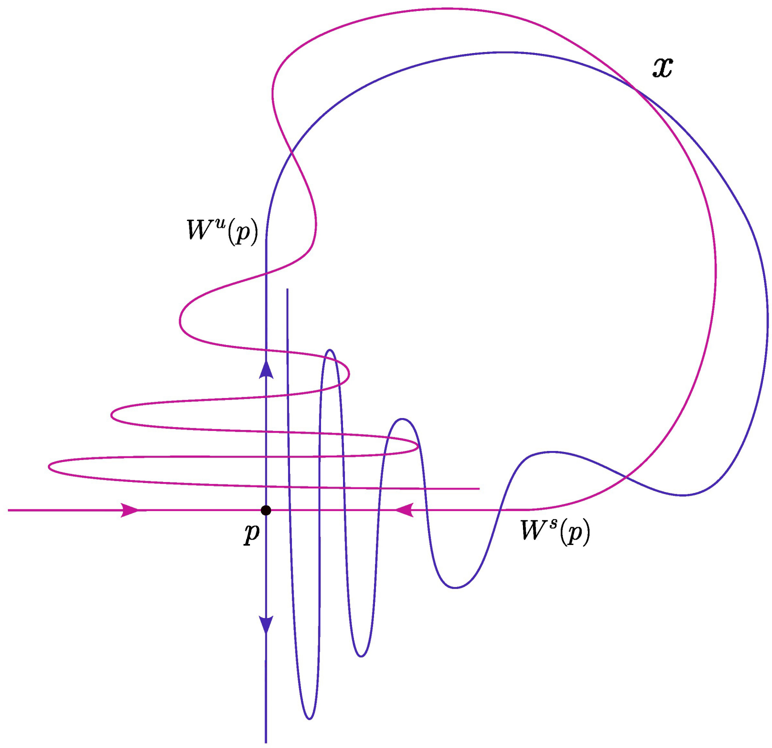
7　ホモクリニック点

定義 33. p を f の双曲型不動点とし，$T_pM = E^s \oplus E^u$ を対応する分解とする．$\dim E^s = s$, $\dim E^u = u$ とすると，定理 **9** より，**1** 対 **1** の C^r-はめ込み $\phi_s : \mathbf{R}^s \to M$, $\phi_u : \mathbf{R}^u \to M$ で $\phi_s(\mathbf{R}^s) = W^s(p)$, $\phi_u(\mathbf{R}^u) = W^u(p)$ となるものが存在する．
$W^s(p) \cap W^u(p)$ の点で p 以外のものを p の ホモクリニック点（ **homoclinic point** ） という．
特に $W^s(p)$ と $W^u(p)$ の 横断的なホモクリニック点（ **transverse homoclinic point** ） が重要になる．

ここで，可微分多様体 M の部分多様体 K, L が $p \in K \cap L$ で横断的に交わるとは，$T_pK + T_pL = T_pM$ となること．



定義 34. p が周期 m の双曲型周期点の場合には，f^m の双曲型不動点になるので，そのホモクリニック点を p のホモクリニック点という．

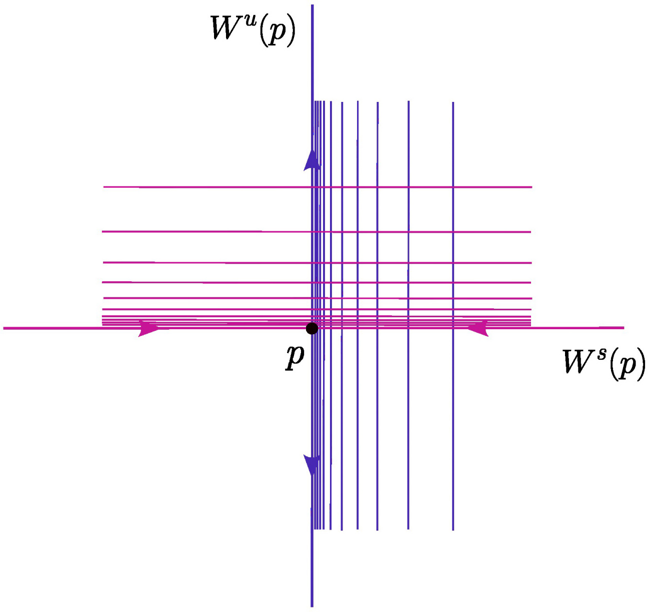
x が不動点 p のホモクリニック点ならば，$W^s(p)$, $W^u(p)$ は f, f^{-1} で不変なので，$\{f^n(x)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ は全てホモクリニック点となる．
すなわち，ホモクリニック点は **1** 点あれば無限にある．

さらに，

$$f^n(x) \to p \quad (n \to \infty), \qquad f^{-n}(x) \to p \quad (n \to \infty)$$

なので，ホモクリニック点の列が $W^s(p)$ 上と $W^u(p)$ 上で p に収束している．

特に，p が横断的ホモクリニック点ならば，p に収束する $W^s(p)$ と $W^u(p)$ 上のホモクリニック点も横断的ホモクリニック点なので，下図のような状況になる．



これによって，

> $W^s(p)$ （ $W^u(p)$ ）上の任意の点には $W^s(p)$ （ $W^u(p)$ ）が収束している．

という極めて複雑な状況となっており，最初の横断的ホモクリニック点 x の近くでも，$W^s(p)$，$W^u(p)$ が収束しているので，それらが無数のホモクリニック点を作り出している．

Smale は，ホモクリニック点があれば，**horseshoe map** と同型な不変集合が存在することを証明した．

> **定理 10** (Smale [Sm3] (1965))**.** p を f の双曲型周期点，x を p の横断的ホモクリニック点とする．このときある $m \in \mathbf{N}$ と f^m-不変なコンパクト集合 Λ で，$x \in \Lambda$ であり $f^m|\Lambda$ が $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ と位相共役になるものが存在する．

注意 16. **(1)** この定理は，横断的ホモクリニック点の近くには，**horseshoe map** と同型な不変集合が存在することを言っている．

(2) この定理から，横断的ホモクリニック点には f の周期点が収束していることが分かる．**Birkhoff** は 2 次元の場合に，このことを証明している [**Bir3**]（**1927** 年）．この論文の中には **“homoclinic motion”** という用語がすでに出てきている．

(3) **Birkhoff** はさらに，この定理に近いことをすでに予想していたと言われている（ **Smale** によると ）．
Nitecki は [**Nit**] において，この定理を **Theorem(Smale-Birkhoff)** と書いている．

(4) ほとんど同じ証明で，任意の n に対してある m があって，$f^m|\Lambda$ が $\sigma : \Sigma_n \to \Sigma_n$ と位相共役になるような不変集合 $x \in \Lambda$ が存在することを示すこともできる．
ここで $\Sigma_n = \{1, 2, \cdots, n\}^{\mathbf{Z}}$ であり σ はシフト写像．すなわち，n-**symbols full shift**．

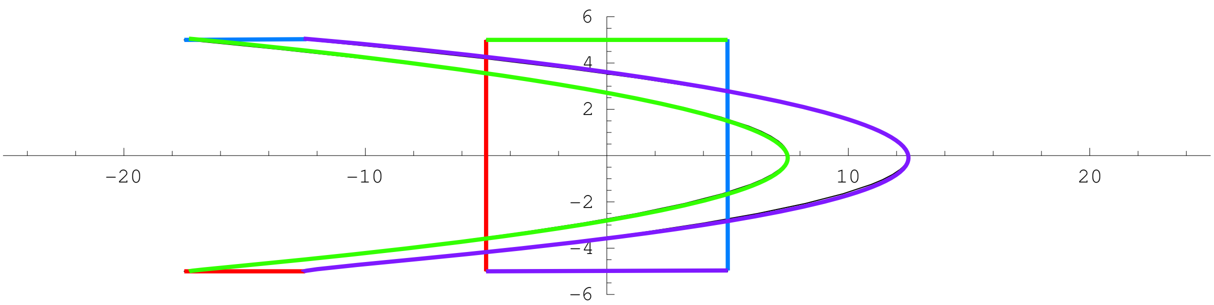
非線形系であれば，多くの場合横断的なホモクリニック点を持っていることが普通だと思われるので，この **Smale-Birkhoff** の定理から，あらゆるところに **horseshoe map** と共役な部分系を含んでいる，という極めて複雑な構造を持っていることが明らかになった．

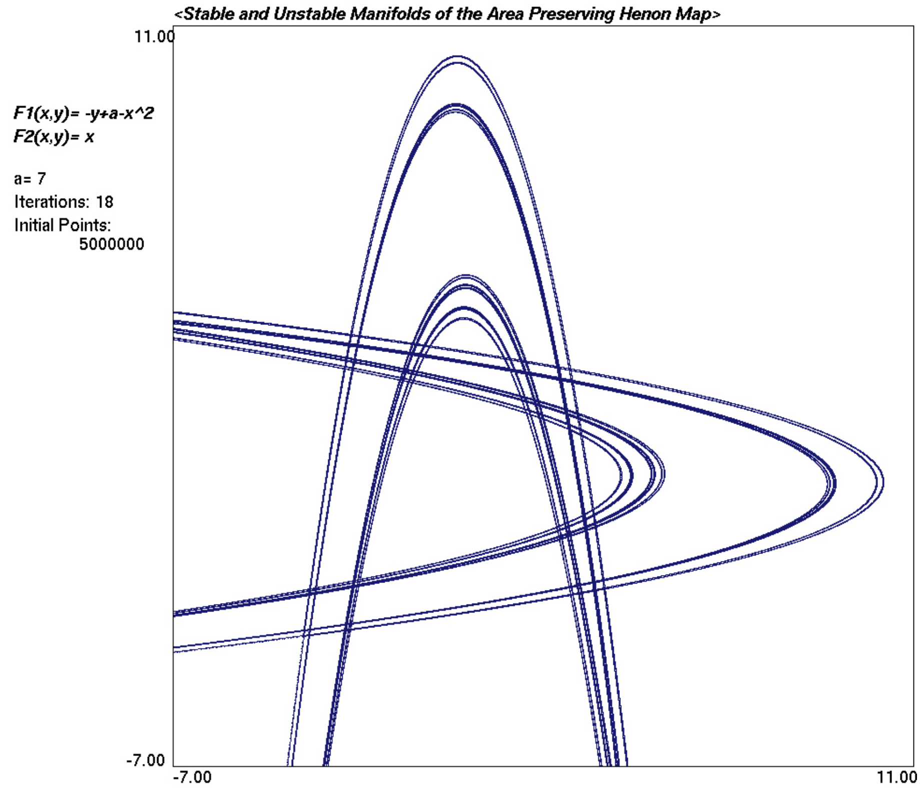
系のわずかな変化で横断的なホモクリニック点が横断的でなくなる（接触が起きる），という状況も起きるので，その場合には極めて複雑な力学系としての構造の分岐が発生することが予想される（小さな **horseshoe** が消えて無くなるという分岐）．

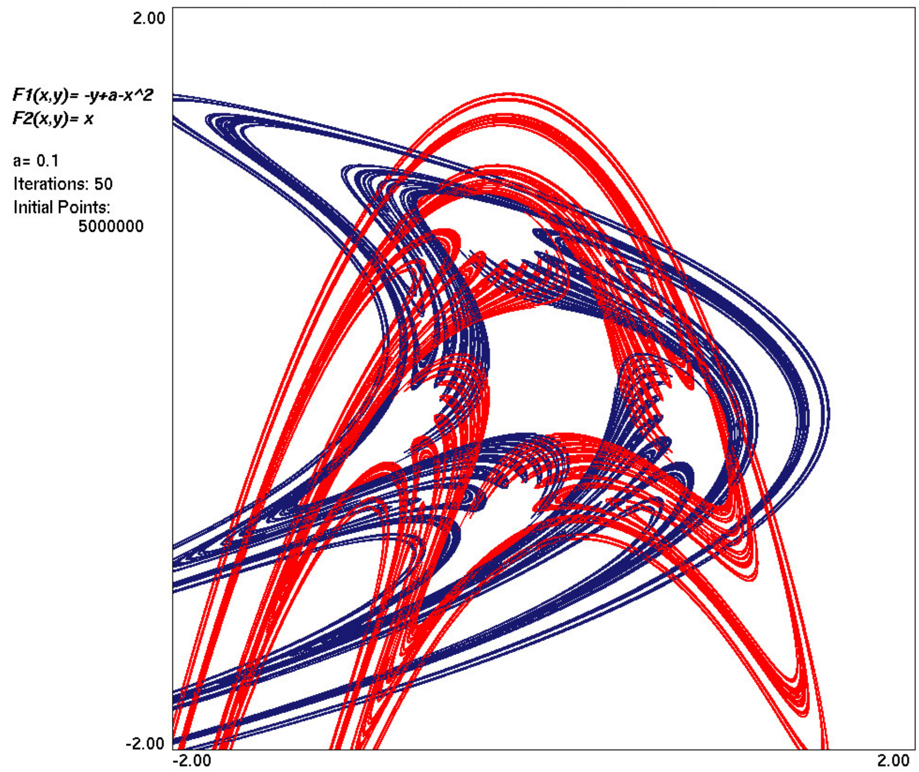
この本質的な部分をモデル化すると，**horseshoe map**（$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$）の生成消滅ということになるが，それを持つ最も単純な写像が エノン写像（ **Hénon map** ）である．

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -by + a - x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -by + a - x^2 \\ x \end{pmatrix}$$




<Stable and Unstable Manifolds of the Area Preserving Henon Map>
F1(x,y)= -y+a-x^2
F2(x,y)= x
a= 7
Iterations: 18
Initial Points:
5000000
11.00
-7.00
-7.00
11.00


F1(x,y)= -y+a-x^2
F2(x,y)= x
a= 0.1
Iterations: 50
Initial Points:
5000000
2.00
-2.00
-2.00
2.00

8　双曲力学系の他の例

8.1　Geodesic flow

最初に，流れの場合の双曲型集合を定義する．

定義 35. M を C^∞-リーマン多様体，$\{\phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ を M 上の C^r-流れ（$r \geq 1$），$\Lambda \subset M$ をコンパクト $\{\phi_t\}$-不変集合とする（ 任意の $t \in \mathbf{R}$ で $\phi_t(\Lambda) = \Lambda$ ）.
Λ が $\{\phi_t\}$ の 双曲型集合（**hyperbolic set**）であるとは，連続な分解 $TM|_\Lambda = E^c \oplus E^s \oplus E^u$ と $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ が存在して次が成り立つこと．

(1) $\dim E^c = 1$ であり，任意の $x \in \Lambda$ において

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t(x) \in E^c - \{0\}$$

(2) $D\phi_t(E^s) = E^s$，$D\phi_t(E^u) = E^u$

(3) $||D\phi_t|E^s|| \leq C\lambda^t$，$||D\phi_{-t}|E^u|| \leq C\lambda^t$

定義 36. M, $\{\phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ は上と同様とする．
$\{\phi_t\}$ が アノソフ流（ **Anosov flow** ） であるとは，M 自身が $\{\phi_t\}$ の双曲型集合となること．

M を C^∞-リーマン多様体とする．$SM \subset TM$ を

$$SM = \{\ v \in TM \mid |v| = 1\ \}$$

と決める．すなわち，SM は M の長さ 1 の接ベクトル全体の集合で，単位接束（**unit tangent bundle**）と呼ばれる．

$\dim M = n$ ならば SM は $2n - 1$-次元可微分多様体となる．

$p \in M$ に対して $S_pM = SM \cap T_pM$ とする．すなわち

$$S_pM = \{\ v \in T_pM \mid |v| = 1\ \}$$

SM 上の流れ $\{\phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ を次のように決める．

$v \in S_pM$ とすると $\gamma(0) = p$，$\gamma'(0) = v$ となる各点での速度が 1 の測地線 $\gamma(t)$ が一意的に決まる．

$$\phi_t(v) = \gamma'(t)$$

と決めると，これは SM 上の C^∞-流れになることが分かる．
これを SM 上の 測地流（ **geodesic flow** ） という．

定理 11. 負曲率多様体上の測地流はアノソフ流である．

注意 17. **(1)** 2-次元で負の定曲率曲面については **Hadamard [Had]** が証明した（**1898**）.

(2) 一般次元の負曲率多様体については **Anosov [Ano]** が証明した（**1967**）.

定理 12 (Hopf (1939))**.** コンパクトで負の定曲率多様体上の測地流は **Liouville** 測度に関してエルゴード的である.

（測地流を拡張した **frame flow** というものもある.）

8.2 Hyperbolic toral automorphism

$L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を成分が全て整数の行列で $\det L = 1$ となるものとすると，L^{-1} も成分が全て整数となり，L，L^{-1} は $\mathbf{Z}^n$ を保つので，L は微分同相写像 $f : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ を定める（ $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ ）.

$$\begin{CD} \mathbf{R}^n @>L>> \mathbf{R}^n \\ @V{\pi}VV @VV{\pi}V \\ \mathbf{T}^n @>>f> \mathbf{T}^n \end{CD}$$

ここで $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{T}^n$ は自然な射影.

特に L が双曲型の場合，それで定まる $f : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ を **hyperbolic toral automorphism** という.

L が双曲型ならば，その双曲性に対応する分解を持つ.

$$\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$$

L は線型写像なので，各点 $x \in \mathbf{R}^n$ において E^s，E^u 方向で同じ作用を持つ.

従って $f : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ に関して，Tf-不変な分解

$$T\mathbf{T}^n = E^s \oplus E^u$$

と $C > 0$，$0 < \lambda < 1$ が存在して，任意の $n \geq 0$ について

$$|Tf^n(v)| \leq C\lambda^n |v| \quad (\forall v \in E^s), \qquad |Tf^{-n}(v)| \leq C\lambda^n |v| \quad (\forall v \in E^u)$$

が成り立つ.

これは次のことを示している.

$\mathbf{T}^n$ 全体が $f : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ の双曲型集合である.

$\mathbf{T}^n \supset \pi(\mathbf{Q}^n)$ の点は $f : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ の周期点となることが分かる．これらは $\mathbf{T}^n$ において稠密なので，周期点全体の集合は稠密になる．

Smale の **horseshoe** についての話（無限個の周期点を持ち，さらに構造安定になる）を聞いた時に，**R.Thom** が **hyperbolic toral automorphism** も同じ性質を持つのではないかと指摘した，と **Smale** は書いている．

9 Generic Properties

Morse-Smale 系が力学系全体の中で稠密ではないことが分かったが，1960 年代初頭の段階では，構造安定性が稠密である可能性はまだ残されていた．それを調べるためにも,「稠密な性質」を見つけるということが重要な問題になっていた．

また構造安定性に限らず，どのような性質を持つものが力学系全体の中で稠密か？ という問題は非常に重要である．

ただ「稠密な性質」というものについて言えば，全てのものがその性質を持つもので近似される，という意味では非常に有用だが，2 つの稠密な性質を同時に持つものが存在するとは限らないという問題がある．

9.1 Baire 集合

定義 37. E を位相空間とする．E の部分集合 A は，E の可算個の稠密な開集合の共通部分となるとき residual set（残留集合） であるという．E の residual set が全て稠密であるとき，E を Baire 空間 という．

定理 13.

(1) 局所コンパクト Hausdorff 空間は Baire 空間である．

(2) 完備距離空間は Baire 空間である．

定理 14. M, N をコンパクト C^∞-多様体とする．$0 \leq r \leq \infty$ とし，$\mathcal{C}^r(M,N)$ を M から N への C^r-写像全体の集合に C^r-位相を入れたもの，$\mathbf{Diff}^r(M,N)$ を M から N への C^r-微分同相写像全体の集合に C^r-位相を入れたもの，$\mathbf{Diff}^r(M) = \mathbf{Diff}^r(M,M)$ とすると，$\mathcal{C}^r(M,N)$, $\mathbf{Diff}^r(M,N)$, $\mathbf{Diff}^r(M)$ は Baire 空間である．

定義 38. E を Baire 空間とする．E の元に関するある性質 $\mathcal{P}$ を満たすもの全体の集合が residual set となるとき，その性質 $\mathcal{P}$ は generic であるという（$\mathcal{P}$ を満たすもの全体が稠密になる）．

注意 18. 2 つ以上（可算個も含む）の generic な性質を同時に満たすもの全体の集合も residual set となるので，それもまた generic になる．その意味で generic な性質はなるべく沢山見つけた方が良い．

9.2 Kupka-Smale の定理

1963 年に，Kupka [Kup]（flow の場合）と Smale [Sm2]（flow と微分同相写像の両方の場合）は独立に次の定理を証明した．これは，力学系のある性質が generic となることを示した，非常に基本的で重要な結果である．

なお Ivan Kupka は当時 IMPA の博士課程の大学院生であり，1964 年にこの論文で Ph.D を得たが，彼は IMPA で最初に Ph.D を得た３人の院生の一人である（他の２人は Aristides Barreto と Jorge Sotomayor で，指導教官は全て Peixoto ）.

定理 15 (Kupka-Smale の定理). M をコンパクト C^∞-多様体，$\mathcal{KS}$ を次の (1), (2) を満たす M 上の C^r-微分同相写像全体の集合（$1 \le r \le \infty$）とすると，$\mathcal{KS}$ は $\mathrm{Diff}^r(M)$ の residual set である（従って特に $\mathrm{Diff}^r(M)$ の中で dense である）.

(1) 周期点は全て双曲型.

(2) $\forall p, \forall q \in \mathrm{Per}(f)$ に対し $W^s(p) \pitchfork W^u(q)$.

ここで，可微分多様体 M の部分多様体 N, L について，$\forall x \in N \cap L$ において $T_xN + T_xL = T_xM$ となるとき，すなわち $\forall x \in N \cap L$ で N と L が横断的に交わるとき $N \pitchfork L$ と書く．

証明のために，いくつかの準備が必要となる．

定義 39. $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ の不動点 p は，D_pf が固有値 1 を持たないとき transversal であるという（ simple という場合もある）.

$\mathrm{Graph}(f) = \{\ (x, f(x)) \in M \times M \mid x \in M\ \} \subset M \times M$ を f のグラフ，$\Delta(M) = \{\ (x,x) \mid x \in M\ \}$ を $M \times M$ の対角線集合とする．このとき，$\mathrm{Graph}(f) \cap \Delta(M)$ の点 (p,p) は f の不動点 p に対応する．次が成り立つ．

補題 1. (p,p) において $\mathrm{Graph}(f)$ と $\Delta(M)$ が横断的に交わっている $\Longleftrightarrow$ p は transversal.

Transversalily Theorem から次のことが言える.（しかし簡単には適用できない．Robinson の本の証明が正確.）

命題 11.
$$\widetilde{\mathcal{H}}_n = \{\ f \in \mathrm{Diff}^r(M) \mid f^n \text{ の不動点は全て transversal }\}$$
は $\mathrm{Diff}^r(M)$ で open かつ dense である．

定理 15 の証明:

$$\mathcal{H}_n = \{\ f \in \mathbf{Diff}^r(M) \mid f^n \text{ の不動点は全て双曲型 } \}$$

とする．

Step 1: $\mathcal{H}_n$ は開集合であることを示す．

$\forall f \in \mathcal{H}_n$ に対して f のある近傍 $\mathcal{U} \subset \mathbf{Diff}^r(M)$ があって $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}_n$ を示せば良いが，$n = 1$ の時に示せば十分である．なぜなら，$f \in \mathcal{H}_n$ なら $f^n \in \mathcal{H}_1$ だが，f^n のある近傍 $\mathcal{V}$ があって $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}_1$ ならば，f のある近傍 $\mathcal{U}$ があって $\mathcal{U}^n = \{\ g^n \mid g \in \mathcal{U}\ \} \subset \mathcal{V}$ となるので $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}_n$ となるからである．

$f \in \mathcal{H}_1$ とする．双曲型不動点は孤立しているので，f の不動点の個数は有限個である．

$\mathbf{Fix}(f) = \{x_1, \cdots, x_k\}$ とする．

各 x_i に対して，x_i を含む開集合 V_i と f の $\mathbf{Diff}^1(M)$ におけるある近傍 $\mathcal{U}_i$ があって，$g \in \mathcal{U}_i$ ならば g は V_i の中にただ一つの不動点を持ち，それは双曲型である．

なぜなら，双曲型不動点は **transversal** なので，そこで $\mathbf{Graph}(f)$ と $\Delta(M)$ は横断的に交わっている．従って f に C^1 で近い g についても，x_i に近い不動点を持ち，それは双曲型になり，さらに g はその近くではそれ以外に新たな不動点は持たない．

$M' = M - (V_1 \cup \cdots \cup V_k)$ とすると M' はコンパクトであり，f はここで不動点を持たない．

$$\delta = \min\{\ d(f(x), x) \mid x \in M'\ \}$$

とすると，f との C^0-距離が $\delta/2$ 以下の g は M' で不動点を持たない．従って，$\mathcal{B}_{\delta/2}(f)$ を f との C^0-距離が $\delta/2$ 以下の C^1-微分同相写像全体の集合とすると，

$$\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i \right) \cap \mathcal{B}_{\delta/2}(f)$$

は求める性質を満たす．■

注意 19. 実は $\mathcal{H}_n$ は C^1-位相で開集合である．

Step 2: $\mathcal{H}_n$ は $\mathbf{Diff}^r(M)$ で **dense** であることを示す．

$\forall f \in \mathbf{Diff}^r(M)$ に対して，f に十分近い $g \in \mathcal{H}_n$ があることを言えば良いが，命題 **11** より，

$$\widetilde{\mathcal{H}_n} = \{\ f \in \mathbf{Diff}^r(M) \mid f^n \text{ の不動点は全て transversal } \}$$

が $\mathbf{Diff}^r(M)$ で **dense** であることが分かっているので，$f \in \widetilde{\mathcal{H}_n}$ に十分近い $g \in \mathcal{H}_n$ があることを言えば良い．

f^n の不動点は全て **transversal** なので，全て孤立点である．M はコンパクトなので，f^n の不動点は有限個しかない．

$\{x_1, \cdots, x_n\}$ をひとつの周期軌道とする（周期が n の約数となることがあるが，扱いは基本的に同じ）．この軌道のごく近くだけで f をわずかに動かして，この周期軌道 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ が双曲型になるようにする．各軌道のまわりで，十分に小さな摂動で双曲型にできれば（そして，元の f^n の不動点以外には新しい不動点ができないようにすれば），f に十分近い $g \in \mathcal{H}_n$ の存在が言えたことになる．

一般に線型写像 $L:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ について，その固有値が $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ ならば，$L+\mu I$（$\mu\in\mathbf{R}$）の固有値は $\lambda_1+\mu,\cdots,\lambda_k+\mu$ であり，固有ベクトルは L のものと同じである．

$D_{x_1}f^n$ が双曲型になるように，f をわずかに摂動したい．

$$D_{x_1}f^n = D_{x_n}f\circ D_{x_{n-1}}f\circ\cdots\circ D_{x_1}f$$

となるが，局所座標で表すことにより，$D_{x_i}f$ を $m\times m$-行列 L_i とし $D_{x_1}f^n$ が L になったとすると（ここでは $\dim M = m$ とする），

$$L = L_nL_{n-1}\cdots L_1$$

となる．

$$\widetilde{L}_n = L_n + \epsilon\,(L_{n-1}\cdots L_1)^{-1}$$

として，最後の L_n だけをわずかに変化させると，

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_nL_{n-1}\cdots L_1 &= L_nL_{n-1}\cdots L_1 + \epsilon\,(L_{n-1}\cdots L_1)^{-1}(L_{n-1}\cdots L_1)\\ &= L_nL_{n-1}\cdots L_1 + \epsilon\, I = L+\epsilon\, I\end{aligned}$$

となって，L の固有値を ϵ だけずらすことができる．

ここで n は固定されており，また M はコンパクトなので各 L_i のサイズも上限があり，$(L_{n-1}\cdots L_1)^{-1}$ としてはある決まったサイズ以下の行列しか出てこない．また，周期 n の周期軌道の個数も有限個なので，各軌道上のある 1 点のまわりだけでわずかに f を動かすだけで固有値をずらすことができ，双曲型にできる．

具体的には，局所座標で $x_n = 0$, $f(0) = 0$ となったとして，$(L_{n-1}\cdots L_1)^{-1} = A$ とし，$\phi(x)$ を 0 のまわりの **bump function** （0 の近くでは恒等的に 1）として，

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + \epsilon\,\phi(x)Ax$$

とすると，$D_0\widetilde{f} = D_0f + \epsilon\, A$ となって，求める形になる．また，ϵ を小さくすることによって C^r での摂動距離をいくらでも小さくすることができる．

この操作では $\widetilde{f}^n$ のグラフの変化をいくらでも小さくできるので，x_n の近くに新たな $\widetilde{f}^n$ の不動点は発生しない（さらに周期軌道自体は変わっていない）．

これを全ての周期軌道で独立に行って得られる微分同相写像を g とすると $g\in\mathcal{H}_n$ となる．

以上の **Step 1, Step 2** で，任意の n について $\mathcal{H}_n$ は $\mathbf{Diff}^r(M)$ で **open** かつ **dense** であることが分かった．従って

$$\mathcal{H} = \bigcap_{n\geq 1}\mathcal{H}_n = \{\ f\in\mathbf{Diff}^r(M)\ |\ f \text{ の周期点は全て双曲型 }\}$$

は **residual set** である．このことから特に $\mathcal{H}$ は $\mathbf{Diff}^r(M)$ で **dense** である．

Step 3: 周期点は全て双曲型であって $\forall p,\forall q\in\mathbf{Per}(f)$ に対し $W^s(p)\pitchfork W^u(q)$ となる性質が **generic** であることについて．

$$\mathbf{Per}_n(f) = \{\ p\in M\ |\ f^n(p) = p\ \},\qquad \mathbf{P}_n(f) = \bigcup_{k\leq n}\mathbf{Per}_k(f)$$

とし，

$$\widetilde{\mathcal{D}}_n = \{\ f \in \mathbf{Diff}^r(M) \mid f \in \bigcap_{k \le n} \mathcal{H}_k \text{ であり } \forall p, \forall q \in \mathbf{P}_n(f) \text{ に対し } W^s(p) \pitchfork W^u(q)\ \}$$

とする．任意の n について $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ が **open** かつ **dense** であることが言えれば，

「周期点は全て双曲型であって $\forall p, \forall q \in \mathbf{Per}(f)$ に対し $W^s(p) \pitchfork W^u(q)$ 」

という性質が **generic** になることを証明したことになるが，$W^s(p)$, $W^u(q)$ は無限に折れ曲がったりしているので，その横断性を議論するのは難しい．

そこで，双曲型周期点 p と $\rho > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} W^s(\rho, p) = \{\ x \in W^s(p) \quad | \quad & W^s(p) \text{ 上の長さ } \rho \text{ 以下の可微分曲線} \\ & \gamma(t) \text{ で } \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = x \text{ となるものが存在する }\} \end{aligned}$$

と定義する（ $W^u(p)$ についても同様に $W^u(\rho, p)$ を定義する ）．

これを使って以下のように定義する．

$$\mathcal{D}_n(\rho) = \{\ f \in \mathbf{Diff}^r(M) \mid f \in \bigcap_{k \le n} \mathcal{H}_k \text{ であり } \forall p, \forall q \in \mathbf{P}_n(f) \text{ に対し } W^s(\rho, p) \pitchfork W^u(\rho, q)\ \}$$

この $\mathcal{D}_n(\rho)$ が **open** かつ **dense** であることが言えれば，定理の条件を満たす微分同相写像全体の集合は

$$\bigcap_{n \ge 1} \bigcap_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{D}_n(k)$$

となるので **residual** であることが言える．

注意 20. $W^s(\rho, p) \pitchfork W^u(\rho, q)$ について，これらがどちらかの境界上で交わっている場合には，その境界上となっている $W^s(\rho, p)$ か $W^u(\rho, q)$ のサイズをわずかに拡大した時に，その交わりが横断的かどうかで判断する．

Step 4: $\mathcal{D}_n(\rho)$ が $\mathbf{Diff}^r(M)$ で開集合であることについて．

任意の $f \in \mathcal{D}_n(\rho)$ をとる．$\bigcup_{k \le n} \mathcal{H}_k$ は開集合なので $\mathbf{Diff}^r(M)$ における f のある近傍 $\mathcal{U}$ があって $\mathcal{U} \subset \bigcup_{k \le n} \mathcal{H}_k$ となる．

さらに $\mathcal{H}_n$ が開集合であることを示したときの議論から，$\forall g \in \mathcal{U}$ については，$\mathbf{P}_n(g)$ の周期点は全て f のそれらの近くにあり，それ以外に $\mathbf{P}_n(g)$ の点は存在していないとしてよい．

また安定多様体定理から，$\mathbf{P}_n(g)$ の周期点の（不）安定多様体は，サイズを限定すれば，f のものと C^r-距離で近い．すなわち，ρ を固定すれば，$p \in \mathbf{P}_n(f)$ の近くにある $g \in \mathcal{U}$ の周期点を $p' \in \mathbf{P}_n(g)$ とすると，$W^s(\rho, p)$ と $W^s(\rho, p')$，$W^u(\rho, p)$ と $W^u(\rho, p')$ は C^r で近い．

このことから $p, q \in \mathbf{P}_n(f)$ の近くにある $g \in \mathcal{U}$ の周期点を $p', q' \in \mathbf{P}_n(g)$ とすると，$f \in \mathcal{D}_n(\rho)$ であり $W^s(\rho, p) \cap W^u(\rho, q)$ は横断的であって有限個しかないので，

$$W^s(\rho, p') \pitchfork W^u(\rho, q')$$

である（交わりが外れることはあり得る）．$\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_n(f)$ となるので $\mathcal{D}_n(f)$ は開集合である．

Step 5: $\mathcal{D}_n(\rho)$ が $\mathbf{Diff}^r(M)$ で dense であることについて．

$$\mathcal{H}_n = \{\ f \in \mathbf{Diff}^r(M) \mid f^n \text{ の不動点は全て双曲型 }\}$$

は open, dense だったので，$\bigcup_{k \leq n} \mathcal{H}_n$ も open, dense である．

このことから，任意の $f \in \bigcup_{k \leq n} \mathcal{H}_n$ に対して，その十分近くに $\mathcal{D}_n(\rho)$ の元があることを言えば良い．

すなわち $f \in \bigcup_{k \leq n} \mathcal{H}_n$ に対して，f をわずかに変えることによって，全ての $p, q \in \mathbf{P}_n(f)$ に対して $W^s(\rho, p)$ と $W^u(\rho, q)$ が横断的に交わるようにできれば良い．

$W^s(\rho, p)$ と $W^u(\rho, q)$ はサイズが決まっており，さらに（不）安定多様体は f の変化に対して C^r-位相で連続的に変化することが示されているので，横断的にすることは出来そうではあるが，厳密な証明はちょっと厄介なので省略．

■

この Kupka-Smale の定理から，構造安定であるための条件として，双曲性と安定多様体，不安定多様体の横断的な交わりが関わってくることが予想される．

9.3 Closing Lemma

1950 年代の終り頃，$\mathbf{D}^2$ 上のベクトル場に関する構造安定性定理を完成させた Peixoto は，それを一般の 2 次元多様体上に拡張しようとしていたが，そこで大きな壁にぶつかった．それが Closing Lemma という問題である．

Peixoto が考えていたのはベクトル場に関するものだが，以下では微分同相写像の場合について述べる．

次が C^r-Closing Lemma だが，これは証明されたものというわけではなくて，正確に言えば「C^r-Closing Conjecture」と書くべきもの．

[C^r-Closing Lemma]： M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（$1 \leq r \leq \infty$），$x \in \Omega(f)$ とする．
このとき，$\mathbf{Diff}^r(M)$ における f の任意の近傍 $\mathcal{U}$ と x の任意の近傍 U に対して，ある $g \in \mathcal{U}$ が存在して g は U 上に周期点を持つ．

これは，いくらでも近くに戻って来るような軌道があれば，f をわずかに変化させて周期点を作れる，ということを言っており，一見簡単に示せるように見えるが，実はかなりの難問であることがその後明らかになってくる（なお C^0-Closing Lemma は明らかに成り立つ）．

この問題は René Thom が提示したとも言われている．

Closing Lemma が初めて明確に述べられているのは，ベクトル場に関する構造安定性定理を一般の 2 次元多様体上で証明した Peixoto の 1962 年の論文だと思われる [Pei2]（Topology Vol.1）．そこでは，$\mathbf{T}^2$ 上の特異点を持たないベクトル場については，任意の $1 \leq r \leq \infty$ に対して C^r-Closing Lemma が成り立つことが証明されている．

C^1**-Closing Lemma** は **Charles Pugh [Pu1]** によって証明された．C^r（$r \geq 2$）については現在でも未解決．

定理 16 (C^1-Closing Lemma: C.Pugh (1967))**.**
C^1**-Closing Lemma** が成り立つ．

C^r**-Closing Lemma**（$r \geq 2$）については，**Pugh [Pu3], Gutierrez [Gu], Herman [Her1], [Her2]** たちによる，成り立たない可能性があることを示唆する結果がある．

ある場合には成り立つ，ということを示した結果がほとんど無い中で，浅岡-入江 **[AI] (2016)** は，閉曲面上の **Hamilton** 微分同相写像では C^∞**-Closing Lemma** が成り立つことを証明した．
その証明方法も C^1 の場合とは全く異なる．

9.4 General Density Theorem

Closing Lemma の話には **generic** な性質は出てこなかったが，実はある重要な **generic property** と関係している．それは **Gerenal Density Theorem** である（なおこれも完全には証明されていないので，予想と書くべきかもしれない）．

[C^r**-General Density Theorem**]：M をコンパクト C^∞**-**多様体とし $1 \leq r \leq \infty$ とする．このとき $\overline{\mathbf{Per}(f)} = \Omega(f)$ という性質は $\mathbf{Diff}^r(M)$ で **generic** である．

ここで $\mathbf{Per}(f)$ は $f \in \mathbf{Diff}^r(M)$ の周期点全体の集合，$\Omega(f)$ は f の非遊走集合．

Pugh は，自らが証明した C^1**-Closing Lemma** を使うことにより，C^1**-Genaral Density Theorem** が成り立つことを証明した **[Pu2]**.

定理 17 (C^1-General Density Theorem: C.Pugh (1967))**.**
$\overline{\mathbf{Per}(f)} = \Omega(f)$ という性質は $\mathbf{Diff}^1(M)$ で **generic** である．

注意 21. $r \geq 2$ では，C^r**-Closing Lemma** が未解決なので，C^r**-General Density Theorem** も未解決．

[定理 17 の証明：] **Pugh** は **[Pu2]** において C^1**-Closing Lemma** を使って C^1**-Genaral Density Theorem** を示しているが，その証明には **general topology** の結果が使われていて，ちょっと分かりにくい．

Lan Wen は **[Wen]** において同相写像とは限らない微分可能写像についても C^1**-Closing Lemma** が成り立つことを，それまでよりも簡単な証明で示したが，その中で **General Density Theorem** について

も分かりやすく証明しているので，ここではそれを紹介する．なお **Wen** は，この証明は元々は **S.T.Liao** によるものであると書いている．守安 [**Mor2**] にこの論文についての解説がある．

$\{W_k\}$ を M の可算基とする．$\mathbf{Diff}^1(M)$ の部分集合 F_k と H_k を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F_k &= \{\ f \in \mathbf{Diff}^1(M) \mid \mathbf{Per}(f) \cap W_k = \emptyset\ \} \\ H_k &= \{\ f \in \mathbf{Diff}^1(M) \mid \mathbf{HPer}(f) \cap W_k \neq \emptyset\ \} \end{aligned}$$

ここで，$\mathbf{Per}(f)$ は f の周期点全体の集合，$\mathbf{HPer}(f)$ は f の双曲型周期点全体の集合を表す．

H_k は $\mathbf{Diff}^1(M)$ の開集合である．なぜなら，$f \in H_k$ なら f は W_k の中に双曲型周期点を持つが，f を C^1 でわずかに動かして g になったとしても，双曲型周期点はその近くに双曲型周期点のまま存在し続けるので，g もまた W_k に双曲型周期点を持つことになり $g \in H_k$ となるからである．

$\mathcal{B}_k = H_k \cup \mathrm{int}F_k$ とすると，H_k と $\mathrm{int}F_k$ は $\mathbf{Diff}^1(M)$ の開集合なので $\mathcal{B}_k$ も開集合だが，さらに $\mathcal{B}_k$ は $\mathbf{Diff}^1(M)$ で稠密である．

なぜなら，任意の $f \in \mathbf{Diff}^1(M)$ を考える．もし $f \notin \mathrm{int}F_k$ なら，f に C^1 でいくらでも近い $g \in \mathbf{Diff}^1(M)$ で $g \notin F_k$ となるものがある．すなわち g は W_k にある周期点 p を持つ．この場合，さらに g に C^1 でいくらでも小さな変更を加えることによって，p 自体を双曲型にできることが分かる．すなわち，f に C^1 でいくらでも近い H_k の元が存在する．以上から，任意の $f \in \mathbf{Diff}^1(M)$ に対して，そのいくらでも近くに $\mathcal{B}_k$ の元が存在するので $\mathcal{B}_k$ は稠密である．

$\mathcal{B}_k$ が開かつ稠密なので，$\mathcal{B} = \bigcap_k \mathcal{B}_k$ は **residual set** である．

$\forall f \in \mathcal{B}$ に対して $\overline{\mathbf{Per}(f)} = \Omega(f)$ が成り立つ．

これを示すには，任意の $x \in \Omega(f)$ とその任意の開近傍 U について $\mathbf{Per}(f) \cap U \neq \emptyset$ となることを言えば良い．

$x \in W_k \subset U$ となる W_k が存在する．$f \in \mathcal{B}_k = H_k \cup \mathrm{int}F_k$ だが，$f \in \mathrm{int}F_k$ ではない．なぜなら，もし $f \in \mathrm{int}F_k$ なら，f のある近傍 $\mathcal{U}$ で $\mathcal{U} \subset F_k$ となるものがある．x の近傍 W_k と $\mathcal{U}$ に **Closing Lemma** を適用すると，ある $g \in \mathcal{U}$ で $\mathbf{Per}(g) \cap W_k \neq \emptyset$ となるものが存在することになるが，これは $\mathcal{U} \subset F_k$ に矛盾する．

$f \in H_k$ となるが，これは $\mathbf{Per}(f) \cap U \neq \emptyset$ を意味する．■

9.5 C^1-Connecting Lemma

林 [**Hay2**] は以下の C^1-**Connecting Lemma** を証明することによって，流れの場合の C^1-構造安定性定理と Ω-安定性定理を証明した．

定理 18 (C^1-Connecting Lemma: 林修平 (1997)).
(微分同相写像版)
M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^1-微分同相写像で，ある $x, y \in M$ があって $\omega(x) \cap \alpha(y) \neq \emptyset$ となっているとする．
このとき $\mathbf{Diff}^1(M)$ における f の任意の近傍 $\mathcal{U}$ に対して，ある $g \in \mathcal{U}$ とある $n > 0$ で $g^n(x) = y$ となるものが存在する．

Bonatti-Crovisier [BC] は C^1**-Connecting Lemma** を使って，C^1**-General Density Theorem** よりもさらに強い **generic property** を証明した．

定理 19 (Bonatti-Crovisier (2004)). 次の性質は C^1**-generic** である．

$$\overline{\mathbf{HPer}(f)} = \Omega(f) = \mathcal{R}(f)$$

ここで $\mathbf{HPer}(f)$ は f の双曲型周期点全体の集合，$\mathcal{R}(f)$ は f の鎖回帰集合（**chain recurrent set**）．

この定理から，$\overline{\mathbf{HPer}(f)} = \overline{\mathbf{Per}(f)} = L(f) = \Omega(f) = \mathcal{R}(f)$ という性質が C^1**-generic** であることが分かる．

10　双曲型集合に対する安定多様体定理

1960 年代前半では，**horseshoe map** や **hyperbolic toral automorphism** などの例から，構造安定性と非遊走集合 $\Omega(f)$ の双曲性が密接に関係していることが明らかとなってきていた．

また，C^1-**Closing Lemma** が証明されつつあったということから，C^1-**General Density Theorem** が成り立つことが予想され，そうであれば構造安定ならば $\overline{\mathbf{Per}(f)} = \Omega(f)$ でなければならないことになる．

Smale は次の性質を定義した．

定義 40. M を C^∞-多様体とする．$f \in \mathbf{Diff}^r(M)$（$r \geq 1$）が **Axiom A** を満たすとは，次の (a), (b) が成り立つこと．

(a) $\Omega(f)$ は双曲型集合．

(b) $\overline{\mathbf{Per}(f)} = \Omega(f)$

注意 22. **Axiom B** というものもあって，それは次のようなものだが，その後使われなくなり，**Axiom A** だけが残った．
「Ω_i, Ω_j が異なる **basic set** であって $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_j) \neq \emptyset$ ならば，周期点 $p \in \Omega_i$, $q \in \Omega_j$ があって $W^s(p)$ と $W^u(q)$ はある点で横断的に交わる.」

この **Axiom A** を満たす力学系は非常に良い性質を持っており，その力学系的構造が記号力学系でほぼ完全に記述できるということも含めて，双曲力学系理論が 1960 年代後半に主にカルフォルニア大学バークレー校の **Smale** を中心としたグループによって急速に発展した．

Smale はプリンストン高等研究所の後，1960 年–1961 年にカリフォルニア大学バークレー校の助教授となっている．そして，1964 年に再びバークレーに赴任し，その後の 30 年間バークレーで活躍したが，特に最初の数年間で，その後の力学系理論の発展に中心的な役割を果たした研究者を育てた．例えば

Mike Shub (1967), **Jacob Palis (1968)**, **John Franks (1968)**, **Sheldon Newhouse (1969)**, **Zbigniew Nitecki (1969)**, **Rufus Bowen (1970)**, **John Guckenheimer (1970)**, **Cesar Camacho (1971)**, **Robert Devaney (1973)**, **David Fried (1976)**

などがいる（かっこ内の数字は **Ph.D** を取った年）．
さらに 60 年代後半 **Berkeley** には，**Morris Hirsch**, **Charles Pugh** などもいた．

以下では，双曲力学系理論の土台となる，双曲型集合の（不）安定多様体定理について述べる．

M を C^∞ リーマン多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像とする．

定義 41. $x \in M$ に対して次のように定義する．

$$\begin{aligned} W^s_\epsilon(x) &= \{ \ y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \ (n \to \infty), \ d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon \ (\forall n \geq 0) \ \} \\ W^s(x) &= \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} \left(W^s_\epsilon(f^n(x)) \right) \\ W^u_\epsilon(x) &= \{ \ y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0 \ (n \to \infty), \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \epsilon \ (\forall n \geq 0) \ \} \\ W^u(x) &= \bigcup_{n \geq 0} f^n \left(W^s_\epsilon(f^{-n}(x)) \right) \end{aligned}$$

これらを x の （不）安定集合 といういう．なお，考えている写像 f を明示するときは $W^s_\epsilon(x, f)$, $W^s(x, f)$, $W^u_\epsilon(x, f)$, $W^u(x, f)$ などと書くことがある．

注意 23. $W^s(x)$, $W^u(x)$ は $\epsilon > 0$ の取り方にはよらずに決まる．

問題 5.

(1) 次を示せ．

$$W^s(x) = \{ \ y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \ (n \to \infty) \ \}$$

$$W^u(x) = \{ \ y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0 \ (n \to \infty) \ \}$$

(2) 任意の $x, y \in M$ に対し，$W^s(x) = W^s(y)$ であるかまたは $W^s(x) \cap W^s(y) = \emptyset$ のどちらかであることを示せ.（同様に $W^u(x) = W^u(y)$ であるかまたは $W^u(x) \cap W^u(y) = \emptyset$ のどちらかが成り立つ.）

$\Lambda \subset M$ を f のコンパクト双曲型集合とし，それに対応する分解を $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ とする．

命題 12. 計量を取り直すことにより，ある $0 < \lambda < 1$ があって

$$||Df|E^s|| < \lambda, \qquad ||(Df|E^u)^{-1}|| < \lambda$$

とできる．

Proof: ある $C > 0$，$0 < \lambda < 1$ があって，任意の $n \geq 0$ に対して

$$|Df^n(v_s)| \leq C\lambda^n |v_s| \quad (\forall v_s \in E^s), \qquad |Df^{-n}(v_u)| \leq C\lambda^n |v_u| \quad (\forall v_u \in E^u)$$

となっている．$\lambda < \mu < 1$ となる μ をひとつとる．E^s 上の新しいノルムを次のように決める．

$$||v_s|| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} |Df^n(v_s)|$$

これは収束し，各 $x \in \Lambda$ に対して E^s_x 上のノルムを定義する．なぜなら

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} |Df^n(v_s)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} C\lambda^n |v_s| = C|v_s| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

となるからである．

$$\begin{aligned} ||Df(v_s)|| &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} \, |Df^n(Df(v_s))| = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} \, |Df^{n+1}(v_s)| \\ &= \mu \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{-n} \, |Df^n(v_s)| = \mu \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} \, |Df^n(v_s)| \; - \; |v_s| \right) \\ &= \mu \, (\, ||v_s|| \; - \; |v_s| \,) \leq \mu \, ||v_s|| \end{aligned}$$

となるので $\forall v_s \in E^s$ に対して $||Df(v_s)|| \leq \mu \, ||v_s||$ となり，$||Df|E^s|| \leq \mu$ である．
同様に $v_u \in E^u$ に対して

$$||v_u|| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} \, |Df^{-n}(v_u)|$$

と決めると $||(Df|E^u)^{-1}|| \leq \mu$ となる．
$v = v_s + v_u$ に対して $||v|| = \max\{ \, ||v_s||, \; ||v_u|| \, \}$ と決めることにより，$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ 上のノルムが定義される．■

定理 20 (双曲型集合に関する（不）安定多様体定理).

M, f, Λ は上のようなものとする．このとき ある $\epsilon > 0$ が存在して次を満たす．

(1)

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x,y), \;\; \forall y \in W^s_\epsilon(x), \;\; \forall n \geq 0$$
$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x,y), \;\; \forall y \in W^u_\epsilon(x), \;\; \forall n \geq 0$$

(2) $s = \dim E^s$, $u = \dim E^u$ のとき，各点 $x \in \Lambda$ に対して，x の Λ におけるある近傍 U と連続写像

$$\Theta_s : U \to Emb^r(D^s, M), \quad \Theta_u : U \to Emb^r(D^u, M)$$

で，任意の $y \in U$ に対して

$$\Theta_s(y)(0) = y, \quad \Theta_u(y)(0) = y$$

$$\Theta_s(y)(D^s) = W^s_\epsilon(y), \quad \Theta_u(y)(D^u) = W^u_\epsilon(y)$$

となるものが存在する．ここで，D^n は n 次元単位開円盤，$Emb^r(N, M)$ は可微分多様体 N から M への C^r-級埋め込み全体の集合に C^r-位相を入れたもの．

(3)

$$T_x W^s_\epsilon(x) = E^s_x, \qquad T_x W^u_\epsilon(x) = E^u_x$$

(4) $0 < \forall \eta \leq \epsilon$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$x, y \in \Lambda$ が $d(x,y) < \delta$ を満たすなら，$W^s_\eta(x) \cap W^u_\eta(y)$ は 1 点 であり，そこで横断的に交わる．

(5) $x \in \Lambda$ に対し $y \in M$ が $d(f^n(y), f^n(x)) < \epsilon$ ($\forall n \geq 0$) を満たすならば $y \in W^s_\epsilon(x)$ である．
また $y \in M$ が $d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) < \epsilon$ ($\forall n \geq 0$) を満たすならば $y \in W^u_\epsilon(x)$ である．

注意 24.

(1) から

$$f(W^s_\epsilon(x)) \subset W^s_\epsilon(f(x)), \quad f^{-1}(W^u_\epsilon(x)) \subset W^u_\epsilon(f^{-1}(x))$$

が分かる．

10.1 定理 20 の証明の非常に大まかなアイデア

$$\mathcal{B}(\Lambda, M) = \{ \ \sigma : \Lambda \to M \mid \sigma \text{ は有界 } \}$$

とする．ここで σ が有界とは $\sup_{x\in\Lambda} d(x, \sigma(x)) < \infty$ となること．σ は単なる写像で連続とは限らないということと，M がコンパクトということは仮定していないので，一般には写像 σ が有界になるとは限らない．

$$\widehat{F} : \mathcal{B}(\Lambda, M) \to \mathcal{B}(\Lambda, M)$$

を

$$\widehat{F}(h) = fhf^{-1}$$

と決める．

$$\widehat{F}(h)(x) = fhf^{-1}(x) \qquad (x \in \Lambda)$$

である．

$$inc\Lambda : \Lambda \to M$$

を単なる **inclusion map** とする．とすると，

$$\widehat{F}(inc\Lambda) = inc\Lambda$$

となるので，$inc\Lambda$ は $\widehat{F}$ の不動点である．

$\mathcal{B}(\Lambda, M)$ は和やスカラー倍が定義されているわけではないので **Banach** 空間ではないが，局所的に **Banach** 空間の構造を持っている，すなわち **Banach** 空間による局所座標が入っていることになるので $D\widehat{F}$ が定義できることになる．

もし $inc\Lambda$ が $\widehat{F}$ の双曲型不動点ならば

Banach 空間上の局所微分同相写像の双曲型不動点に関する（不）安定多様体定理から，$inc\Lambda$ の $\widehat{F}$ に関する局所（不）安定多様体が存在する．

$$W^s_\epsilon(inc\Lambda, \widehat{F}) \subset \mathcal{B}(\Lambda, M)$$

を不動点 $inc\Lambda$ の局所安定多様体とする．

$x \in \Lambda$ を **fix** したとき，

$$W_x = \{ \ h(x) \mid h \in W^s_\epsilon(inc\Lambda, \widehat{F}) \ \} \subset M$$

が x を通る局所安定多様体 $W^s_\epsilon(x, f)$ になる，というイメージ．

これがなぜかというと，$y \in W_x$ とすると，ある $h \in W^s_\epsilon(inc\Lambda, \widehat{F})$ があって $y = h(x)$ となっている．$y \in \Lambda$ というわけではないことに注意．

$h \in W^s_\epsilon(inc\Lambda, \widehat{F})$ なので，

$$\widehat{F}^n(h) = f^n h f^{-n} \ \to \ inc\Lambda \qquad (n \to \infty)$$

である．

$f^n(x) = z \in \Lambda$ とおくと，$f^{-n}(z) = x$ である．

n が十分に大きいと $f^n h f^{-n}$ は $inc\Lambda$ に十分に近いので

$$f^n(x) = z \approx f^n h f^{-n}(z) = f^n h(x) = f^n(y)$$

となり，

$$d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる．すなわち，

$$y \in W^s_\epsilon(x, f)$$

である．

以下のようなことが問題となる．

(1) $\mathcal{B}(\Lambda, M)$ に **Banach** 空間の局所座標を入れる方法は？

(2) $inc\Lambda$ は $\widehat{F}$ の双曲型不動点だということを示す．

(3) W_x は C^r で埋め込まれた **disk** だということを示す．

(4) $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ のとき $T_x W_x = E^s_x$ を示す．

(5) $W_x \subset W^s_\epsilon(x, f)$ を示したが，これらが x のまわりで同じだということを示す．

(6) W_x は C^r **disk** として x に関して連続だということを示す．

10.2 $\mathcal{B}(\Lambda, M)$ に Banach 空間の局所座標を入れる方法は？

$\Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$ を $T_\Lambda M$ の **bounded section** 全体の集合とする．すなわち，

$$\Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M) = \{\ \sigma : \Lambda \to T_\Lambda M \mid \pi(\sigma(x)) = x\ (\forall x \in \Lambda),\ \sup_{x\in\Lambda} |\sigma(x)| < \infty\ \}$$

ここで $\pi : T_\Lambda M \to \Lambda$ は標準的な射影．

$||\sigma|| = \sup_{x\in\Lambda} |\sigma(x)|$ というノルムで $\Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$ は **Banach** 空間になる．

$\Gamma^0(\Lambda, T_\Lambda M)$ を $T_\Lambda M$ の連続な **section** 全体の集合とする．すなわち，

$$\Gamma^0(\Lambda, T_\Lambda M) = \{\ \sigma : \Lambda \to T_\Lambda M \mid \pi(\sigma(x)) = x\ (\forall x \in \Lambda),\ \sigma \text{ は連続 }\ \}$$

Λ はコンパクトなので $\Gamma^0(\Lambda, T_\Lambda M) \subset \Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$．
また，連続写像が一様収束した極限は連続写像なので，$\Gamma^0(\Lambda, T_\Lambda M)$ は $\Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$ で閉集合である．

$\delta > 0$ とし

$$U_\delta = \{\ h \in \mathcal{B}(\Lambda, M) \mid d(h(x), x) \le \delta\ (\forall x \in \Lambda)\ \}$$

とすると，U_δ は $\mathcal{B}(\Lambda, M)$ における $inc\Lambda$ の近傍となる．

$$\Phi : U_\delta \to \Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$$

を $h \in U_\delta$ に対して

$$\Phi(h)(x) = \exp_x^{-1}(h(x))$$

と決める．ここで，$\exp_x$ は $\exp_x : T_xM \to M$ という **exponential map.**

$$\Phi(U_\delta) = \Gamma_\delta \subset \Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$$

とすると，

$$\Phi : U_\delta \to \Gamma_\delta$$

が U_δ 上の局所座標を与える．
$\Phi(inc\Lambda) = 0$ （ $\Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$ の 0-セクション ）であり，Γ_δ は 0-セクションの近傍となる．

10.3 $inc\Lambda$ は $\widehat{F}$ の双曲型不動点か？

$$\widetilde{F} = \Phi \circ \widehat{F} \circ \Phi^{-1}$$

とする．不正確なイメージとしては，$\widetilde{F} : \Gamma_\delta \to \Gamma_\delta$ であって

$$\begin{tikzcd} U_\delta \arrow[r, "\widehat{F}"] \arrow[d, "\Phi"'] & U_\delta \arrow[d, "\Phi"] \\ \Gamma_\delta \arrow[r, "\widetilde{F}"'] & \Gamma_\delta \end{tikzcd}$$

正確には，$\widehat{F}(U_\delta) = V \subset \mathcal{B}(\Lambda, M)$，$\Phi(V) = W \subset \Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$ とすると，

$$\begin{tikzcd} U_\delta \arrow[r, "\widehat{F}"] \arrow[d, "\Phi"'] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ \Gamma_\delta \arrow[r, "\widetilde{F}"'] & W \end{tikzcd}$$

$\Phi(inc\Lambda) = 0$ （ 0-セクション ），$\widehat{F}(inc\Lambda) = inc\Lambda$ なので $\widetilde{F}(0) = 0$ となり，0 は $\widetilde{F}$ の不動点である．

$$D_0\widetilde{F}$$

を考える．

$\sigma \in \Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$ に対して

$$L(\sigma)(x) = D_{f^{-1}(x)}f(\sigma(f^{-1}(x))) \qquad (x \in \Lambda)$$

と決めると，

$$L : \Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M) \to \Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$$

は連続線型写像である．

補題 2. $L = D_0\widetilde{F}$

[証明の概略：]
$\sigma \in \Gamma_\delta$ をとり，

$$h(x) = \exp_x(\sigma(x)) \qquad (x \in \Lambda)$$

とすると $h \in U_\delta$ であり，

$$\sigma(x) = \exp_x^{-1}(h(x)) \qquad (x \in \Lambda)$$

である．

$$\Phi(h)(x) = \exp_x^{-1}(h(x))$$

なので $\Phi(h) = \sigma$ であり $h = \Phi^{-1}(\sigma)$．

$$\widetilde{F}(\sigma) = (\Phi \circ \widehat{F} \circ \Phi^{-1})(\sigma) = (\Phi \circ \widehat{F})(h) = \Phi(fhf^{-1})$$

なので，

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(\sigma)(x) &= \Phi(fhf^{-1})(x) = \exp_x^{-1}(fhf^{-1}(x)) \\ &= \exp_x^{-1} f \exp_{f^{-1}(x)} \exp_{f^{-1}(x)}^{-1} hf^{-1}(x)) \\ &= (\exp_x^{-1} f \exp_{f^{-1}(x)})(\sigma(f^{-1}(x))\end{aligned}$$

このことから，$D_0 \exp_x = id$ なので $L = D_0\widetilde{F}$ となる．より正確には，

$$\frac{||\widetilde{F}(0+\sigma) - \widetilde{F}(0) - L(\sigma)||}{||\sigma||} = \frac{||\widetilde{F}(\sigma) - L(\sigma)||}{||\sigma||} \to 0 \qquad (||\sigma|| \to 0)$$

を言えば良い．

$$||\widetilde{F}(\sigma)(x) - L(\sigma)(x)|| = ||(\exp_x^{-1} f \exp_{f^{-1}(x)})(\sigma(f^{-1}(x)) - D_{f^{-1}(x)} f(\sigma(f^{-1}(x))||$$

なので成り立つ．■

Λ は f の双曲型集合であり $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ となっている．

$$\begin{aligned}\Gamma^b(\Lambda, E^s) &= \{\ \sigma : \Lambda \to E^s \mid \pi(\sigma(x)) = x\ (\forall x \in \Lambda),\ \sup_{x\in\Lambda} |\sigma(x)| < \infty\ \} \\ \Gamma^b(\Lambda, E^u) &= \{\ \sigma : \Lambda \to E^u \mid \pi(\sigma(x)) = x\ (\forall x \in \Lambda),\ \sup_{x\in\Lambda} |\sigma(x)| < \infty\ \}\end{aligned}$$

とする．
$D_0\widetilde{F} = L$ で $L(\sigma)(x) = D_{f^{-1}(x)} f(\sigma(f^{-1}(x))$ なので，$\Gamma^b(\Lambda, E^s)$，$\Gamma^b(\Lambda, E^u)$ は $D_0\widetilde{F}$-不変で

$$\Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M) = \Gamma^b(\Lambda, E^s) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^u)$$

である．$||Df|E^s|| < \lambda$，$||Df^{-1}|E^u|| < \lambda$ なので，

$$||D_0\widetilde{F}|\Gamma^b(\Lambda, E^s)|| < \lambda, \quad ||D_0\widetilde{F}^{-1}|\Gamma^b(\Lambda, E^u)|| < \lambda$$

となり，0 は $D_0\widetilde{F}$ の双曲型不動点である．

残りの部分の証明については，かなり面倒なので省略．

11 Axiom A

定義 42. M を C^∞-多様体とする．$f \in \mathbf{Diff}^r(M)$（$r \geq 1$）が **Axiom A** を満たすとは，次の **(a)**, **(b)** が成り立つこと．

(a) $\Omega(f)$ は双曲型集合．

(b) $\overline{\mathbf{Per}(f)} = \Omega(f)$

注意 25. **Axiom A(a)** ならば **Axiom A(b)** が成り立つか？ というのは 2 次元では成り立つことが証明されていたが，3 次元以上では **10** 年ほど未解決だった．
これについて，**1978** 年に **Alan Dankner** [**Dan**] が，任意の 3 次元多様体上で **(a)** を満たすが **(b)** が成り立たない例があることを示した．**Dankner** の作った例は極めて複雑なものだが，倉田雅弘 [**Kur**] は，やはり **1978** 年，**(a)** だが **(b)** ではないより分かりやすい例を作った（ただし倉田の例は 4-次元以上）．

微分同相写像が構造安定であるためには，安定多様体と不安定多様体が横断的に交わることが必要だと思われるが，**Axiom A** の場合には，それは $W^s(\Omega(f))$，$W^u(\Omega(f))$ の横断的な交わりになると考えられる．

定義 43. **Axiom A** を満たす f が 強横断性条件（**Strong Transversality Condition**）を満たすとは，任意の $x \in M$ に対して $W^s(x)$ と $W^u(x)$ が横断的に交わること．

注意 26. **Axiom A** を満たす微分同相写像については，$W^s(\Omega(f)) = W^u(\Omega(f)) = M$ であることを後に示す．
さらに，任意の $x \in W^s(\Omega(f))$，$x' \in W^u(\Omega(f))$ は，ある $y, y' \in \Omega(f)$ があって $x \in W^s(y)$，$x' \in W^u(y')$ となっていることも後に示す．
$W^s(x) = W^s(y)$，$W^u(x') = W^u(y')$ であり，これらの $W^s(y)$，$W^u(y')$ は 1 対 1 にはめ込まれた $\mathbf{R}^s$，$\mathbf{R}^u$ となっているので，x における横断性なども定義できる．

Smale と **Palis** は，構造安定性について次のように予想した．

[構造安定性予想]

構造安定 $\iff$ **Axiom A** ＋ 強横断性条件

この構造安定性予想については，**Morse-Smale** 系の時の **Smale** の失敗とは異なり，C^1 に関しては微分同相写像とベクトル場の両方について正しいということが，多くの人たちの努力により後に証明される（後述）．

双曲構造と構造安定性の関係について，最初にはっきりとした結果が得られたのは **Anosov** 系 である．

Axiom A 力学系の基本性質を調べる前に，まず **Anosov** 系 について説明する．

11.1 Anosov 微分同相写像

Smale は 1961 年にソ連に行き，Kiev での非線形振動シンポジウムやモスクワの Steklov 研究所などで Anosov, Sinai, Novikov, Arnold, Postnikov 達に会い，horseshoe map や構造安定性などについての話をした．

その中で，geodesic flow や hyperbolic toral automorphism なども構造安定になるのではないか，という予想を述べたが，その後すぐに Anosov がそれらを全て証明した（と Sinai が 1962 年のストックホルムの ICM で Smale に語ったらしい．実際に論文として出るのは 1967 年 [Ano] ）．

このことから Smale は，多様体全体が双曲型集合になるものを Anosov flow， Anosov diffeomorphism と名付けたのではないかと思われる．

Smale は「Diffentiable Dynamical Systems」[Sm5] でかなりのページ数を割いていることから見ても，1960 年代の中頃では，Anosov 微分同相写像に関心を持っていたと想像できる．おそらく Smale は，Anosov 微分同相写像は「Toral automorphism 的なもの」しかない，という印象を持っていたのではないだろうか．

Toral auto 的なものとは，リー群をその離散部分群で割って得られるコンパクト多様体上の双曲的な自己同型，ということになる．

定義 44. 群 G がリー群（Lie group）であるとは，G が可微分多様体であって，逆元を対応させる写像と，ひとつの元をかけるという操作で得られる写像が可微分写像となること．

リー群 G 上の自己同型 $\alpha : G \to G$ は単位元を不動点に持つが，そこでの微分が双曲型ならば，G は 冪零（ nilpotent ）リー群 でなければならないことが知られている．

定義 45. 群 G が 冪零（nilpotent） であるとは，G の正規部分群からなる長さ有限の正規列

$$\{e\} \lhd G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

で，$G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ となるようなものを持つこと（このような列を中心列という）．

- アーベル群は冪零である．
- G_{i+1}/G_i はアーベル群となるので，冪零群は可解群である．

任意の単連結冪零リー群は $\mathbf{R}^n$ と微分同相である．

- 群として $\mathbf{R}^n$ と同型というわけではない（Heisenberg 群 など）．

- 単連結ではない冪零リー群は存在する（アーベル群のリー群 $\mathbf{T}^n$ など．一般に単連結冪零リー群を割ったものなど.）

G を連結な単連結冪零リー群，$\alpha : G \to G$ を自己同型写像とする．離散部分群 $\Gamma \subset G$ があって，G/Γ がコンパクト多様体になり，$\alpha(\Gamma) = \Gamma$ ならば，α は微分同相写像 $\widetilde{\alpha} : G/\Gamma \to G/\Gamma$ を定義する．

G/Γ を **nilmanifold** という．

$\alpha : G \to G$ が双曲型自己同型写像ならば，$\widetilde{\alpha} : G/\Gamma \to G/\Gamma$ は nilmanifold G/Γ 上の Anosov 微分同相写像になることが分かる．

「Anosov 微分同相写像はこのような nilmanifold 上の双曲型自己同型から作られるものだけか？」

ということが問題となってくる．実際，Anosov はモスクワの ICM（1966 年）における講演でこれを問題として提示していた．

しかし Smale は，多くのリー群の専門家との議論から，その時点ですでにそれ以外の例を見つけ出していた．

G を連結な単連結冪零リー群とする．
Affine 群 $\mathbf{Aff}(G) = G \rtimes \mathbf{Aut}(G)$ を次のように定義する．集合としては $\mathbf{Aff}(G) = G \times \mathbf{Aut}(G)$ だが，G への作用を $(g, \alpha) \in \mathbf{Aff}(G)$，$x \in G$ に対して，次のように決める．

$$(g, \alpha)x = g\alpha(x)$$

K を $\mathbf{Aut}(G)$ のコンパクト部分群とし，Γ を有限位数の元を持たない $G \rtimes K$ の離散部分群とすると，Γ は G に $\mathbf{Aff}(G)$ の部分群として作用する．

この作用が free and properly discontinuous であって $\Gamma\backslash G$ （ G を Γ の作用で割ったもの ）がコンパクトならば $\Gamma\backslash G$ は多様体になる．これを **infra-nilmanifold** という．

全ての infra-nilmanifold は，ある nilmanifold を有限被覆として持つことが知られている．

双曲型自己同型写像 $\alpha : G \to G$ が Γ の作用と compatible ならば，微分同相写像 $\widetilde{\alpha} : \Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash G$ を定め，これは Anosov 微分同相写像になる．これを **hyperbolic infra-nilmanifold automorphism** という（実際にそのような例がある [Sm5], [Nit] ）.

これらのことから Smale は次のことを予想したが，現在のところ共に未解決．

予想 1. コンパクト多様体上の Anosov 微分同相写像は，ある hyperbolic infra-nilmanifold automorphism と位相共役になる．

予想 2. M をコンパクト C^∞-多様体とし，$f : M \to M$ を **Anosov** 微分同相写像とする．このとき $\Omega(f) = M$ である．

予想 **1** については，**hyperbolic infra-nilmanifold auto** ではない **Anosov** 微分同相写像が存在することは証明されている．
Farrell-Jones [FJ] (1979) は，$n \geq 5$ のホモトピー球面 Σ^n と $\mathbf{T}^n$ の連結和 $\Sigma^n \sharp \mathbf{T}^n$ には，**codim** 1 の **Anosov** 微分同相写像（$\dim E^s = 1$ **or** $\dim E^u = 1$）が存在することを証明した．**Exotic** 球面を連結和すれば微分構造が異なるトーラスになるので **nilmanifold** や **infra-nilmanifold** にはならない．しかし **Franks [Fr]** と **Newhouse [New2]** の結果から，**codim** 1 の **Anosov** 微分同相写像は **hyperbolic toral auto** と位相共役になることが示されているので，これは予想 **1** の反例にはならない．

予想 **2** については，**flow** の場合には **Franks-Williams [FW]** の反例がある．彼らは鎖回帰集合（非遊走集合を含む）が多様体全体にならないような **Anosov flow** が存在することを証明している．

12　スペクトル分解

ここからは，**Axiom A** を満たす微分同相写像の基本的な性質について調べて行く．

定義 46.

(1) X を距離空間とし $h : X \to X$ を連続写像とする．

その軌道が X で稠密になるような点 $x \in X$ が存在するとき，h は **位相推移的 (topologically transitive)** であるという．

(2) X の任意の開集合 U, V に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して $\forall n \geq N$ で $h^n(U) \cap V \neq \emptyset$ となるとき，h は **位相混合的 (topologically mixing)** であるという．

注意 27.

(1) 全ての点の軌道が稠密の場合，X は h の **minimal set** であるという．

(2) 位相同型写像 $h : X \to X$ が位相推移的ならば，X の任意の開集合 U, V に対してある $n \in \mathbf{Z}$ が存在して $h^n(U) \cap V \neq \emptyset$ となることは簡単にわかる．

X がコンパクト距離空間で位相同型写像 $h : X \to X$ が位相推移的ならば，この逆も成り立つ．すなわち，h が位相推移的であることと，X の任意の開集合 U, V に対してある $n \in \mathbf{Z}$ が存在して $h^n(U) \cap V \neq \emptyset$ となることは同値となる．

定理 21 (スペクトル分解定理).

M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を **Axiom A** を満たす微分同相写像とする．このとき $\Omega(f)$ は，以下を満たすような互いに交わらない有限個の集合 $\{\Omega_i\}_{1=1,\cdots,k}$ に分割される．

(1) $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ であり，各 Ω_i は閉集合で f-不変．

(2) 全ての i について $f|\Omega_i : \Omega_i \to \Omega_i$ は位相推移的.

(3) さらに各 Ω_i は互いに交わらない有限個の閉集合

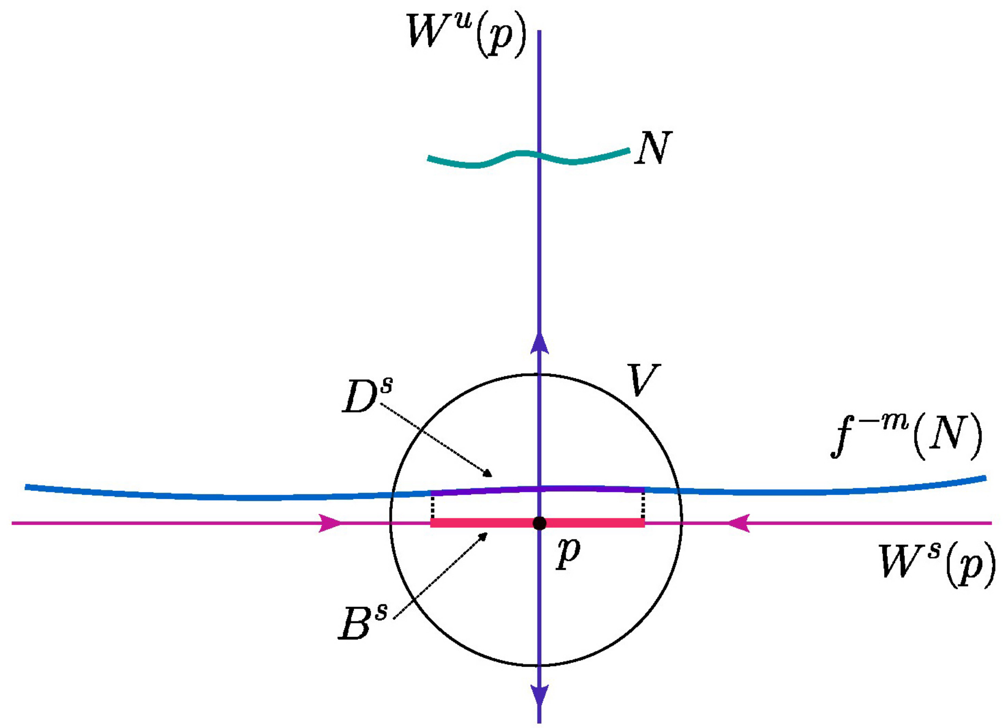
$$\Omega_i = X_{i,1} \cup \cdots \cup X_{i,k_i}$$

へ分解され，$f(X_{i,j}) = X_{i,j+1}$ $(1 \leq j \leq k_i - 1)$，$f(X_{i,k_i}) = X_{i,1}$ であり，$f^{k_i} : X_{i,j} \to X_{i,j}$ は位相混合的である．

各 Ω_i を f の **基本集合（basic set）** という．

証明する上で，技術的には次の補題が本質的．

補題 3 (λ-lemma). M を n-次元 C^∞-閉多様体（コンパクトで境界が無い），$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（$r \geq 1$），p を $0 < \dim W^s(p) = s < n$ となる f の双曲型不動点，N を C^r で１対１に M はめ込まれた多様体で $W^u(p)$ と横断的に交わっているものとする．
このとき p のある近傍 V が存在し，$V \cap W^s(p)$ における p を含む任意の s-次元 **cell**（s-次元円盤と同相な集合）B^s と任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $m > 0$ と $f^{-m}(N)$ の中のある s-次元 **cell** D^s で B^s に C^1-距離で ϵ 以内となるものが存在する．



注意 28. ：ここで，D^s が B^s に C^1-距離で ϵ 以内とは，$\mathbf{R}^s$ 内のある s-次元円盤 D があって，D^s, B^s はそれぞれある $\phi, \psi : D \to M$ という写像として表されるが，$\phi - \psi$ の C^1-ノルムが ϵ 以内ということ．

次の補題は，双曲力学系理論において技術的に基本的なもの．

補題 4. M を n-次元 C^∞-閉多様体，$f: M \to M$ を C^r-微分同相写像（$r \geq 1$），p, q を f の双曲型周期点とする．

(a) 開集合 $U \subset M$ が $U \cap W^s(p) \neq \emptyset$ となっているならば次がなりたつ．

$$\overline{\bigcup_{m>0} f^m(U)} \supset W^u(p)$$

(b) 開集合 $U \subset M$ が $U \cap W^s(p) \neq \emptyset$ となっていて，さらに $W^u(p)$ と $W^s(q)$ が横断的に交わっている点が存在するなら次が成り立つ．

$$W^s(q) \cap \bigcup_{m>0} f^m(U) \neq \emptyset$$

補題 4 の証明：

(a) p の周期が k の場合，f^k を考えることにより，p を不動点として良い．

$W^u(p)$ は f によって拡大されていくので，$\overline{\bigcup_{m>0} f^m(U)}$ が $W^u(p)$ における p の近傍を含むことを言えば良い．

$U \cap W^s(p) \neq \emptyset$ なので，m が大きくなると $f^m(U)$ は p に十分近い点とその近傍を含む．

Hartman-Grobman の定理より，p のある近傍では f は $Df(p)$ と位相共役である．従って状況は，双曲型線型同型写像 $Df(p): T_pM \to T_pM$ の 0 のまわりでの状況と同じになる．

T_pM と $\mathbf{R}^n$ を同一視し，その同一視で $Df(p)$ が L になったとする．正確には，線型同型写像 $\phi: T_pM \to \mathbf{R}^n$ をとり，$L = \phi\, Df(p)\, \phi^{-1}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ とする．

p は双曲型なので L は双曲型であり，$\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$ という L-不変な分解があって，ある開集合 V が E^s と交わっている，という状況となっている．

このとき，$\overline{\bigcup_{m>0} L^m(V)}$ が E^u における 0 の近傍を含むことを言えば良い．

問題 6. $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を双曲型線型同型写像とし $\mathbf{R}^n = E_1 \oplus E_2$ を対応する L-不変な分解とする．すなわち $\mathbf{R}^n$ 上のノルムを適切に取り直すことによって，ある $0 < \lambda < 1$ があって $||L|E_1|| < \lambda$, $||L^{-1}|E_2|| < \lambda$ であり，$v = v_1 + v_2 \in E_1 \oplus E_2$ に対して $||v|| = \max\{||v_1||, ||v_2||\}$ となっているとする．
E_2 における 0 を中心とし半径 $\delta > 0$ の **disk** を B_δ とする．$x \in E_1$ に対して $D_x = \{x\} \times B_\delta \subset E_1 \oplus E_2$ とするとき，

$$\overline{\bigcup_{m>0} L^m(D_x)} \supset E_2$$

を示せ．

この問題より，**(a)** は成り立つことが分かる．

(b) p と q の周期の最小公倍数を m とし f^m を考えることにより，p, q は不動点として良い．

$W^s(q)$ と $W^u(p)$ が横断的に交わっている点があるので，そのひとつを x とする．$\dim W^s(q) = s'$ とし，x を含む $W^s(q)$ 上のある s'-次元 **cell** D' で $W^u(p)$ と横断的に交わっているものがある．

λ-**lemma** より，p の近傍 V があって，$V \cap W^s(p)$ における p を含む s-次元 **cell** B^s をとると（$s = \dim W^s(p)$），ある $m > 0$ で $f^{-m}(D')$ の中に C^1 で B^s と十分に近い **cell** D'' が存在する．

一方，$U \cap W^s(p) \neq \emptyset$ となる開集合 U があるので，$\dim W^u(p) = u$ としたとき（$s + u = n$），U の中に $W^s(p)$ と横断的に交わる u-次元 **cell** D_u がある．

f^{-1} に λ-**lemma** を適用すると，$V \cap W^u(p)$ の中の u-次元 **cell** B^u をとると，ある $m' > 0$ で $f^{m'}(D_u)$ の中に C^1 で B^u と十分に近い **cell** D'_u が存在する．

$D'' \cap D'_u \neq \emptyset$ であり，$D'' \subset W^s(q)$, $D'_u \subset f^{m'}(U)$ なので

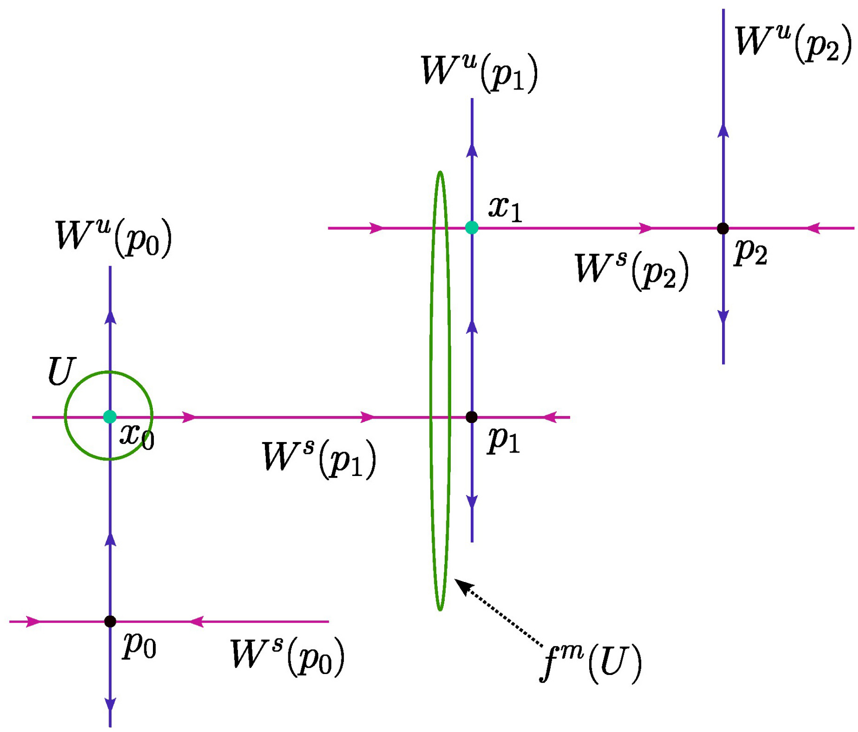
$$W^s(q) \cap \bigcup_{m>0} f^m(U) \neq \emptyset$$

である．■

次の補題は，**homoclinic point** は非遊走点である，という結果の拡張にあたる（これは昔は **"Cloud Lemma"** と呼ばれていたようだ）．

補題 5 (Cloud Lemma). M を n-次元 C^∞-閉多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（$r \geq 1$），p_i $(i = 0, \cdots, k)$ はそれぞれが f の双曲型周期点で $p_0 = p_k$ であるとする（ $\{p_i\}$ が周期軌道というわけではない ）．もし $x_i \in W^u(p_i) \cap W^s(p_{i+1})$ （$i = 0, \cdots, k-1$）が横断的交点ならば，各 x_i は非遊走点である．

注意 29. 特に２つの周期点 p, q があって，$W^u(p) \cap W^s(q)$, $W^u(q) \cap W^s(p)$ がそれぞれ横断的交点 x, y を持つなら，$x, y \in \Omega(f)$ である．



Proof:　記述を簡単にするために $x_0 \in W^u(p_0) \cap W^s(p_1)$ について考える．**Cyclic** なので x_i についても同様である．x_0 を含む開集合 U をとる．
$U \cap W^s(p_1) \neq \emptyset$ であり $W^u(p_1) \pitchfork W^s(p_2)$ となる点が存在するので，補題 **4(b)** より，

$$W^s(p_2) \cap \bigcup_{m>0} f^m(U) \neq \emptyset$$

である．これより，ある $m_1 > 0$ で

$$f^{m_1}(U) \cap W^s(p_2) \neq \emptyset$$

である．
$W^u(p_2) \pitchfork W^s(p_3)$ となる点が存在するので，補題 **4(b)** より，$W^s(p_3) \cap \bigcup_{m>0} f^m(f^{m_1}(U)) \neq \emptyset$ である．これより，ある $m_2 > 0$ で $W^s(p_3) \cap f^{m_2}(U) \neq \emptyset$ である．
以上の議論を続けると，ある $m_{k-1} > 0$ で $W^s(p_k = p_0) \cap f^{m_{k-1}}(U) \neq \emptyset$ である．
補題 **4(a)** より，

$$W^u(p_0) \subset \overline{\bigcup_{m>0} f^m(f^{m_{k-1}}(U))}$$

である．
U は $W^u(p_0)$ 上の点の近傍なので，ある $m > 0$ で $U \cap f^m(U) \neq \emptyset$ となり，x_0 は非遊走点 である．■

12.1　局所積構造

双曲型集合に関する（不）安定多様体定理より，ある $\epsilon > 0$ があって，任意の $x \in \Omega(f)$ に対して $W^s_\epsilon(x)$, $W^u_\epsilon(x)$ が定義されている．

さらにこの定理の (4) より，ある $\delta > 0$ があって，$x, y \in \Omega(f)$ が $d(x, y) < \delta$ なら $W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(y)$ は 1 点 であって，そこで横断的に交わっている．このとき，$W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ も 1 点 であってそこで横断的に交わっている．

ここからはさらに，
$f : M \to M$ は **Axiom A** を満たす
ことを仮定する．

Axiom A を満たすので $\overline{\mathbf{Per}(f)} = \Omega(f)$ である．
すなわち上の $x, y \in \Omega(f)$ の十分近くに周期点 p, q が存在し，$W^u_\epsilon(p) \cap W^s_\epsilon(q)$, $W^s_\epsilon(p) \cap W^u_\epsilon(q)$ は 1 点であってそこで横断的に交わっている．

さらに **Cloud Lemma** より，これらの交点は非遊走点である．局所（不）安定多様体の C^1-連続性から，p, q が x, y に近づくとき，$W^u_\epsilon(p) \cap W^s_\epsilon(q)$, $W^s_\epsilon(p) \cap W^u_\epsilon(q)$ は $W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(y)$, $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ に近づく．

従って $W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(y) = w$, $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) = z$ とすると w, z には非遊走点が収束しているので $w, z \in \Omega(f)$ である．以上から次が成り立つことが分かった．

補題 6. f が **Axiom A** を満たすならば，ある $\delta > 0$ が存在し，$x, y \in \Omega(f)$ が $d(x, y) < \delta$ なら $W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(y)$, $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ はそれぞれ 1 点であって，それらは横断的な交点である．さらにそれらの交点は非遊走点である．

$$X_\delta = \{ \ (x,y) \in \Omega(f) \times \Omega(f) \mid d(x,y) < \delta \ \}$$

とする．$(x,y) \in X_\delta$ に対して，

$$I(x,y) = W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(y)$$

と決めることにより，写像 $I : X_\delta \to \Omega(f)$ が定義される．
次の補題は距離の評価の際に必要になる．

補題 7. $(x,y) \in X_\delta$ に対して

$$W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) = u_{xy}, \quad W^s_\epsilon(y) \cap W^u_\epsilon(x) = v_{xy}$$

とすると，ある $K > 0$ があって次が成り立つ．

$$\max\{ \ d(x,u_{xy}), \ d(x,v_{xy}) \ \} < K \, d(x,y)$$

命題 13 (局所積構造 (Local product structure)).
f が **Axiom A** を満たすならば，ある $\eta > 0$ が存在し次が成り立つ．
$x \in \Omega(f)$ に対して

$$\widehat{W}^s_\eta(x) = W^s_\eta(x) \cap \Omega(f), \qquad \widehat{W}^u_\eta(x) = W^u_\eta(x) \cap \Omega(f)$$

とし，$V_\eta(x) = \widehat{W}^s_\eta(x) \times \widehat{W}^u_\eta(x)$ とする．
任意の $(p,q) \in V_\eta(x)$ に対して $W^u_\epsilon(p) \cap W^s_\epsilon(q)$ は 1 点であり，(p,q) に対してその交点を対応させる写像を

$$I : V_\eta(x) \to \Omega(f)$$

とすると，$I(V_\eta(x))$ は $\Omega(f)$ における x の近傍であり，$I : V_\eta(x) \to I(V_\eta(x))$ は位相同型写像である．

注意 30.

(1) これにより，$\Omega(f)$ は局所的に直積構造を持つことがわかる．これを 局所積構造（**local product structure**） という．

(2) この局所積構造は 標準座標 **(Canonical coordinate)** とも呼ばれる．

(3) この命題の $\eta > 0$ は f で決まる定数である．

(4) $x \in \Omega(f)$ に対し

$$B_\eta(x) = I(V_\eta(x)) = I\left(\widehat{W}^s_\eta(x) \times \widehat{W}^u_\eta(x)\right)$$

を x の 局所積近傍 という．

命題 13 の証明:
$\epsilon > 0$ を局所（不）安定多様体が定義されている定数とし，$\delta > 0$ を補題 **6** で与えられるものとする．
ある $\eta > 0$ で，$\eta < \epsilon$ であり任意の $x \in \Omega(f)$ に対して

$$\sup\{ \ d(p,q) \mid p \in W^s_\eta(x), \ q \in W^u_\eta(x) \ \} < \delta$$

となるものが存在する．

この $\eta > 0$ をとると，任意の $(p,q) \in V_\eta$ に対して $d(p,q) < \delta$ なので $W^u_\epsilon(p) \cap W^s_\epsilon(q)$ は 1 点であり，(p,q) に対してその交点を対応させる写像 $I : V_\eta \to \Omega(f)$ が定まる．

$W^u_\epsilon(p)$, $W^s_\epsilon(q)$ は p, q に関して C^1 で連続なので，その交点を与える I は連続である．

I は単射である．なぜなら，$I(p,q) = I(p',q') = z$ とすると，$p, p' \in \widehat{W}^s_\eta(x)$ であり，$z \in W^u_\epsilon(p)$, $z \in W^u_\epsilon(p')$ となっている．$d(f^{-n}(z), f^{-n}(p)) \to 0$, $d(f^{-n}(z), f^{-n}(p')) \to 0$ だが，$p \neq p'$ なら $p, p' \in \widehat{W}^s_\eta(x)$ なので $d(f^{-n}(p), f^{-n}(p'))$ は拡大していくので矛盾となり $p = p'$ である．同様に $q = q'$ を示せるので I は単射である．

次に，$I(V_\eta)$ が x の $\Omega(f)$ における近傍を含むことを示す．
$d(x,y) < \delta$ となる $y \in \Omega(f)$ をとると，$W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$，$W^s_\epsilon(y) \cap W^u_\epsilon(x)$ はそれぞれ 1 点 なので，それらをそれぞれ u_{xy}, v_{xy} とする．

$K > 0$ を 補題 **7** のものとする．$\delta' < \delta$ で $K\delta' < \eta$ となるものをとる．

$d(x,y) < \delta'$ とすると，

$$d(x, u_{xy}) < K\delta' < \eta, \quad d(x, v_{xy}) < K\delta' < \eta$$

$$d(y, u_{xy}) < K\delta' < \eta, \quad d(y, v_{xy}) < K\delta' < \eta$$

なので，$y \in I(V_\eta)$ であり，従って $I(V_\eta)$ は x の $\Omega(f)$ における近傍 $B(x,\delta') \cap \Omega(f)$ を含む（$B(x,\delta')$ は x を中心とした半径 δ' の **ball**）．

最後に $I : V_\eta \to I(V_\eta)$ が同相写像であることを示す．そのためは，この写像が開写像（開集合を開集合に写す）であることを言えば良い．

V_η の開集合は $(p,q) \in V_\eta$ とすると，$\widehat{W}^s_\eta(x)$ における p を含む開集合 U_p と $\widehat{W}^u_\eta(x)$ における q を含む開集合 U_q の直積 $U_p \times U_q$ で生成されるので，$I(U_p \times U_q)$ が開集合であることを言えば良い．

任意の $z \in I(U_p \times U_q)$ は，ある $z_p \in U_p$, $z_q \in U_q$ があって，$z = W^u_\epsilon(z_p) \cap W^s_\epsilon(z_q)$ となっている．

z に十分近い $z' \in \Omega(f)$ をとると，$W^u_\epsilon(z') \cap W^s_\epsilon(x)$ は 1 点 であり，局所安定多様体の C^1-連続性から，その点は p に十分近く U_p に含まれるようにできる．

同様に $W^s_\epsilon(z') \cap W^u_\epsilon(x)$ は 1 点 であり，その点は q に十分近く U_q に含まれるようにできる．

従って $z' \in I(U_p \times U_q)$ となる．これは，z の $\Omega(f)$ におけるある近傍が $I(U_p \times U_q)$ に含まれることになり，$I(U_p \times U_q)$ は開集合である．■

12.2 スペクトル分解定理の証明

以下では 定理 **21**（スペクトル分解定理）を証明する．

p を周期点とし
$$X_p = \overline{W^u(p) \cap \Omega(f)}$$
とする．X_p は閉集合であり，p の周期が ℓ なら $f^\ell(X_p) = X_p$ である．

Step 1: X_p が $\Omega(f)$ の開集合であることを示す．

$\eta > 0$ を局所積近傍が定義される定数とし，任意の $x \in X_p$ に対して，その局所積近傍 $B_\eta(x)$ を考える．$B_\eta(x) \subset X_p$ を言えば良いが，$x \in \overline{W^u(p) \cap \Omega(f)}$ なので，$x \in W^u(p) \cap \Omega(f)$ として $B_\eta(x) \subset X_p$ を示せば良い（ η は f から決まる定数なので，$x \in \overline{W^u(p) \cap \Omega(f)}$ に十分近い $y \in W^u(p) \cap \Omega(f)$ で $B_\eta(y) \subset X_p$ が言えれば，それが x の近傍にもなっている ）．

Per(f) は $\Omega(f)$ で **dense** であり X_p は閉集合なので，$B_\eta(x)$ に含まれる周期点が X_p に含まれることを言えば良い．$x \in W^u(p)$ なので $W^u(x) = W^u(p)$ であることに注意．

q を周期 k の周期点で $d(q, x) < \eta$ となるものとする．

$z = W^s_\epsilon(q) \cap W^u_\epsilon(x)$ とすると $z \in \Omega(f)$ である．$z \in W^s(q)$ なので，$f^{mk}(z) \to q$ $(m \to \infty)$ である．

一方 $z \in W^u(x) = W^u(p)$ なので，$f^{m\ell}(z) \in W^u(p)$ $(\forall m \in \mathbf{Z})$ である（ℓ は p の周期）．

$f^{mk\ell}(z) \to q$ $(m \to \infty)$ であり $f^{mk\ell}(z) \in W^u(p)$ なので $q \in X_p$ である．

Step 2: p, q を周期点とすると，$X_p = X_q$ であるかまたは $X_p \cap X_q = \emptyset$ であることを示す．一般に，次が成り立つ．

補題 8. p, a を周期点とし $a \in X_p$ とする．このとき $X_a \subset X_p$ である．

補題 8 の証明：p, a の周期をそれぞれ ℓ, γ とする．
X_p は開集合なので，ある $\delta > 0$ があって次が成り立つ．
$$\widehat{W}^u_\delta(a) = W^u_\delta(a) \cap \Omega(f) \subset X_p$$
$f^\ell(X_p) = X_p$ なので $f^{m\ell}\left(\widehat{W}^u_\delta(a)\right) \subset X_p$ である．

一方で
$$\bigcup_{m \geq 0} f^{m\gamma}\left(\widehat{W}^u_\delta(a)\right) = W^u(a) \cap \Omega(f)$$
であり
$$\bigcup_{m \geq 0} f^{m\gamma}\left(\widehat{W}^u_\delta(a)\right) = \bigcup_{m \geq 0} f^{m\ell\gamma}\left(\widehat{W}^u_\delta(a)\right)$$

なので

$$\overline{\bigcup_{m\geq 0} f^{m\ell\gamma}\left(\widehat{W}^u_\delta(a)\right)} = \overline{W^u(a)\cap\Omega} = X_a$$

となる．$f^{m\ell}\left(\widehat{W}^u_\delta(a)\right)\subset X_p$ なので $X_a\subset X_p$ である．■

$X_p\cap X_q\neq\emptyset$ とすると，X_p, X_q は開集合なので $X_p\cap X_q$ は開集合である．

Per(f) は $\Omega(f)$ で **dense** なので $X_p\cap X_q$ に含まれる周期点が存在する．そのひとつを a とすると，この補題から $X_a\subset X_p$ である．

X_a は X_p の開集合なので，ある $y\in X_a$ で $y\in W^u(p)\cap\Omega(f)$ となるものが存在する．

p, a の周期をそれぞれ ℓ, γ とすると，$f^\gamma(X_a)=X_a$ であり $f^\ell(W^u(p))=W^u(p)$ なので，

$f^{-m\gamma\ell}(y)\in X_a$ であって $f^{-m\gamma\ell}(y)\to p$ $(m\to\infty)$ である．

従って $p\in X_a$ である．そうすると上の補題から $X_p\subset X_a$ となり $X_a=X_p$ となる．

同様に $X_a=X_q$ なので $X_p=X_q$ となる．

Step 3: p の周期を ℓ とする．$f^\ell(X_p)=X_p$ だが，$f^m(X_p)=X_p$ となる最小の $m>0$ を ρ とする．$f^\rho : X_p\to X_p$ は位相混合的であることを示す．

U, V を X_p の開集合とする．X_p は開集合であり **Per**(f) は $\Omega(f)$ で **dense** なので，V の中には周期点が存在する．そのひとつを q とする．

$X_p=X_q$ なので q の周期を γ とすると $f^\gamma(X_q)=X_q$ である．従って $\gamma=k\rho$ $(1\leq k)$ となっており，$X_q=X_p$ に含まれる q の軌道の点は

$$\{\ f^{j\rho}(q)\ \}_{0\leq j\leq k-1}=\{q, f^\rho(q),\cdots,f^{(k-1)\rho}(q)\}$$

である．これらは全て $X_q=X_p$ 内の周期点なので，$0\leq j\leq k-1$ とすると $X_{f^{j\rho}(q)}=X_q=X_p$ である．

U は開集合なので $z_0\in W^u(q)\cap\Omega(f)$ となる点 $z_0\in U$ が存在する．同様に，

$$z_j\in W^u(f^{j\rho}(q))\cap\Omega(f)$$

となる $z_j\in U$ $(0\leq j\leq k-1)$ が存在する．

$$f^{-j\rho}(z_j)\in W^u(q)$$

となるので

$$\begin{aligned} f^{-m\gamma}(f^{-j\rho}(z_j)) &= f^{-mk\rho}(f^{-j\rho}(z_j)) = f^{-mk\rho-j\rho}(z_j) \\ &= f^{-(mk+j)\rho}(z_j)\to q \qquad (m\to\infty) \end{aligned}$$

である．$q\in V$ だったので，ある m_j があって $m\geq m_j$ なら $f^{-(mk+j)\rho}(z_j)\in V$ である．

$$L=\max\{\ m_j\ \}_{0\leq j\leq k-1}$$

とすると，任意の $0\leq j\leq k-1$ と任意の $m\geq L$ に対して

$$f^{-(mk+j)\rho}(z_j)\in V$$

となる．これを言い換えると，$\forall n \geq (L+1)k$ に対してある $z \in U$ があって $f^{-n\rho}(z) \in V$ が成り立つ，ということになる．

これは，$\forall n \geq (L+1)k$ に対して $(f^\rho)^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$，すなわち $(f^\rho)^n(V) \cap U \neq \emptyset$ 成り立つことを意味しており，$f^\rho : X_p \to X_p$ が位相混合的であることが示された．

Step 4: 任意の $x \in \Omega(f)$ はある X_p に含まれることを示す．

任意の $x \in \Omega(f)$ に対しその局所積近傍 $B_\eta(x)$ をとる．$\overline{\mathbf{Per}(f)} = \Omega(f)$ なので $B_\eta(x)$ には周期点が存在する．そのひとつを p とする．

q を $B_\eta(x)$ 内の任意の周期点とすると，$W^u_\epsilon(p) \cap W^s_\epsilon(q)$ は 1 点でありそれを z とする．p の周期を ℓ，q の周期を γ とすると，$\forall k \geq 0$ に対して $f^{k\ell\gamma}(z) \in W^u(p) \cap W^s(q)$ となっているが，$f^{k\ell\gamma}(z) \to q$（$k \to \infty$）なので $q \in X_p$ である．

x には $B_\eta(x)$ 内の周期点が収束しているが，それらの周期点は全て X_p に含まれるので $x \in X_p$ である．すなわち任意の $x \in \Omega(f)$ はある X_p に含まれることが分かった．

Step 5: 基本集合と X_p の関係について．

$\bigcup_{p \in \mathbf{Per}(f)} X_p$ は $\Omega(f)$ を **cover** しているが，各 X_p は開集合であり $\Omega(f)$ はコンパクトなので，有限個で **cover** される．

$$\Omega(f) = X_{p_1} \cup \cdots \cup X_{p_s}$$

さらにこれらは，互いに f で移りあうグループに分割される．すなわち，

$$\Omega_i = X_{i,1} \cup \cdots \cup X_{i,k_i}$$

で $f(X_{i,j}) = X_{i,j+1}$ （$1 \leq j \leq k_i$，$X_{i,k_i+1} = X_{i,1}$）となっている Ω_i があり，

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$$

となっている．さらに **Step 3** で示したように，$f^{k_i} : X_{i,j} \to X_{i,j}$ は位相混合的である．

Step 6: 位相推移性について：

$f|\Omega_i : \Omega_i \to \Omega_i$ を考える．

$$\Omega_i = X_{i,1} \cup \cdots \cup X_{i,k_i}$$

となっているので，任意の開集合 $U, V \subset \Omega_i$ は，ある開集合 $U' \subset U$，$V' \subset V$ があって，ある $1 \leq s \leq t \leq k_i$ で $U' \subset X_{i,s}$，$V' \subset X_{i,t}$ となっている．

$f^{t-s}(U') = U''$ とすると $U'', V' \subset X_{i,t}$ となる．$f^{k_i} : X_{i,t} \to X_{i,t}$ は **mixing** なので，ある $m_0 \geq 0$ があって $\forall m \geq m_0$ で $f^{mk_i}(U'') \cap V' \neq \emptyset$ である．従って，ある $n \geq 1$ があって $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ となり $f|\Omega_i : \Omega_i \to \Omega_i$ は位相推移的である．

[定理 **21**（スペクトル分解定理）の証明終り]

12.3 Dense orbit はどのくらいあるのか？

各基本集合上で $f|\Omega_i : \Omega_i \to \Omega_i$ は位相推移的となり，**dense orbit** を持つ点が存在することが分かったが，実は **dense orbit** を持つ点はかなり沢山あることが分かる．

補題 9. $U \subset \Omega_i$ を開集合とすると次が成り立つ．

$$\Omega_i = \overline{\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} f^m(U)}$$

補題 9 の証明：$U \subset \Omega_i$ を開集合とする．$f|_{\Omega_i} : \Omega_i \to \Omega_i$ は位相推移的なので，その軌道が Ω_i で稠密な点 z がある．$\mathrm{Orb}(z) \cap U \neq \emptyset$ なので $\Omega_i = \overline{\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} f^m(U)}$ である．■

各基本集合上の位相推移性については，次が成り立つ．

命題 14. $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ をスペクトル分解とする．各 Ω_i 上において $f|\Omega_i$ は位相推移的だが，Ω_i の中で稠密な軌道を持つ点の全体は **residual set** である．

命題 14 証明： コンパクト多様体は可算個の開集合の基底を持つので，Ω_i の開集合の基底を $\{U_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ とする．
$\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} f^m(U_j)$ は開集合だが，さらに 補題 **9** より Ω_i で稠密である．従って，

$$V = \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} \left(\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} f^m(U_j) \right)$$

は Ω_i 上の **residual set** である．任意の $x \in V$ の軌道が Ω_i で稠密であることを言えば良い．

$\forall y \in \Omega_i$ と y を含む任意の開集合 $U \subset \Omega_i$ を考える．$\{U_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ は Ω_i の開集合の基底なので，ある U_j があって $U_j \subset U$ となっている．

$x \in V$ なので，$x \in \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} f^m(U_j)$ であり，これは，ある m_j があって $x \in f^{m_j}(U_j)$ となることを意味する．$f^{-m_j}(x) \in U_j \subset U$ なので，x の軌道は Ω_i で稠密である．■

12.4 基本集合の（不）安定多様体

基本集合の（不）安定多様体については，次が成り立つ．

定理 22. M をコンパクト C^∞-多様体，$f: M \to M$ を **Axiom A** を満たす微分同相写像とし，$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ をスペクトル分解とする．このとき次が成り立つ．

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(\Omega_i)$$

ここで

$$\begin{aligned} W^s(\Omega_i) &= \{x \in M \mid f^m(x) \to \Omega_i \quad (m \to \infty)\} \\ W^u(\Omega_i) &= \{x \in M \mid f^{-m}(x) \to \Omega_i \quad (m \to \infty)\} \end{aligned}$$

この定理は，より一般的に，次の命題から言える．

命題 15. X をコンパクト距離空間，$f: X \to X$ を位相同型写像，$\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k$ を **disjoint union** で，各 Λ_i はコンパクト f-不変集合とする．もし $L(f) \subset \Lambda$ ならば次が成り立つ．

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Lambda_i) = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(\Lambda_i)$$

ここで

$$L(f) = \overline{\left(\bigcup_{x \in X} \omega(x)\right)} \cup \overline{\left(\bigcup_{x \in X} \alpha(x)\right)}$$

命題 15 の証明：
W^s について証明する．W^u ついては f^{-1} で W^s の場合になる．
各 i について開集合 $U_i \supset \Lambda_i$ で $U_i \cap U_j = \emptyset$，　$f(U_i) \cap U_j = \emptyset$（$i \neq j$）となるものを取る．

$\forall x \in X$ に対して，m が十分大きいならば，$f^m(x) \in \bigcup_i U_i$ である．なぜなら，$m_j \to \infty$ となる m_j で $f^{m_j}(x) \in M - \bigcup_i U_i$ なら，$\bigcup_i U_i$ の外に $\omega(x)$ の点が発生してしまうからである．

さらに m が十分に大きいなら，ある i があって $f^m(x) \in U_i$ となる．なぜなら，十分大きい m では $f^m(x)$ は $\bigcup_i U_i$ の中にあるが，$f(U_i) \cap U_j = \emptyset$ なので，一旦ある U_i に入ったら，それ以外の所には行けないからである．

十分大きな m では $f^m(x) \in U_i$ だとすると，$x \in W^s(\Lambda_i)$ となる．なぜなら，もし $f^m(x) \to \Lambda_i$ ではないとすると，$\omega(x)$ は U_i の中で Λ_i 以外の点を含むことになり，$L(f) \subset \Lambda$ に矛盾するからである．■

12.5　擬軌道追跡性

定義 47. (X, d) を距離空間，$f : X \to X$ を写像とする．

(1) $\delta > 0$ と $-\infty \le p \le i \le q \le \infty$ に対して $\{x_i\}_{p \le i \le q}$ が δ-擬軌道（**δ-pseudo-orbit**）であるとは，$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$（ $p \le \forall i \le q-1$ ）となること．

(2) δ-擬軌道 $\{x_i\}$ が δ-擬周期的（ **δ-pseudo-periodic** ） であるとは，ある $r > 0$ があって $x_i = x_{i+r}$（ i と $i + r$ が定義されている任意の i で ）となること．

(3) $x \in X$ が 鎖回帰的（**chain recurrent**） であるとは，任意の $\delta > 0$ に対して δ-擬周期的 となること．鎖回帰的な点全体の集合を $\mathcal{R}(f)$ と表し 鎖回帰集合（**chain recurrent set**） という．

問題 7. (X, d) をコンパクト距離空間，$f : X \to X$ を位相同型写像とする．

(1) $\mathcal{R}(f)$ は閉集合であることを示せ．

(2) $\mathcal{R}(f)$ は f-不変（ $f(\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(f)$ ）を示せ．

(3) $\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$ を示せ．($\Omega(f)$ と $\mathcal{R}(f)$ はかなり違う場合がある．コンパクト距離空間上の位相同型写像であっても $\Omega(f) \ne \mathcal{R}(f)$ となる例がある.)

定義 48. (X, d) を距離空間，$f : X \to X$ を写像とする．δ-擬軌道 $\{x_i\}_{p \le i \le q}$ が $y \in X$ で ϵ-追跡（ **ϵ-shadow** ） されるとは，$d(x_i, f^{i-p}(y)) < \epsilon$（ $p \le \forall i \le q$ ）となること．

定理 23 (追跡補題（Shadowing lemma)). M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（$r \ge 1$），Λ を f の双曲型集合とする．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$, $\eta > 0$ が存在して以下を満たす．

(1) δ-擬軌道 $\{x_i\}_{p \le i \le q}$ が $d(x_i, \Lambda) < \eta$（ $p \le \forall i \le q$ ）を満たすならば，$\{x_i\}$ はある $y \in M$ で ϵ-追跡される．

(2) さらにもし $\{x_i\}$ が δ-擬周期的ならば，ϵ-追跡する周期点 $y \in M$ が存在する．

(3) ある $\epsilon_0 > 0$ が存在し，$0 < \epsilon \le \epsilon_0$ であって $p = -\infty$, $q = \infty$ ならば，δ-擬軌道 $\{x_i\}$ を ϵ-追跡する y はただひとつである．

(4) **(3)** の条件に加えて，さらに Λ が 局所積構造を持てば **(3)** で決まる y は $y \in \Lambda$ となる．

定義 49. X を距離空間，$f : X \to X$ を位相同型写像とする．ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対してある $n \in \mathbf{Z}$ で $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ となるとき f は 分離的（expansive）であるという．
このような δ を 分離定数（expansive constant）という．

系 1. M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（$r \geq 1$），Λ を f の双曲型集合で局所積構造を持つものとする．このとき $f|_\Lambda$ は分離的である．

系 1 の証明：
追跡補題の ϵ_0 に対して $\epsilon_0 > \epsilon$ となる $\epsilon > 0$ をとる．$x, y \in \Lambda$ が，

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon \qquad (\forall n \in \mathbf{Z})$$

を満たすとすると，$\{f^n(x)\}$ は普通の軌道なので，どんな $\delta > 0$ に対しても δ-擬軌道である．従ってある Λ の点で ϵ-追跡される．
x も y も x の軌道を ϵ-追跡しているが，そのような点は一意的に決まるので $x = y$ である．■

追跡補題は，双曲型集合の近傍で δ-擬軌道が ϵ-追跡される，ということを述べているわけだが，一般に，距離空間 X と位相同型写像 $f : X \to X$ に対して，同様のことが定義できる．すなわち，

定義 50. 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の δ-擬軌道 $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ がある $y \in X$ で ϵ-追跡されるとき，f は 擬軌道追跡性（Pseudo-orbit tracing property）（略して POTP）を持つという．

この定義の中には双曲性などは無いが，次のことが示されている．

定理 24 (酒井一博 [Sak] (1994)). M を可微分閉多様体，$\mathcal{P}(M)$ を $\mathrm{Diff}^1(M)$ の中で POTP を持つ微分同相写像全体の集合の内部を取ったものとすると，$\mathcal{P}(M)$ は Axiom A と強横断性条件を満たす微分同相写像全体の集合と一致する（すなわち，C^1-構造安定な微分同相写像全体の集合と一致する）．

注意 31. Axiom A と強横断性条件を満たすならば POTP を持つということは，1977 年に Robinson [R3] によって示されている．$\mathcal{P}(M)$ ならば周期点は双曲型となることは 守安一峰 [Mor1] (1991) によって示された．$\mathcal{F}(M)$ (周期点が全て双曲型であるような C^1-微分同相写像全体の集合の内部) ならば Axiom A を満たすということは 林修平 [Hay1]（1992) によって示されたので，守安の結果から $\mathcal{P}(M)$ ならば Axiom A が分かる．

双曲型集合のまわりでの追跡補題により，基本集合の（不）安定多様体について，次の，一見自然な性質を示すことができる．

しかしこの定理は，Ω_i に近づく軌道は必ずある点 $x \in \Omega_i$ の軌道に近づいていく，ということを主張しているので，実はそれほど当たり前というわけではない．実際，**isolated** （ Λ を含むある開集合 U があって $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(U)$ ）ではないような双曲型集合 Λ では，これが成り立たない場合がある．

定理 25 (同期定理). M をコンパクト C^∞-多様体，$f : M \to M$ を **Axiom A** を満たす微分同相写像とし，$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ をスペクトル分解とする．このとき次が成り立つ．

$$W^s(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^s(x), \qquad W^u(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^u(x)$$

ここで

$$\begin{aligned} W^s(x) &= \{y \in M \mid d(f^m(x), f^m(y)) \to 0 \quad (m \to \infty)\} \\ W^u(x) &= \{y \in M \mid d(f^{-m}(x), f^{-m}(y)) \to 0 \quad (m \to \infty)\} \end{aligned}$$

定理 25 の証明:
$W^s(\Omega_i)$ について示す．$W^u(\Omega_i)$ については f^{-1} を考えれば $W^s(\Omega_i)$ の場合に帰着する．
$W^s(\Omega_i) \supset \bigcup_{x \in \Omega_i} W^s(x)$ は明らかなので，$W^s(\Omega_i) \subset \bigcup_{x \in \Omega_i} W^s(x)$ を示す．
以下では Ω_i を単に Ω と書くことにする．

$\Omega(f)$ に対して，$\epsilon > 0$ を 局所（不）安定多様体定理が成り立つ定数とし，$\epsilon_0 > 0$ を追跡補題 **(3)** の定数とする．
$\kappa = \min\{\epsilon/2,\ \epsilon_0/2\}$ に対して追跡補題の主張が成り立つような $\delta > 0$, $\eta > 0$ が存在する．

$$\gamma = \min\{\kappa,\ \delta,\ \eta\}$$

とする．

任意の $y \in W^s(\Omega)$ に対してある N があって，$m \geq N$ ならば $d(f^m(y), \Omega) < \gamma$ となる．

$y_0 = f^N(y)$ とする．$d(y_0, \Omega) < \gamma$ なので，ある $x \in \Omega$ で $d(x, y_0) < \gamma$ となるものがある．

擬軌道 $\{y_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ を次のように決める．

$$y_i = \begin{cases} f^i(y_0) & (i \geq 0) \\ f^i(x) & (i < 0) \end{cases}$$

これは

$$\cdots,\ f^{-3}(x),\ f^{-2}(x),\ f^{-1}(x),\ y_0,\ f(y_0),\ f^2(y_0),\ f^3(y_0),\ \cdots$$

という軌道となり，$y_{-1} \to y_0$ 以外の部分では普通の軌道である．

$$d(f(y_{-1}), y_0) = d(f(f^{-1}(x)), y_0) = d(x, y_0) < \gamma$$

となるので，$\{y_i\}$ は γ-擬軌道であり，$d(y_i, \Omega) < \gamma \leq \eta$ （$\forall i \in \mathbf{Z}$）である．

$\gamma < \delta$ なので，追跡補題より，$\{y_i\}$ を κ-追跡する $z \in \Omega$ が存在する．

$$d(f^i(y_0), f^i(z)) < \kappa \leq \epsilon/2 \quad (\forall i \geq 0)$$

なので，双曲型集合に対する（不）安定多様体定理 **(5)** より，$y_0 = f^N(y) \in W^s_\epsilon(z)$ となり $y \in W^s(z)$ となる．■

12.6 孤立不変集合

定義 51. Λ を $f : M \to M$ の不変集合とする．ある開集合 $U \supset \Lambda$ があり

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(U)$$

となるとき Λ は 孤立している（ **isolated** ）という．

定理 26. Λ を f のコンパクト双曲型不変集合とする．このとき Λ に関して，孤立していることと局所積構造を持つことは同値である．

（証明略）