4　Horseshoe map（馬蹄写像）

ここでは **2** 次元平面からそれ自身への次のような写像 H を考え，それがどのような軌道の構造を持っているのかを考える．
（ $p \in \mathbf{R}^2$ の H による軌道とは，点列 $\{H^n(p)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ のこと.）

- R を平面上の長方形 $ABCD$ とする．
- R を横方向では縮小し，縦方向にひきのばす．
- 次に真ん中あたりから右へ曲げて馬蹄形にする．
- そして，もとの R に，上と下がはみ出るように写す写像を H とする．これを **Horseshoe map（馬蹄写像）** という．

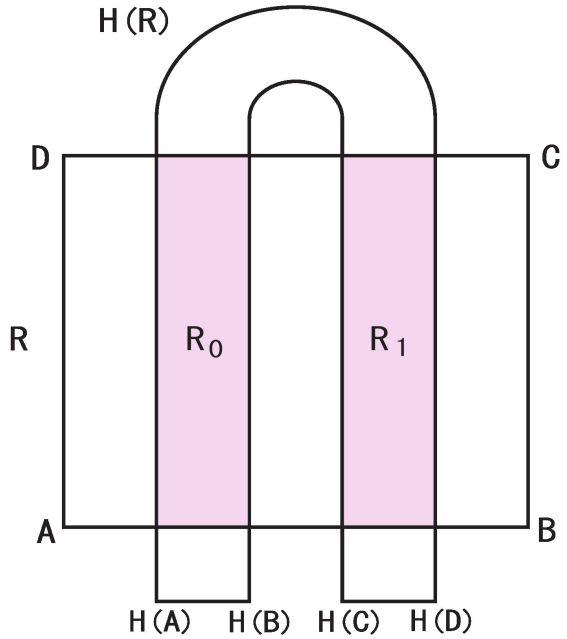
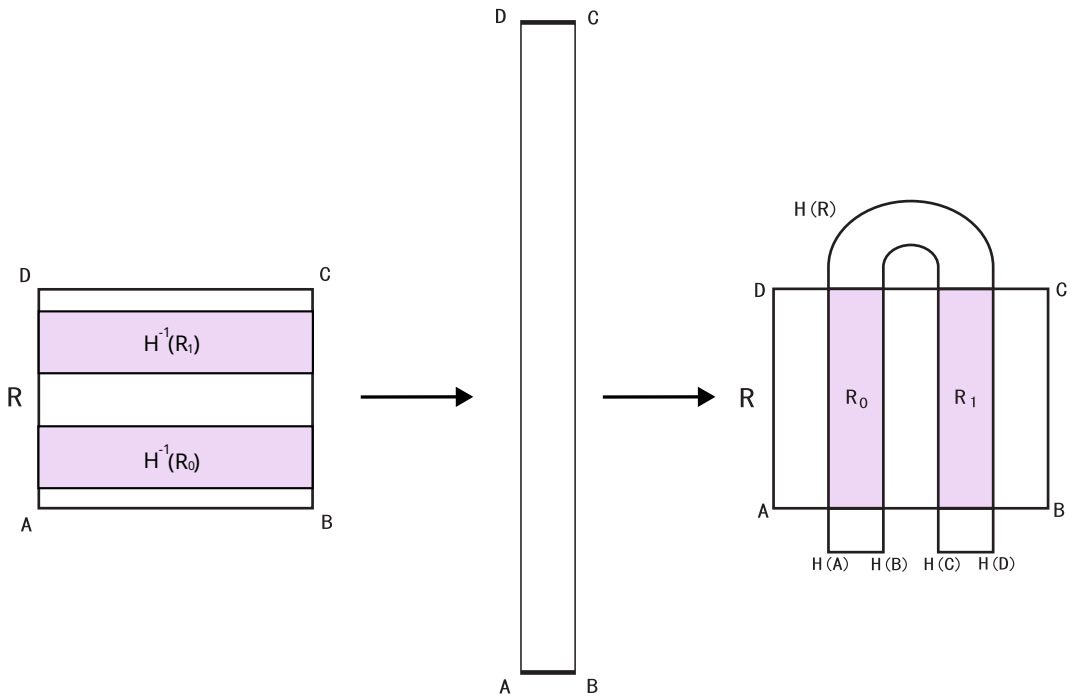


図 25:



注意 6.

(1) H は C^1 級であるとする．

(2) 図のように $H(R) \cap R = R_0 \cup R_1$ とする．

$$H_0 : H^{-1}(R_0) \to R_0, \qquad H_1 : H^{-1}(R_1) \to R_1$$

は “ほぼ” 線型であるとする．すなわち，x-方向に縮小し，y-方向に拡大しているものとする．(これだけでは，H の定義としてはひどくあいまいだが，このような写像に C^1 で十分近い写像では，以下で述べることは常に成り立つ，ということを示すことができる．)

(3) この定義だけでは，H は R の上でしか定義されていない．R の外で H がどのような写像であるのかは考えない．つまり，$\mathbf{R}^2$ の領域上の写像が，その一部に H のような部分を持つなら，以下の議論は全て適用できる．

4.1 Horseshoe map の軌道構造

H は R の外ではどうなっているのかわからないので R の中だけで H の軌道を考える．

つまり，H による正や負の反復によって常に R の中に留まっているような点の軌道にのみ注目する．いったん R の外に出た点は，どこへ行ってしまうのかわからないので考えない．

R の点で，H の作用によって常に R の中に留まっているような点全体の集合は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} H^k(R) \\
&= \cdots \cap H^{-2}(R) \cap H^{-1}(R) \cap R \cap H(R) \cap H^2(R) \cdots
\end{aligned}
$$

この Λ が，R の中のどのような部分集合であって，H はこの Λ の点にどのように作用しているのかを考える．

ここでは Λ の各点を，その 動き で特徴づけるという方法をとる．

$R \cap H(R)$ を考えてみると，たての２つの長方形（のようなもの）になっている．これらを R_0, R_1 とする．

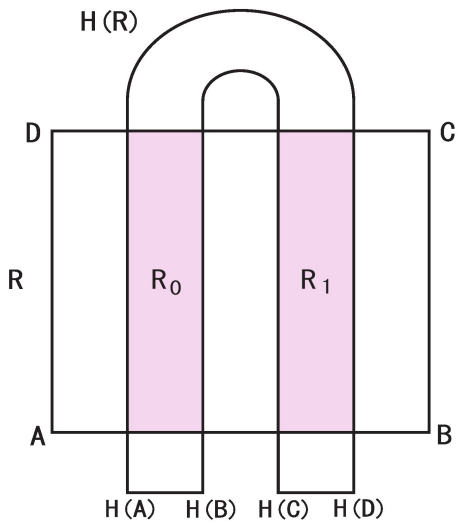


図 26:

Λ はその定義から明らかなように，$R \cap H(R) = R_0 \cup R_1$ に含まれている．

Λ の任意の点 p をとると，p の軌道の各点，すなわち任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して $H^k(p)$ は Λ の点なので，やはり $R_0 \cup R_1$ に含まれている．

そこで，$p \in \Lambda$ に対して，p の軌道の各点が R_0 と R_1 のどちらに含まれているかを考える事によって，p の旅程 $\varphi(p)$ を次のように定義する．

定義 12. $p \in \Lambda$ に対し，0, 1 の両側無限列

$$\varphi(p) = (\cdots \alpha_{-2}\alpha_{-1} \,.\, \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \cdots)$$

を次のように決める．

$$\begin{cases} H^k(p) \in R_0 & \text{なら} \quad \alpha_k = 0 \\ H^k(p) \in R_1 & \text{なら} \quad \alpha_k = 1 \end{cases} \tag{3}$$

これを $p \in \Lambda$ の **旅程（itinerary）** という．

ここで，0 と 1 の 両側無限列 とは，α_i を 0 又は 1 とするとき，

$$\alpha = (\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1} \,.\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots)$$

のように，0 と 1 を正と負の両方向に無限に並べたものである．

言いかえると，0 と 1 の両側無限列とは，整数全体の集合から，0 と 1 という 2 つの記号の集合への写像，

$$\alpha : \mathbf{Z} \longrightarrow \{0, 1\}$$

の事であるとも言える．

0 と 1 の両側無限列全体の集合を Σ とする．

両側無限列は，そのままでは基準となる位置が分かりにくいので，-1 番目と 0 番目の間にピリオドを打つことにする．

定義 **12** より，写像 $\varphi : \Lambda \longrightarrow \Sigma$ が得られる．

Λ 上における H の作用は，旅程で見ると，記号列を一つ左へ **shift** することに相当する．

$p \in \Lambda$ に対して $\varphi(p) \in \Sigma$ の i 番目の記号は，

$$\begin{cases} H^i(p) \in R_0 & \Longrightarrow \quad \varphi(p)\,(i) = 0 \\ H^i(p) \in R_1 & \Longrightarrow \quad \varphi(p)\,(i) = 1 \end{cases} \tag{4}$$

によって定義されている．

$H(p) \in \Lambda$ に対して $\varphi(H(p)) \in \Sigma$ を考えてみると，

$$\varphi(H(p))\,(i) = \varphi(p)\,(i+1) \tag{5}$$

なので，無限列 $\varphi(H(p))$ は，$\varphi(p)$ を左へ 1 つ **shift** したものである．

$$\begin{array}{rcccccccccccc} \varphi(p) & = & (\cdots, & \alpha_{-2}, & & \alpha_{-1} \,. & & \alpha_0, & & \alpha_1, & & \alpha_2, & \cdots) \\ & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\ \varphi(H(p)) & = & (\cdots, & \alpha_{-1}, & & \alpha_0 \,. & & \alpha_1, & & \alpha_2, & & \alpha_3, & \cdots) \end{array}$$

そこで **shift map** を次のように定義する．

定義 13. 写像 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ を次のように決める．$\alpha \in \Sigma$ に対して

$$\sigma(\alpha)\,(i) = \alpha(i+1) \tag{6}$$

これを Σ 上の **shift map** と呼ぶ．

(3), (4) より，次の事が成り立つ．

$$\varphi \circ H|_{\Lambda} = \sigma \circ \varphi \tag{7}$$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "H|_{\Lambda}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Lambda \arrow[d, "\varphi"] \\
\Sigma \arrow[r, "\sigma"'] & \Sigma
\end{tikzcd}$$

もし $\varphi : \Lambda \to \Sigma$ が位相同型写像ならば，これは，$H|_{\Lambda} : \Lambda \to \Lambda$ が φ を介して $\varphi : \Sigma \to \Sigma$ と位相共役である事を示している（ Σ 上には距離が定義できて距離空間になるが，これについては後述 ）．

記号列の集合 Σ と，その上の **shift map** $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ は，ひとつの抽象的な力学系とみなす事ができる．

一般にこのようなものを 記号力学系 と呼ぶ．

記号力学系は，その力学系としての性質が非常に調べやすいという利点がある．

この **horseshoe map** の場合に，φ が位相同型写像であることを示すことができれば，Λ 上の H の作用は Σ 上の **shift map** σ によって完全に記述できることになる．

4.2 $H|_{\Lambda}$ の周期点

φ が位相同型写像であることが証明された場合に，周期点について何が言えるのかを見てみよう．まず明らかに次が成り立つ．

命題 2. $H|_{\Lambda} : \Lambda \to \Lambda$ の周期点と $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ の周期点は 1 対 1 に対応している．すなわち，$p \in \Lambda$ が $H|_{\Lambda}$ の周期 m の周期点なら，$\varphi(p)$ は σ の周期 m の周期点であり，逆も成り立つ．

Σ 上の σ の周期点は，記号列を見るだけで簡単に決定できるので，H がどのような周期点をいくつ持つのか，という問題なども，簡単に解決できる．

Λ 上の H の作用は，Σ 上の **shift map** σ の作用と完全に対応するので，H の周期点を調べるためには，$\sigma : \Sigma \to \Sigma$ の周期点を調べれば良い．

まず，不動点を見てみよう．例えば，Σ の中の２つの元 α_0, α_1 で，

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (\cdots, 0, 0, 0.0, 0, \cdots) \\ \alpha_1 &= (\cdots, 1, 1, 1.1, 1, \cdots) \end{aligned}$$

というものを考えてみる．明らかに

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha_0) &= \alpha_0, \\ \sigma(\alpha_1) &= \alpha_1, \end{aligned}$$

であるから，α_0 と α_1 は σ の不動点である．

従って，$\varphi^{-1}(\alpha_0)$, $\varphi^{-1}(\alpha_1)$ は $H|_\Lambda$ の不動点である．

明らかに $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ には，α_0 と α_1 以外の不動点は存在しない．

従って $H|_\Lambda$ には，これらに対応した２個の点以外の不動点は存在しない事がわかる

次に一般の周期の周期点について考えてみよう．これも，$\sigma : \Sigma \to \Sigma$ 上で考えると簡単にわかる．明らかに次が成り立つ．

命題 3. 自然数 m に対して，$\sigma^m(\alpha) = \alpha$ となるような Σ の元は，2^m 個ある．

$\sigma^m(\alpha) = \alpha$ となっているからといって，α は周期が m の周期点とはかぎらない．m の約数の周期を持っていても，これが成り立つからである．
しかし，m 以下の全ての k について，$\sigma^k(\alpha) = \alpha$ となるような元が全てわかっているので，真の周期が m の周期点を計算する事はできる．

H の軌道と σ の軌道は完全に対応するので，例えば，H^{10} の不動点の個数は 1024 個であるということが証明されたことになる．(H^{20} の不動点の個数は $2^{20} = 1,048,576$ 個となる．)

問題 2. **(1)** $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ に対して，真の周期が 2, 3, 4, 5, 6, 7 の「周期軌道」の個数を求めよ．

(2) p を素数とする．$\sigma : \Sigma \to \Sigma$ に対して，真の周期が p であるような「周期軌道」の個数を求めよ．

注意 7. ここで，点 α の真の周期が m であるとは，$\sigma^m(\alpha) = \alpha$ であり，$0 < k < m$ となる k に対しては $\sigma^k(\alpha) \neq \alpha$ となることである．
また，周期軌道の個数とは，一つの周期点 α の軌道 $\{\alpha, \sigma(\alpha), \cdots, \sigma^{m-1}(\alpha)\}$ を一つと数えることを意味する．従って，異なる軌道の中に同じ点が含まれることはない．

4.3 φ が位相同型写像である事の証明

$\varphi : \Lambda \to \Sigma$ が位相同型写像であることを証明する必要があるが，H が満足すべき条件は，まだ曖昧なままになっていた．
H が必要とする条件については，これを証明する過程で，必要となる要請 として決定してゆくことにする．

4.3.1 φ が全射である事の証明

φ が全射であるためには，任意の列 $\alpha \in \Sigma$ に対して，ある $p \in \Lambda$ が存在して，$\varphi(p) = \alpha$ となる事を示せばよい．

$$\alpha = (\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}.\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots) \in \Sigma$$

を任意にとったとき，

$$\Lambda_\alpha = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} H^{-k}(R_{\alpha_k})$$

という Λ の部分集合を考える．

もし，この Λ_α が空集合でないなら，その中の点 $p \in \Lambda_\alpha$ は，その定義から，任意の $k \in \mathbf{Z}$ について，$H^{-k}(R_{\alpha_k})$ に含まれている．

従って，任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して，$H^k(p) \in R_{\alpha_k}$ となるので，$\varphi(p) = \alpha$ である．

この事から，φ が全射である事を示すためには，Λ_α が空集合ではない事を言えばよい．

Λ_α を２つに分けて，

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^+ &= \bigcap_{k=-\infty}^{0} H^{-k}(R_{\alpha_k}), \\ \Lambda_\alpha^- &= \bigcap_{k=1}^{\infty} H^{-k}(R_{\alpha_k}), \end{aligned}$$

とおくと，

$$\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^+ \cap \Lambda_\alpha^-$$

となっており，この Λ_α^+ と Λ_α^- の形を調べて，これらが空集合ではなく，さらに必ず交わる事を示す．

最初に，

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^+ &= \bigcap_{k=-\infty}^{0} H^{-k}(R_{\alpha_k}) \\ &= \bigcap_{k=0}^{\infty} H^{k}(R_{\alpha_{-k}}), \end{aligned}$$

を考えてみよう．

これがどのようなものであるのかは，絵を描いてみるとだいたいわかる．

α は固定しているとして，$m \geq 0$ に対し，

$$\Lambda_m^+ = \bigcap_{k=0}^{m} H^k(R_{\alpha_{-k}})$$

とおくと，

$$\Lambda_0^+ \supset \Lambda_1^+ \supset \Lambda_2^+ \supset \cdots \supset \Lambda_m^+ \supset \cdots$$

であり，

$$\Lambda_\alpha^+ = \bigcap_{m=0}^{\infty} \Lambda_m^+$$

であるが，全ての m に対し，Λ_m^+ は R の上辺 $\overline{CD}$ から，下辺 $\overline{AB}$ へ縦にのびた，細長い帯状の部分集合となることを以下で “証明” する．
これが言えれば，R 上の任意の $y = const$ という直線上では，Λ_α^+ は区間の減少列の共通部分になるので空集合になることはない．

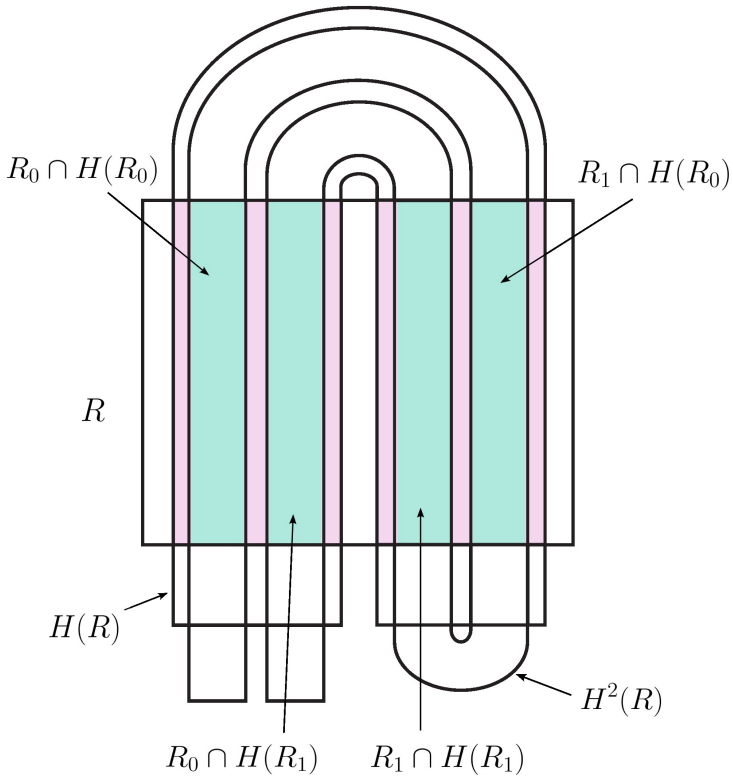
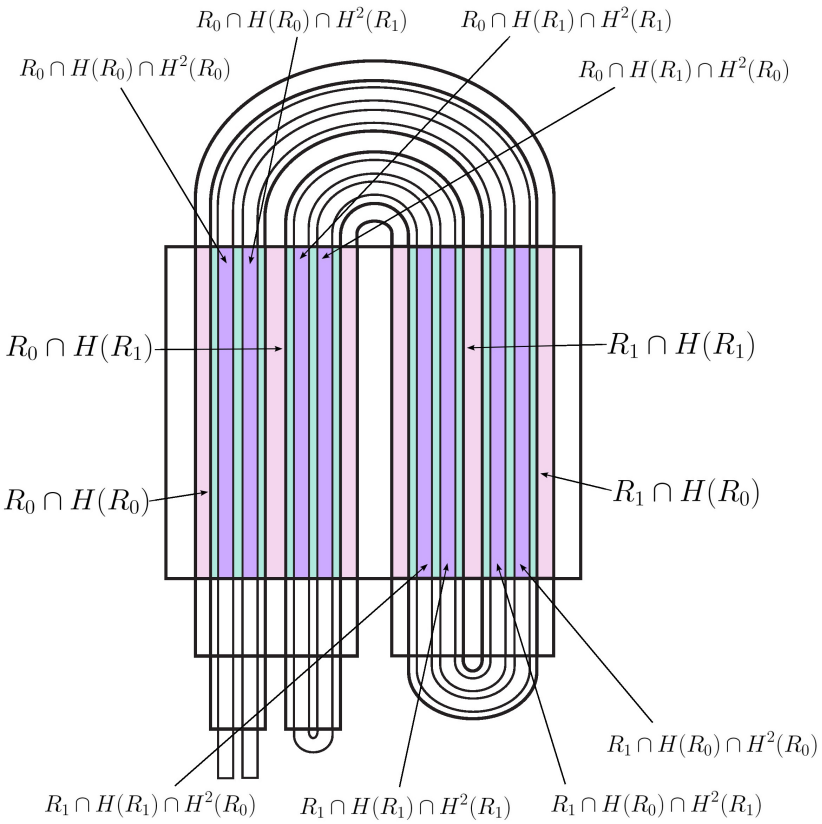


図 27: R, $H(R)$, $H^2(R)$



次の命題が成立する．

命題 4. $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots)$ を **0** と **1** の任意の片側無限列とする．このとき，任意の $m \geq 0$ に対し，

$$\Lambda_m^+ = \bigcap_{k=0}^{m} H^k(R_{\beta_k}),$$

は，$\overline{CD}$ から $\overline{AB}$ へ縦にのびた帯状の部分集合である．

命題 4 の証明： m に関する数学的帰納法で証明する．

$m = 0$ のときは，$\Lambda_0^+ = R_0$ 又は R_1 なので成立している．
m まで成立していたとして，$m+1$ のときを示す．

$$\begin{aligned}
\Lambda_{m+1}^+ &= \bigcap_{k=0}^{m+1} H^k(R_{\beta_k}) \\
&= R_{\beta_0} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{m+1} H^k(R_{\beta_k}) \right) \\
&= R_{\beta_0} \cap H\left(\bigcap_{k=0}^{m} H^k(R_{\beta_{k+1}}) \right).
\end{aligned}$$

帰納法の仮定から，

$$\bigcap_{k=0}^{m} H^k(R_{\beta_{k+1}})$$

は $\overline{CD}$ から $\overline{AB}$ へ縦にのびた帯である．従って，

$$H\left(\bigcap_{k=0}^{m} H^k(R_{\beta_{k+1}})\right)$$

は，$H(R)$ の中で，$\overline{H(C)H(D)}$ から $\overline{H(A)H(B)}$ へのびた細い帯であり，これと $R_{\beta_0}(= R_0$ 又は $R_1)$ との共通部分は $\overline{CD}$ から $\overline{AB}$ へ縦にのびた帯となる．□

この “証明” は当然かなり不正確．線型写像に C^1 で近い，ということからこのようなことを示すにはもう少し正確な議論が必要．

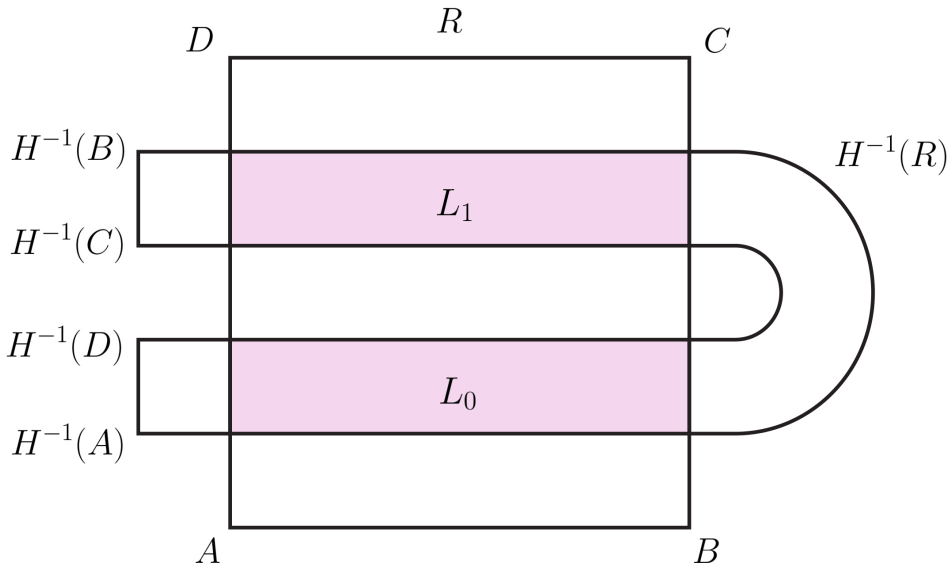
また，どのような条件があればこのようなことが言えるのか，という問題もある．
$\bigcap_{k=0}^{m} H^k(R_{\beta_{k+1}})$ を L とおいたとき，$H(L)$ が，途中で大きく蛇行しなければ良さそうだが，それについてのより正確な表現については，後述（ただし φ が全射である事を示すだけなら，実はそれほど厳しい条件は必要ないが）．

この命題より，$\Lambda_\alpha^+ = \bigcap_{m=0}^{\infty} \Lambda_m^+$ は少なくとも，$\overline{CD}$ から $\overline{AB}$ へとのびている縦の曲線（ **smooth** かどうかはわからないが）を含む事がわかる．

次に，

$$\Lambda_\alpha^- = \bigcap_{k=1}^{\infty} H^{-k}(R_{\alpha_k}),$$

を考えてみよう．



$R \cap H^{-1}(R)$ の２つの横の帯を L_0, L_1 とすると，次のようになっている．

$$L_0 = H^{-1}(R_0), \qquad L_1 = H^{-1}(R_1)$$

注意 8. 実は **horseshoe map** は

$$H : L_0 \cup L_1 \to R_0 \cup R_1$$

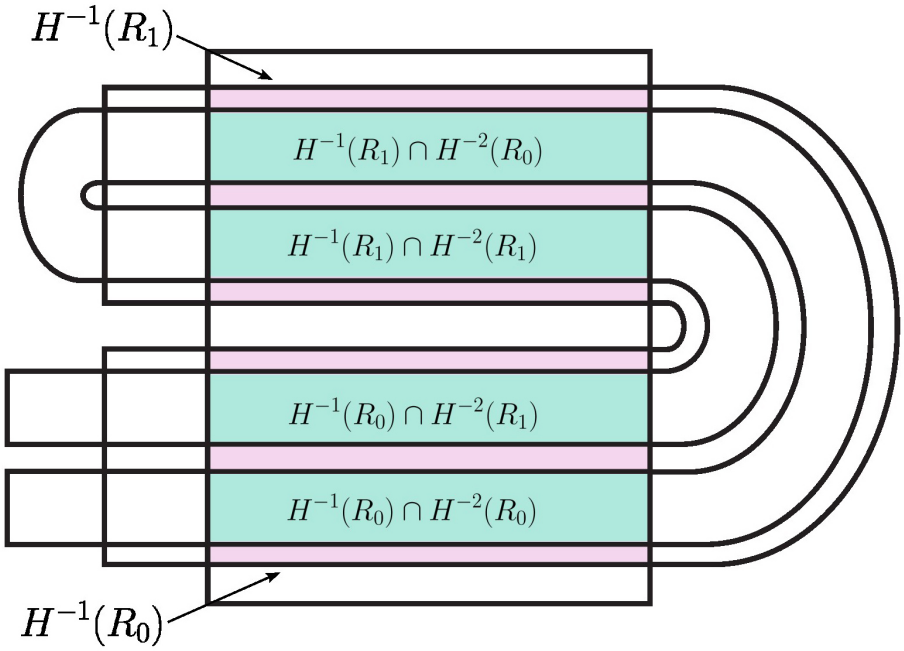
という写像であり $H(L_0) = R_0$，$H(L_1) = R_1$ であって，これらの上でほぼ線型になっているもの，とするのが正確な定義である（それ以外のところでは R の外に行ってしまうため）．

Λ_α^+ の時と同様に，$m \geq 0$ に対し，

$$\Lambda_m^- = \bigcap_{k=1}^{m} H^{-1}(R_{\alpha_k})$$

とおくと，各 Λ_m^- は，R の左の辺 $\overline{AD}$ から右の辺 $\overline{BC}$ へと横にのびた細い帯になり，次のような減少列となる．

$$\Lambda_1^- \supset \Lambda_2^- \supset \cdots \supset \Lambda_m^- \supset \cdots$$



$$\Lambda_\alpha^- = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Lambda_m^-$$

は $\overline{AD}$ から $\overline{BC}$ へと横にのびた曲線を含む．

$$\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^+ \cap \Lambda_\alpha^-$$

だったが，
Λ_α^+ は $\overline{CD}$ から $\overline{AB}$ への縦の曲線を含み，
Λ_α^- は $\overline{AD}$ から $\overline{BC}$ への横の曲線を含むので，
これらは必ず交わり，Λ_α は空集合ではない事が示される．

以上で，$\varphi : \Lambda \to \Sigma$ が全射である事が示された．

4.4 φ が単射である事の証明

次に φ が単射となる事を示す．

その方針は全射を示した議論をよくみると明らかとなってくる．

$\alpha \in \Sigma$ に対し，$\varphi(p) = \alpha$ となるような $p \in \Lambda$ 全体が $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^+ \cap \Lambda_\alpha^-$ だった．

すなわち $\varphi^{-1}(\alpha) = \Lambda_\alpha$ である．

従って，この Λ_α が一点だけから成る集合なら，φ は単射という事になる．

$$\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^+ \cap \Lambda_\alpha^- = \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \Lambda_m^+\right) \cap \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \Lambda_m^-\right)$$

であり，

$$\Lambda_m^+ = \bigcap_{k=0}^{m} H^k(R_{\alpha_{-k}}), \qquad \Lambda_m^- = \bigcap_{k=1}^{m} H^{-k}(R_{\alpha_k})$$

は，m が大きくなるにつれて，指数関数的に細くなっていくので，それらの幅は 0 に収束し，Λ_α^+ と Λ_α^- はそれぞれ R における縦と横の単なる曲線になると思われる．

実はこれらの曲線は大きく曲がってはいない C^1-曲線となることを示すことができ，これらの交点は 1 点のみとなり，φ が単射となることが示される．
（正確な議論は省略）

4.5 Λ の形状

Λ が R の中のどのような部分集合であるのか調べてみよう．

$$\Lambda^+ = \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(R), \qquad \Lambda^- = \bigcap_{k=0}^{\infty} H^{-k}(R)$$

とおくと，

$$\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$$

である．

$$\Lambda_m^+ = \bigcap_{k=0}^{m} H^k(R), \qquad \Lambda_m^- = \bigcap_{k=0}^{m} H^{-k}(R)$$

とおくと，

$$\Lambda_0^+ \supset \Lambda_1^+ \supset \Lambda_2^+ \supset \cdots \supset \Lambda_m^+ \supset \cdots$$
$$\Lambda_0^- \supset \Lambda_1^- \supset \Lambda_2^- \supset \cdots \supset \Lambda_m^- \supset \cdots$$

であり，これらの極限が，Λ^+, Λ^- となるのだが...

φ が全単射である事を示した議論の中でも出てきたように，

$$\Lambda_1^+ = R \cap H(R) = R_0 \cup R_1$$

であり，

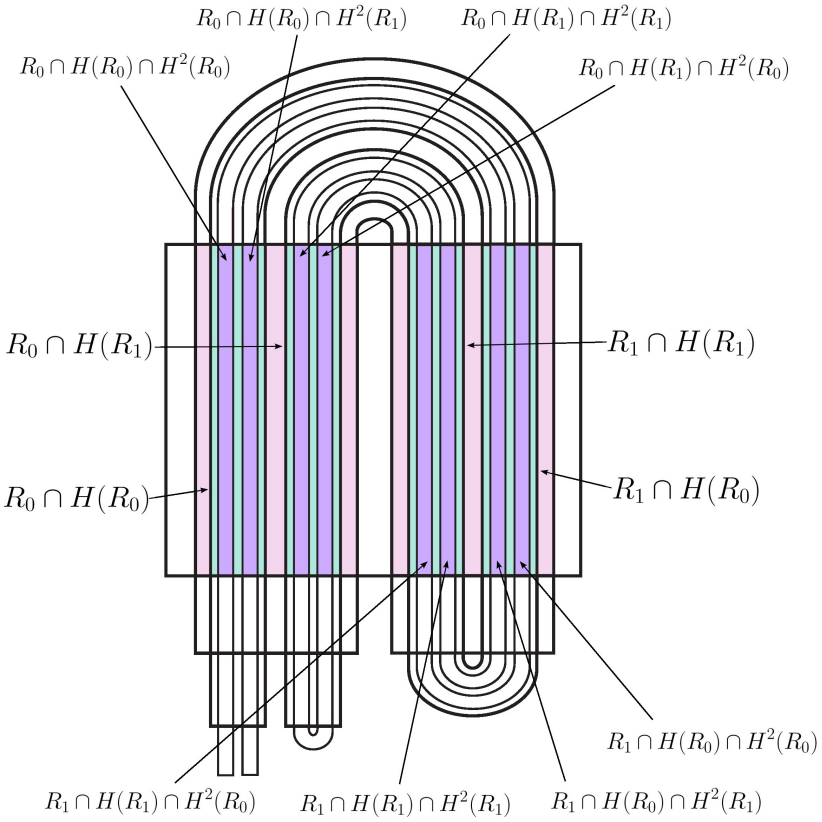
$$\Lambda_2^+ = R \cap H(R) \cap H^2(R)$$

は R_0, R_1 の中にそれぞれ２本づつ縦にのびた合計 4 本の帯である．

同様に

$$\Lambda_3^+ = R \cap H(R) \cap H^2(R) \cap H^3(R)$$

は Λ_2^+ の各帯の中に縦に **2** 本づつのびた合計 **8** 本の細い帯となる．



この事から，$R = I \times J$ としたとき，$\Lambda_1^+ = R_0 \cup R_1$ は I の中の２つの閉区間 I_0, I_1 と J との積空間と位相同形であり，Λ_2^+ は I_0, I_1 の中にそれぞれ **2** つづつとった，合計 **4** つの閉区間と J との積空間と位相同形である．

そして，$\Lambda_3^+, \Lambda_4^+, \cdots$ は同様の操作を繰り返したものとなる．

一般に，閉区間 I の中の互いに交わらない２つの閉区間を I_0, I_1 とし，

$$I^1 = I_0 \cup I_1$$

とする．

I_0, I_1 の中にそれぞれ２つづつとった互いに交わらない合計４つの閉区間の和集合を I^2 とする．
I^2 の各閉区間の中にそれぞれ２つづつとった，互いに交わらない合計８つの閉区間の和集合を I^3 とする．

同様の操作により $I^4, I^5, \cdots$ を作ると，

$$I^1 \supset I^2 \supset I^3 \supset \cdots$$

という閉集合の減少列ができる．

I^k に含まれる各閉区間の長さが $k \to \infty$ のときに 0 に収束するとき，

$$\Delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} I^k$$

を カントール集合（Cantor set） という．

この定義では，閉区間の中の **2** つの閉区間のとり方を特に指定していないので，その決め方により Δ は異なる集合となるが，実はどのようにとっても Δ は全て位相同形となる事が知られている．

Λ^+ は I の中のあるカントール集合 Δ_I と J との積集合と位相同形となる．

$$\Lambda^+ \cong \Delta_I \times J$$

同様に，Λ^- は J の中のあるカントール集合 Δ_J と I との積集合 $I \times \Delta_J$ と位相同形となっている．

Λ^+ の中の縦の曲線と，Λ^- の中の横の曲線は，それぞれ，それほど垂直，水平からずれていないことを示すことができるので，

$$\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$$

は，**2** つのカントール集合 Δ_I と Δ_J の積集合 $\Delta_I \times \Delta_J$ と位相同形となる．

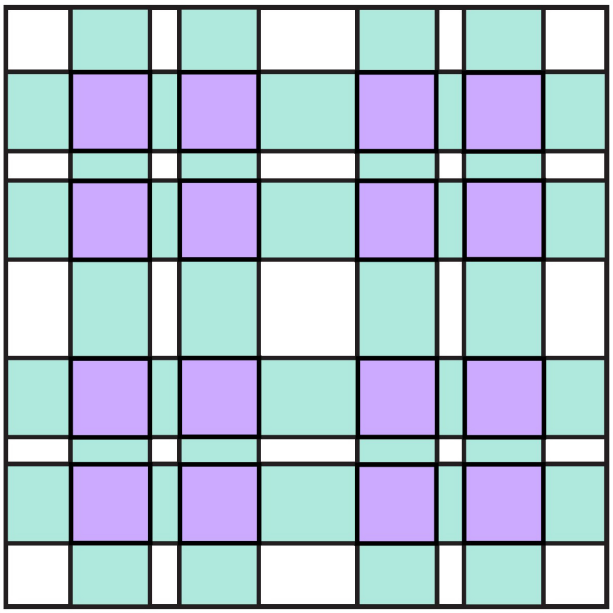


図 28: $\Lambda_2^+ \cap \Lambda_2^-$

4.6 φ の連続性

今までは，$H : \Lambda \to \Lambda$ と $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ は単なる写像として φ によって対応していたわけだが，Σ に適当な距離を導入することにより，φ を位相同形とする事ができる．

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Lambda \arrow[d, "\varphi"] \\ \Sigma \arrow[r, "\sigma"'] & \Sigma \end{tikzcd}$$

これにより，$H : \Lambda \to \Lambda$ と $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ は位相共役となり，記号力学系 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ の方から，点同士の近さに関わる情報をも得る事ができる．

Σ に次のように距離を定義する．これは記号力学系における距離の標準的な定義．

定義 14. $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbf{Z}}$，$\beta = (\beta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ を Σ の元とする．α と β の距離 $d(\alpha, \beta)$ を次のように定義する．

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\alpha_i, \beta_i)}{2^{|i|}}$$

ここで $\delta(a, b)$ は，$a = b$ ならば 0，$a \neq b$ ならば 1 を表す．

$|i|$ が大きくなるほど，$|\alpha_i - \beta_i|$ の距離に与える影響が指数関数的に小さくなる．

これは Λ の方で見た時に，小さなブロック内での違いは，距離としては影響が小さい，ということに対応しているので，φ が連続になることが予想できる．実際，次が成り立つ．

命題 5. Λ 上に $\mathbf{R}^2$ の普通の距離が定義されているとき，
$\varphi : \Lambda \to \Sigma$ は位相同形写像である．

（証明略）

φ が位相同形であるという事実は，$H|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ の性質に関して，さらに多くの情報を与えてくれる．例えば，

命題 6.

(1) Σ の任意の点 α に対し，α のいくらでも近くに $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ の周期点が存在する．

(2) Λ の任意の点 p に対し，p のいくらでも近くに $H|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ の周期点が存在する．

命題 6 の証明:

(1) α を Σ の任意の点とし，$\epsilon > 0$ を任意に与えたとき，Σ の周期点 β で，$d(\alpha, \beta) < \epsilon$ となるものが存在する事を言えばよい．

β を次のように決める．十分大きな $k > 0$ に対し，$-k \leq i \leq k$ となる全ての $i \in \mathbf{Z}$ に対し，$\beta_i = \alpha_i$ と決め，さらに β は，この $\alpha_{-k}, \alpha_{-k+1}, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ という長さ $2k+1$ の列を左右に無限に並べたものとする．

こうすると β は周期点であり，

$$d(\alpha,\beta) \le 2\sum_{i\ge k+1}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

であるから，k が十分大なら $d(\alpha,\beta)<\epsilon$ となる．

(2) $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ と $H|_\Lambda:\Lambda\to\Lambda$ との位相共役 φ が存在するので **OK**．□

$H|_\Lambda$ はさらに，位相的推移性 と呼ばれる性質を持っている．

定義 15. X を距離空間，$f:X\to X$ を位相同型写像とする．$Orb_f(x)$ が X で稠密となるような $x\in X$ が存在するとき，f は **位相推移的（topologically transitive）** であるという．

位相推移的とは，力学系として分割できない（**2** つ以上の **disjoint** な不変な開集合に分けることができない）というイメージ．

$H|_\Lambda:\Lambda\to\Lambda$ が位相推移的であることを示すには，$\sigma:\Sigma\to\Sigma$ がそうなることを言えばよいが，Σ 上では，その軌道が稠密になるような点を簡単に作る事ができる．

命題 7. ある $\alpha\in\Sigma$ で，次の性質を持つものが存在する．
任意の $\beta\in\Sigma$ と任意の $\epsilon>0$ に対して，ある $k\in\mathbf{Z}$ が存在して

$$d(\sigma^k(\alpha),\beta)<\epsilon$$

命題 7 の証明：
α は次のように作ればよい．

長さ m をきめると，その長さの 0 と 1 の列のパターンは 2^m 通りしかない．
そこで，$m=1,2,3,\cdots$ に対し，長さ m の $0,1$ 列の全てのパターンを順に左右に並べてゆく．

$$\alpha=(\cdots,\underbrace{0,0,0},\underbrace{1,0},\underbrace{0,0},\underbrace{0},\underbrace{1},\underbrace{0,1},\underbrace{1,1},\underbrace{0,0,1},\cdots)$$

そうすると，任意の **0** と **1** の有限列を指定したとき，α の中のどこかにそれが存在する事になる．
この α が求める性質を満たす事は明らかだろう．□

4.7 双曲型集合

Horseshoe map H については，それが C^1 でわずかに変わって G になったとしても，やはり不変集合 Λ' を持ち，$G|_{\Lambda'}$ は $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ と位相共役になることを示すことができる．

このことは，ある位相同型写像 $h : \Lambda \to \Lambda'$ があって，$H|_\Lambda$ と $G|_{\Lambda'}$ が位相共役になることを意味している．

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "H|_\Lambda"] \arrow[d, "h"'] & \Lambda \arrow[d, "h"] \\ \Lambda' \arrow[r, "G|_{\Lambda'}"'] & \Lambda' \end{tikzcd}$$

すなわち，$H|_\Lambda$ は "構造安定" だということになる．

Smale は，構造安定であって，さらに無限個の周期点をもつような力学系を発見した．

微分同相写像が構造安定であることの正確な定義は次のようになる．

定義 16. M を C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像とする．f が C^r-構造安定 であるとは，$\mathbf{Diff}^r(M)$ における f のある近傍 $\mathcal{U}$ が存在し，任意の $g \in \mathcal{U}$ が f と位相共役となること．すなわち，$hf = gh$ を満たす位相同型写像 $h : M \to M$ が存在すること．

注意 9. H は長方形 R の上でしか定義されていなかったが，その外の部分を適当に調整することにより，例えば $\mathbf{S}^2$ 上の微分同相写像に拡張でき，それが構造安定な微分同相写像となるようにできる．
この場合，Λ 以外のところでは，その軌道の動きが単純で良く分かるようなものとして作ることができる．

このような構造の安定性がどこから来ているのか，ということを考えると，各点で 拡大と縮小 の方向がはっきりとあって，中途半端な方向が無い，ということが理由だと思われる．

そこで **Smale** は，次の概念に行きついた．

定義 17. M を C^∞-多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（$r \geq 1$），$\Lambda \subset M$ を f-不変集合とする（$f(\Lambda) = \Lambda$）．
Λ が f の 双曲型集合（ **hyperbolic set** ） であるとは，$TM|_\Lambda$ の Tf-不変な連続部分ベクトル束 E^s, E^u （ $Tf(E^s) = E^s$，$Tf(E^u) = E^u$ ）と，ある $C > 0$ と $0 < \lambda < 1$ があって次が成り立つこと．

(1) $TM|_\Lambda = E^s \oplus E^u$

(2) $|Tf^n(v)| \leq C\lambda^n|v| \quad (\ \forall v \in E^s,\ \forall n \geq 0\ )$

$|Tf^{-n}(v)| \leq C\lambda^n|v| \quad (\ \forall v \in E^u,\ \forall n \geq 0\ )$

ここからわずか **10** 年ほどの間に，双曲力学系理論は急激に発展し，多くの事が解明されて行くことになる（主に **UC Berkeley** で）．

注意 10. 以下では，基本的に写像の力学系のみを扱う．すなわち，C^∞-多様体 M 上の微分同相写像 $f : M \to M$ について，その軌道の構造がどのようになるのか，という問題を考える．

ベクトル場とそれに対応した流れについては，写像の力学系と同様の結果が成り立つ場合が多い．

ただ，流れの力学系については，記述がやや面倒になるということと，両方述べる時間的余裕が無い，という理由から，以下では基本的に写像の力学系だけを考えることにする．

5　局所線形化

力学系の定性的な性質を調べようとする時，最初に調べるべき対象は局所的な構造だろう（ 局所的に f の軌道がどうなっているのかを調べる．多様体全体でどうなっているのか，というのは難しい ）．

最も基本的なのは，不動点のまわりでどうなっているのか？　という問題だと言える．特に，

「不動点のまわりの局所的な座標変換で，その写像を線型化できるか？」

というのは，昔からいろいろな状況で重要な問題となっている．

以下では，特にことわらない限り，M は n 次元 C^∞-リーマン多様体を表すものとし，そのリーマン計量から定まる M 上の距離を $d(\cdot,\cdot)$ とする．

$f : M \to M$ を C^r 微分同相写像とする（ $r \geq 1$ ）．
$p \in M$ を f の不動点としたとき（ $f(p) = p$ ），p のまわりで f の軌道がどうなっているのかを調べたい．

局所座標で表すことにより，f は $\mathbf{R}^n$ の 0 の近傍から 0 の近傍への局所 C^r-微分同相写像であるとして良い．すなわち，ある開集合 $0 \in U \subset \mathbf{R}^n$ があり，次のようになっているとする．

(1) $f(0) = 0$

(2) $f : U \to f(U)$ は C^r-微分同相写像

この時に，座標変換によって f を局所的に線型写像にできるか，という問題を考える．

すなわち $L = Df(0)$ とした時，局所的に，ある C^s-微分同相写像 h で（ $s \geq 0$ ），

$$h^{-1} f h = L$$

となるようなものがあるか？　という問題を考える．

これができれば，f は 0 のまわりでは，線型写像と（ C^s-級の意味で）同じ軌道構造を持っているということになる．

これが可能のとき，f は 0 のまわりで C^s-級で 線型化可能 という．

定義 18.

(1) L を $n \times n$-行列とする．絶対値 1 の固有値を持たない時 L を **双曲型（hyperbolic）** という．

(2) $f : M \to M$ を C^r 微分同相写像（ $r \geq 1$ ），$p \in M$ を f の不動点とする．p が **双曲型（ hyperbolic ）** であるとは，$T_p f : T_p M \to T_p M$ が絶対値 1 の固有値を持たないこと．

(3) $p \in M$ を f の周期 m の周期点とする．すなわち $f^m(p) = p$.

p が **双曲型（ hyperbolic ）** であるとは，$T_p f^m : T_p M \to T_p M$ が絶対値 1 の固有値を持たないこと．

(4) 特に $T_p f^m$ の固有値の絶対値が全て 1 より小さい時 p を **sink**，固有値の絶対値が全て 1 より大きい時 p を **source** という．また，絶対値が 1 より大きい固有値と 1 より小さい固有値の両方を持つ時 p を **saddle** という．

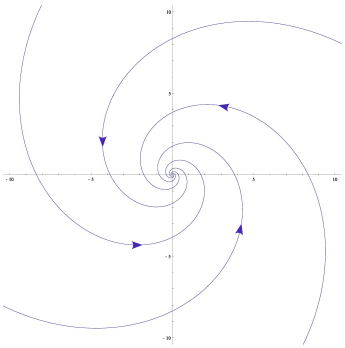


図 29: Sink

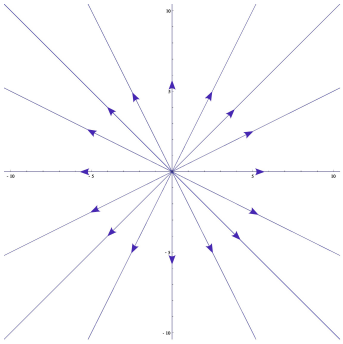


図 30: Source

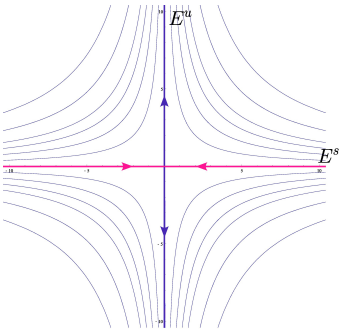


図 31: Saddle

5.1 微分可能な座標変換： Sternberg の定理

- このような線型化するような座標変換が存在するのか？
- 存在するなら，その座標変換を与える写像は微分可能なものがとれるのか？

ということが問題となる．

一般には，f が単なる多項式であったとしても，微分可能写像による線型化ができないものがあることが知られている．

例 3.

$\mathbf{R}^3$ 上の２次多項式で表される微分同相写像であって，原点は双曲型不動点だが，原点のまわりで C^1 で線形化できないものがある．

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ac(y+\epsilon xz) \\ cz \end{pmatrix}$$

ここで，$0 < c < 1 < a, \quad ac > 1, \quad \epsilon > 0.$

この場合は，f の 0 での微分 $Df(0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = ac$, $\lambda_3 = c$ の間に，$\lambda_1 \cdot \lambda_3 = \lambda_2$ という関係（**resonance**）がある．

問題 3. [難]

この f が 0 のまわりで C^1-写像によって線型化できないことを証明せよ．
言い換えると，0 の近傍で定義された C^1-級写像 h で $Dh(0)$ が非退化であり 0 の近傍で $fh = hDf(0)$ となるようなものは存在しない，ということを証明せよ．

このような固有値間の関係（**resonance** という）が無ければ可微分写像による線型化が可能，ということを主張するのが **Sternberg** の定理．

定理 3 (Sternberg の定理).

：$r \geq 1$ (**or** $r = \infty$) を自然数とする．この時，ある自然数 $N(r) \geq 2$ (**or** $N(r) = \infty$) で，次の性質を持つものが存在する．
L を正則な実 $n \times n$-行列で，その固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とした時，

$$\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_n^{m_n} \neq \lambda_k$$

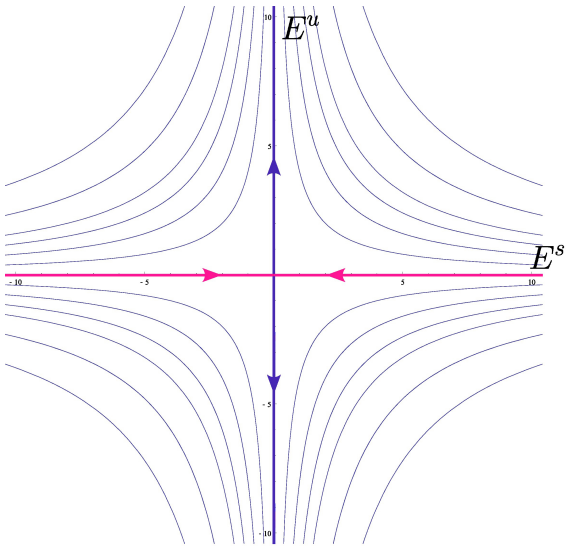
が，任意の $k = 1, \cdots, n$ と，$2 \leq \sum_{j=1}^n m_j \leq N(r)$ を満たす任意の非負整数の組 $m_1, \cdots, m_n$ に対して成り立っているようなものとし，$g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を 0 の近傍において定義された $C^{N(r)}$-級写像で，$g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$ を満たすものとすると，0 の近傍で定義された $h(0) = 0$ となる C^r-級の局所微分同相写像 h が存在し，次が成り立つ．

$$h^{-1}\left(Lx + g(x)\right)h(x) = Lx$$

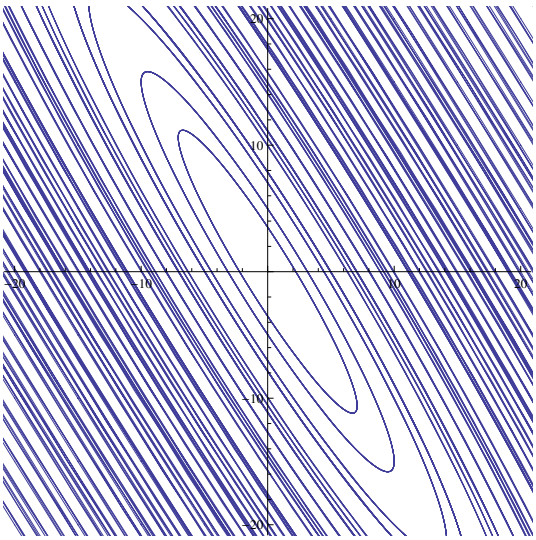
注意 11. $N(r) \geq 3$ なら，上の固有値の **non-resonance** 条件を満たす L は双曲型でなければならない．なぜなら，双曲型ではないとすると絶対値 1 の固有値を持つが，$\lambda = 1$ なら $\lambda^2 = \lambda$, $\lambda = -1$ なら $\lambda^3 = \lambda$, λ が複素数（実数ではない）で $|\lambda| = 1$ なら $\lambda^2\overline{\lambda} = \lambda$ となるため．

5.2 Harman-Grobman の定理

$Df(0)$ が双曲型であれば位相的には線型化が可能，ということを主張するのが **Hartman-Grobman** の定理.



双曲型ではない場合には，写像のわずかな変化で，軌道の構造は変わってしまう.



定理 4 (Hartman-Grobman の定理：). M を C^∞ 多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像 $(r \geq 1)$，$p \in M$ を f の双曲型不動点とする．
このとき，p の近傍 U，T_pM における 0 の近傍 W，位相同型写像 $h : W \to U$ が存在し，$V \cup (T_pf)(V) \subset W$ となる 0 の近傍 V において次が成り立つ．

$$f(h(v)) = h(T_pf(v)) \qquad (\ \forall v \in V\ )$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_pf"] \arrow[d, "h"'] & (T_pf)(V) \arrow[d, "h"] \\ U \arrow[r, "f"'] & f(U) \end{tikzcd}$$

注意 12.

(1) この定理は，**P. Hartman [H1] (1960)** と **D. Grobman [Gr1] (1959)** （**announcement** のみ）**[Gr2] (1962)** によって独立に証明された．常微分方程式の特異点の場合について証明している．

(2) **Hartman** の論文を見ると，これは **Peixoto** によって提起された問題であって，この論文の目的は，その問題に肯定的に解答することである，と書かれている．

5.3 双曲型共役定理

Hartman-Grobman の定理の証明は省略するが，定理の本質的な部分を述べている共役定理について紹介する．

定義 19. (X, d) を距離空間とする．写像 $f : X \to X$ が **Lipschitz 連続** であるとは，ある定数 $K > 0$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(f(x), f(y)) \leq K\, d(x, y)$$

となること．これを満たす数 K の下限を $Lip(f)$ と書き，f の **Lipschitz 定数** という．やはり，任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(f(x), f(y)) \leq Lip(f)\, d(x, y)$$

が成り立つ．

ここで **Banach** 空間についての基礎知識．

定義 20. $K = \mathbf{R}$ **or** $\mathbf{C}$ とする．E を K 上のベクトル空間とする．E に位相が入っていて，和（ $(x, y) \to x + y$ ）とスカラー倍 （ $(\lambda, x) \to \lambda x$ ）が連続の時，E を **位相ベクトル空間** という．

定義 21. E を K 上のベクトル空間とする．各 $x \in E$ に対して 0 以上の実数 $||x||$ が定まっていて次の条件を満たすとき，$(E, ||\cdot||)$ を ノルム空間 といい，$||x||$ を x のノルムという．

(1) $||x|| = 0 \iff x = 0$

(2) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x|| \quad \forall\lambda \in K,\ \forall x \in E$

(3) $||x + y|| \leq ||x| + ||y||$

定義 22. ノルム空間 E に対して，$d(x, y) = ||x - y||$ によって E 上の距離が定義できる．この距離から定まる位相によって，E は位相ベクトル空間となる．この距離に関して完備距離空間となるとき，E を **Banach 空間** という．

命題 8. E, F をノルム空間，$L : E \to F$ を線型写像とすると，

$$L \text{ は連続} \iff \text{ある実数 } c \geq 0 \text{ があって } \quad ||L(x)|| \leq c||x|| \quad (\forall x \in E)$$

定義 23. E, F をノルム空間，$L : E \to F$ を連続線型写像とする．

$$\inf\{c \geq 0 \mid ||L(x)|| \leq c||x|| \quad \forall x \in E\}$$

を $||L||$ と書き，L のノルムという．

E を **Banach** 空間，$C_b^0(E)$ を E からそれ自身への有界な連続写像全体の集合とする．$f \in C_b^0(E)$ に対し

$$||f|| = \sup\{||f(x)||\ ;\ x \in E\}$$

とすると，$C_b^0(E)$ はノルム空間となる．

このノルムから定まる距離は完備であり，$C_b^0(E)$ は **Banach** 空間となる．

定義 24. E を複素 **Banach** 空間，$L : E \to E$ を連続線型写像，$I : E \to E$ を恒等写像とする．

$$\rho(L) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda I - L : E \to E \text{ は線型同相写像 }\}$$

を L の レゾルベント集合 といい，$\sigma(L) = \mathbf{C} - \rho(L)$ を L の スペクトル という．

命題 9. $\sigma(L)$ はコンパクトである．

定義 25. E を実ベクトル空間とし，$L : E \to E$ を線型写像とする．

(1) E_c を $u + iv$ （$u, v \in E$）という形の元全体の集合とする．i を虚数単位だと思って E_c に和と複素数倍を定義することによって，E_c は複素ベクトル空間となる．これを E の複素化という（厳密には $E \times E$ に適切に和と複素数倍を定義する）．

(2) $L_c : E_c \to E_c$ を $L_c(u + iv) = L(u) + iL(v)$ によって定義すると，L_c は線型写像となる．これを L の複素化という．

定義 26. **(1)** E を複素 **Banach** 空間，$L : E \to E$ を線型同相写像とする．$\sigma(L) \cap \mathbf{S}^1 = \emptyset$ のとき，L を 双曲型線型同相写像 という．ここで $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

(2) E を実 **Banach** 空間，$L : E \to E$ 線型同相写像とする．このとき $L_c : E_c \to E_c$ は線型同相写像となることが分かるが，これが双曲型のとき L を双曲型線型同相写像という．

注意 13. $E = \mathbf{R}^n$ または $\mathbf{C}^n$ の場合には，線型写像 $L : E \to E$ が双曲型とは，絶対値 1 の固有値を持たないこと．

定義 27. E をノルム空間．E_1, E_2 を E の部分ベクトル空間とする．ベクトル空間として $E = E_1 \oplus E_2$ であって，$\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ で定義した $\phi : E_1 \times E_2 \to E$ が同相写像のとき，$E = E_1 \oplus E_2$ を位相直和という．このとき，E_1, E_2 は E の閉部分ベクトル空間となる．

双曲型線型同相写像は，次のように特徴付けられる．

定理 5. E を実または複素 **Banach** 空間，$L : E \to E$ を線型同相写像とする．L が双曲型であるための必要十分条件は次の **(1),(2)** が成り立つことである．

(1) E の L-不変な閉部分ベクトル空間 E^s, E^u （ $L(E^s) \subset E^s$, $L(E^u) \subset E^u$ ）が存在して位相直和 $E = E^s \oplus E^u$ が成り立つ．

(2) ある定数 $C > 0$ 及び $0 < \lambda < 1$ となるある定数 λ が存在して，任意の $n \geq 0$ に対して次が成り立つ．

$$||L^n v|| \leq C\lambda^n ||v|| \quad (\ \forall v \in E^s\ )$$

$$||L^{-n} v|| \leq C\lambda^n ||v|| \quad (\ \forall v \in E^u\ )$$

Hartman-Grobman の定理は，次の定理から得られる．

定理 6 (双曲型共役定理). E を **Banach** 空間，$C_b^0(E)$ を E からそれ自身への有界な連続写像全体の集合がなす **Banach** 空間．$L : E \to E$ を双曲型線型同相写像とする．このとき，ある $\epsilon > 0$ が存在して次が成り立つ．
$Lip(\phi) < \epsilon$, $Lip(\psi) < \epsilon$ となる任意の $\phi, \psi \in C_b^0(E)$ に対して，ある $\eta \in C_b^0(E)$ で，$id + \eta$ が同相写像となり

$$(L + \psi)(id + \eta) = (id + \eta)(L + \phi)$$

が成り立つようなものが一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "L+\phi"] \arrow[d, "id+\eta"'] & E \arrow[d, "id+\eta"] \\ E \arrow[r, "L+\psi"'] & E \end{tikzcd}$$

この双曲型共役定理から **Hartman-Grobman** の定理が言える．

M を n-次元 C^∞ 多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像 $(r \geq 1)$，$p \in M$ を f の双曲型不動点とする．局所座標で表すことにより，f は $\mathbf{R}^n$ の 0 の近傍で定義された局所微分同相写像で $f(0) = 0$ となるものとする．
$Df(0) = L$ とする．$\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を，0 の近傍では $f - L$ となっていて $Lip(\phi)$ が十分小さい有界連続写像とし $\psi = 0$ とすると，双曲型共役定理より，ある同相写像 $id + \eta$ があって

$$(L + \phi)(id + \eta) = (id + \eta)L$$

が成り立つ．$f = L + \phi$ なので，$h = id + \eta$ とすると 0 の近くでは

$$h^{-1} f h = Df(0)$$

が成り立つ．

5.4 局所構造安定性

微分同相写像 f が双曲型不動点 p を持つとき，f に十分に近い位相同型写像 g を p のまわりで考える．

局所座標を使って $\mathbf{R}^n$ 上の $p = 0$ のまわりで考え，$L = Df(0)$ とする．

$$f = L + (f - L), \qquad g = L + (g - L)$$

と書けるので，ϕ, ψ をそれぞれ，$f - L$，$g - L$ を $\mathbf{R}^n$ 全体に拡張した時に **Lipschitz** 定数が十分に小となるものとすると，双曲型共役定理から，ある位相同型写像 $h = id + \eta$ が存在して，

$$(L + \phi)h = h(L + \psi)$$

が成り立つ．従って 0 の近傍で $fh = hg$ が成り立つ．
これを，双曲型不動点のまわりでの 局所構造安定性 という．

なお，微分同相写像 f, g が，それぞれ 双曲型不動点 p, q を持つとき，もしそれらのまわりで，局所的に可微分共役 h があったとすると，
$h(p) = q$ であり $hf = gh$ なので，

$$(T_q h^{-1})(T_q g)(T_p h) = (T_p h)^{-1}(T_q g)(T_p h) = T_p f$$

となり，$T_q g$ と $T_p f$ の固有値は一致していなければならない．

一般には，摂動を行うと，固有値の値は変わる場合がほとんどなので，そのような場合は可微分な共役は存在し得ない．

6 （不）安定多様体定理

力学系を幾何学的に調べようとするとき，最も重要な道具となるのが（不）安定多様体である．

微分同相写像 $f : M \to M$ の不動点 p に対してその 安定多様体 は，その軌道が p に近づいて行くような点全体の集合として定義される．

局所的には，f を p のまわりで線形化したときに，絶対値が 1 より小さな固有値に対応した（一般）固有空間がそれになる．

安定多様体は f, f^{-1} で不変なので，それは大域的に広がってゆき，f の軌道構造の大域的な構造を調べる際に非常に重要な道具となる（不安定多様体は f^{-1} についての安定多様体として定義される）．

1960 年代の **UC Berkeley** における **Smale** とそのグループによって作り上げられた双曲力学系理論では，（不）安定多様体を縦横無尽に使うことによって，力学系の大域的な構造が解明されていく（特にスペクトル分解やマルコフ分割などの証明においてだが，これらについては後述）．

不動点や周期点の安定多様体を最初に考えたのはやはり **Poincaré (1882)** のようだ．

Poincaré は 2 次元の解析的な写像について，不動点の安定多様体の存在を証明している．**Hadamard (1901)** は 2 次元の C^1-写像について安定多様体の存在を示しているが，その安定多様体が C^1 であることを示したのは **Sternberg (1955)** である．
その他，**Peron (1929), Lewis (1938)** などが関連した結果を出している．

現在のような安定多様体定理は **Sternberg (1957)** で述べられているが証明は完全なものではなく，最終的に正確な証明を与えたのは **Hartman (1960)** のようだ（このあたりの歴史的なことについては **Hartman** [**H2**] に詳しい）．

このように，安定多様体定理自体は **Poincaré** の時代からあり，それが徐々に一般的な形に発展してきたが，最終型が完成したのは偶然にもと言うべきか，**Smale** が **horseshoe map** を発見した丁度その頃ということになる．

定義 28. M を m-次元 C^∞-リーマン多様体，d をリーマン計量から定まる距離，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（$r \geq 1$），p を f の双曲型不動点とする．

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{\ x \in M \mid d(f^n(x), p) \to 0 \quad (n \to \infty)\ \} \\ W^u(p) &= \{\ x \in M \mid d(f^{-n}(x), p) \to 0 \quad (n \to \infty)\ \} \end{aligned}$$

をそれぞれ p の 安定多様体，不安定多様体（**stable manifold, unstable manifold**）という．

この定義からは $W^s(p)$，$W^u(p)$ が多様体になるかどうかはわからないが，後でそのことを証明する．

定義 29. p が周期 k の双曲型周期点の場合には f^k の双曲型不動点となるので，その（不）安定多様体を p の（不）安定多様体と定義する．すなわち，

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{\ x \in M \mid d(f^{kn}(x), p) \to 0 \quad (n \to \infty)\ \} \\ W^u(p) &= \{\ x \in M \mid d(f^{-kn}(x), p) \to 0 \quad (n \to \infty)\ \} \end{aligned}$$

問題 4. p が周期 k の双曲型周期点のとき，次が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{\ x \in M \mid d(f^{n}(x), f^{n}(p)) \to 0 \quad (n \to \infty)\ \} \\ W^u(p) &= \{\ x \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \to 0 \quad (n \to \infty)\ \} \end{aligned}$$

命題 10. **(1)** p が f の周期 k の双曲型周期点ならば

$$f^k(W^s(p)) = W^s(p), \quad f^{-k}(W^s(p)) = W^s(p)$$

$$f^k(W^u(p)) = W^u(p), \quad f^{-k}(W^u(p)) = W^u(p)$$

$$f(W^s(p)) = W^s(f(p)), \quad f^{-1}(W^s(p)) = W^s(f^{-1}(p))$$

$$f(W^u(p)) = W^u(f(p)), \quad f^{-1}(W^u(p)) = W^u(f^{-1}(p))$$

(2) $p \neq q$ が f の双曲型周期点ならば

$$W^s(p) \cap W^s(q) = \emptyset, \qquad W^u(p) \cap W^u(q) = \emptyset$$

定理 5 で述べられているように，$L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が双曲型線型写像ならば，次が成り立つ．

定理 7.

(1) $\mathbf{R}^n$ の L-不変な部分ベクトル空間 E^s, E^u （ $L(E^s) = E^s$, $L(E^u) = E^u$ ）が存在して $\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$ が成り立つ．

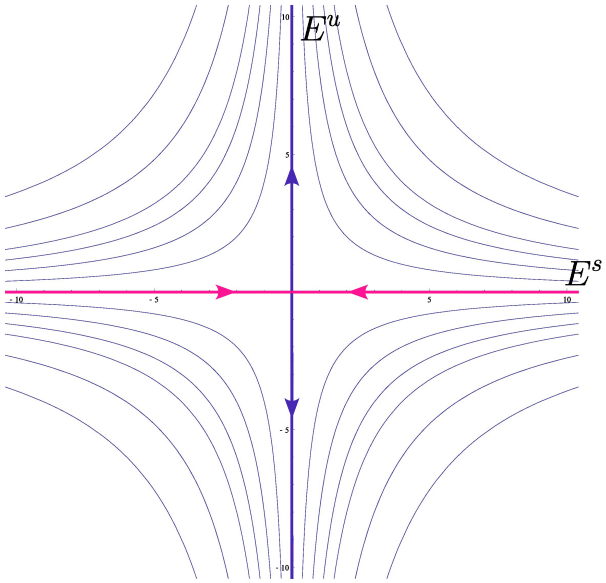
(2) ある $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ が存在して，任意の $n \geq 0$ に対して次が成り立つ．

$$|L^n v| \leq C\lambda^n |v| \quad (\ \forall v \in E^s\ )$$

$$|L^{-n} v| \leq C\lambda^n |v| \quad (\ \forall v \in E^u\ )$$

このことから，双曲型線型同型写像については次が成り立つ．

$$W^s(0) = E^s, \qquad W^u(0) = E^u$$



$p \in M$ が $f : M \to M$ の双曲型不動点なら，**Hartman-Grobman** の定理より，p の（不）安定多様体は，p のある近傍で f の微分 T_pf から定まる分解 $T_pM = E^s \oplus E^u$ の E^s, E^u と位相的に同じになる．

すなわち，$\dim E^s = s$，$\dim E^u = u$ ならば，局所的にそれぞれ s-次元円盤 $\mathbf{D}^s$，u-次元円盤 $\mathbf{D}^u$ と位相的に同じになる．

f が C^r-級ならば，$W^s(p)$, $W^u(p)$ も単なる集合ではなく，C^r-級の（はめ込まれた）可微分多様体となることを主張するのが安定多様体定理である．

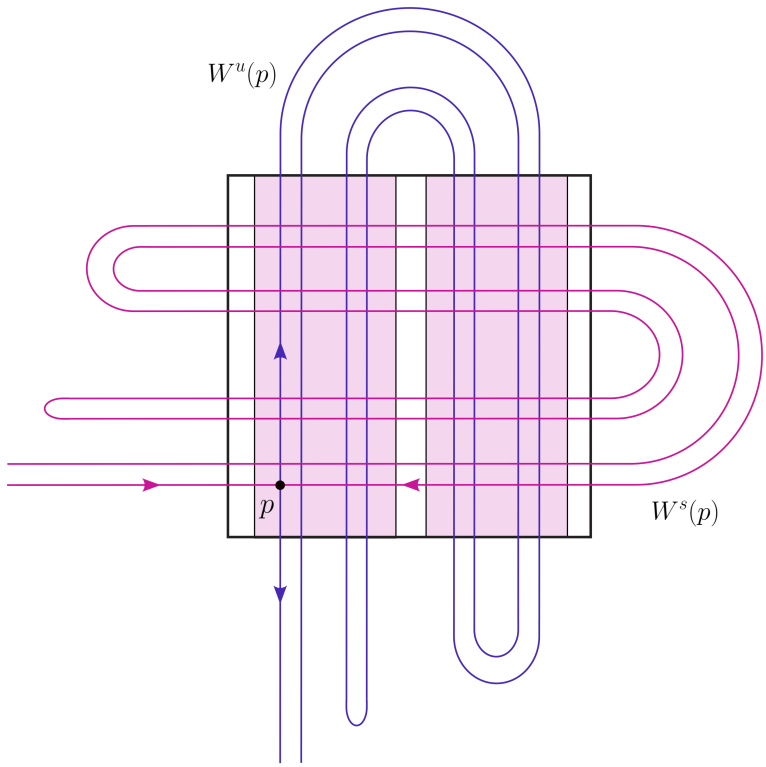


図 32: Horseshoe map の左下の不動点の安定多様体と不安定多様体

（不）安定多様体定理を使う場合，局所的なものが使われることが多いということと，証明も局所的なものを構成するということで，局所安定集合を定義する必要がある．

定義 30. X を距離空間，$f : X \to X$ を位相同型写像とし，$p \in X$, $\epsilon > 0$ に対し $B(p, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, p) < \epsilon\}$ とする．

$$\begin{aligned} W^s_\epsilon(p) &= \{\ x \in B(p,\epsilon) \mid d(f^n(x), f^n(p)) < \epsilon\ (\forall n \geq 0) \\ &\quad \textbf{and}\ d(f^n(x), f^n(p)) \to 0 \quad (n \to \infty)\ \} \\ W^u_\epsilon(p) &= \{\ x \in B(p,\epsilon) \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) < \epsilon\ (\forall n \geq 0) \\ &\quad \textbf{and}\ d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \to 0 \quad (n \to \infty)\ \} \end{aligned}$$

をそれぞれ p の **局所安定集合，局所不安定集合（stable set, unstable set）** という．

E を **Banach** 空間，$T : E \to E$ を線型同相写像とする．定理 **5** で述べられているように，T が双曲型ならば，E は T-不変な **2** つの閉部分ベクトル空間 E_1, E_2 の位相直和 $E = E_1 \oplus E_2$ となり，それらの上では T の作用はそれぞれ指数関数的な拡大，縮小となる

注意 14. ここでは，説明を分かりやすくするために，E_1 が拡大方向，E_2 が縮小方向とする．

さらに，$T_i = T|E_i : E_i \to E_i$ （ $i = 1, 2$ ）とおくと，これらは線型同相写像であって，E のノルムと同値な適切なノルム $||\cdot||_1$ をとると，$||T_1^{-1}||_1 < 1$，$||T_2||_1 < 1$ となることを示すことができる．

$$\tau = \max\{||T_2||, ||T_1^{-1}||\} < 1$$

を T の **歪度 (skewness)** という．

また，$x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$ に対して

$$||x||_2 = \max\{\ ||x_1||_1,\ ||x_2||_1\ \}$$

と決めることによってできる E 上の新しいノルム $||\cdot||_2$ も元のノルム $||\cdot||$ と同値になることを示すことができる．

$E(\epsilon) = \{\ v \in E \mid ||v|| \leq \epsilon\ \}$，$E_i(\epsilon) = \{\ v \in E_i \mid ||v|| \leq \epsilon\ \}$ とする（ $i = 1, 2$ ）．

定理 8 (不動点に関する不安定多様体定理).

任意の $\epsilon > 0$，$0 < \tau < 1$ に対して，ϵ によらないある定数 $\eta > 0$ と，$0 < \delta < \eta$ となる定数 δ で以下を満たすものが存在する．
$T : E \to E$ を歪度 $\tau > 0$ の双曲型線型同相写像とし，$f : E(\epsilon) \to E$ を次の **(a)**, **(b)** を満たすリプシッツ写像とする．

(a) $||f(0)|| \leq \delta$

(b) $Lip(f - T) < \eta$

このとき，

$$graph(g_f) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(E(\epsilon))$$

を満たす写像 $g_f : E_1(\epsilon) \to E_2(\epsilon)$ が一意的に存在する．さらに，g_f は次の **(1)**〜**(6)** の性質を持つ．

(1) $Lip(g_f) \leq 1$

(2) $(f|graph(g_f))^{-1}$ は縮小写像であり，従って f は $graph(g)$ 上に不動点 p を持つ．

(3) $graph(g_f) = \{\ q \in E(\epsilon) \mid f^{-n}(q) \to p \quad (n \to \infty)\ \}$
（これは $graph(g_f) = W^u_\epsilon(p)$ を示している）．

(4) g_f は f と同じ微分可能性を持つ（f が C^r-級なら g_f も C^r-級）．

(5) f が C^r-級のとき，$f \to g_f$ という対応は，C^r-位相で連続である．

(6) f が C^1 であり $f(0) = 0, T_0 f = T$ ならば，$graph(g_f)$ は 0 で E_1 に接している（ $D_0 g_f = 0$ ）．

6.1 （不）安定多様体定理の証明の非常に大まかな方針

定義 31. $f : E(\epsilon) \to E$ を中への微分同相写像，$g : E_1(\epsilon) \to E_2(\epsilon)$ を写像とする．このとき，

$$f(graph(g)) = graph(\Gamma_f(g))$$

が成り立つ範囲で，この式によって定義される写像

$$\Gamma_f(g) : E_1(\epsilon) \to E_2(\epsilon)$$

を g の **graph transform** という．

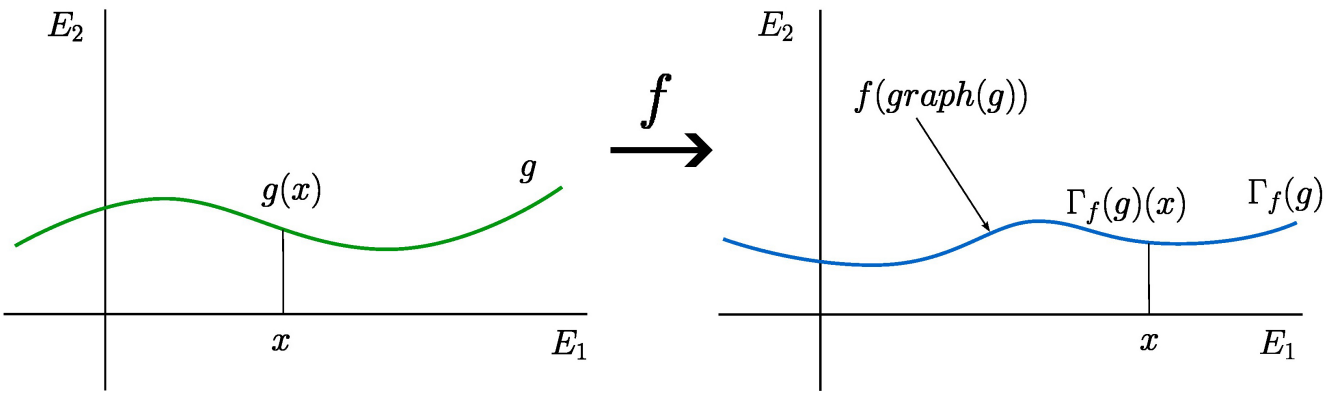


図 33: Graph transform

正確には，次のように定義する．

$f : E(\epsilon) = E_1(\epsilon) \times E_2(\epsilon) \to E = E_1 \times E_2$ を

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

とし，$g : E_1(\epsilon) \to E_2(\epsilon)$ に対して $\widehat{g} : E_1(\epsilon) \to E$ を

$$\widehat{g}(x) = (x, g(x)) \in E_1(\epsilon) \times E_2(\epsilon) = E(\epsilon)$$

とする．

$f_1 \circ \widehat{g} : E_1(\epsilon) \to E_1$ だが，$(f_1 \circ \widehat{g})(E_1(\epsilon)) \supset E_1(\epsilon)$ であって $f_1 \circ \widehat{g}$ が単射ならば $(f_1 \circ \widehat{g})^{-1} : E_1(\epsilon) \to E_1(\epsilon)$ が定義される．

さらに $(f_2 \circ \widehat{g})(E_1(\epsilon)) \subset E_2(\epsilon)$ ならば，写像

$$\Gamma_f(g) = (f_2 \circ \widehat{g})(f_1 \circ \widehat{g})^{-1} : E_1(\epsilon) \to E_2(\epsilon)$$

が定義できる．

これを f による g の **graph transform** という．

従って，この **graph transform** が **well-defined** であるためには，

(1) $(f_1 \circ \widehat{g})(E_1(\epsilon)) \supset E_1(\epsilon)$ であり $f_1 \circ \widehat{g}$ は単射．

(2) $(f_2 \circ \widehat{g})(E_1(\epsilon)) \subset E_2(\epsilon)$

という条件が必要である．

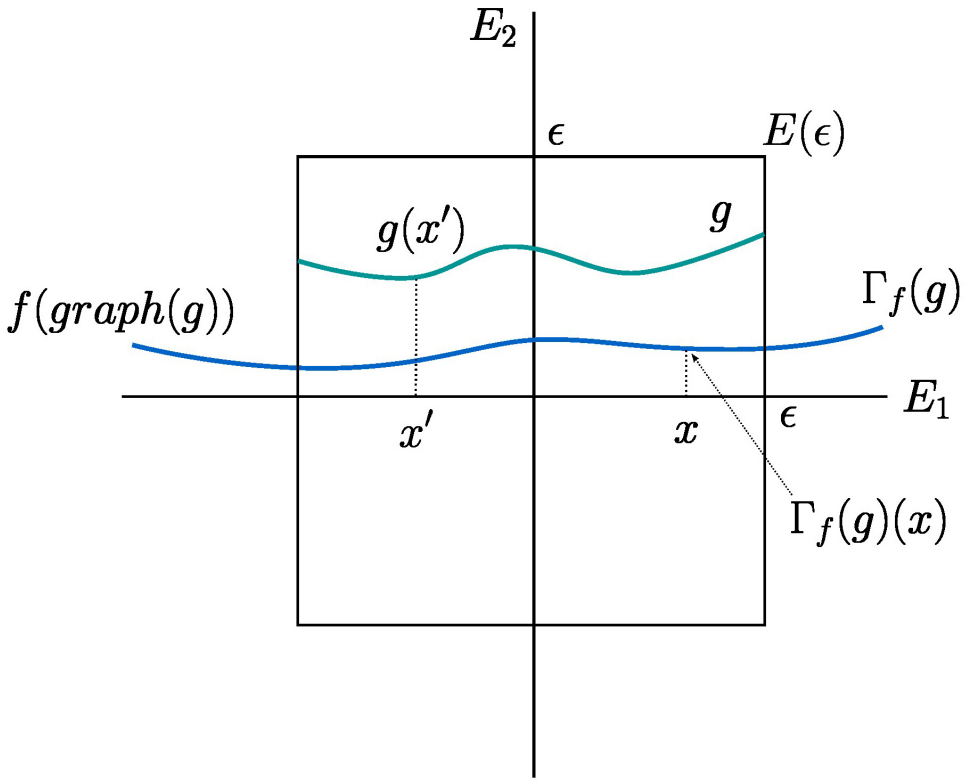


図 34: Graph transform

これらのことを正確に証明する必要があるが，基本的に f は E_1 方向に拡大しており，E_2 方向には縮小しているので，成り立つことを示すことができる．

求める g_f は，**graph transform** Γ_f の不動点となるような写像，すなわち

$$f(graph(g_f)) \supset graph(g_f)$$

となるようなものである．

$$\mathcal{G} = \{h : E_1(\epsilon) \to E_2(\epsilon) \mid Lip(h) \leq 1\ \}$$

とすると，$h, k \in \mathcal{G}$ に対して

$$d(h,k) = \sup_{x \in E_1(\epsilon)} ||h(x) - k(x)||$$

という距離によって $\mathcal{G}$ は完備距離空間になる．

$$\Gamma_f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

が well-defined であって，縮小写像であることを示すことができれば，graph transform Γ_f の不動点が存在することになる．

Well-defined であることの証明は省略．

縮小写像であることについては，f は E_2 方向にに縮小していることから言える．

これにより，Γ_f の不動点 g_f の存在が言える．

定理「**(1)** $Lip(g_f) \leq 1$」については，そのような写像全体の集合で考えているので **OK**.

定理「**(2)** $(f|graph(g_f))^{-1}$ が縮小写像であり，従って f は $graph(g)$ 上に不動点 p を持つ」については，f は E_1 方向に拡大していることから言える．

定理「**(3)** $graph(g_f) = \{\ q \in E(\epsilon) \mid f^{-n}(q) \to p \quad (n \to \infty)\ \}$」については，$graph(g_f)$ 上では **(2)** から **OK**. $E(\epsilon)$ のその他の点については，f の作用で E_2 方向に縮小し $graph(g_f)$ に近づいて行くことから，f^{-1} では E_2 方向で $graph(g_f)$ から離れて行き，$E(\epsilon)$ の外に出ることになる．

定理 **(4), (5), (6)** の微分可能性に関する部分は，議論が長くなるので省略（しかし，これらの性質は安定多様体定理を使う上で非常に重要になる）．

6.2 微分同相写像の周期点の（不）安定多様体

M を m-次元 C^∞-リーマン多様体，$f : M \to M$ を C^r-微分同相写像（ $r \geq 1$ ），p を f の双曲型不動点とする．

（不）安定多様体定理から，ある $\epsilon > 0$ があって $W^s_\epsilon(p)$，$W^u_\epsilon(p)$ が存在する．

（不）安定多様体は f，f^{-1} で不変なので，$\forall x \in W^s(p)$，$\forall y \in W^u(p)$ は，ある $n \geq 0$ があって $f^n(x) \in B(p, \epsilon)$，$f^{-n}(y) \in B(p, \epsilon)$ となる（ $B(p, \epsilon)$ は p を中心とした ϵ-**ball** ）．

この範囲内では $W^s(p)$ は $W^s_\epsilon(p)$ であり $W^u(p)$ は $W^u_\epsilon(p)$ なので次が成り立つ．

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(p)), \qquad W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W^s_\epsilon(p))$$

さらに次が成り立つ．

定理 9. $T_pM = E^s \oplus E^u$ を p の双曲性に対応した分解とする．
C^r-級の **1** 対 **1** のはめ込み $\phi_s : E^s \to M$，$\phi_u : E^u \to M$ で次を満たすものが存在する．

(1) $\phi_s(0) = p$，$\phi_u(0) = p$

(2) $\phi_s(E^s) = W^s(p)$，$\phi_u(E^u) = W^u(p)$

ここで，

定義 32. M, N を可微分多様体，$g : M \to N$ を可微分写像とする．g が はめ込み（immersion）であるとは，任意の $x \in M$ において $T_x f : T_x M \to T_x N$ が単射になること．

定理 9 の証明：
一般の多様体上でやるべきだが，記述が面倒になるので $\mathbf{R}^m$ 上で証明する．多様体上では，不動点のまわりの局所座標を使うことにより，本質的には同じように証明できる．

$f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ を微分同相写像とし，0 が双曲型不動点となっているとする．$\mathbf{R}^m = E^s \oplus E^u$ を対応する分解とする．

注意 15. ここからは E^s が第 1 座標 になる．

$W^s(0)$ は $E^s \times E^u$ 上の 0 の ϵ-近傍で $h : E^s(\epsilon) \to E^u$ という C^r-写像で表されているとする．

$x \in E^s(\epsilon)$ に対し $\widehat{h}(x) = (x, h(x)) \in W^s(0)$ とし，$\pi_s : E^s \times E^u \to E^s$ を第 1 座標への射影とすると $\pi_s \widehat{h} = id_{E^s(\epsilon)}$ である．

$g : E^s(\epsilon) \to E^s(\epsilon)$ を

$$g(x) = (\pi_s f \widehat{h})(x)$$

とする．

g は $E^s(\epsilon)$ だけで定義されているが，これを $E^s - E^s(2\epsilon)$ では $D_0 f|E^s$ となるように C^r-写像として拡張する．このように拡張したものを $\widehat{g} : E^s \to E^s$ とする．

任意の $x \in E^s$ は，ある $k > 0$ で $\widehat{g}^k(x) \in E^s(\epsilon/2)$ となるので，$\phi_s : E^s \to W^s(0)$ を次のように定義する．

$$\phi_s(x) = (f^{-k} \widehat{h} \widehat{g}^k)(x)$$

f, $\widehat{h}$, $\widehat{g}$ は全て単射なので ϕ_s は単射．また Df, $D\widehat{h}$, $D\widehat{g}$ は全て非退化なので $D\phi_s$ も非退化．

ϕ_s が well-defined であることを示せば良い．

まず，$W^s_\epsilon(0)$ 上の点は，ある $y \in E^s(\epsilon)$ で $\widehat{h}(y)$ となっているので，

$$(\widehat{h}\,\pi_s)(\widehat{h}(y)) = \widehat{h}\,((\pi_s \widehat{h})(y)) = \widehat{h}(y)$$

となり，$(\widehat{h}\,\pi_s)|_{W^s_\epsilon(0)}$ は恒等写像である．このことから，$x \in E^s(\epsilon)$ なら，

$$\begin{aligned} g^2(x) &= (\pi_s f \widehat{h})(\pi_s f \widehat{h})(x) = (\pi_s f)\,(\widehat{h}\,\pi_s)(f \widehat{h})(x) \\ &= (\pi_s f)\,(f \widehat{h})(x) = (\pi_s f^2 \widehat{h})(x) \end{aligned}$$

となる．$|g(x)| < |x|$ なので，同様に任意の $n \geq 1$ について

$$g^n(x) = (\pi_s f^n \widehat{h})(x)$$

となる．

ϕ_s が **well-defined** であることの証明に戻る．

$\widehat{g}^\ell(x) \in E^s(\epsilon/2)$ となる $\ell > 0$ をとる．$\ell > k$ とすると，

$$\begin{aligned}(f^{-\ell}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^\ell)(x) &= (f^{-k-(\ell-k)}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^{k+(\ell-k)})(x)\\ &= f^{-k}(f^{-(\ell-k)}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^{\ell-k})(\widehat{g}^k(x))\end{aligned}$$

ここで $y = \widehat{g}^k(x) \in E^s(\epsilon)$ とおく．

$$(f^{-(\ell-k)}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^{\ell-k})(y) = \widehat{h}(y) \tag{8}$$

が成り立つとすると，

$$\begin{aligned}f^{-k}(f^{-(\ell-k)}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^{\ell-k})(\widehat{g}^k(x)) &= f^{-k}(f^{-(\ell-k)}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^{\ell-k})(y)\\ &= f^{-k}(\widehat{h}(y))\\ &= (f^{-k}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^k)(x)\end{aligned}$$

となり，次が成り立つ．

$$(f^{-k}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^k)(x) = (f^{-\ell}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^\ell)(x)$$

なぜ **(8)** が成り立つのかというと，$(\widehat{h}\,\pi_s)|_{W^s_\epsilon(0)} = id$ なので，

$$\begin{aligned}(f^{-(\ell-k)}\,\widehat{h}\,\widehat{g}^{\ell-k})(y) &= f^{-(\ell-k)}\,(\widehat{h}\,\widehat{g}^{\ell-k})(y)\\ &= f^{-(\ell-k)}\,\widehat{h}\,(\pi_s\,f^{\ell-k}\,\widehat{h})(y)\\ &= f^{-(\ell-k)}\,(\widehat{h}\,\pi_s)(f^{\ell-k}\,\widehat{h})(y)\\ &= f^{-(\ell-k)}\,(f^{\ell-k}\,\widehat{h})(y)\\ &= \widehat{h}(y)\end{aligned}$$

となるから．■