IV. 連立線形常微分方程式

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

次の形の連立常微分方程式を定数係数連立線形常微分方程式とよぶ：

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}y_1 &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n + f_1(t) \\
\frac{d}{dt}y_2 &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}y_n &= a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n + f_n(t)
\end{cases}
\qquad (a_{i,j} \text{ は定数})
$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

次の形の連立常微分方程式を定数係数連立線形常微分方程式とよぶ：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n + f_1(t) \\ \frac{d}{dt}y_2 &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}y_n &= a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n + f_n(t) \end{cases} \qquad (a_{i,j} \text{ は定数})$$

この方程式を満たすベクトル $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ をこの方程式の解と呼ぶ。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

次の形の連立常微分方程式を定数係数連立線形常微分方程式とよぶ：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n + f_1(t) \\ \frac{d}{dt}y_2 &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}y_n &= a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n + f_n(t) \end{cases} \qquad (a_{i,j} \text{ は定数})$$

この方程式を満たすベクトル $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ をこの方程式の解と呼ぶ。
特に $f_i(t) \equiv 0$ (常に 0), ($i = 1, \ldots, n$) の場合、即ち

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n \\ \frac{d}{dt}y_2 &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}y_n &= a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n \end{cases} \tag{1}$$

を同次 (斉次) 方程式とよぶ。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とおいて、

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とおいて、同次方程式 (1) を次の様に書く：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} \tag{2}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とおいて、同次方程式 (1) を次の様に書く：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} \tag{2}$$

[定義]

方程式 (2) の n 個の解 $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ に対し行列

$$W(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n)(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) & \cdots & \mathbf{y}_n(t) \end{pmatrix}$$

をロンスキー行列、その行列式をロンスキー行列式又はロンスキアンと呼ぶ。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

とおいて、 同次方程式 (1) を次の様に書く：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} \tag{2}$$

[定義]

方程式 (2) の n 個の解 $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ に対し行列

$$W(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n)(t) = (\mathbf{y}_1(t) \ \ \mathbf{y}_2(t) \ \ \cdots \ \ \mathbf{y}_n(t))$$

をロンスキー行列、その行列式をロンスキー行列式又はロンスキアンと呼ぶ。
n 個の解の組が一次独立であるとき、その解の組を方程式 (2) の基本解とよび、基本解のロンスキー行列を基本行列とよぶ。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[固有ベクトルが基底をなす場合の解法**]**

[固有ベクトルが基底をなす場合の解法]

[定理]

(1) 行列 A の固有値を $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ とする。固有値 λ_i ($i = 1, \ldots, n$) に属する固有ベクトルを $\mathbf{u}_i$ とすると、

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i$$

は方程式 (2) の解である。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[固有ベクトルが基底をなす場合の解法]

[定理]

(1) 行列 A の固有値を $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ とする。固有値 λ_i ($i = 1, \ldots, n$) に属する固有ベクトルを $\mathbf{u}_i$ とすると、

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i$$

は方程式 (2) の解である。

(2) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ が一独立であるとき、即ち基底を成すとき、(2) の一般解は

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n \qquad (c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ は定数})$$

と書ける。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[例題]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ \frac{d}{dt}y_2 = -y_1 - y_2 \\ \frac{d}{dt}y_3 = -y_1 - y_3 \end{cases} \qquad i.e. \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[例題]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ \frac{d}{dt}y_2 = -y_1 - y_2 \\ \frac{d}{dt}y_3 = -y_1 - y_3 \end{cases} \qquad i.e. \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, \pm i$ で対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(1 \pm i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[例題]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ \frac{d}{dt}y_2 = -y_1 - y_2 \\ \frac{d}{dt}y_3 = -y_1 - y_3 \end{cases} \qquad i.e. \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, \pm i$ で対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -(1 \pm i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よってこの方程式の一般解は

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{it} \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-it} \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[例題]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ \frac{d}{dt}y_2 = -y_1 - y_2 \\ \frac{d}{dt}y_3 = -y_1 - y_3 \end{cases} \qquad i.e. \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, \pm i$ で対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(1 \pm i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よってこの方程式の一般解は

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{it} \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-it} \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

実ベクトルの解のみを考えるには、$c_1' = c_1$, $c_2' = c_2 + c_2$, $c_3' = i(c_2 - c_3)$ を実数として

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[例題]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ \frac{d}{dt}y_2 = -y_1 - y_2 \\ \frac{d}{dt}y_3 = -y_1 - y_3 \end{cases} \qquad i.e. \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, \pm i$ で対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(1 \pm i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よってこの方程式の一般解は

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{it} \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-it} \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

実ベクトルの解のみを考えるには、$c_1' = c_1,\ c_2' = c_2 + c_2,\ c_3' = i(c_2 - c_3)$ を実数として

$$\mathbf{y}(t) = c_1' e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3' \begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[練習問題]

次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$(1)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \qquad (2)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[練習問題]

次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$(1)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \qquad (2)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

(1)

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[練習問題]

次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$(1)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \qquad (2)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$$

[解答例]

(1)

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{(-2+i)t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} + c_2 e^{(-2-i)t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

[練習問題]

次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$(1)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \qquad (2)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

(1)

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{(-2+i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} + c_2 e^{(-2-i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

ここで、$c_1' = c_1 + c_2, c_2' = i(c_1 - c_2)$ とおいて

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.1 同次方程式

[練習問題]
次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$(1)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \qquad (2)\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]
(1)

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{(-2+i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} + c_2 e^{(-2-i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

ここで、$c_1' = c_1 + c_2, c_2' = i(c_1 - c_2)$ とおいて

$$\mathbf{y}(t) = c_1' e^{-2t} \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2' e^{-2t} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

[定義]

正方行列 A に対し、A の指数関数を

$$e^{tA}(=\exp tA) = E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n$$

によって定義する。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

[定義]

正方行列 A に対し、A の指数関数を

$$e^{tA}(=\exp tA) = E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n$$

によって定義する。

このとき、

$$e^{0\cdot A} = E, \quad e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}, \quad e^{-tA} = \left\{e^{tA}\right\}^{-1}$$

等、指数関数と同様の性質が成り立つ。

[定義]

正方行列 A に対し、A の指数関数を

$$e^{tA}(=\exp tA) = E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n$$

によって定義する。

このとき、

$$e^{0\cdot A} = E, \quad e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}, \quad e^{-tA} = \left\{e^{tA}\right\}^{-1}$$

等、指数関数と同様の性質が成り立つ。 特に次が成り立つ：

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

[定義]

正方行列 A に対し、A の指数関数を

$$e^{tA}(=\exp tA) = E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n$$

によって定義する。

このとき、

$$e^{0\cdot A} = E, \quad e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}, \quad e^{-tA} = \left\{e^{tA}\right\}^{-1}$$

等、指数関数と同様の性質が成り立つ。 特に次が成り立つ：

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

[定理]

定数係数同次連立線形常微分方程式：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} \tag{3}$$

の解は、$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ を定ベクトルとして次の様に表される：

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

[定義]

正方行列 A に対し、A の指数関数を

$$e^{tA}(=\exp tA) = E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n$$

によって定義する。

このとき、

$$e^{0\cdot A} = E, \quad e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}, \quad e^{-tA} = \left\{e^{tA}\right\}^{-1}$$

等、指数関数と同様の性質が成り立つ。 特に次が成り立つ：

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

[定理]

定数係数同次連立線形常微分方程式：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} \tag{3}$$

の解は、$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ を定ベクトルとして次の様に表される：

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$$

[注意]

e^{tA} は微分方程式 (3) の基本行列 (の一つ) である。

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$$\exp t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n + \cdots$$

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$$\begin{aligned}
\exp t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n + \cdots \\
&= E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots
\end{aligned}$$

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$$\begin{aligned}
\exp t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n + \cdots \\
&= E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$$\begin{aligned}
\exp t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n + \cdots \\
&= E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

[解答例]

$$\begin{aligned}
\exp t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n + \cdots \\
&= E + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって解は $\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

A を対角化又はジョルダン標準形に変換した行列を J とし、変換行列を P とすると $A = PJP^{-1}$ である。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

A を対角化又はジョルダン標準形に変換した行列を J とし、変換行列を P とすると $A = PJP^{-1}$ である。よって

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJP^{-1}PJP^{-1} \cdots PJP^{-1} = PJ^nP^{-1}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

A を対角化又はジョルダン標準形に変換した行列を J とし、変換行列を P とすると $A = PJP^{-1}$ である。よって

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJP^{-1}PJP^{-1}\cdots PJP^{-1} = PJ^nP^{-1}$$

従って、A の指数関数は

$$e^{tA} = E + tPJP^{-1} + \frac{t^2}{2}PJ^2P^{-1} + \cdots + \frac{t^n}{n!}PJ^nP^{-1} + \cdots = P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tJ)^n\right)P^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

となる。

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

A を対角化又はジョルダン標準形に変換した行列を J とし、変換行列を P とすると $A = PJP^{-1}$ である。よって

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJP^{-1}PJP^{-1}\cdots PJP^{-1} = PJ^nP^{-1}$$

従って、A の指数関数は

$$e^{tA} = E + tPJP^{-1} + \frac{t^2}{2}PJ^2P^{-1} + \cdots + \frac{t^n}{n!}PJ^nP^{-1} + \cdots = P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tJ)^n\right)P^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

となる。　これより、(3) の解は次の様になる：

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c} = Pe^{tJ}P^{-1}\mathbf{c}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

A を対角化又はジョルダン標準形に変換した行列を J とし、変換行列を P とすると $A = PJP^{-1}$ である。よって

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJP^{-1}PJP^{-1}\cdots PJP^{-1} = PJ^nP^{-1}$$

従って、A の指数関数は

$$e^{tA} = E + tPJP^{-1} + \frac{t^2}{2}PJ^2P^{-1} + \cdots + \frac{t^n}{n!}PJ^nP^{-1} + \cdots = P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tJ)^n\right)P^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

となる。　これより、(3) の解は次の様になる：

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c} = Pe^{tJ}P^{-1}\mathbf{c}$$

[練習問題]

次の方程式の一般解を求めよ：　$\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

A を対角化又はジョルダン標準形に変換した行列を J とし、変換行列を P とすると $A = PJP^{-1}$ である。よって

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJP^{-1}PJP^{-1}\cdots PJP^{-1} = PJ^nP^{-1}$$

従って、A の指数関数は

$$e^{tA} = E + tPJP^{-1} + \frac{t^2}{2}PJ^2P^{-1} + \cdots + \frac{t^n}{n!}PJ^nP^{-1} + \cdots = P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tJ)^n\right)P^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

となる。 これより、(3) の解は次の様になる：

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c} = Pe^{tJ}P^{-1}\mathbf{c}$$

[練習問題]

次の方程式の一般解を求めよ： $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$

[解答例] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ なので

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

A を対角化又はジョルダン標準形に変換した行列を J とし、変換行列を P とすると $A=PJP^{-1}$ である。よって

$$A^n=(PJP^{-1})^n=PJP^{-1}PJP^{-1}\cdots PJP^{-1}=PJ^nP^{-1}$$

従って、A の指数関数は

$$e^{tA}=E+tPJP^{-1}+\frac{t^2}{2}PJ^2P^{-1}+\cdots+\frac{t^n}{n!}PJ^nP^{-1}+\cdots=P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tJ)^n\right)P^{-1}=Pe^{tJ}P^{-1}$$

となる。 これより、(3) の解は次の様になる：

$$\mathbf{y}(t)=e^{tA}\mathbf{c}=Pe^{tJ}P^{-1}\mathbf{c}$$

[練習問題]

次の方程式の一般解を求めよ： $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{y}$

[解答例] $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ なので

$$\mathbf{y}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.2 行列の指数関数

A を対角化又はジョルダン標準形に変換した行列を J とし、変換行列を P とすると $A = PJP^{-1}$ である。よって

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJP^{-1}PJP^{-1}\cdots PJP^{-1} = PJ^nP^{-1}$$

従って、A の指数関数は

$$e^{tA} = E + tPJP^{-1} + \frac{t^2}{2}PJ^2P^{-1} + \cdots + \frac{t^n}{n!}PJ^nP^{-1} + \cdots = P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tJ)^n\right)P^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

となる。　これより、(3) の解は次の様になる：

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c} = Pe^{tJ}P^{-1}\mathbf{c}$$

[練習問題]

次の方程式の一般解を求めよ：　$\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$

[解答例] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ なので

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[一般解の表示]

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[一般解の表示]

非同次方程式を考える：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{4}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[一般解の表示]

非同次方程式を考える：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{4}$$

$e^{-tA}\left(\frac{d\mathbf{y}}{dt} - A\mathbf{y}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\mathbf{y}\right)$ なので、方程式 (4) は次の様にかける：

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[一般解の表示]

非同次方程式を考える：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{4}$$

$e^{-tA}\left(\frac{d\mathbf{y}}{dt} - A\mathbf{y}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\mathbf{y}\right)$ なので、方程式 (4) は次の様にかける：

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\mathbf{y}\right) = e^{-tA}\mathbf{f}(t)$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[一般解の表示]

非同次方程式を考える：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{4}$$

$e^{-tA}\left(\frac{d\mathbf{y}}{dt} - A\mathbf{y}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\mathbf{y}\right)$ なので、方程式 (4) は次の様にかける：

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\mathbf{y}\right) = e^{-tA}\mathbf{f}(t)$$

この両辺を積分すると、

$$e^{-tA}\mathbf{y} = \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} \text{ は定ベクトル}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[一般解の表示]

非同次方程式を考える：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{4}$$

$e^{-tA}\left(\frac{d\mathbf{y}}{dt} - A\mathbf{y}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\mathbf{y}\right)$ なので、方程式 **(4)** は次の様にかける：

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\mathbf{y}\right) = e^{-tA}\mathbf{f}(t)$$

この両辺を積分すると、

$$e^{-tA}\mathbf{y} = \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} \text{ は定ベクトル}$$

従って、この方程式の一般解は

$$\mathbf{y} = e^{tA}\mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\mathbf{f}(\tau)d\tau$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

[解答例]

$$\exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \exp\left\{-\tau \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau + 2\sin\tau \\ -\sin\tau + 2\cos\tau \end{pmatrix}$$

より

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

[解答例]

$$\exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \exp\left\{-\tau \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau + 2\sin\tau \\ -\sin\tau + 2\cos\tau \end{pmatrix}$$

より

$$\mathbf{y} = \exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \int_0^t \exp\left\{-\tau \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} d\tau$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

[解答例]

$$\exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \exp\left\{ -\tau \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau + 2\sin\tau \\ -\sin\tau + 2\cos\tau \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \int_0^t \exp\left\{ -\tau \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} d\tau \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t - 2\cos t + 2 \\ \cos t + 2\sin t - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

[解答例]

$$\exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \exp\left\{ -\tau \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau + 2\sin\tau \\ -\sin\tau + 2\cos\tau \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \exp t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \int_0^t \exp\left\{ -\tau \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} d\tau \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t - 2\cos t + 2 \\ \cos t + 2\sin t - 1 \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1' = c_1 + 2,\ c_2' = c_2 - 1)
\end{aligned}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[消去法による解法**]**

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[消去法による解法]

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad を \quad \begin{cases} (D-2)y_1 + y_2 = e^{2t} \\ -y_1 + (D-2)y_2 = 2e^{2t} \end{cases} \quad と書く \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

[消去法による解法]

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{を} \quad \begin{cases} (D-2)y_1 + y_2 & = e^{2t} \\ -y_1 + (D-2)y_2 & = 2e^{2t} \end{cases} \quad \text{と書く} \quad \left(D = \frac{d}{dt} \right)$$

[解答例]

第一式の両辺に左から $(D-2)$ を作用させると

$$(D-2)^2 y_1 + (D-2)y_2 = (D-2)e^{2t} = 0$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[消去法による解法]

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{を} \quad \begin{cases} (D-2)y_1 + y_2 &= e^{2t} \\ -y_1 + (D-2)y_2 &= 2e^{2t} \end{cases} \quad \text{と書く} \quad \left(D = \frac{d}{dt} \right)$$

[解答例]

第一式の両辺に左から $(D-2)$ を作用させると

$$(D-2)^2 y_1 + (D-2)y_2 = (D-2)e^{2t} = 0$$

第二式をこれから引くと

$$(D^2 - 4D + 5)y_1 = -2e^{2t}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[消去法による解法**]**

[例題**]**

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{を} \quad \begin{cases} (D-2)y_1 + y_2 &= e^{2t} \\ -y_1 + (D-2)y_2 &= 2e^{2t} \end{cases} \quad \text{と書く} \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

[解答例**]**

第一式の両辺に左から $(D-2)$ を作用させると

$$(D-2)^2 y_1 + (D-2)y_2 = (D-2)e^{2t} = 0$$

第二式をこれから引くと

$$(D^2 - 4D + 5)y_1 = -2e^{2t}$$

これは定数係数線形非同次常微分方程式なので一般解は求まる：

$$y_1 = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 2e^{2t}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[消去法による解法]

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{を} \quad \begin{cases} (D-2)y_1 + y_2 &= e^{2t} \\ -y_1 + (D-2)y_2 &= 2e^{2t} \end{cases} \quad \text{と書く} \quad \left(D = \frac{d}{dt} \right)$$

[解答例]

第一式の両辺に左から $(D-2)$ を作用させると

$$(D-2)^2 y_1 + (D-2)y_2 = (D-2)e^{2t} = 0$$

第二式をこれから引くと

$$(D^2 - 4D + 5)y_1 = -2e^{2t}$$

これは定数係数線形非同次常微分方程式なので一般解は求まる：

$$y_1 = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 2e^{2t}$$

よって第一式より

$$y_2 = e^{2t} - (D-2)y_1 = e^{2t}(c_1 \sin t - c_2 \cos t) + e^{2t}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[消去法による解法]

[例題]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{を} \quad \begin{cases} (D-2)y_1 + y_2 &= e^{2t} \\ -y_1 + (D-2)y_2 &= 2e^{2t} \end{cases} \quad \text{と書く} \quad \left(D = \frac{d}{dt} \right)$$

[解答例]

第一式の両辺に左から $(D-2)$ を作用させると

$$(D-2)^2 y_1 + (D-2)y_2 = (D-2)e^{2t} = 0$$

第二式をこれから引くと

$$(D^2 - 4D + 5)y_1 = -2e^{2t}$$

これは定数係数線形非同次常微分方程式なので一般解は求まる：

$$y_1 = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 2e^{2t}$$

よって第一式より

$$y_2 = e^{2t} - (D-2)y_1 = e^{2t}(c_1 \sin t - c_2 \cos t) + e^{2t}$$

従って求める解は：

$$\mathbf{y} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[練習問題]

消去法によって次の連立微分方程式を解け

$$\begin{cases} (D+1)y_1 + (D+3)y_2 = t \\ (D-1)y_1 + (2D-2)y_2 = 2t, \end{cases} \qquad \left(D = \frac{d}{dt} \right)$$

[練習問題]

消去法によって次の連立微分方程式を解け

$$\begin{cases} (D+1)y_1 + (D+3)y_2 = t \\ (D-1)y_1 + (2D-2)y_2 = 2t, \end{cases} \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

[解答例]

第二式の両辺に $(D+1)$ を作用させたものから、第一式の両辺に $(D-1)$ を作用させたものを引くと

$$(D-1)^2 y_2 = 1 + 3t$$

1. 定数係数連立線形常微分方程式 — 1.3 非同次方程式

[練習問題]

消去法によって次の連立微分方程式を解け

$$\begin{cases} (D+1)y_1 + (D+3)y_2 = t \\ (D-1)y_1 + (2D-2)y_2 = 2t, \end{cases} \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

[解答例]

第二式の両辺に $(D+1)$ を作用させたものから、第一式の両辺に $(D-1)$ を作用させたものを引くと

$$(D-1)^2 y_2 = 1 + 3t$$

これを解いて

$$y_2 = c_1 e^t + c_2 t e^t + 3t + 7$$

[練習問題]

消去法によって次の連立微分方程式を解け

$$\begin{cases}(D+1)y_1+(D+3)y_2 &= t\\ (D-1)y_1+(2D-2)y_2 &= 2t,\end{cases} \qquad \left(D=\frac{d}{dt}\right)$$

[解答例]

第二式の両辺に $(D+1)$ を作用させたものから、第一式の両辺に $(D-1)$ を作用させたものを引くと

$$(D-1)^2 y_2 = 1+3t$$

これを解いて

$$y_2 = c_1 e^t + c_2 t e^t + 3t + 7$$

この y_2 を第二式に代入すると：

$$(D-1)y_1 = -2c_2 e^t + 8t + 8$$

[練習問題]

消去法によって次の連立微分方程式を解け

$$\begin{cases} (D+1)y_1 + (D+3)y_2 = t \\ (D-1)y_1 + (2D-2)y_2 = 2t, \end{cases} \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

[解答例]

第二式の両辺に $(D+1)$ を作用させたものから、第一式の両辺に $(D-1)$ を作用させたものを引くと

$$(D-1)^2 y_2 = 1 + 3t$$

これを解いて

$$y_2 = c_1 e^t + c_2 t e^t + 3t + 7$$

この y_2 を第二式に代入すると：

$$(D-1)y_1 = -2c_2 e^t + 8t + 8$$

これを解いて

$$y_1 = c e^t - 2c_2 t e^t - 8t - 16$$

[練習問題]

消去法によって次の連立微分方程式を解け

$$\begin{cases} (D+1)y_1 + (D+3)y_2 = t \\ (D-1)y_1 + (2D-2)y_2 = 2t, \end{cases} \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

[解答例]

第二式の両辺に $(D+1)$ を作用させたものから、第一式の両辺に $(D-1)$ を作用させたものを引くと

$$(D-1)^2 y_2 = 1 + 3t$$

これを解いて

$$y_2 = c_1 e^t + c_2 t e^t + 3t + 7$$

この y_2 を第二式に代入すると：

$$(D-1)y_1 = -2c_2 e^t + 8t + 8$$

これを解いて

$$y_1 = ce^t - 2c_2 t e^t - 8t - 16$$

この y_1 を第一式に代入して c を求め

$$y_1 = \left(\frac{1}{2}c_2 - 2c_1\right) e^t - 2c_2 t e^t - 8t - 16$$

2. 連立微分方程式のラプラス変換

2. 連立微分方程式のラプラス変換

[例題]

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - y + \dfrac{dz}{dt} - z &= e^{-t} \\ -2\dfrac{dy}{dt} - 2y + \dfrac{d^2z}{dt^2} - z &= 0, \end{cases} \qquad y(0) = 0, y'(0) = -1, z(0) = 1, z'(0) = 0$$

2. 連立微分方程式のラプラス変換

[例題]

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - y + \frac{dz}{dt} - z &= e^{-t} \\ -2\frac{dy}{dt} - 2y + \frac{d^2z}{dt^2} - z &= 0, \end{cases} \qquad y(0)=0, y'(0)=-1, z(0)=1, z'(0)=0$$

[解答例]

この方程式をラプラス変換すると：

$$\begin{cases} (s^2-1)Y(s) + (s-1)Z(s) &= \frac{1}{s+1} \\ -2(s+1)Y(s) + (s^2-1)Z(s) - s &= 0, \end{cases} \qquad Y = \mathcal{L}(y),\ Z = \mathcal{L}(z)$$

2. 連立微分方程式のラプラス変換

[例題]

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - y + \frac{dz}{dt} - z &= e^{-t} \\ -2\frac{dy}{dt} - 2y + \frac{d^2z}{dt^2} - z &= 0, \end{cases} \qquad y(0) = 0, y'(0) = -1, z(0) = 1, z'(0) = 0$$

[解答例]

この方程式をラプラス変換すると：

$$\begin{cases} (s^2-1)Y(s) + (s-1)Z(s) &= \frac{1}{s+1} \\ -2(s+1)Y(s) + (s^2-1)Z(s) - s &= 0, \end{cases} \qquad Y = \mathcal{L}(y),\ Z = \mathcal{L}(z)$$

これを Y, Z について解いて：

$$\begin{cases} Y(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} \\ Z(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

2. 連立微分方程式のラプラス変換

[例題]

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - y + \frac{dz}{dt} - z &= e^{-t} \\ -2\frac{dy}{dt} - 2y + \frac{d^2z}{dt^2} - z &= 0, \end{cases} \qquad y(0) = 0, y'(0) = -1, z(0) = 1, z'(0) = 0$$

[解答例]

この方程式をラプラス変換すると：

$$\begin{cases} (s^2-1)Y(s) + (s-1)Z(s) &= \frac{1}{s+1} \\ -2(s+1)Y(s) + (s^2-1)Z(s) - s &= 0, \end{cases} \qquad Y = \mathcal{L}(y),\ Z = \mathcal{L}(z)$$

これを Y, Z について解いて：

$$\begin{cases} Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} \\ Z(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

よって解は

$$y(t) = e^{-t} - \cos t, \quad z(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \cos t - \sin t$$

2. 連立微分方程式のラプラス変換

[練習問題]

次の連立微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け：

$$\begin{cases} y' - y + z &= 0 \\ -5y + z' - 3z &= 0, \end{cases} \qquad y(0) = 2, z(0) = 1$$

2. 連立微分方程式のラプラス変換

[練習問題]

次の連立微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け：

$$\begin{cases} y' - y + z &= 0 \\ -5y + z' - 3z &= 0, \end{cases} \qquad y(0) = 2, z(0) = 1$$

[解答]

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2}e^{2t}(4\cos 2t - 3\sin 2t) \\ z(t) = \frac{1}{2}e^{2t}(2\cos 2t + 11\sin 2t) \end{cases}$$