オイラーの公式

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$e^{i\cdot 0}$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$e^{i\cdot 0} \;= \cos 0 + i\sin 0$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$e^{i\cdot 0} \;= \cos 0 + i\sin 0 \;= 1$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$e^{i\cdot 0} \ = \cos 0 + i\sin 0 \ = 1 \ = e^0$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$e^{i\cdot 0} \ = \cos 0 + i\sin 0 \ = 1 \ = e^0$

$e^{-i\theta}$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$e^{i\cdot 0} \ = \cos 0 + i\sin 0 \ = 1 \ = e^0$

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} \;= \cos 0 + i\sin 0 \;= 1 \;= e^{0}$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \;= \cos\theta - i\sin\theta$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} \end{aligned}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \end{aligned}$$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \end{aligned}$$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned}
e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)
\end{aligned}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

$z = x + iy$ **(**x, y は実数**)** に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

$z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

オイラーの公式

[公式] オイラーの公式

実数 θ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると

$$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^0$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

$z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$ **(指数公式)**

オイラーの公式

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \frac{d}{dt}\left\{e^{xt+iyt}\right\}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \frac{d}{dt}\left\{e^{xt+iyt}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt)\right\}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left\{e^{xt+iyt}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt)\right\} \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad +e^{xt}\cdot(-y\sin yt + iy\cos yt)
\end{aligned}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left\{e^{xt+iyt}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt)\right\} \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad + e^{xt}\cdot(-y\sin yt + iy\cos yt) \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad + e^{xt}\cdot(iy\cos yt + (i)^2 y\sin yt)
\end{aligned}
$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left\{e^{xt+iyt}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt)\right\} \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad + e^{xt}\cdot(-y\sin yt + iy\cos yt) \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad + e^{xt}\cdot(iy\cos yt + (i)^2 y\sin yt) \\
&= (x+iy)e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt)
\end{aligned}
$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left\{e^{xt+iyt}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt)\right\} \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad + e^{xt}\cdot(-y\sin yt + iy\cos yt) \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad + e^{xt}\cdot(iy\cos yt + (i)^2 y\sin yt) \\
&= (x+iy)e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&= \lambda e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

オイラーの公式

さらに, t を実数とし $\lambda = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left\{e^{xt+iyt}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt)\right\} \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad + e^{xt}\cdot(-y\sin yt + iy\cos yt) \\
&= xe^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&\qquad\qquad + e^{xt}\cdot(iy\cos yt + (i)^2 y\sin yt) \\
&= (x+iy)e^{xt}\cdot(\cos yt + i\sin yt) \\
&= \lambda e^{\lambda t} \qquad \text{(微分公式)}
\end{aligned}
$$

オイラーの公式

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\dfrac{\pi i}{2}$, $\exp\pi i$, $\exp\dfrac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp\frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\exp\frac{\pi i}{2}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\dfrac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp\dfrac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\exp\frac{\pi i}{2} \quad = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp\frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\exp\frac{\pi i}{2} \quad = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \qquad = i$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\frac{\pi i}{2}$, $\exp\pi i$, $\exp\frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\exp\frac{\pi i}{2} \quad = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \qquad = i$$

$$\exp\pi i$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\dfrac{\pi i}{2}, \exp\pi i, \exp\dfrac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}\exp\frac{\pi i}{2} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} &= i \\ \exp\pi i &= \cos\pi + i\sin\pi\end{aligned}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\dfrac{\pi i}{2}$, $\exp\pi i$, $\exp\dfrac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}
\exp\frac{\pi i}{2} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} &&= i \\
\exp\pi i &= \cos\pi + i\sin\pi &&= -1
\end{aligned}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\dfrac{\pi i}{2}$, $\exp\pi i$, $\exp\dfrac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}
\exp\frac{\pi i}{2} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} && = i \\
\exp\pi i &= \cos\pi + i\sin\pi && = -1 \\
\exp\frac{n\pi i}{2} & &&
\end{aligned}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\dfrac{\pi i}{2}$, $\exp\pi i$, $\exp\dfrac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}
\exp\frac{\pi i}{2} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} &&= i \\
\exp\pi i &= \cos\pi + i\sin\pi &&= -1 \\
\exp\frac{n\pi i}{2} &= \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\frac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp\frac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}\exp\frac{\pi i}{2} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} &&= i\\ \exp\pi i &= \cos\pi + i\sin\pi &&= -1\\ \exp\frac{n\pi i}{2} &= \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2} &&= i^n\end{aligned}$$

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\dfrac{\pi i}{2}$, $\exp\pi i$, $\exp\dfrac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}
\exp\frac{\pi i}{2} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} &&= i \\
\exp\pi i &= \cos\pi + i\sin\pi &&= -1 \\
\exp\frac{n\pi i}{2} &= \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2} &&= i^n
\end{aligned}$$

(ii) $z^n = 1$ (n は自然数) の解を求めよ。但し n 次方程式は n 個解を持つ。

オイラーの公式

[練習問題]

(i) $\exp\dfrac{\pi i}{2}$, $\exp \pi i$, $\exp\dfrac{n\pi i}{2}$ (n は整数) の値を求めよ。

[解答]

$$\begin{aligned}
\exp\frac{\pi i}{2} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} &&= i \\
\exp \pi i &= \cos\pi + i\sin\pi &&= -1 \\
\exp\frac{n\pi i}{2} &= \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2} &&= i^n
\end{aligned}$$

(ii) $z^n = 1$ (n は自然数) の解を求めよ。但し n 次方程式は n 個解を持つ。

[解答]

$$z = \exp 2\frac{\pi i}{n}, \exp 2\frac{2\pi i}{n}, \exp 2\frac{3\pi i}{n}, \ldots, \exp 2\frac{(n-1)\pi i}{n}, 1$$

線形常微分方程式

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、$a_1, \ldots, a_n$ は実定数.

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、$a_1, \ldots, a_n$ は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、$a_1, \ldots, a_n$ は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、$a_1, \ldots, a_n$ は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

[方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、$a_1, \ldots, a_n$ は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

[方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda t} \dfrac{d}{dt}\left(y e^{-\lambda t}\right) = 0$ と変形できる.

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、$a_1, \ldots, a_n$ は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

[方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda t} \dfrac{d}{dt}\left(y e^{-\lambda t}\right) = 0$ と変形できる.

$\dfrac{d}{dt}\left(y e^{-\lambda t}\right) = 0$ の両辺を積分して

線形常微分方程式

[定義] 以下の形の t の関数 $y(t)$ とその (何回かの) 導関数が入った方程式を, 定数係数線形斉次常微分方程式とよぶ.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

但し、$a_1, \ldots, a_n$ は実定数.

この方程式について, 次の多項式を特性多項式とよぶ。

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

方程式 $P(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根とよぶ.

[方程式の解]

(i) $n = 1$ のとき：$y' - \lambda y = 0$

$y' - \lambda y = 0$ は $e^{\lambda t} \dfrac{d}{dt}\left(ye^{-\lambda t}\right) = 0$ と変形できる.

$\dfrac{d}{dt}\left(ye^{-\lambda t}\right) = 0$ の両辺を積分して

$$ye^{-\lambda t} = C \qquad \therefore y = Ce^{\lambda t} \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

線形常微分方程式

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$y''+ay'+by=\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}-\beta\right)y$$

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$y''+ay'+by=\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}-\beta\right)y=\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}$$

線形常微分方程式

(ii) $n = 2$ のとき： $y'' + ay' + by = 0$

(a) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が異なる二つの実数根 α, β を持つとき：

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)y = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}$$

$$= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left[\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right]$$

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$\begin{aligned} y''+ay'+by &= \left(\tfrac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\tfrac{d}{dt}-\beta\right)y = \left(\tfrac{d}{dt}-\alpha\right)\left\{e^{\beta t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\beta t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$\begin{aligned} y''+ay'+by &= \left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}-\beta\right)y = \left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left[\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}=0$$

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$\begin{aligned}
y''+ay'+by &= \left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}-\beta\right)y = \left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} \\
&= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left[\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\
&= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}=0$$

両辺を積分して $e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'$

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$
\begin{aligned}
y''+ay'+by &= \left(\tfrac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\tfrac{d}{dt}-\beta\right)y = \left(\tfrac{d}{dt}-\alpha\right)\left\{e^{\beta t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} \\
&= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\beta t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\
&= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} = 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \tfrac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}=0$$

両辺を積分して $e^{(\beta-\alpha)t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'$

$$\therefore \tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'e^{(\alpha-\beta)t}$$

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$\begin{aligned} y''+ay'+by &= \left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}-\beta\right)y = \left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left[\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}=0$

両辺を積分して $e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'$

$\therefore \frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'e^{(\alpha-\beta)t}$

両辺を積分して $ye^{-\beta t}=\frac{C_1'}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)t}+C_2$.

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$y''+ay'+by=\left(\tfrac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\tfrac{d}{dt}-\beta\right)y=\left(\tfrac{d}{dt}-\alpha\right)\left\{e^{\beta t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left[\left\{e^{\beta t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right]$$

$$=e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}=0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}=0$$

両辺を積分して $e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'e^{(\alpha-\beta)t}$$

両辺を積分して $ye^{-\beta t}=\frac{C_1'}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)t}+C_2$.

よって $\frac{C_1'}{\alpha-\beta}=C_1$ とおいて, 解は

線形常微分方程式

(ii) $n=2$ のとき： $y''+ay'+by=0$

(a) $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる二つの実数根 α,β を持つとき：

$$
\begin{aligned}
y''+ay'+by &= \left(\tfrac{d}{dt}-\alpha\right)\left(\tfrac{d}{dt}-\beta\right)y = \left(\tfrac{d}{dt}-\alpha\right)\left\{e^{\beta t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} \\
&= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\beta t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\
&= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\} = 0
\end{aligned}
$$

$\therefore \frac{d}{dt}\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)\right\}=0$

両辺を積分して $e^{(\beta-\alpha)t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'$

$\therefore \frac{d}{dt}\left(ye^{-\beta t}\right)=C_1'e^{(\alpha-\beta)t}$

両辺を積分して $ye^{-\beta t}=\frac{C_1'}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)t}+C_2$.

よって $\frac{C_1'}{\alpha-\beta}=C_1$ とおいて, 解は

$y=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}$ $\quad$ (C_1,C_2 は任意の定数)

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)^2 y$$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)^2 y \ = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}$$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (\tfrac{d}{dt} - \alpha)^2 y \ = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \end{aligned}$$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= \left(\tfrac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y \;\; = \left(\tfrac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0 \end{aligned}$$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$
\begin{aligned}
y'' + ay' + by &= (\tfrac{d}{dt} - \alpha)^2 y \ = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\
&= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\
&= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$
\begin{aligned}
y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y \ = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \left\{e^{\alpha t} \frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\
&= e^{\alpha t} \frac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t} \frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} e^{-\alpha t}\right] \\
&= e^{\alpha t} \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y \;\; = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって $ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= \left(\tfrac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y \ = \left(\tfrac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって $ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$ すなわち $y = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t}$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y \ = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}$$

$$= e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right]$$

$$= e^{\alpha t}\frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$　従って　$\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって　$ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$　すなわち　$y = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t}$

(c)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)^2 y \;= (\tfrac{d}{dt} - \alpha)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}$$

$$= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right]$$

$$= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって $ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$ すなわち $y = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t}$

(c)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)(\tfrac{d}{dt} - \bar{\alpha})y$$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (\tfrac{d}{dt} - \alpha)^2 y \; = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって $ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$ すなわち $y = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t}$

(c)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$y'' + ay' + by = (\frac{d}{dt} - \alpha)(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha})y$ よって (a) と同様に

$y = C_1 e^{\alpha t} + C_1 e^{\bar{\alpha} t}$。

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = \left(\tfrac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y \ &= \left(\tfrac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって $ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$ すなわち $y = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t}$

(c)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha}\right)y$ よって (a) と同様に

$y = C_1 e^{\alpha t} + C_1 e^{\bar{\alpha} t}$。 $\alpha = r + i\omega$ (r, ω は実数) とすると,

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$y'' + ay' + by = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)^2 y \;= (\tfrac{d}{dt} - \alpha)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}$$
$$= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right]$$
$$= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって $ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$ すなわち $y = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t}$

(c)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$y'' + ay' + by = (\frac{d}{dt} - \alpha)(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha})y$ よって (a) と同様に

$y = C_1 e^{\alpha t} + C_1 e^{\bar{\alpha} t}$。 $\alpha = r + i\omega$ (r, ω は実数) とすると,

$$y = C_1 e^{rt}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2 e^{rt}(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = \left(\tfrac{d}{dt} - \alpha\right)^2 y \ &= \left(\tfrac{d}{dt} - \alpha\right)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって $ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$ すなわち $y = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t}$

(c)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$y'' + ay' + by = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha}\right)y$ よって (a) と同様に

$y = C_1 e^{\alpha t} + C_1 e^{\bar{\alpha} t}$。 $\alpha = r + i\omega$ (r, ω は実数) とすると,

$y = C_1 e^{rt}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2 e^{rt}(\cos\omega t - i\sin\omega t)$

よって $C_1 + C_2 = A_1$, $i(C_1 - C_2) = A_2$ とおいて解は

線形常微分方程式

(b)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 α を持つとき：

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (\tfrac{d}{dt} - \alpha)^2 y \; = (\tfrac{d}{dt} - \alpha)\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left[\left\{e^{\alpha t}\tfrac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right)\right\}e^{-\alpha t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\tfrac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d^2}{dt^2}\left(ye^{-\alpha t}\right) = 0$ 従って $\frac{d}{dt}\left(ye^{-\alpha t}\right) = C_1$

よって $ye^{-\alpha t} = C_1 t + C_2$ すなわち $y = (C_1 t + C_2)e^{\alpha t}$

(c)$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役な複素数根 $\alpha, \bar{\alpha}$ を持つとき：

$y'' + ay' + by = (\frac{d}{dt} - \alpha)(\frac{d}{dt} - \bar{\alpha})y$ よって (a) と同様に

$y = C_1 e^{\alpha t} + C_1 e^{\bar{\alpha} t}$。 $\alpha = r + i\omega$ (r, ω は実数) とすると，

$y = C_1 e^{rt}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2 e^{rt}(\cos\omega t - i\sin\omega t)$

よって $C_1 + C_2 = A_1$, $i(C_1 - C_2) = A_2$ とおいて解は

$y = A_1 e^{rt}\cos\omega t + A_2 e^{rt}\sin\omega t$ (A_1, A_2は任意の定数)

線形常微分方程式

[練習問題]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

線形常微分方程式

[練習問題]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

[解答]

(i) $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$

線形常微分方程式

[練習問題]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

[解答]

(i) $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$

(ii) $y = (C_1 t + C_2) e^{2t}$

線形常微分方程式

[練習問題]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

[解答]

(i) $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$

(ii) $y = (C_1 t + C_2)e^{2t}$

(iii) $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

線形常微分方程式

[練習問題]

以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(i) $y'' + y' - 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' + 4y = 0$

(iv) $y'' - 2y' + 5y = 0$

[解答]

(i) $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$

(ii) $y = (C_1 t + C_2) e^{2t}$

(iii) $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

(iv) $y = C_1 e^t \cos 2t + C_2 e^t \sin 2t$

(おまけ) 定数変化法

(おまけ) 定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

(おまけ) 定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

[方程式の解法]

1. 先ず次の斉次方程式を解く: $y' - f(t)y = 0$

(おまけ) 定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

[方程式の解法]

1. 先ず次の斉次方程式を解く: $y' - f(t)y = 0$

   この方程式は, 変数分離形 : $\dfrac{dy}{dt} = f(t)y$ として解ける.

(おまけ)定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

[方程式の解法]

1. 先ず次の斉次方程式を解く: $y' - f(t)y = 0$

   この方程式は, 変数分離形 : $\dfrac{dy}{dt} = f(t)y$ として解ける.

$$\int \frac{dy}{y} = \int f(t)dt$$

(おまけ)定数変化法

[定義] 次の形の方程式を, (変数係数) 線形非斉次常微分方程式とよぶ.

$$y' - f(t)y = p(t)$$

但し, $f(t), p(t)$ は t の関数.

[方程式の解法]

1. 先ず次の斉次方程式を解く: $y' - f(t)y = 0$

   この方程式は, 変数分離形 : $\dfrac{dy}{dt} = f(t)y$ として解ける.

$$\int \frac{dy}{y} = \int f(t)dt$$

$$\therefore \quad \log y = \int f(t)dt + c \qquad \textit{i.e.} \qquad y = Ce^{\int f(t)dt}$$

(おまけ) 定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

(おまけ) 定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$y' - f(t)y = C'e^{\int f(t)dt} + Cf(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y$$

(おまけ) 定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned} y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + Cf(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C'e^{\int f(t)dt} \end{aligned}$$

(おまけ) 定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$
\begin{aligned}
y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + Cf(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\
&= C'e^{\int f(t)dt} \\
&= p(t)
\end{aligned}
$$

(おまけ) 定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned} y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + Cf(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C'e^{\int f(t)dt} \\ &= p(t) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad C' = e^{-\int f(t)dt}p(t)$$

(おまけ)定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned} y' - f(t)y &= C'e^{\int f(t)dt} + Cf(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C'e^{\int f(t)dt} \\ &= p(t) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad C' = e^{-\int f(t)dt}p(t)$$

この方程式は

$$C(t) = \int e^{-\int f(t)dt}p(t)dt$$

として解ける.

(おまけ)定数変化法

2. 定数 C を t の関数 $C(t)$ とみなして元の方程式に代入する

$$\begin{aligned} y' - f(t)y &= C' e^{\int f(t)dt} + Cf(t)e^{\int f(t)dt} - f(t)y \\ &= C' e^{\int f(t)dt} \\ &= p(t) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad C' = e^{-\int f(t)dt} p(t)$$

この方程式は

$$C(t) = \int e^{-\int f(t)dt} p(t)dt$$

として解ける.

よって元の方程式の解は

$$y = e^{\int f(t)dt} \int e^{-\int f(t)dt} p(t)dt$$