陰関数定理

陰関数定理

[定理](陰関数定理) (x_0, y_0) の近くで C^1 級の二変数関数 $F(x, y)$ **(**$F_x(x, y)$ と $F_y(x, y)$ がともに存在して連続**)** について、$F(x_0, y_0) = 0$ かつ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ とする。このとき方程式 $F(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近くで x について解ける。

陰関数定理

[定理](陰関数定理) (x_0, y_0) の近くで C^1 級の二変数関数 $F(x,y)$ **(**$F_x(x,y)$ と $F_y(x,y)$ がともに存在して連続**)** について、$F(x_0,y_0)=0$ かつ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ とする。このとき方程式 $F(x,y)=0$ は (x_0,y_0) の近くで x について解ける。 *i.e.*

$$F(x,y(x))=0, \quad y(x_0)=y_0$$

となる x の関数 $y=y(x)$ がある。

陰関数定理

[定理](陰関数定理) (x_0, y_0) の近くで C^1 級の二変数関数 $F(x, y)$ **(**$F_x(x, y)$ と $F_y(x, y)$ がともに存在して連続**)** について、$F(x_0, y_0) = 0$ かつ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ とする。このとき方程式 $F(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近くで x について解ける。 *i.e.*

$$F(x, y(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

となる x の関数 $y = y(x)$ がある。

$\because$ 仮定より $F(x, y)$ の (x_0, y_0) での一階までの Taylor 展開は

$$F(x, y) = F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_2(x, y)$$

陰関数定理

[定理](陰関数定理) (x_0, y_0) の近くで C^1 級の二変数関数 $F(x,y)$ **(**$F_x(x,y)$ と $F_y(x,y)$ がともに存在して連続**)** について、$F(x_0,y_0)=0$ かつ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ とする。このとき方程式 $F(x,y)=0$ は (x_0,y_0) の近くで x について解ける。 *i.e.*

$$F(x, y(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

となる x の関数 $y = y(x)$ がある。

$\because$ 仮定より $F(x,y)$ の (x_0,y_0) での一階までの Taylor 展開は

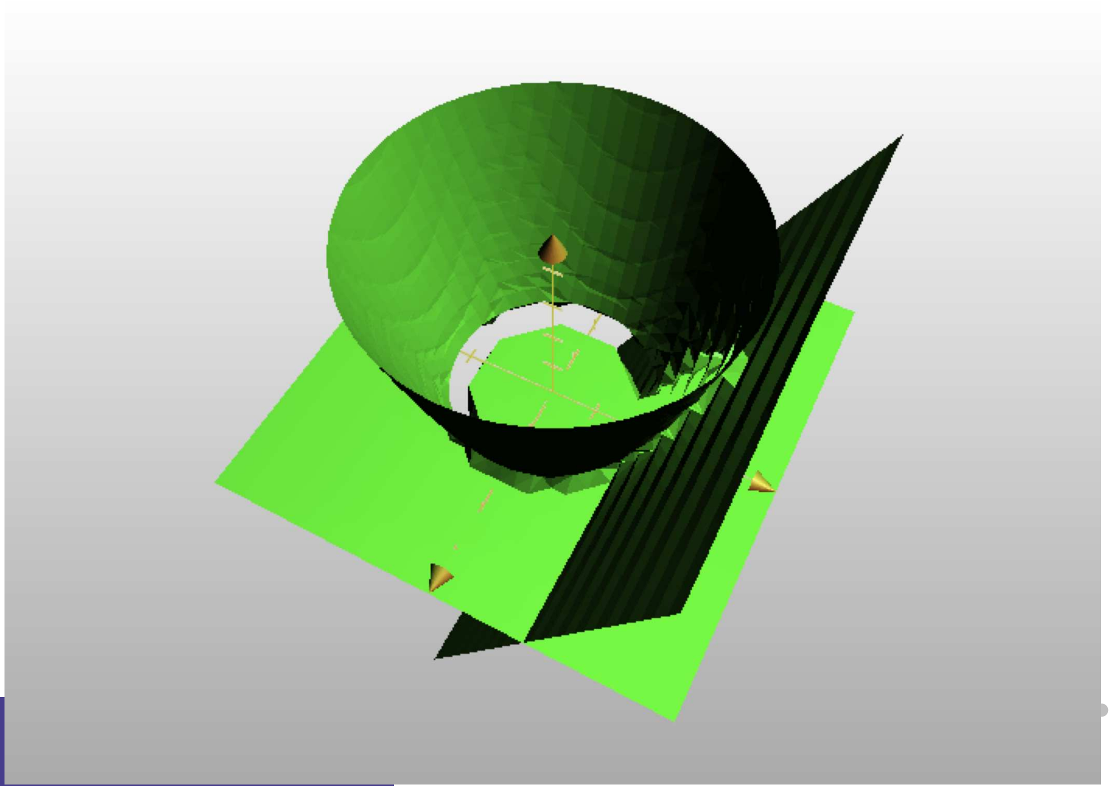
$$F(x,y) = F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)(y-y_0) + R_2(x,y)$$

$\therefore$ $(x,y)\approx(x_0,y_0)$ では剰余項 $R_2(x,y)$ は充分小さいので $F(x,y)=0$ は次のように解ける：

$$y = y_0 - \frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0) + (\text{小さい項})$$

陰関数定理

[例] $(0,1)$ は $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ で定まる単位円周上にあり、そこでは $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)=2\neq 0$ である。よって陰関数定理より $F(x,y(x))=0$ となる関数がある。($y=\sqrt{1-x^2}$)
特に $z=F(x,y)$ のグラフの $(0,1)$ での接平面 $z=2y-2$ は y 軸方向に傾いている。



陰関数定理

$y=y(x)$ の $x=x_0$ における微分係数は $F(x,y(x))=0$ を x で微分することによって

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

と求まる。

$F(x,y)$ が C^2 以上のときは、二階以上の微分係数も同様にして求まる。

陰関数定理

$y = y(x)$ の $x = x_0$ における微分係数は $F(x, y(x)) = 0$ を x で微分することによって

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

と求まる。

$F(x, y)$ が C^2 以上のときは、二階以上の微分係数も同様にして求まる。

また、この解 $y = y(x)$ が x-y 平面に定める曲線の (x_0, y_0) での接線の方程式は

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0), \qquad i.e.$$

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

で与えられる。

陰関数定理

n 個の m 変数関数が与えられているとき ($m > n$)：

$$F_1(x_1,\ldots,x_m)=0,\ldots,F_n(x_1,\ldots,x_m)=0$$

の解 $(x_1,\ldots,x_m)=(a_1,\ldots,a_m)$ について、Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_{m-n+1}}F_1(a_1,\ldots,a_m) & \cdots & \partial_{x_m}F_1(a_1,\ldots,a_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_{m-n+1}}F_n(a_1,\ldots,a_m) & \cdots & \partial_{x_m}F_n(a_1,\ldots,a_m) \end{pmatrix}$$

が逆行列を持つならば、

$$F_1(x_1,\ldots,x_m)=0,\ldots,F_n(x_1,\ldots,x_m)=0$$

は $(x_1,\ldots,x_m)\approx(a_1,\ldots,a_m)$ で $(x_1,\ldots,x_{m-n})$ で解ける：

$$F_1(x_1,\ldots,x_{m-n},x_{m-n+1}(x_1,\ldots,x_{m-n}),\ldots x_n(x_1,\ldots,x_{m-n}))=0$$

$$\vdots$$

$$F_n(x_1,\ldots,x_{m-n},x_{m-n+1}(x_1,\ldots,x_{m-n}),\ldots x_n(x_1,\ldots,x_{m-n}))=0$$

陰関数定理

[練習問題] 三変数関数 $F(x,y,z)$ と $G(x,y,z)$ について $F(x_0,y_0,z_0)=0$ かつ $G(x_0,y_0,z_0)=0$ が成り立ち、更に Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} F_y(x_0,y_0,z_0) & F_z(x_0,y_0,z_0) \\ G_y(x_0,y_0,z_0) & G_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

が逆行列を持つならば、方程式

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

は x について解けること *i.e.* $F(x,y(x),z(x))=0$ かつ $G(x,y(x),z(x))=0$ となる $y=y(x)$ と $z=z(x)$ があることを示せ。

陰関数定理

[解答例] $\begin{pmatrix} F(x,y,z) \\ G(x,y,z) \end{pmatrix}$ を (x_0, y_0, z_0) で Taylor 展開すると

$$\begin{pmatrix} F(x,y,z) \\ G(x,y,z) \end{pmatrix} = (x - x_0) \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0,z_0) \\ G_x(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} F_y(x_0,y_0,z_0) & F_z(x_0,y_0,z_0) \\ G_y(x_0,y_0,z_0) & G_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + R_2(x,y,z)$$

となる。

陰関数定理

[解答例] $\begin{pmatrix} F(x,y,z) \\ G(x,y,z) \end{pmatrix}$ を (x_0, y_0, z_0) で Taylor 展開すると

$$\begin{pmatrix} F(x,y,z) \\ G(x,y,z) \end{pmatrix} = (x - x_0) \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0,z_0) \\ G_x(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} F_y(x_0,y_0,z_0) & F_z(x_0,y_0,z_0) \\ G_y(x_0,y_0,z_0) & G_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + R_2(x,y,z)$$

となる。 $\therefore y$ と z は x の関数として表すことができる：

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - (x - x_0) \begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_x \\ G_x \end{pmatrix} + (\text{小さい項})$$

Lagrange の未定乗数法

Lagrange の未定乗数法

[定理](Lagrange の未定乗数法) C^1 級の二変数関数 $f(x, y)$ は、 (x_0, y_0) において C^1 級関数 $\varphi(x, y) = 0$ が x-y 平面上に定める曲線 C 上での極値をとるとする。

Lagrange の未定乗数法

[定理](Lagrange の未定乗数法) C^1 級の二変数関数 $f(x,y)$ は、 (x_0,y_0) において C^1 級関数 $\varphi(x,y)=0$ が x-y 平面上に定める曲線 C 上での極値をとるとする。

このとき、$F(x,y;\lambda):=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ とおくと、ある λ_0 について $F_x(x_0,y_0;\lambda_0)=F_y(x_0,y_0;\lambda_0)=F_\lambda(x_0,y_0;\lambda_0)=0$ が成り立つ。

Lagrange の未定乗数法

[定理](Lagrange の未定乗数法) C^1 級の二変数関数 $f(x,y)$ は、 (x_0,y_0) において C^1 級関数 $\varphi(x,y)=0$ が x-y 平面上に定める曲線 C 上での極値をとるとする。
このとき、$F(x,y;\lambda):=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ とおくと、ある λ_0 について $F_x(x_0,y_0;\lambda_0)=F_y(x_0,y_0;\lambda_0)=F_\lambda(x_0,y_0;\lambda_0)=0$ が成り立つ。

[注意] この定理の逆「ある λ_0 について $F_x(x_0,y_0;\lambda_0)$ $=F_y(x_0,y_0;\lambda_0)=F_\lambda(x_0,y_0;\lambda_0)=0$ が成り立つならば、 (x_0,y_0) は $f(x,y)$ の C 上での極値である」は成り立たない。

Lagrange の未定乗数法

[定理](Lagrange の未定乗数法) C^1 級の二変数関数 $f(x,y)$ は、(x_0,y_0) において C^1 級関数 $\varphi(x,y)=0$ が x-y 平面上に定める曲線 C 上での極値をとるとする。

このとき、$F(x,y;\lambda) := f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ とおくと、ある λ_0 について $F_x(x_0,y_0;\lambda_0)=F_y(x_0,y_0;\lambda_0)=F_\lambda(x_0,y_0;\lambda_0)=0$ が成り立つ。

[注意] この定理の逆「ある λ_0 について $F_x(x_0,y_0;\lambda_0)$ $=F_y(x_0,y_0;\lambda_0)=F_\lambda(x_0,y_0;\lambda_0)=0$ が成り立つならば、(x_0,y_0) は $f(x,y)$ の C 上での極値である」は成り立たない。

この定理は、$f(x,y)$ の C 上での最大 (小) 値の候補を探す為に使う。この定理によって見つかった (x,y) のなかで f の値が最大 (小) になる点が $f(x,y)$ の C 上での最大 (小) 点である。

Lagrange の未定乗数法

$\because$ 先ず、(x_0, y_0) は曲線 C 上にあるので λ_0 が何であっても $F_\lambda(x_0, y_0; \lambda_0) = \varphi(x_0, y_0) = 0$ である。

Lagrange の未定乗数法

$\because$ 先ず、(x_0, y_0) は曲線 C 上にあるので λ_0 が何であっても
$F_\lambda(x_0, y_0; \lambda_0) = \varphi(x_0, y_0) = 0$ である。
次に、C 上で $\varphi(x, y)$ は定数 (= 0) なので、$\operatorname{grad}\varphi(x_0, y_0)$ は
C の接線に直交する。(grad φ は φ が最も大きくなる方向)

Lagrange の未定乗数法

$\because$ 先ず、(x_0, y_0) は曲線 C 上にあるので λ_0 が何であっても
$F_\lambda(x_0, y_0; \lambda_0) = \varphi(x_0, y_0) = 0$ である。
次に、C 上で $\varphi(x, y)$ は定数 ($= 0$) なので、$\mathrm{grad}\,\varphi(x_0, y_0)$ は
C の接線に直交する。(grad φ は φ が最も大きくなる方向)
ここで、$f(x_0, y_0)$ は C 上での極値なので、(x, y) が C 上を
(x_0, y_0) から動くとき $f(x, y)$ は増減しない。即ち
$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0)$ は C の接線に直交する。

Lagrange の未定乗数法

$\because$ 先ず、(x_0, y_0) は曲線 C 上にあるので λ_0 が何であっても
$F_\lambda(x_0, y_0; \lambda_0) = \varphi(x_0, y_0) = 0$ である。
次に、C 上で $\varphi(x, y)$ は定数 (= 0) なので、$\mathrm{grad}\, \varphi(x_0, y_0)$ は
C の接線に直交する。(grad φ は φ が最も大きくなる方向)
ここで、$f(x_0, y_0)$ は C 上での極値なので、(x, y) が C 上を
(x_0, y_0) から動くとき $f(x, y)$ は増減しない。即ち
$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0)$ は C の接線に直交する。
従って $\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0)$ と $\mathrm{grad}\, \varphi(x_0, y_0)$ は平行であり
$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) = \lambda_0\, \mathrm{grad}\, \varphi(x_0, y_0)$ となる λ_0 がある。

Lagrange の未定乗数法

$\because$ 先ず、(x_0, y_0) は曲線 C 上にあるので λ_0 が何であっても $F_\lambda(x_0, y_0; \lambda_0) = \varphi(x_0, y_0) = 0$ である。
次に、C 上で $\varphi(x, y)$ は定数 (= 0) なので、$\operatorname{grad}\varphi(x_0, y_0)$ は C の接線に直交する。(grad φ は φ が最も大きくなる方向)
ここで、$f(x_0, y_0)$ は C 上での極値なので、(x, y) が C 上を (x_0, y_0) から動くとき $f(x, y)$ は増減しない。即ち $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ は C の接線に直交する。
従って $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ と $\operatorname{grad}\varphi(x_0, y_0)$ は平行であり $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \lambda_0 \operatorname{grad}\varphi(x_0, y_0)$ となる λ_0 がある。
これは $F_x(x_0, y_0; \lambda_0) = f_x(x_0, y_0) - \lambda_0\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ かつ $F_y(x_0, y_0; \lambda_0) = f_y(x_0, y_0) - \lambda_0\varphi_y(x_0, y_0) = 0$ を意味する。

Lagrange の未定乗数法

[練習問題] 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで、関数 $f(x, y) = xy$ の最大値と最小値を求めよ。

Lagrange の未定乗数法

[練習問題] 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで、関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めよ。

[解答例]

$F(x,y)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおくと $F_x(x,y)=y-2\lambda x$, $F_y(x,y)=x-2\lambda y$, $F_\lambda(x,y)=-(x^2+y^2-1)$。

Lagrange の未定乗数法

[練習問題] 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで、関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めよ。

[解答例]

$F(x,y)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおくと $F_x(x,y)=y-2\lambda x$, $F_y(x,y)=x-2\lambda y$, $F_\lambda(x,y)=-(x^2+y^2-1)$。

従って、$F_x(x,y)=0$, $F_y(x,y)=0$ から $x^2=y^2(=2\lambda xy)$ が得られて $F_\lambda(x,y)=0$ より $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ となる。

Lagrange の未定乗数法

[練習問題] 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで、関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めよ。

[解答例]

$F(x,y)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおくと $F_x(x,y)=y-2\lambda x$, $F_y(x,y)=x-2\lambda y$, $F_\lambda(x,y)=-(x^2+y^2-1)$。

従って、$F_x(x,y)=0$, $F_y(x,y)=0$ から $x^2=y^2(=2\lambda xy)$ が得られて $F_\lambda(x,y)=0$ より $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ となる。

具体的な値を比較することにより、最大値 $\frac{1}{2}$ と最小値 $-\frac{1}{2}$ が求まる。

宿題

問題集

203〜205 ページ (例題と演習 A)