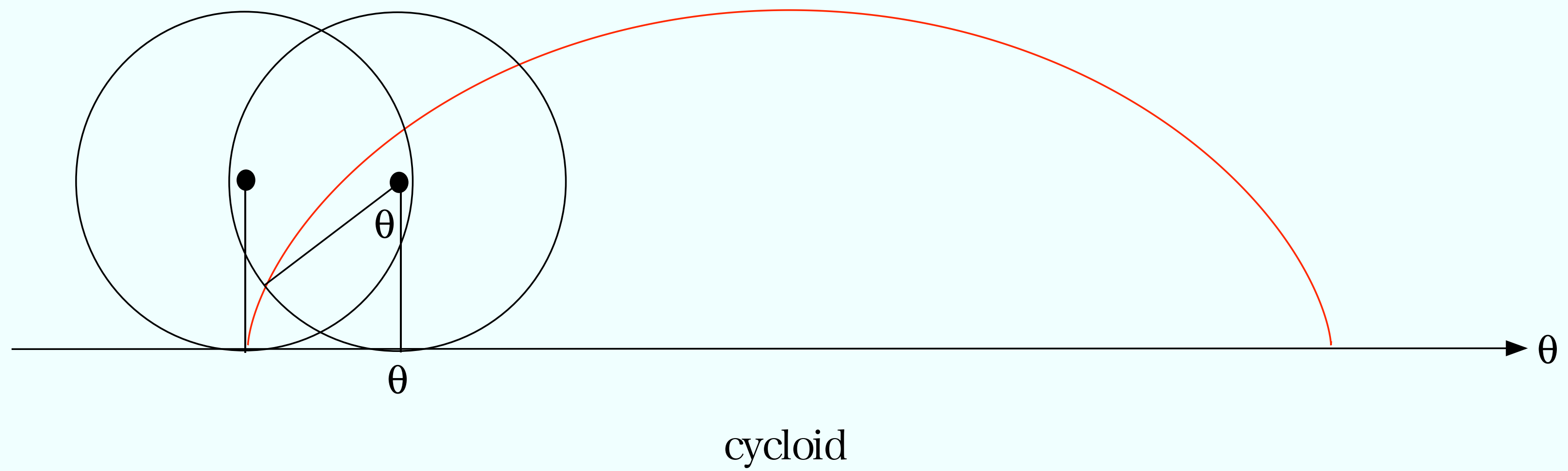
座標の発明

座標の発明

デカルト以前にも平面に座標軸を描くことは行われていたが、一方向のみであった。

座標の発明

デカルト以前にも平面に座標軸を描くことは行われていたが、一方向のみであった。



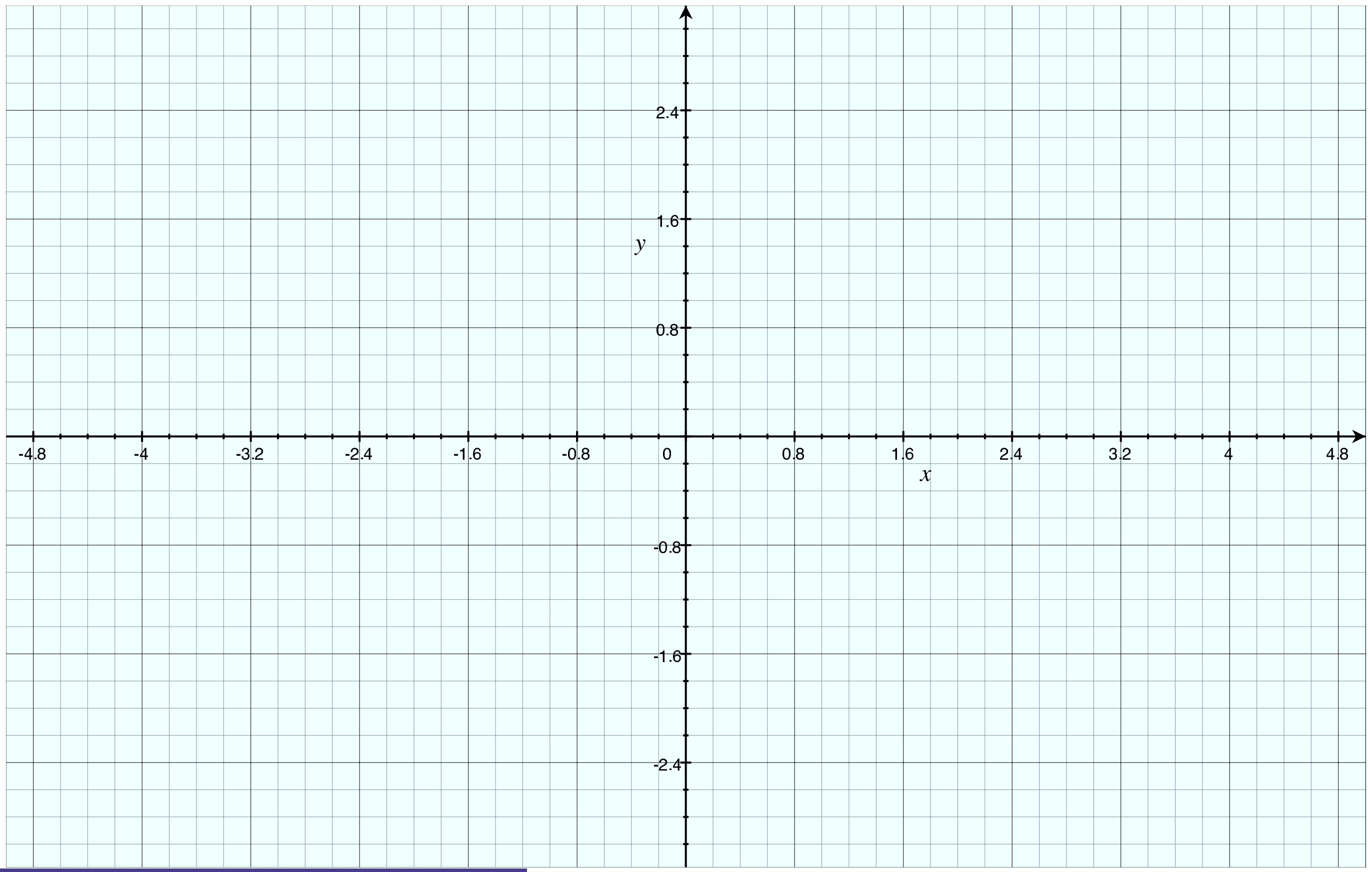
デカルト座標

デカルト座標

デカルトは、平面上に二本の直交する座標軸を引き、それを利用して二つの実数の組によって平面上の点の位置を表す方法 (所謂デカルト座標系) を発明した。

デカルト座標

デカルトは、平面上に二本の直交する座標軸を引き、それを利用して二つの実数の組によって平面上の点の位置を表す方法 (所謂デカルト座標系) を発明した。

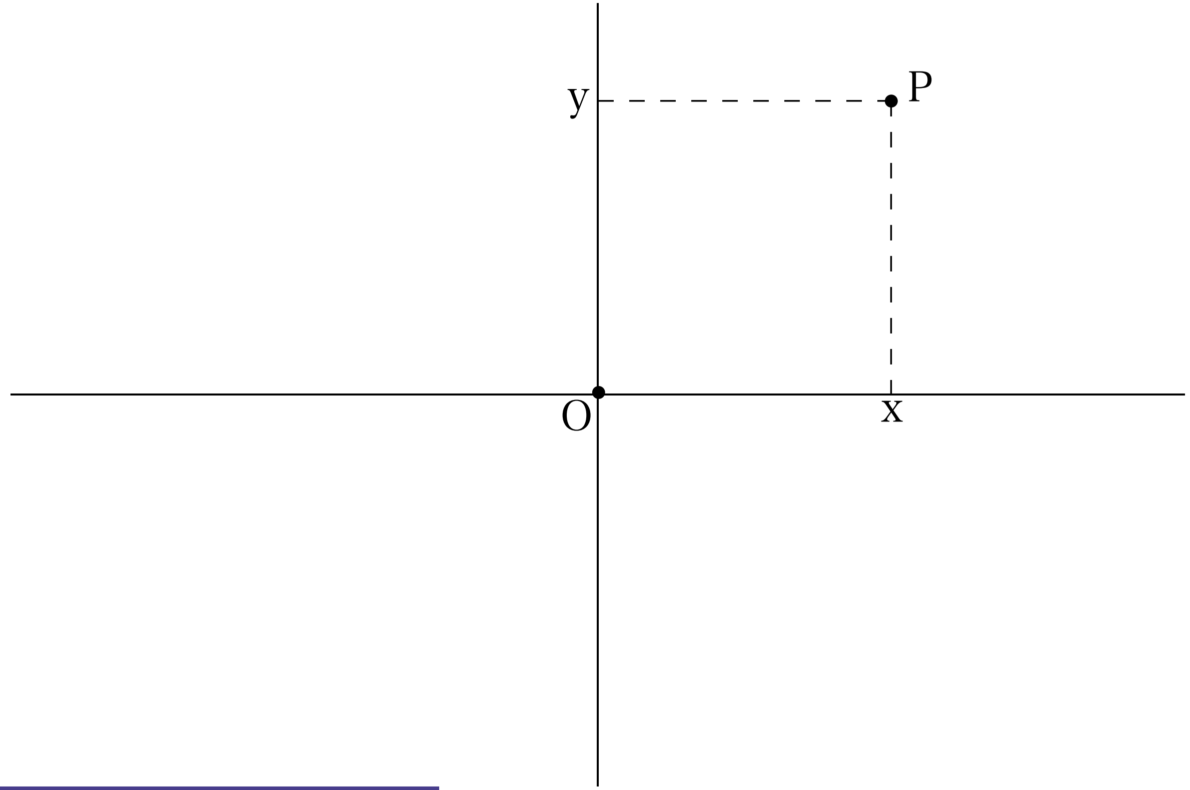


デカルト座標

即ち、両座標軸に実数を対応させせおき、平面上の各点 P を通り縦軸に平行な直線と横軸の交わる点の値 x と P を通り横軸と平行な直線と縦軸の交わる点の値 y を用いて、この実数の組 (x, y) で点 P を表す。(x, y) を P の座標と呼ぶ。

デカルト座標

即ち、両座標軸に実数を対応させおき、平面上の各点 P を通り縦軸に平行な直線と横軸の交わる点の値 x と P を通り横軸と平行な直線と縦軸の交わる点の値 y を用いて、この実数の組 (x, y) で点 P を表す。(x, y) を P の座標と呼ぶ。



解析幾何学

解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式 $f(x, y) = 0$ を満たす点の集合

$$C = \{\, (x, y) \mid f(x, y) = 0 \,\}$$

と同一視する事が出来る。

解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式 $f(x, y) = 0$ を満たす点の集合

$$C = \{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$$

と同一視する事が出来る。

注意 C を $f(x, y)$ のグラフとは呼ばない。

解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式 $f(x,y)=0$ を満たす点の集合

$$C = \{\ (x,y) \mid f(x,y)=0\ \}$$

と同一視する事が出来る。

注意 C を $f(x,y)$ のグラフとは呼ばない。

これにより

「平面上の幾何学 $\Longleftrightarrow$ 数の代数的な操作」

の対応が得られる。

解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式
$f(x,y)=0$ を満たす点の集合

$$C = \{\, (x,y) \mid f(x,y) = 0 \,\}$$

と同一視する事が出来る。
注意 C を $f(x,y)$ のグラフとは呼ばない。

これにより
「平面上の幾何学 $\Longleftrightarrow$ 数の代数的な操作」
の対応が得られる。
平面幾何のこのような扱いを 解析幾何 と呼ぶ。

解析幾何学

デカルト座標を使う事により、平面上の曲線を、方程式 $f(x,y)=0$ を満たす点の集合

$$C = \{\ (x,y) \mid f(x,y)=0\ \}$$

と同一視する事が出来る。
注意 C を $f(x,y)$ のグラフとは呼ばない。

これにより
「平面上の幾何学 $\Longleftrightarrow$ 数の代数的な操作」
の対応が得られる。
平面幾何のこのような扱いを 解析幾何 と呼ぶ。

デカルトはこの方法でユークリッド以来の未解決問題だったパッポスの問題を解決した。

解析幾何学

解析幾何学

楕円

座標平面上で $(e, 0)$、$(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下のようになる：

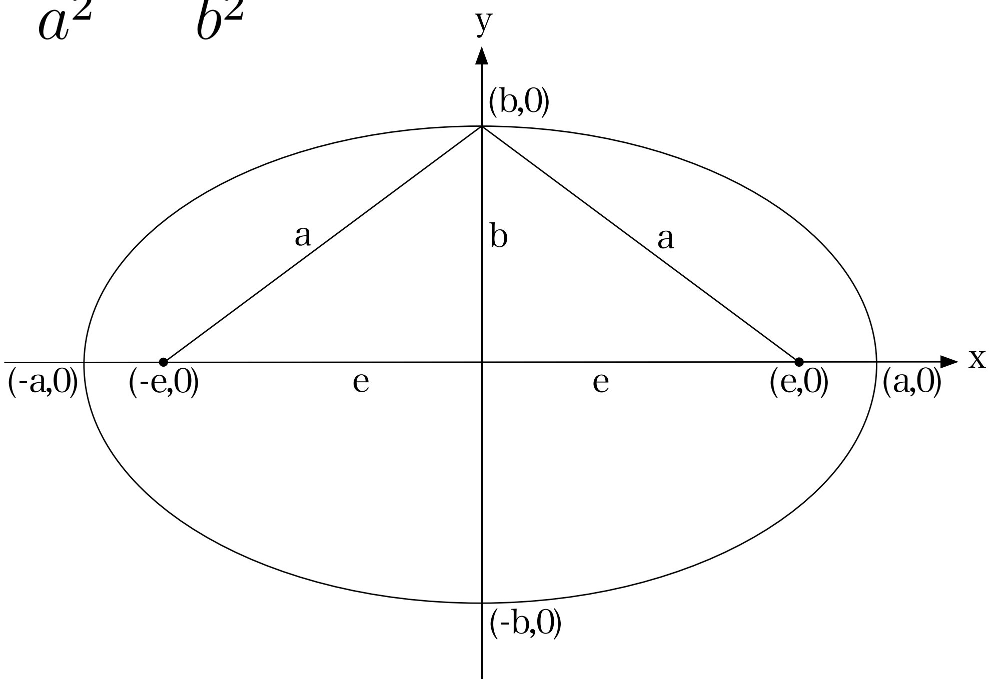
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

解析幾何学

楕円

座標平面上で $(e, 0)$、$(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下のようになる：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

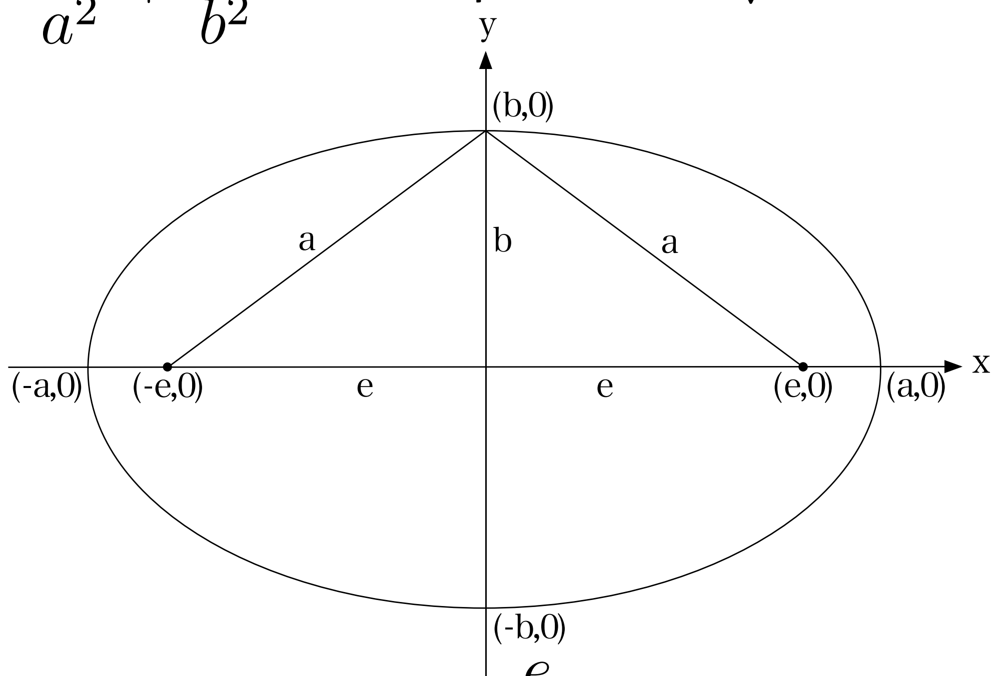


解析幾何学

楕円

座標平面上で $(e, 0)$、$(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の和が $2a$ となる点の描く楕円の方程式は以下のようになる：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad 但し\ b = \sqrt{a^2 - e^2}$$



a を長半径、b を短半径、$\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ を離心率と呼ぶ。

解析幾何学

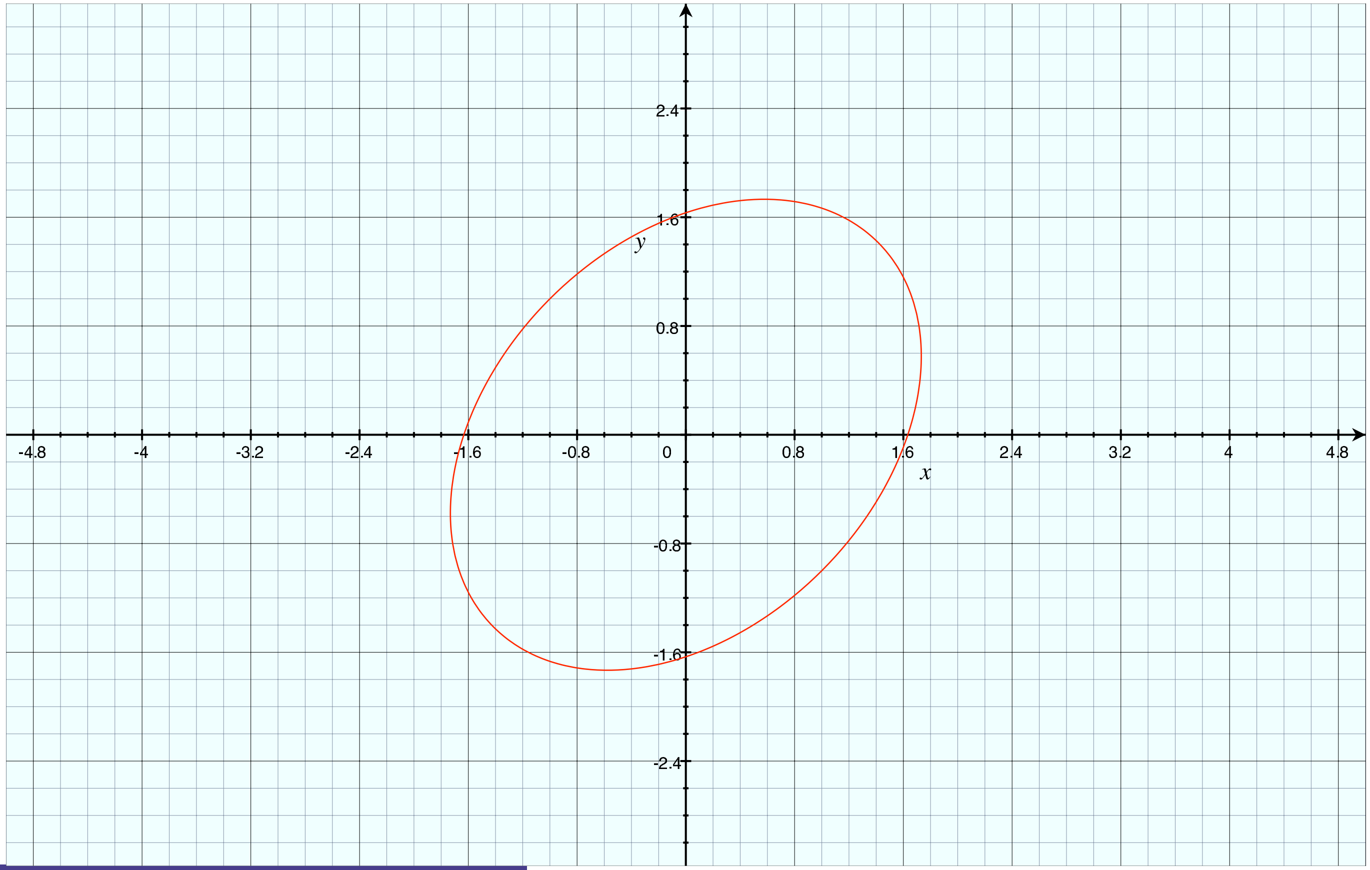
楕円

点 $(1,1)$,$(-1,-1)$ を焦点とし、それぞれへの距離の和が 4 である楕円の方程式は：$3x^2+3y^2-2xy-8=0\quad$ (判別式 <0)

解析幾何学

楕円

点 $(1,1)$,$(-1,-1)$ を焦点とし、それぞれへの距離の和が 4 である楕円の方程式は：$3x^2+3y^2-2xy-8=0 \quad (判別式<0)$



解析幾何学

双曲線

座標平面上で $(e, 0)$、$(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の差が $2a$ となる点の描く双曲線の方程式は以下のようになる：

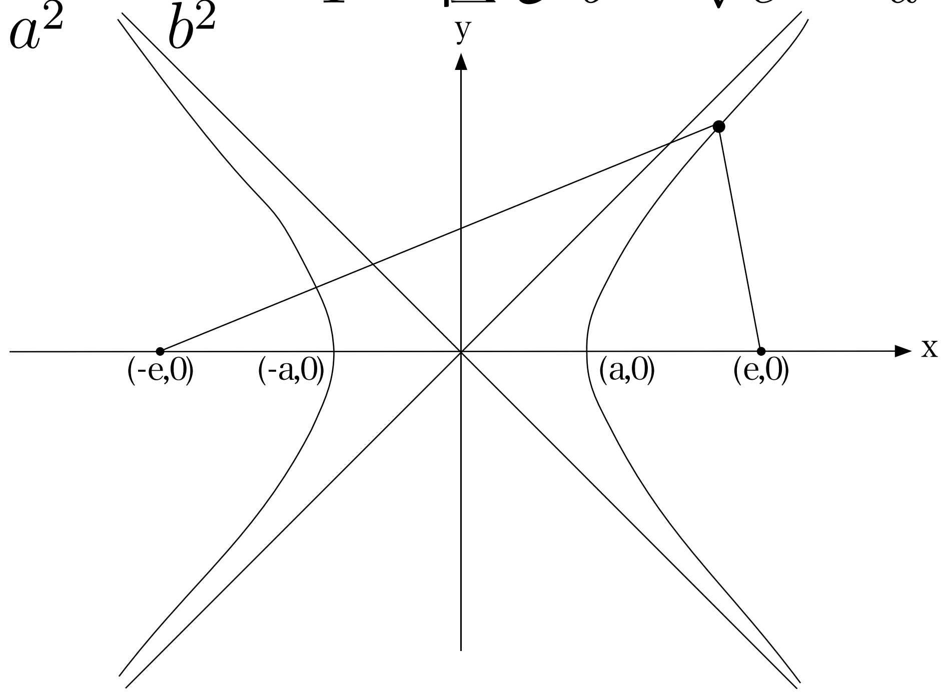
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{e^2 - a^2}$$

解析幾何学

双曲線

座標平面上で $(e, 0)$、$(-e, 0)$ を焦点とし、両焦点への距離の差が $2a$ となる点の描く双曲線の方程式は以下のようになる：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = \sqrt{e^2 - a^2}$$

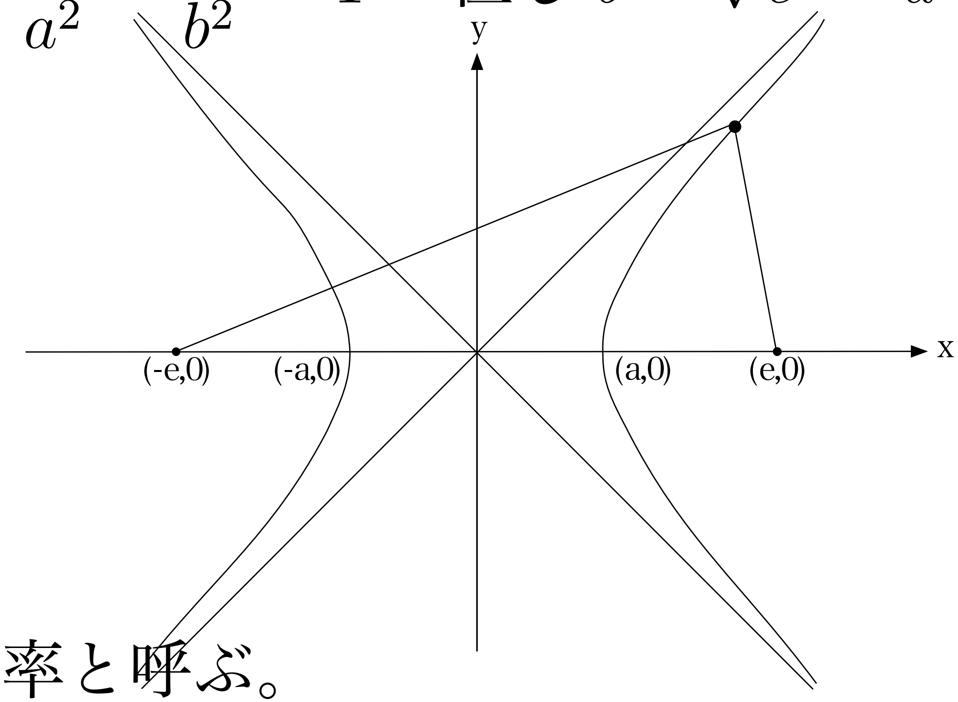


解析幾何学

<u>双曲線</u>

座標平面上で $(e,0)$、$(-e,0)$ を焦点とし、両焦点への距離の差が $2a$ となる点の描く双曲線の方程式は以下のようになる：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{但し } b=\sqrt{e^2-a^2}$$



$\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ を離心率と呼ぶ。

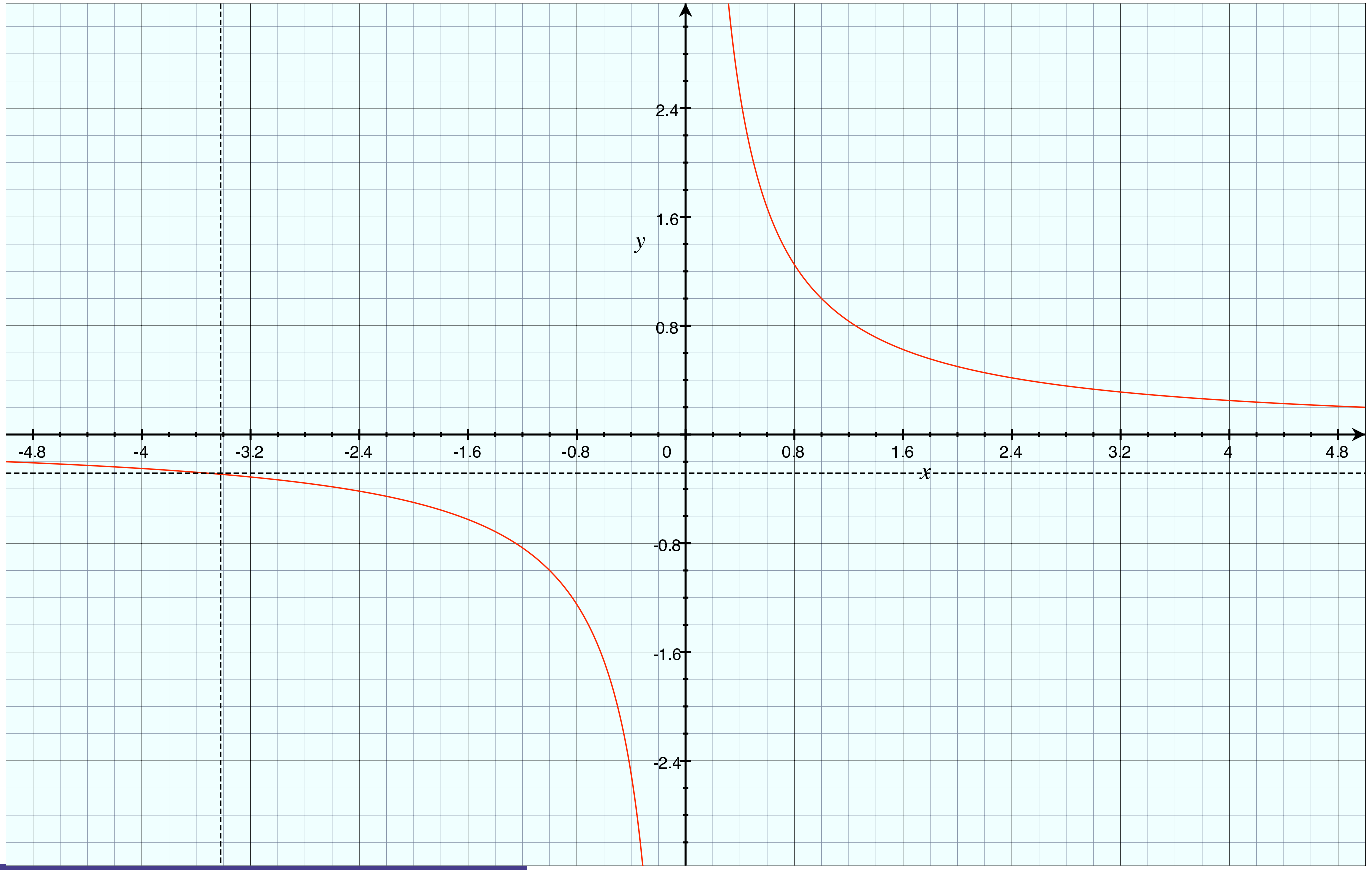
双曲線

点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ を焦点とし、それぞれへの距離の差が $2\sqrt{2}$ である双曲線の方程式は：$xy - 1 = 0$ (判別式 > 0)

解析幾何学

<u>双曲線</u>

点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}),(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ を焦点とし、それぞれへの距離の差が $2\sqrt{2}$ である双曲線の方程式は：$xy - 1 = 0$ (判別式 > 0)



放物線

座標平面上で $(e,0)$ を焦点とし、$x=-e$ を準線とする放物線の方程式は以下のようになる：

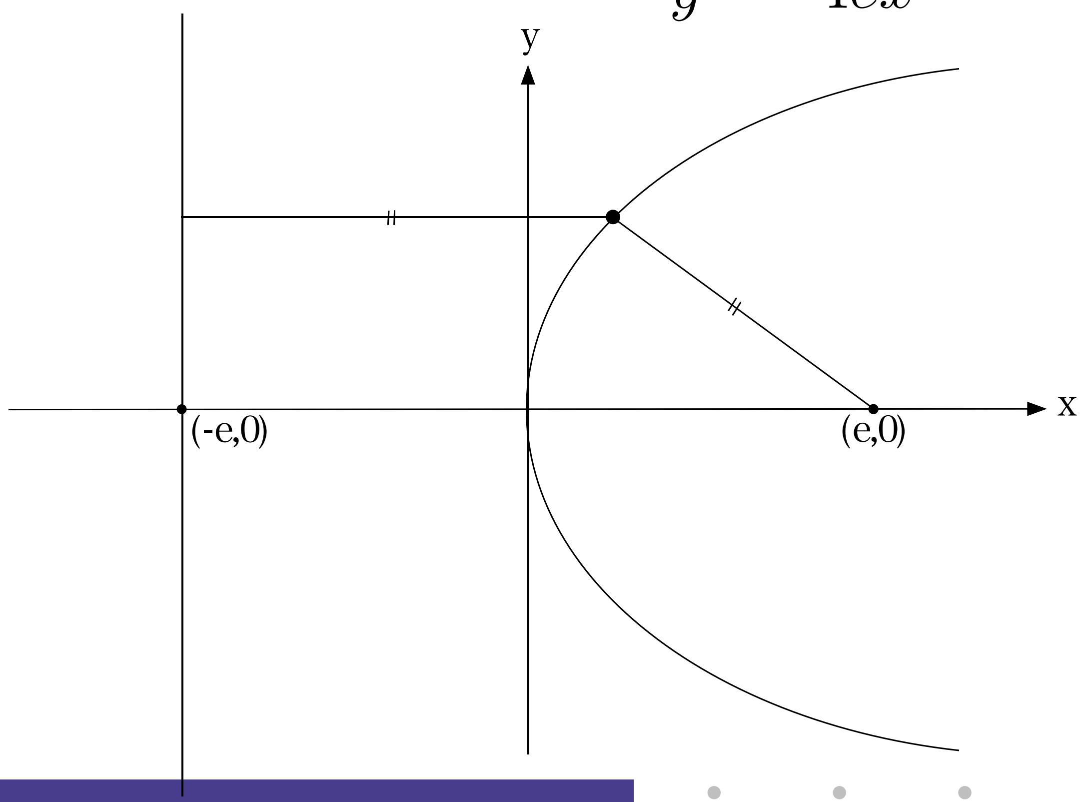
$$y^2 = 4ex$$

解析幾何学

放物線

座標平面上で $(e, 0)$ を焦点とし、$x = -e$ を準線とする放物線の方程式は以下のようになる：

$$y^2 = 4ex$$



解析幾何学

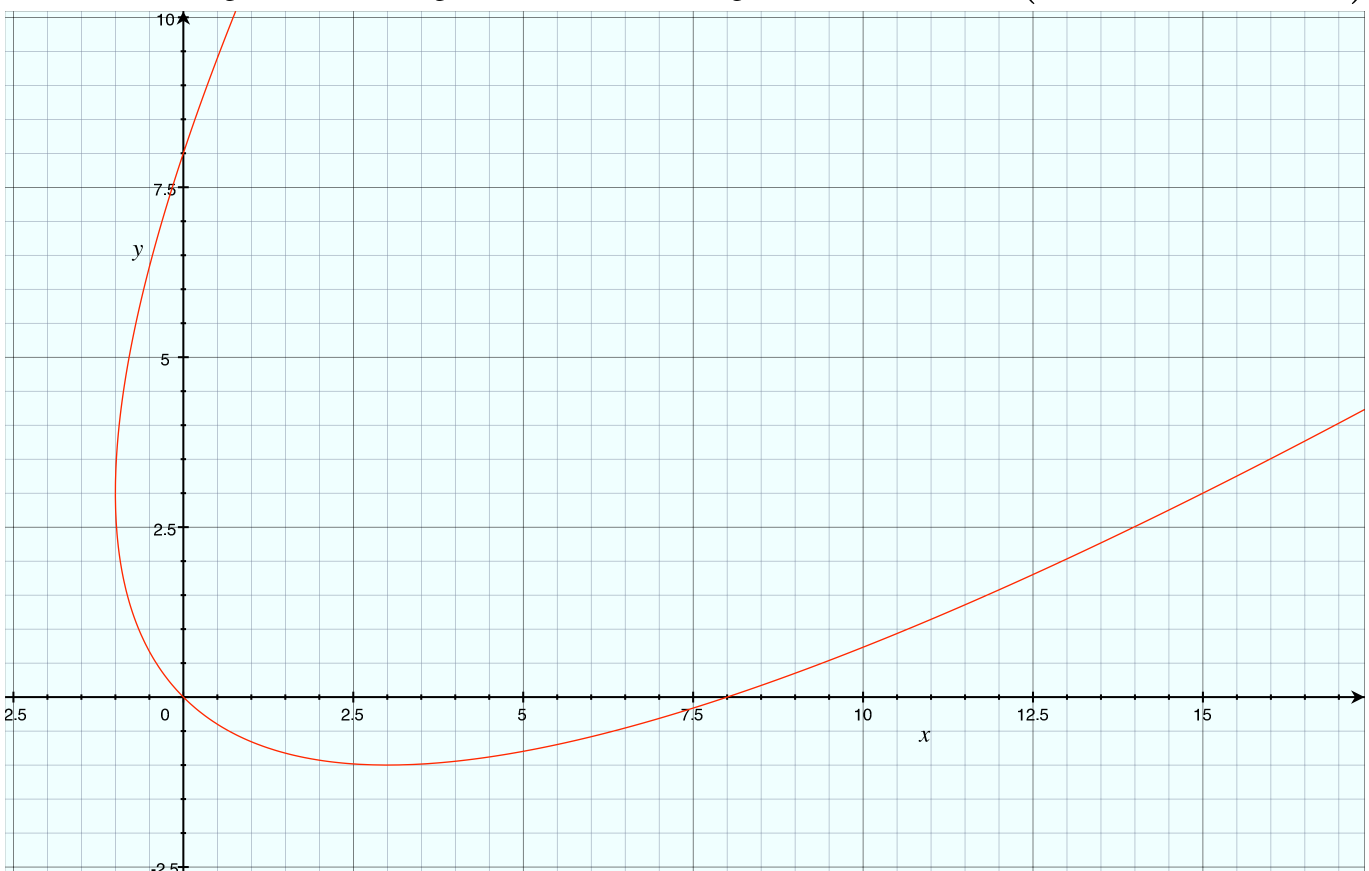
放物線

点 $(1,1)$ を焦点、直線 $x+y=-2$ を準線とする放物線の方程式は：$x^2+y^2-2xy-8x-8y=0$ 　　(判別式 $=0$)

解析幾何学

放物線

点 $(1,1)$ を焦点、直線 $x+y=-2$ を準線とする放物線の方程式は：$x^2+y^2-2xy-8x-8y=0$　　$(\text{判別式}=0)$



二次曲線

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点 (x, y) を角度 θ だけ回転した点を (X, Y) とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点 (x, y) を角度 θ だけ回転した点を (X, Y) とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta X + \sin\theta Y \\ -\sin\theta X + \cos\theta Y \end{pmatrix}$$

二次曲線

[定理]

二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

の表す図形は、判別式

$$b^2 - 4ac$$

が正のとき双曲線 (直線)、負のとき楕円 (一点、図形を表さない) である。

[証明]

点 (x, y) を角度 θ だけ回転した点を (X, Y) とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta X + \sin\theta Y \\ -\sin\theta X + \cos\theta Y \end{pmatrix}$$

これを $ax^2 + bxy + cy^2$ に代入すると

二次曲線

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 = a(\cos\theta X + \sin\theta Y)^2 \\ +b(\cos\theta X + \sin\theta Y)(-\sin\theta X + \cos\theta Y) \\ +c(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^2 \end{aligned}$$

二次曲線

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bxy + cy^2 &= a(\cos\theta X + \sin\theta Y)^2 \\
&\qquad + b(\cos\theta X + \sin\theta Y)(-\sin\theta X + \cos\theta Y) \\
&\qquad + c(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^2 \\
&= (a\cos^2\theta - b\sin\cos\theta + c\sin^2\theta)X^2 \\
&\qquad + \left\{2a\sin\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2c\sin\theta\cos\theta\right\} XY \\
&\qquad + (a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta)Y^2
\end{aligned}
$$

二次曲線

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bxy + cy^2 &= a(\cos\theta X + \sin\theta Y)^2 \\
&\quad + b(\cos\theta X + \sin\theta Y)(-\sin\theta X + \cos\theta Y) \\
&\quad + c(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^2 \\
&= (a\cos^2\theta - b\sin\cos\theta + c\sin^2\theta)X^2 \\
&\quad + \left\{2a\sin\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2c\sin\theta\cos\theta\right\} XY \\
&\quad + (a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta)Y^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\{(a+c) + (a-c)\cos 2\theta - b\sin 2\theta\} X^2 \\
&\quad + \{(a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta\} XY \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\{(a+c) - (a-c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta\} Y^2
\end{aligned}
$$

二次曲線

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bxy + cy^2 &= a(\cos\theta X + \sin\theta Y)^2 \\
&\quad +b(\cos\theta X + \sin\theta Y)(-\sin\theta X + \cos\theta Y) \\
&\quad +c(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^2 \\
&= (a\cos^2\theta - b\sin\cos\theta + c\sin^2\theta)X^2 \\
&\quad + \left\{2a\sin\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2c\sin\theta\cos\theta\right\} XY \\
&\quad +(a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta)Y^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) + (a-c)\cos 2\theta - b\sin 2\theta\right\} X^2 \\
&\quad + \left\{(a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta\right\} XY \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left\{(a+c) - (a-c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta\right\} Y^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + b^2)}\cos(2\theta+\alpha)\}X^2 \\
&\quad +\sqrt{(a-c)^2 + b^2}\sin(2\theta+\alpha)XY \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + b^2)}\cos(2\theta+\alpha)\}Y^2
\end{aligned}
$$

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

よって、$2\theta+\alpha=0$ となる様に θ を取ると

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

よって、$2\theta+\alpha=0$ となる様に θ を取ると

$$\begin{aligned} d = ax^2+bxy+cy^2 &= \tfrac{1}{2}\left\{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}X^2 \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\left\{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}Y^2 \end{aligned}$$

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

よって、$2\theta+\alpha=0$ となる様に θ を取ると

$$d = ax^2+bxy+cy^2 = \tfrac{1}{2}\left\{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}X^2 + \tfrac{1}{2}\left\{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}Y^2$$

これは、楕円もしくは双曲線の方程式である。

二次曲線

但し、$\cos\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$

よって、$2\theta+\alpha=0$ となる様に θ を取ると

$$\begin{aligned} d = ax^2+bxy+cy^2 = \tfrac{1}{2}&\left\{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}X^2 \\ &+\tfrac{1}{2}\left\{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right\}Y^2 \end{aligned}$$

これは、楕円もしくは双曲線の方程式である。

$$\{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\}\{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\} = 4ac-b^2$$

の符号によって、楕円か双曲線かが決まる。

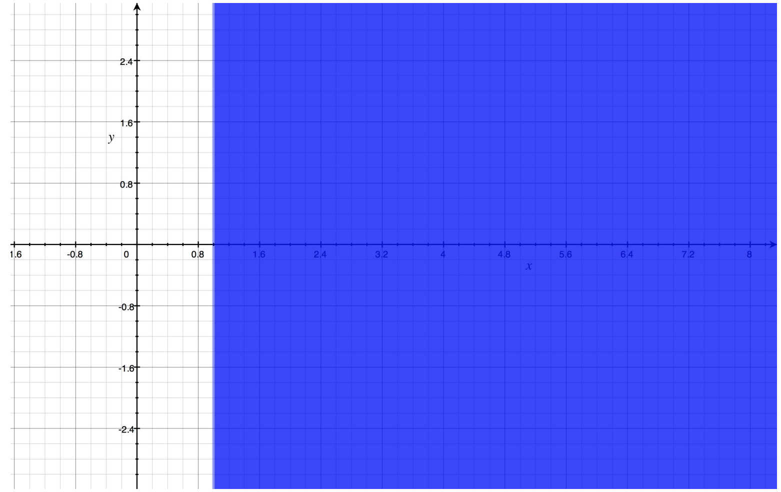
領域

領域 $\{ (x, y) \mid 1 \leq x \}$

領域

領域

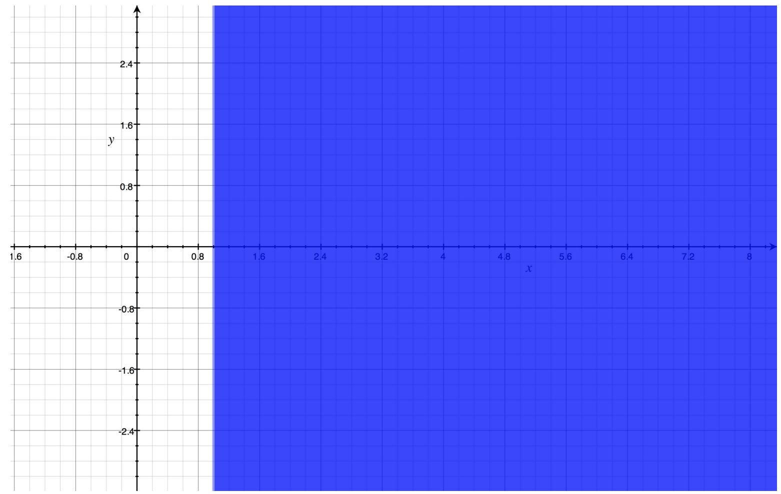
$$\{\,(x,y)\mid 1\le x\}$$



領域

<u>領域</u>

$$\{\ (x,y)\ |\ 1 \leq x\}$$

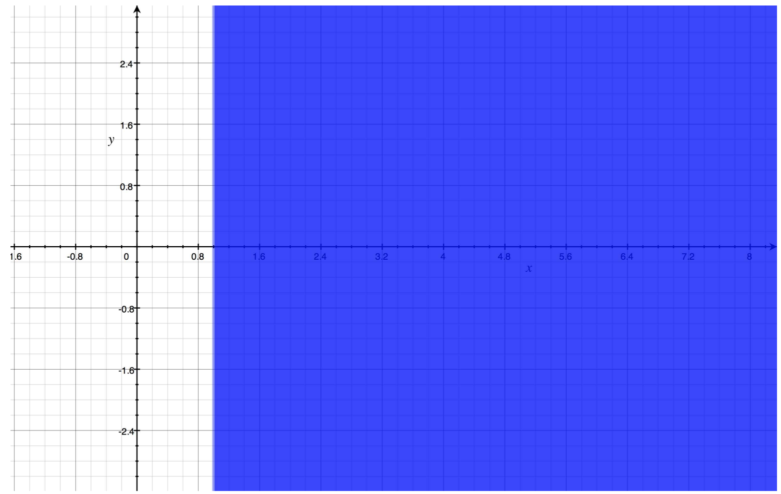


$$\{\ (x,y)\ |\ |x| < 1 \text{ かつ } |y| < y\ \}$$

領域

領域

$$\{\ (x,y)\mid 1\le x\}$$



$$\{\ (x,y)\mid |x|<1 \text{ かつ } |y|<y\ \}$$