PHILOSOPHÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA II

万有引力の法則

万有引力の法則

惑星が太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描くということから、太陽が位置 P にある惑星に及ぼす力について、太陽と惑星の距離を r として、逆二乗の法則が得られた：

$$F_P = C_P m \frac{1}{r^2} \qquad \left(C_P = \frac{8\kappa^2}{L} \right)$$

万有引力の法則

惑星が太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描くということから、太陽が位置 P にある惑星に及ぼす力について、太陽と惑星の距離を r として、逆二乗の法則が得られた：

$$F_P = C_P m \frac{1}{r^2} \qquad \left(C_P = \frac{8\kappa^2}{L} \right)$$

この法則は、太陽と惑星だけではなく、惑星とその衛星等についても成り立つ。

万有引力の法則

惑星が太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描くということから、太陽が位置 P にある惑星に及ぼす力について、太陽と惑星の距離を r として、逆二乗の法則が得られた：

$$F_P = C_P m \frac{1}{r^2} \qquad \left(C_P = \frac{8\kappa^2}{L} \right)$$

この法則は、太陽と惑星だけではなく、惑星とその衛星等についても成り立つ。
ここで、運動の第三法則 (作用反作用の法則) を考えると、惑星も太陽に対して同じ大きさで反対向きの力を及ぼしているはずである。

万有引力の法則

惑星が太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描くということから、太陽が位置 P にある惑星に及ぼす力について、太陽と惑星の距離を r として、逆二乗の法則が得られた：

$$F_P = C_P m \frac{1}{r^2} \qquad \left(C_P = \frac{8\kappa^2}{L} \right)$$

この法則は、太陽と惑星だけではなく、惑星とその衛星等についても成り立つ。
ここで、運動の第三法則 (作用反作用の法則) を考えると、惑星も太陽に対して同じ大きさで反対向きの力を及ぼしているはずである。

$$F_S = C_S M \frac{1}{r^2}$$

万有引力の法則

$F_S = F_P$ なので、$\dfrac{C_P}{M} = \dfrac{C_S}{m} = G$ とおくと F_S, F_P の大きさは次のように書ける：

万有引力の法則

$F_S = F_P$ なので、$\dfrac{C_P}{M} = \dfrac{C_S}{m} = G$ とおくと F_S, F_P の大きさは次のように書ける：

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

万有引力の法則

$F_S = F_P$ なので、$\dfrac{C_P}{M} = \dfrac{C_S}{m} = G$ とおくと F_S, F_P の大きさは次のように書ける：

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

[万有引力の法則]

質量 M, m の二つの物体は、その間の距離を r として

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

の大きさの力で引き合う。

万有引力の法則

$F_S = F_P$ なので、$\dfrac{C_P}{M} = \dfrac{C_S}{m} = G$ とおくと F_S, F_P の大きさは次のように書ける：

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

[万有引力の法則]
質量 M, m の二つの物体は、その間の距離を r として

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

の大きさの力で引き合う。

[注意]
ここでは既に、中世キリスト教の地球中心主義や、アリスタルコス以来の太陽中心主義 (コペルニクスの地動説はその復活) を脱却して、全ての物体を対等に扱う立場に立っている。

ケプラーの法則の修正

ケプラーの法則の修正

太陽が宇宙の一点に固定されていて、それが一方的に惑星に引力を働かせているのではなく、

ケプラーの法則の修正

太陽が宇宙の一点に固定されていて、それが一方的に惑星に引力を働かせているのではなく、 太陽と惑星がお互いに引き合いながら運動している。

ケプラーの法則の修正

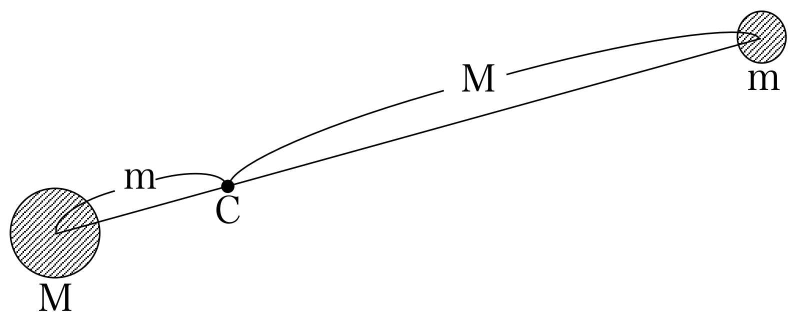
太陽が宇宙の一点に固定されていて、それが一方的に惑星に引力を働かせているのではなく、 太陽と惑星がお互いに引き合いながら運動している。

$\Longrightarrow$ 惑星の軌道は「太陽を焦点とする」楕円ではない！

ケプラーの法則の修正

太陽が宇宙の一点に固定されていて、それが一方的に惑星に引力を働かせているのではなく、太陽と惑星がお互いに引き合いながら運動している。

$\Longrightarrow$ 惑星の軌道は「太陽を焦点とする」楕円ではない！

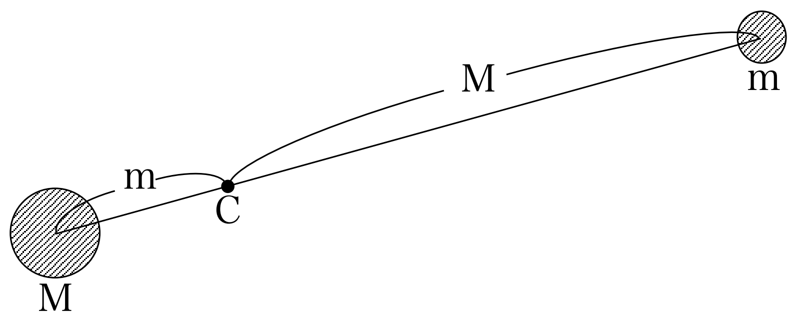


質量 M, m の二つの物体からなる系は、質量中心 C 即ち M と m を結ぶ直線を m 対 M に内分する点を焦点とする楕円軌道を描く。

ケプラーの法則の修正

太陽が宇宙の一点に固定されていて、それが一方的に惑星に引力を働かせているのではなく、 太陽と惑星がお互いに引き合いながら運動している。

$\Longrightarrow$ 惑星の軌道は「太陽を焦点とする」楕円ではない！



質量 M, m の二つの物体からなる系は、質量中心 C 即ち M と m を結ぶ直線を m 対 M に内分する点を焦点とする楕円軌道を描く。

[注意] 太陽と惑星の場合は、太陽の質量が圧倒的なので、質量中心と太陽の中心は非常に近い。

ケプラーの第三法則

ケプラーの第三法則

前の注意より、実質的に惑星が太陽を中心とする楕円軌道を描いているとすると、前回の結論より、太陽が惑星に及ぼす力 F_P は、惑星の質量を m 軌道の長半径を a、公転周期を T、太陽と惑星の距離を r_P として

$$F_P = C_P m \cdot \frac{1}{r_P^2} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2} \cdot \frac{1}{r_P^2}$$

と表せた。

ケプラーの第三法則

前の注意より、実質的に惑星が太陽を中心とする楕円軌道を描いているとすると、前回の結論より、太陽が惑星に及ぼす力 F_P は、惑星の質量を m 軌道の長半径を a、公転周期を T、太陽と惑星の距離を r_P として

$$F_P = C_P m \cdot \frac{1}{r_P^2} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2} \cdot \frac{1}{r_P^2}$$

と表せた。

従って $C_P = GM$ より

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

となり、右辺は定数なのでケプラーの第三法則が得られる。

重力定数

重力定数

前式を変形すると

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

となり、

重力定数

前式を変形すると

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

となり、 重力定数 G が分かれば、惑星の運動から太陽の質量が分かることになる。

重力定数

前式を変形すると

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

となり、 重力定数 G が分かれば、惑星の運動から太陽の質量が分かることになる。

1798 年 キャベンディッシュによる測定値：

$G = 6.67 \times 10^{-11} [m^3/kg \cdot s^2]$

重力定数

前式を変形すると

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

となり、 重力定数 G が分かれば、惑星の運動から太陽の質量が分かることになる。

1798 年 キャベンディッシュによる測定値：
$G = 6.67 \times 10^{-11}[m^3/kg \cdot s^2]$

地球の軌道の長半径 $149.6 \times 10^9[m]$、公転周期 365.25[日] を用いると、 $M \approx 2 \times 10^{30}[kg]$ が得られる。

重力定数

前式を変形すると

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

となり、 重力定数 G が分かれば、惑星の運動から太陽の質量が分かることになる。

1798 年 キャベンディッシュによる測定値：

$G = 6.67 \times 10^{-11} [m^3/kg \cdot s^2]$

地球の軌道の長半径 $149.6 \times 10^9 [m]$、公転周期 365.25[日] を用いると、 $M \approx 2 \times 10^{30} [kg]$ が得られる。
同様に、月のデータを用いると地球の質量は $6.0 \times 10^{24} [kg]$ と求まる。

重力定数

地表面で自由落下する砲弾を考える。

重力定数

地表面で自由落下する砲弾を考える。

砲弾の質量を m、地球の質量を M、地球の半径を R とすると、砲弾の受ける地球からの万有引力は $F = G\dfrac{mM}{R^2}$。

重力定数

地表面で自由落下する砲弾を考える。
砲弾の質量を m、地球の質量を M、地球の半径を R とすると、砲弾の受ける地球からの万有引力は $F = G\frac{mM}{R^2}$。
また、地表面での重力加速度を g とすると、 $F = mg$ とも書ける。

重力定数

地表面で自由落下する砲弾を考える。

砲弾の質量を m、地球の質量を M、地球の半径を R とすると、砲弾の受ける地球からの万有引力は $F = G\frac{mM}{R^2}$。

また、地表面での重力加速度を g とすると、 $F = mg$ とも書ける。

よって
$$g = G\frac{M}{R^2}$$

重力定数

地表面で自由落下する砲弾を考える。

砲弾の質量を m、地球の質量を M、地球の半径を R とすると、砲弾の受ける地球からの万有引力は $F = G\dfrac{mM}{R^2}$。

また、地表面での重力加速度を g とすると、 $F = mg$ とも書ける。

よって

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

これに前ページの値と $R = 6360[km]$ を代入すると

$$g \approx 10$$

と求まり、実測値 $9.8[m/s^2]$ と割と合う。

重力定数

地表面で自由落下する砲弾を考える。

砲弾の質量を m、地球の質量を M、地球の半径を R とすると、砲弾の受ける地球からの万有引力は $F = G\dfrac{mM}{R^2}$。

また、地表面での重力加速度を g とすると、 $F = mg$ とも書ける。

よって
$$g = G\frac{M}{R^2}$$

これに前ページの値と $R = 6360[km]$ を代入すると
$$g \approx 10$$

と求まり、実測値 $9.8[m/s^2]$ と割と合う。

参考文献

[微分積分の歴史に沿った教科書]
E. ハイラー、G. ワラー著 蟹江幸博訳「解析教程 上」シュプリンガー・フェアラーク東京

[ニュートン以降の力学の発展]
山本義隆著「古典力学の形成―ニュートンからラグランジュへ」日本評論社