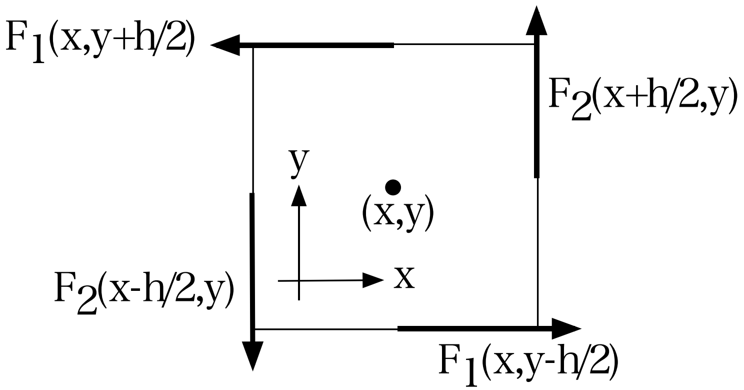
グリーンの公式

グリーンの公式

平面上のベクトル場 $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ が点 (x, y) の周りをどれだけ回っているかを考える。

グリーンの公式

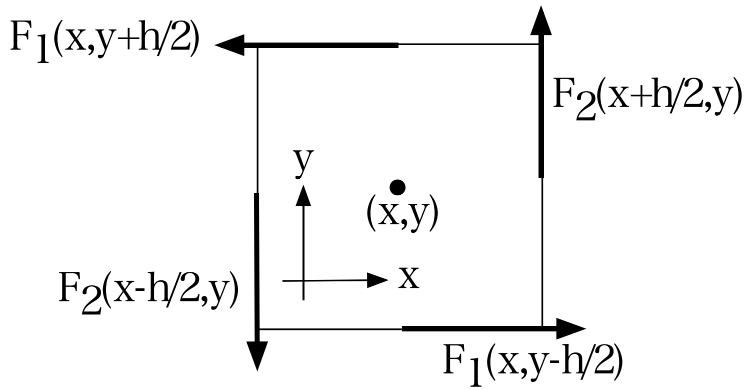
平面上のベクトル場 $\mathbf{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ が点 (x,y) の周りをどれだけ回っているかを考える。



点 (x,y) を中心とした一辺の長さ h の正方形を考える。

グリーンの公式

平面上のベクトル場 $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ が点 (x, y) の周りをどれだけ回っているかを考える。

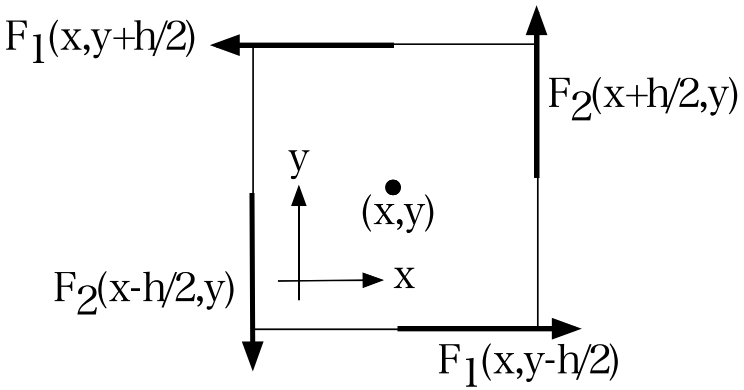


点 (x, y) を中心とした一辺の長さ h の正方形を考える。
このとき、正方形の縁に沿ってまわる流れは

$$h\{F_2(x+\frac{h}{2},y)-F_2(x-\frac{h}{2},y)-F_1(x,y+\frac{h}{2})+F_1(x,y-\frac{h}{2})\}+(\text{余り})$$

グリーンの公式

平面上のベクトル場 $\mathbf{F}(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))$ が点 (x,y) の周りをどれだけ回っているかを考える。

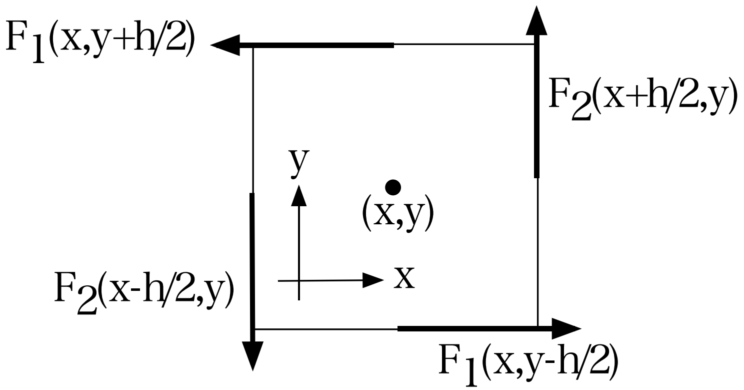


点 (x,y) を中心とした一辺の長さ h の正方形を考える。
このとき、正方形の縁に沿ってまわる流れは

$$h\{F_2(x+\tfrac{h}{2},y)-F_2(x-\tfrac{h}{2},y)-F_1(x,y+\tfrac{h}{2})+F_1(x,y-\tfrac{h}{2})\}+(\text{余り})$$
$$=h\Big\{\Big(F_2(x,y)+\tfrac{h}{2}F_{2x}(x,y)\Big)-\Big(F_2(x,y)+(-\tfrac{h}{2})F_{2x}(x,y)\Big)\Big\}$$
$$-h\Big\{\Big(F_1(x,y)+\tfrac{h}{2}F_{1y}(x,y)\Big)-\Big(F_1(x,y)+(-\tfrac{h}{2})F_{1y}(x,y)\Big)\Big\}+(\text{余り})$$

グリーンの公式

平面上のベクトル場 $\mathbf{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ が点 (x,y) の周りをどれだけ回っているかを考える。



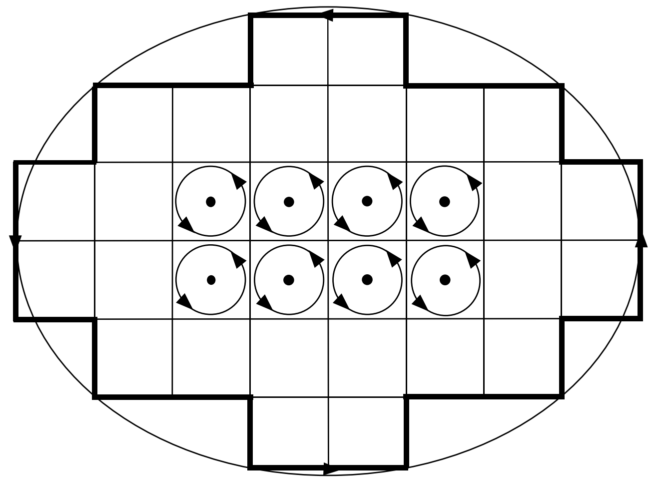
点 (x,y) を中心とした一辺の長さ h の正方形を考える。

このとき、正方形の縁に沿ってまわる流れは

$$h\{F_2(x+\tfrac{h}{2},y)-F_2(x-\tfrac{h}{2},y)-F_1(x,y+\tfrac{h}{2})+F_1(x,y-\tfrac{h}{2})\}+(\text{余り})$$
$$=h\Big\{\Big(F_2(x,y)+\tfrac{h}{2}F_{2x}(x,y)\Big)-\Big(F_2(x,y)+(-\tfrac{h}{2})F_{2x}(x,y)\Big)\Big\}$$
$$-h\Big\{\Big(F_1(x,y)+\tfrac{h}{2}F_{1y}(x,y)\Big)-\Big(F_1(x,y)+(-\tfrac{h}{2})F_{1y}(x,y)\Big)\Big\}+(\text{余り})$$
$$=h^2\{F_{2x}(x,y)-F_{1y}(x,y)\}+(\text{余り})$$

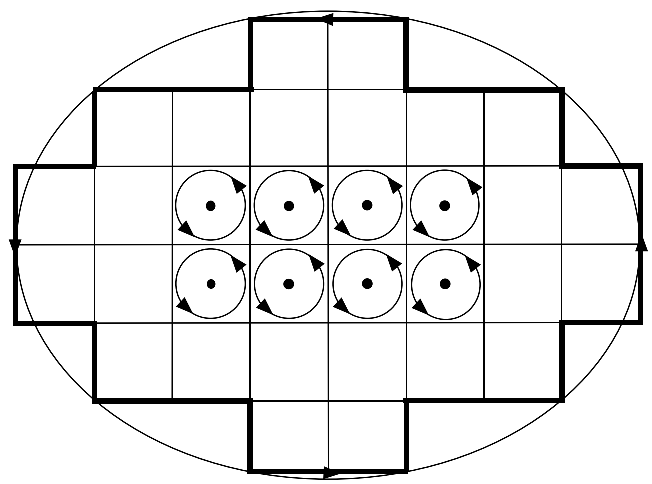
グリーンの公式

領域 D を細かい正方形に分割して、縁に沿った回転量を足し合わせると、隣り合った正方形の境界上は打ち消し合って、領域の縁に沿った和だけが残る。



グリーンの公式

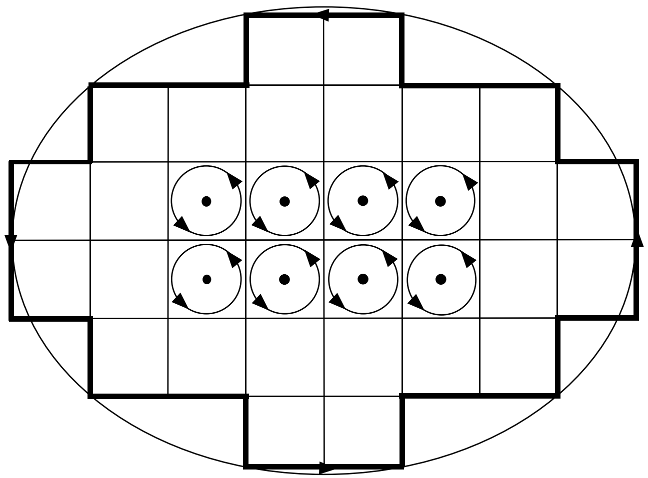
領域 D を細かい正方形に分割して、縁に沿った回転量を足し合わせると、隣り合った正方形の境界上は打ち消し合って、領域の縁に沿った和だけが残る。



分割を細かくして $h \to 0$ の極限を取ると以下のグリーンの定理が得られる：

グリーンの公式

領域 D を細かい正方形に分割して、縁に沿った回転量を足し合わせると、隣り合った正方形の境界上は打ち消し合って、領域の縁に沿った和だけが残る。



分割を細かくして $h \to 0$ の極限を取ると以下のグリーンの定理が得られる：

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dS$$

C は領域 D の境界で半時計回りに向きが付いているとする。

グリーンの公式

[例題]

C を $y = x$ と $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) からなる閉曲線とし

$$I = \int_C (xy + x^2)dx + x^2 dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。
2. グリーンの公式を用いて重積分に直して I を計算せよ。

グリーンの公式

[例題]

C を $y=x$ と $y=x^2$ $(0 \le x \le 1)$ からなる閉曲線とし

$$I = \int_C (xy + x^2)dx + x^2 dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。
2. グリーンの公式を用いて重積分に直して I を計算せよ。

[解答例]

グリーンの公式

[例題]

C を $y=x$ と $y=x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ からなる閉曲線とし

$$I = \int_C (xy + x^2)dx + x^2 dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。
2. グリーンの公式を用いて重積分に直して I を計算せよ。

[解答例]

1. $C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (t, t^2)$, $C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t, t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とすると

グリーンの公式

[例題]

C を $y = x$ と $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ からなる閉曲線とし

$$I = \int_C (xy + x^2)dx + x^2 dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。
2. グリーンの公式を用いて重積分に直して I を計算せよ。

[解答例]

1. $C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (t, t^2)$, $C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t, t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とすると

$$I = \int_{C_1} (xy + x^2)dx + x^2 dy + \int_{-C_2} (xy + x^2)dx + x^2 dy$$

グリーンの公式

[例題]

C を $y = x$ と $y = x^2$ (0 $\leq x \leq$ 1) からなる閉曲線とし

$$I = \int_C (xy + x^2)dx + x^2 dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。
2. グリーンの公式を用いて重積分に直して I を計算せよ。

[解答例]

1. $C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (t, t^2)$, $C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t, t)$ (0 $\leq t \leq$ 1) とすると

$$I = \int_{C_1} (xy + x^2)dx + x^2 dy + \int_{-C_2} (xy + x^2)dx + x^2 dy$$
$$= \int_0^1 (t^3 + t^2 + 2t^3)dt + \int_1^0 (t^2 + t^2 + t^2)dt = \frac{1}{12}$$

グリーンの公式

2.C で囲まれが領域を D とすると

$$I = \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy - x^2) \right\} dxdy$$

グリーンの公式

2.C で囲まれが領域を D とすると

$$I = \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy - x^2) \right\} dxdy$$

$$= \iint_D x dxdy$$

グリーンの公式

2.C で囲まれが領域を D とすると

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy - x^2) \right\} dxdy \\
&= \iint_D x dxdy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} x dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 x(x - x^2) dx = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

グリーンの公式

[練習問題]

D を $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ で定まる領域、その周を C とする。

$$I = \int_C 2xydx + (x^3 - y)dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。2. I を重積分に直して計算せよ。

グリーンの公式

[練習問題]

D を $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ で定まる領域、その周を C とする。

$$I = \int_C 2xydx + (x^3 - y)dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。2. I を重積分に直して計算せよ。

[解答例]

グリーンの公式

[練習問題]

D を $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ で定まる領域、その周を C とする。

$$I = \int_C 2xydx + (x^3 - y)dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。2. I を重積分に直して計算せよ。

[解答例]

1. $C_1 : (b\cos t, b\sin t)$, $C_2 : (a\cos t, a\sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とする

グリーンの公式

[練習問題]

D を $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ で定まる領域、その周を C とする。

$$I = \int_C 2xydx + (x^3 - y)dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。2. I を重積分に直して計算せよ。

[解答例]

1. $C_1 : (b\cos t, b\sin t)$, $C_2 : (a\cos t, a\sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とする

$$I = \int_{C_1} 2xydx + (x^3 - y)dy + \int_{-C_2} 2xydx + (x^3 - y)dy$$

グリーンの公式

[練習問題]

D を $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ で定まる領域、その周を C とする。

$$I = \int_C 2xydx + (x^3 - y)dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。2. I を重積分に直して計算せよ。

[解答例]

1. $C_1 : (b\cos t, b\sin t)$, $C_2 : (a\cos t, a\sin t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) とする

$$I = \int_{C_1} 2xydx + (x^3 - y)dy + \int_{-C_2} 2xydx + (x^3 - y)dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{2b^2 \cos t \sin t(-b\sin t) + (b^3 \cos^3 t - b\sin t)b\cos t\right\} dt$$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \left\{2a^2 \cos t \sin t(-a\sin t) + (a^3 \cos^3 t - a\sin t)a\cos t\right\} dt$$

グリーンの公式

[練習問題]

D を $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ で定まる領域、その周を C とする。

$$I = \int_C 2xydx + (x^3 - y)dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。2. I を重積分に直して計算せよ。

[解答例]

1. $C_1 : (b\cos t, b\sin t)$, $C_2 : (a\cos t, a\sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とする

$$I = \int_{C_1} 2xydx + (x^3 - y)dy + \int_{-C_2} 2xydx + (x^3 - y)dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{2b^2 \cos t \sin t(-b\sin t) + (b^3\cos^3 t - b\sin t)b\cos t\right\} dt$$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \left\{2a^2 \cos t \sin t(-a\sin t) + (a^3\cos^3 t - a\sin t)a\cos t\right\} dt$$

$$= \frac{3}{4}(b^4 - a^4)\pi$$

グリーンの公式

[練習問題]

D を $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ で定まる領域、その周を C とする。

$$I = \int_C 2xydx + (x^3 - y)dy$$

とする。

1. 線積分 I を計算せよ。2. I を重積分に直して計算せよ。

[解答例]

1. $C_1 : (b\cos t, b\sin t)$, $C_2 : (a\cos t, a\sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とする

$$I = \int_{C_1} 2xydx + (x^3 - y)dy + \int_{-C_2} 2xydx + (x^3 - y)dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{2b^2 \cos t \sin t(-b\sin t) + (b^3\cos^3 t - b\sin t)b\cos t\right\} dt$$

$$+ \int_{2\pi}^0 \left\{2a^2 \cos t \sin t(-a\sin t) + (a^3\cos^3 t - a\sin t)a\cos t\right\} dt$$

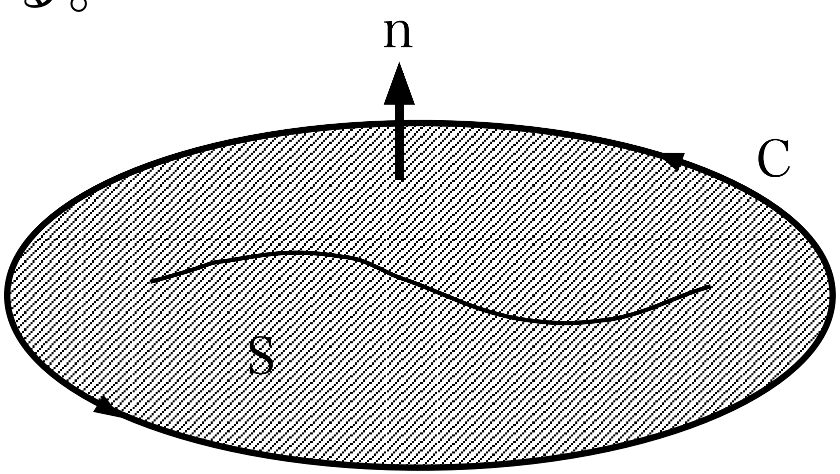
$$= \frac{3}{4}(b^4 - a^4)\pi$$

2. 極座標を用いる

ストークスの公式

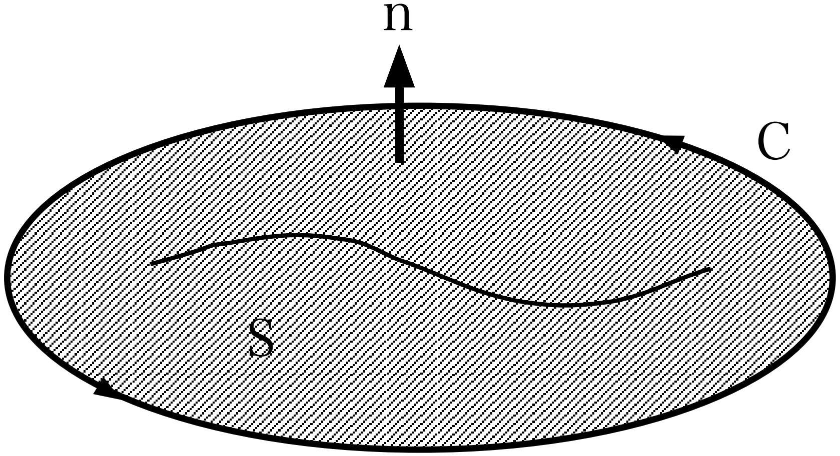
ストークスの公式

境界を持つ曲面 S を考えその境界を C とする。S は向きが付いており、C はその向きに対して半時計回りに向きがつけられているとする。



ストークスの公式

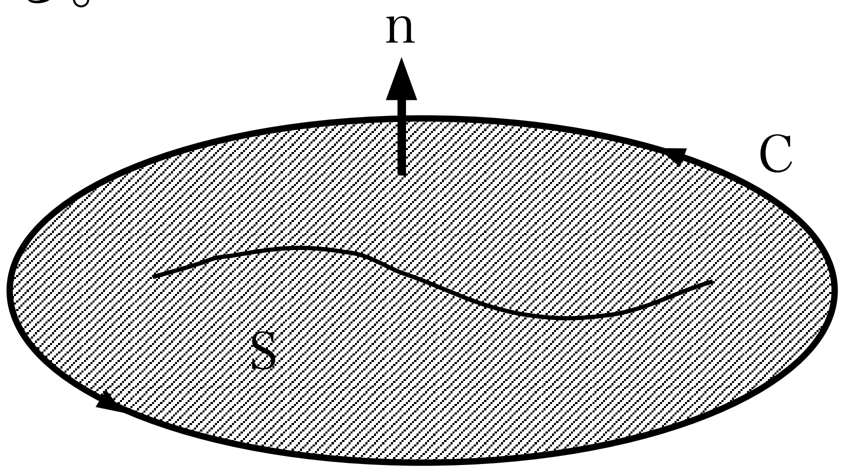
境界を持つ曲面 S を考えその境界を C とする。S は向きが付いており、C はその向きに対して半時計回りに向きがつけられているとする。



このとき、S で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}$ に対し、平面上のグリーンの公式と同様の議論により次のストークスの公式が得られる：

ストークスの公式

境界を持つ曲面 S を考えその境界を C とする。S は向きが付いており、C はその向きに対して半時計回りに向きがつけられているとする。



このとき、S で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}$ に対し、平面上のグリーンの公式と同様の議論により次のストークスの公式が得られる：

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの公式

[例]

ストークスの公式

[例]

マクスウェル方程式より、電場が変化しないとき $\left(\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}\right)$

磁場 $\mathbf{B}$ と電流 $\mathbf{j}$ の間には次の関係が成り立つ：

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}$$

ストークスの公式

[例]

マクスウェル方程式より、電場が変化しないとき $\left(\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}\right)$

磁場 $\mathbf{B}$ と電流 $\mathbf{j}$ の間には次の関係が成り立つ：

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}$$

従って閉曲線 C を境界とする曲面 S について次が成り立つ：

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの公式

[例]

マクスウェル方程式より、電場が変化しないとき $\left(\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}\right)$

磁場 $\mathbf{B}$ と電流 $\mathbf{j}$ の間には次の関係が成り立つ：

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}$$

従って閉曲線 C を境界とする曲面 S について次が成り立つ：

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

左辺は境界 C にしか依らないので、右辺は閉曲線 C を通り抜ける電流と考える事が出来る。

ストークスの公式

[例]

マクスウェル方程式より、電場が変化しないとき $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}\right)$

磁場 $\mathbf{B}$ と電流 $\mathbf{j}$ の間には次の関係が成り立つ：

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}$$

従って閉曲線 C を境界とする曲面 S について次が成り立つ：

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

左辺は境界 C にしか依らないので、右辺は閉曲線 C を通り抜ける電流と考える事が出来る。

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}(C\text{ を通り抜ける電流})$$

ストークスの公式

[例]

マクスウェル方程式より、電場が変化しないとき $\left(\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}\right)$

磁場 $\mathbf{B}$ と電流 $\mathbf{j}$ の間には次の関係が成り立つ：

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}$$

従って閉曲線 C を境界とする曲面 S について次が成り立つ：

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

左辺は境界 C にしか依らないので、右辺は閉曲線 C を通り抜ける電流と考える事が出来る。

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}(C \text{ を通り抜ける電流})$$

これをアンペールの法則とよぶ。

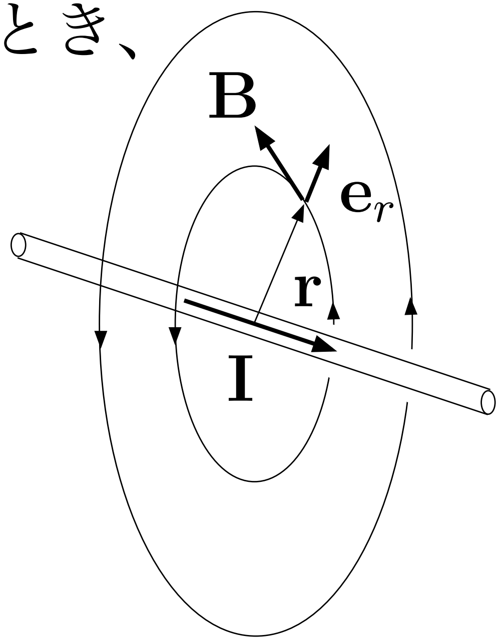
ストークスの公式

[練習問題]

ストークスの公式

[練習問題]

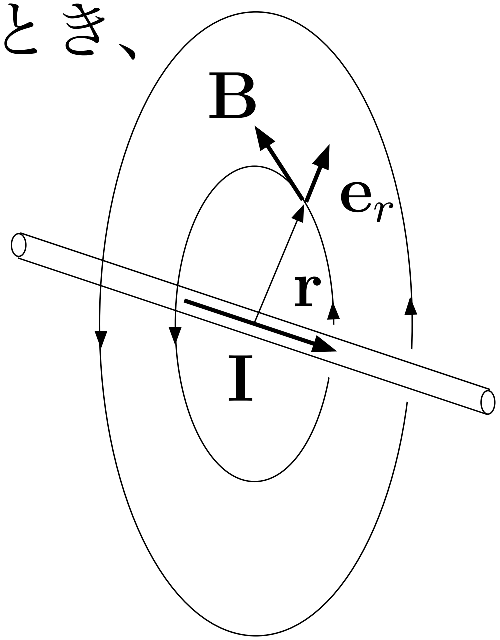
無限に長い直線状の電線を電流 I が流れるとき、
電線のまわりに出来る磁場を求めよ。
但し、電線まわりの回転対称性より磁場の
大きさは電線からの距離のみで決まり、
向きは電線まわりを回る方向とする。



ストークスの公式

[練習問題]

無限に長い直線状の電線を電流 I が流れるとき、
電線のまわりに出来る磁場を求めよ。
但し、電線まわの回転対称性より磁場の
大きさは電線からの距離のみで決まり、
向きは電線まわりを回る方向とする。

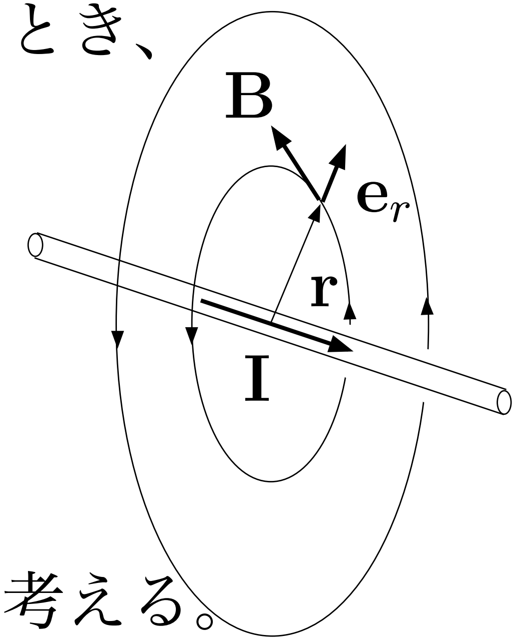


[解答例]

ストークスの公式

[練習問題]

無限に長い直線状の電線を電流 I が流れるとき、
電線のまわりに出来る磁場を求めよ。
但し、電線まわの回転対称性より磁場の
大きさは電線からの距離のみで決まり、
向きは電線まわりを回る方向とする。



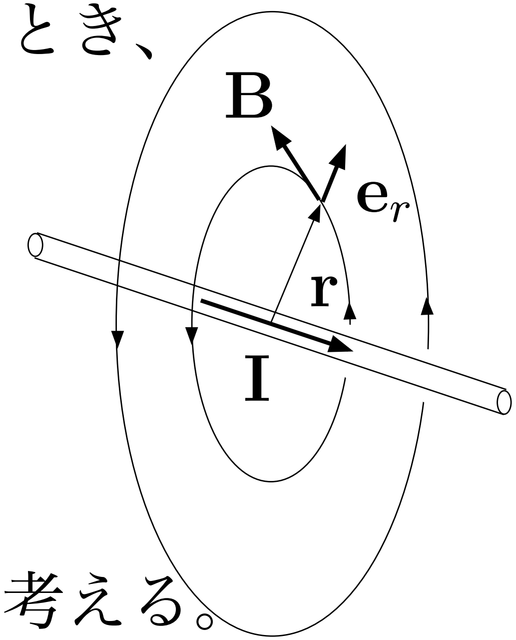
[解答例]

電線と垂直な平面上電線から距離 r の円を考える。

ストークスの公式

[練習問題]

無限に長い直線状の電線を電流 I が流れるとき、
電線のまわりに出来る磁場を求めよ。
但し、電線まわの回転対称性より磁場の
大きさは電線からの距離のみで決まり、
向きは電線まわりを回る方向とする。



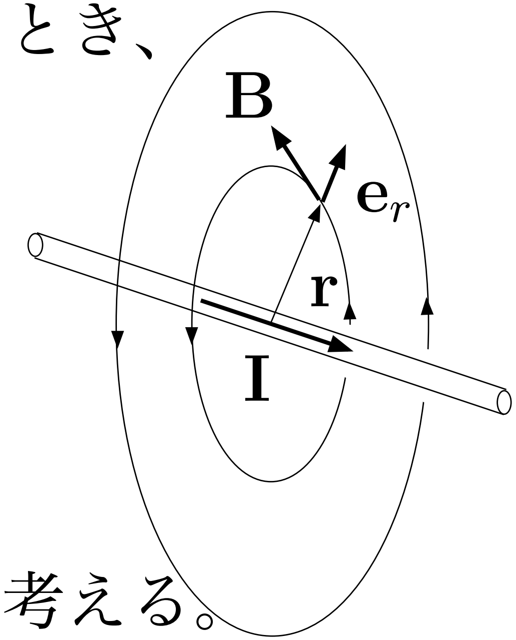
[解答例]

電線と垂直な平面上電線から距離 r の円を考える。
この円上で磁場の大きさは一定で円に接する方向を向いてい
るので、$\displaystyle\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B \;(B = |\mathbf{B}|)$

ストークスの公式

[練習問題]

無限に長い直線状の電線を電流 I が流れるとき、
電線のまわりに出来る磁場を求めよ。
但し、電線まわの回転対称性より磁場の
大きさは電線からの距離のみで決まり、
向きは電線まわりを回る方向とする。



[解答例]

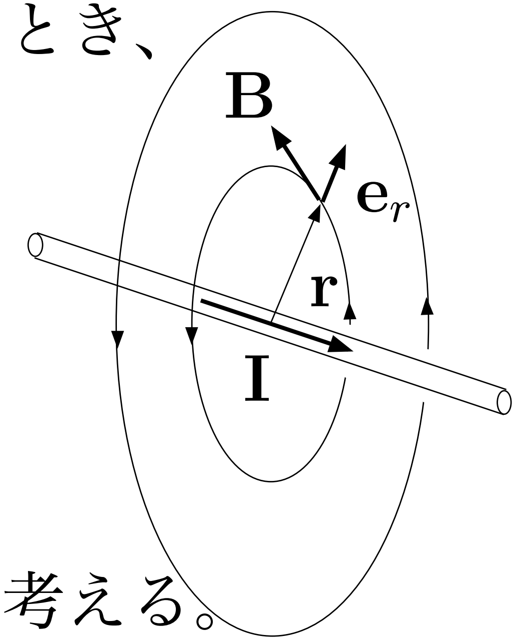
電線と垂直な平面上電線から距離 r の円を考える。
この円上で磁場の大きさは一定で円に接する方向を向いているので、$\displaystyle\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B \; (B = |\mathbf{B}|)$

アンペールの法則より $B = \dfrac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}$

ストークスの公式

[練習問題]

無限に長い直線状の電線を電流 I が流れるとき、
電線のまわりに出来る磁場を求めよ。
但し、電線まわの回転対称性より磁場の
大きさは電線からの距離のみで決まり、
向きは電線まわりを回る方向とする。



[解答例]

電線と垂直な平面上電線から距離 r の円を考える。
この円上で磁場の大きさは一定で円に接する方向を向いているので、$\displaystyle\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B \; (B = |\mathbf{B}|)$

アンペールの法則より $B = \dfrac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}$ *i.e.* $\mathbf{B} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\dfrac{\mathbf{I}\times\mathbf{e}_r}{r}$

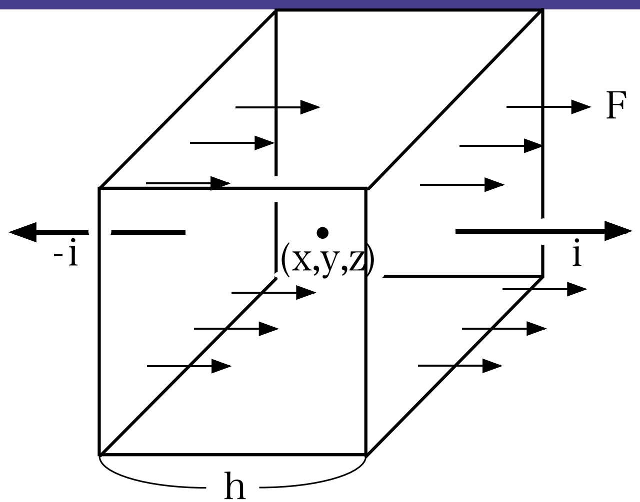
ガウスの発散定理

ガウスの発散定理

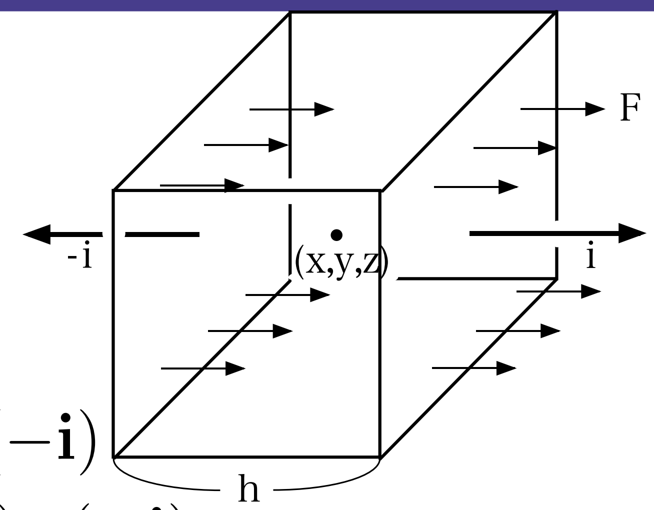
流速が $\mathbf{F}$ で与えられる流体を考える。

ガウスの発散定理

流速が $\mathbf{F}$ で与えられる流体を考える。
点 (x, y, z) を囲む一辺の長さ
h の立方体を考える：



ガウスの発散定理



流速が $\mathbf{F}$ で与えられる流体を考える。

点 (x,y,z) を囲む一辺の長さ

h の立方体を考える：

各面を通って流出する流体の量は：

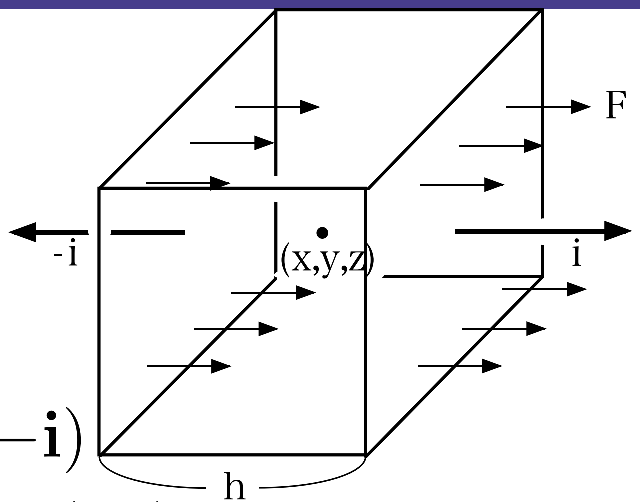
$$h^2\Big\{\mathbf{F}(x+\tfrac{h}{2},y,z)\cdot\mathbf{i}+\mathbf{F}(x-\tfrac{h}{2},y,z)\cdot(-\mathbf{i})$$
$$+\mathbf{F}(x,y+\tfrac{h}{2},z)\cdot\mathbf{j}+\mathbf{F}(x,y-\tfrac{h}{2},z)\cdot(-\mathbf{j})$$
$$+\mathbf{F}(x,y,z+\tfrac{h}{2})\cdot\mathbf{k}+\mathbf{F}(x,y,z-\tfrac{h}{2})\cdot(-\mathbf{k})+(\text{余り})\Big\}$$

ガウスの発散定理

流速が $\mathbf{F}$ で与えられる流体を考える。

点 (x,y,z) を囲む一辺の長さ

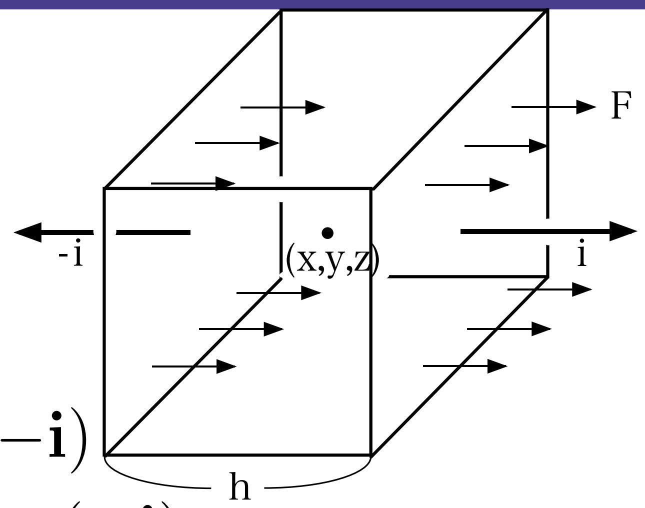
h の立方体を考える：



各面を通って流出する流体の量は：

$$h^2\Big\{\mathbf{F}(x+\tfrac{h}{2},y,z)\cdot\mathbf{i}+\mathbf{F}(x-\tfrac{h}{2},y,z)\cdot(-\mathbf{i})$$
$$+\mathbf{F}(x,y+\tfrac{h}{2},z)\cdot\mathbf{j}+\mathbf{F}(x,y-\tfrac{h}{2},z)\cdot(-\mathbf{j})$$
$$+\mathbf{F}(x,y,z+\tfrac{h}{2})\cdot\mathbf{k}+\mathbf{F}(x,y,z-\tfrac{h}{2})\cdot(-\mathbf{k})+(\text{余り})\Big\}$$
$$=h^2\Big\{\Big(F_1(x,y,z)+\tfrac{h}{2}F_{1x}(x,y,z)\Big)-\Big(F_1(x,y,z)+(-\tfrac{h}{2})F_{1x}(x,y,z)\Big)$$
$$+\Big(F_2(x,y,z)+\tfrac{h}{2}F_{2y}(x,y,z)\Big)-\Big(F_2(x,y,z)+(-\tfrac{h}{2})F_{2y}(x,y,z)\Big)$$
$$+\Big(F_3(x,y,z)+\tfrac{h}{2}F_{3z}(x,y,z)\Big)-\Big(F_3(x,y,z)+(-\tfrac{h}{2})F_{3z}(x,y,z)\Big)\Big\}$$
$$+(\text{余り})$$

ガウスの発散定理



流速が **F** で与えられる流体を考える。

点 (x, y, z) を囲む一辺の長さ

h の立方体を考える：

各面を通って流出する流体の量は：

$$h^2\Big\{\mathbf{F}(x+\tfrac{h}{2},y,z)\cdot\mathbf{i}+\mathbf{F}(x-\tfrac{h}{2},y,z)\cdot(-\mathbf{i})$$
$$+\mathbf{F}(x,y+\tfrac{h}{2},z)\cdot\mathbf{j}+\mathbf{F}(x,y-\tfrac{h}{2},z)\cdot(-\mathbf{j})$$
$$+\mathbf{F}(x,y,z+\tfrac{h}{2})\cdot\mathbf{k}+\mathbf{F}(x,y,z-\tfrac{h}{2})\cdot(-\mathbf{k})+(\text{余り})\Big\}$$

$$=h^2\Big\{\Big(F_1(x,y,z)+\tfrac{h}{2}F_{1x}(x,y,z)\Big)-\Big(F_1(x,y,z)+(-\tfrac{h}{2})F_{1x}(x,y,z)\Big)$$
$$+\Big(F_2(x,y,z)+\tfrac{h}{2}F_{2y}(x,y,z)\Big)-\Big(F_2(x,y,z)+(-\tfrac{h}{2})F_{2y}(x,y,z)\Big)$$
$$+\Big(F_3(x,y,z)+\tfrac{h}{2}F_{3z}(x,y,z)\Big)-\Big(F_3(x,y,z)+(-\tfrac{h}{2})F_{3z}(x,y,z)\Big)\Big\}$$
$$+(\text{余り})$$

$$=h^3\mathrm{div}\,\mathbf{F}+(\text{余り})$$

ガウスの発散定理

従って、空間内の領域 D とそのまわりで定められたベクトル場 $\mathbf{F}$ について、D を一辺の長さ h の小さな立方体に分割して、各立方体の面から出入りする流体の量を足し合わせると、

ガウスの発散定理

従って、空間内の領域 D とそのまわりで定められたベクトル場 $\mathbf{F}$ について、D を一辺の長さ h の小さな立方体に分割して、各立方体の面から出入りする流体の量を足し合わせると、隣り合った立方体の面を通る流体の量は打ち消し合って、一番外側の面を通る流体の量のみが得られる。

ガウスの発散定理

従って、空間内の領域 D とそのまわりで定められたベクトル場 $\mathbf{F}$ について、D を一辺の長さ h の小さな立方体に分割して、各立方体の面から出入りする流体の量を足し合わせると、隣り合った立方体の面を通る流体の量は打ち消し合って、一番外側の面を通る流体の量のみが得られる。　よって、$h \to 0$ として立方体を無限に細かくした極限では次のガウスの発散定理が成り立つ：

$$\iiint_D \mathrm{div}\ \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

但し、S は D の境界とし、 $d\mathbf{S}$ は D の外部を向く様に取る。

ガウスの発散定理

[例]

原点 **O** に点電荷 Q を置いたとき、各点での電位は

$\varphi(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$ (但し $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) で与えられ、

ガウスの発散定理

[例]

原点 **O** に点電荷 Q を置いたとき、各点での電位は $\varphi(x, y, z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$ (但し $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) で与えられ、電場は $\mathbf{E}(x, y, z) = -\mathrm{grad}\,\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$ ($\mathbf{e}_r$ は (x, y, z) 方向の単位ベクトル) で与えられる。

ガウスの発散定理

[例]

原点 **O** に点電荷 Q を置いたとき、各点での電位は

$\varphi(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$ **(**但し $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$**)** で与えられ、

電場は $\mathbf{E}(x,y,z) = -\mathrm{grad}\ \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$ **(**$\mathbf{e}_r$ は (x,y,z) 方向の単位ベクトル**)** で与えられる。

これより、平曲面 S について次が成り立つ：

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & (Q\text{ が }S\text{ の内部に無いとき}) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (Q\text{ が }S\text{ の内部にあるとき}) \end{cases}$$

ガウスの発散定理

[例]

原点 **O** に点電荷 Q を置いたとき、各点での電位は

$\varphi(x,y,z)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$ (但し $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) で与えられ、

電場は $\mathbf{E}(x,y,z)=-\mathrm{grad}\,\varphi=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$ ($\mathbf{e}_r$ は (x,y,z) 方向の単位ベクトル) で与えられる。

これより、平曲面 S について次が成り立つ：

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\begin{cases}0 & (Q\text{ が }S\text{ の内部に無いとき})\\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (Q\text{ が }S\text{ の内部にあるとき})\end{cases}$$

$\because$ 内部にないときは S で囲まれた領域を D として

ガウスの発散定理

[例]

原点 **O** に点電荷 Q を置いたとき、各点での電位は

$\varphi(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$ (但し $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) で与えられ、

電場は $\mathbf{E}(x,y,z) = -\mathrm{grad}\,\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$ ($\mathbf{e}_r$ は (x,y,z) 方向の単位ベクトル) で与えられる。

これより、平曲面 S について次が成り立つ：

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & (Q \text{ が } S \text{ の内部に無いとき}) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (Q \text{ が } S \text{ の内部にあるとき}) \end{cases}$$

$\because$ 内部にないときは S で囲まれた領域を D として

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \mathrm{div}\mathbf{E}\,dV$$

ガウスの発散定理

[例]

原点 **O** に点電荷 Q を置いたとき、各点での電位は

$\varphi(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$ (但し $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) で与えられ、

電場は $\mathbf{E}(x,y,z) = -\mathrm{grad}\ \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$ ($\mathbf{e}_r$ は (x,y,z) 方向の単位ベクトル) で与えられる。

これより、平曲面 S について次が成り立つ：

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & (Q \text{ が } S \text{ の内部に無いとき}) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (Q \text{ が } S \text{ の内部にあるとき}) \end{cases}$$

$\because$ 内部にないときは S で囲まれた領域を D として

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = \iiint_D -\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ \varphi)\, dV$$

ガウスの発散定理

[例]

原点 $\mathbf{O}$ に点電荷 Q を置いたとき、各点での電位は

$\varphi(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$ (但し $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) で与えられ、

電場は $\mathbf{E}(x,y,z) = -\mathrm{grad}\ \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$ ($\mathbf{e}_r$ は (x,y,z) 方向の単位ベクトル) で与えられる。

これより、平曲面 S について次が成り立つ：

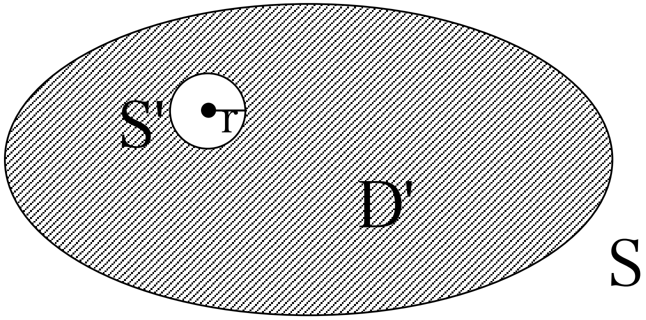
$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & (Q \text{ が } S \text{ の内部に無いとき}) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (Q \text{ が } S \text{ の内部にあるとき}) \end{cases}$$

$\because$ 内部にないときは S で囲まれた領域を D として

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = \iiint_D -\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ \varphi)\, dV = 0$$

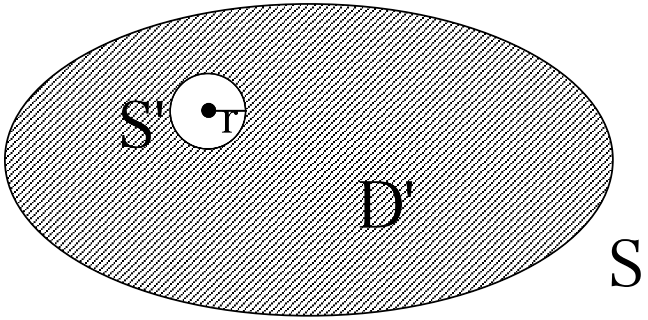
ガウスの発散定理

内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると



ガウスの発散定理

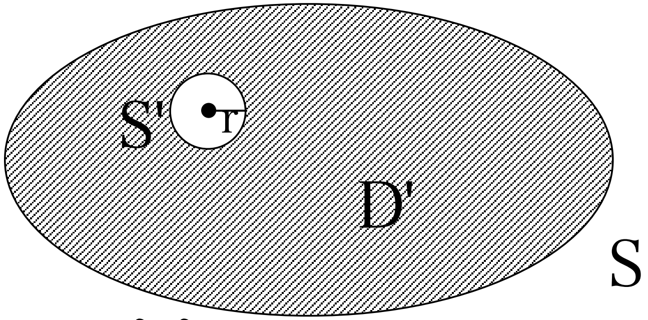
内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると



$$0 = \iiint_{D'} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV$$

ガウスの発散定理

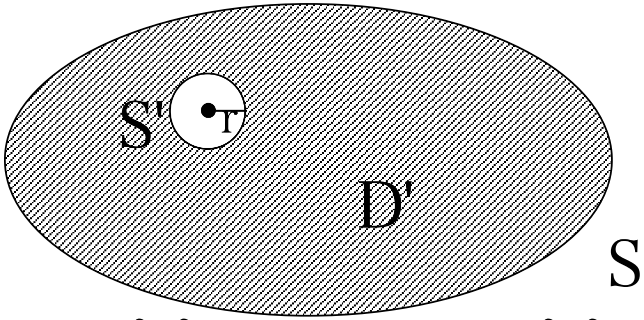
内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると



$$0 = \iiint_{D'} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV \quad = \iint_{S-S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

ガウスの発散定理

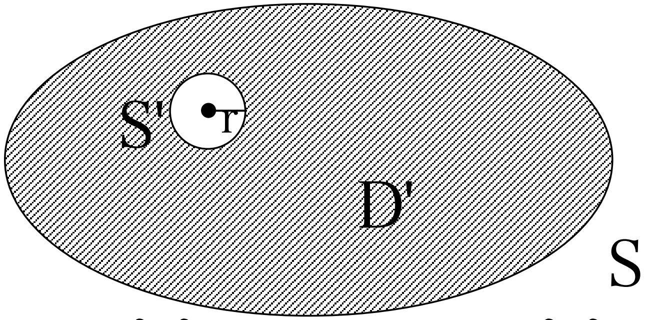
内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると



$$0 = \iiint_{D'} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = \iint_{S-S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

ガウスの発散定理

内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると

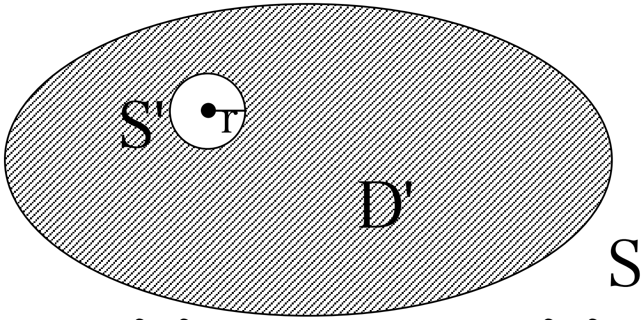


$$0 = \iiint_{D'} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = \iint_{S-S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

ここで $\displaystyle \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}$

ガウスの発散定理

内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると

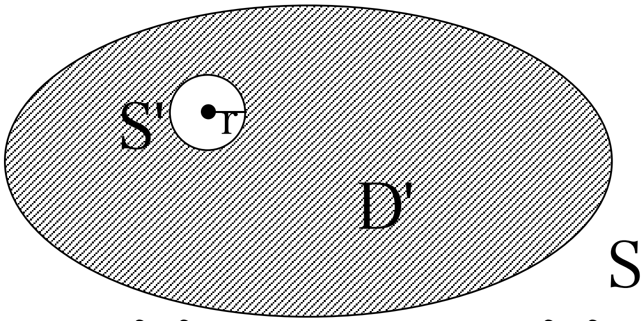


$$0 = \iiint_{D'} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = \iint_{S-S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

ここで $\displaystyle \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}dS$

ガウスの発散定理

内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると



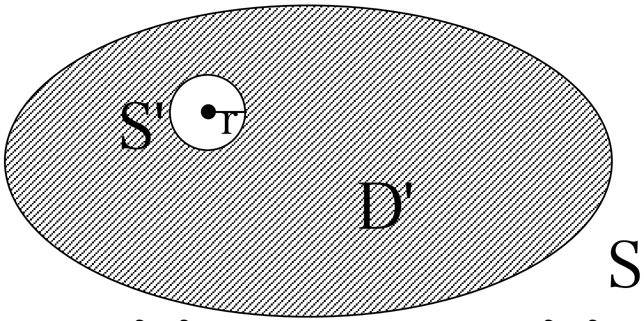
$$0 = \iiint_{D'} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = \iint_{S-S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

ここで $\displaystyle\iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} dS$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2} dS$$

ガウスの発散定理

内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると



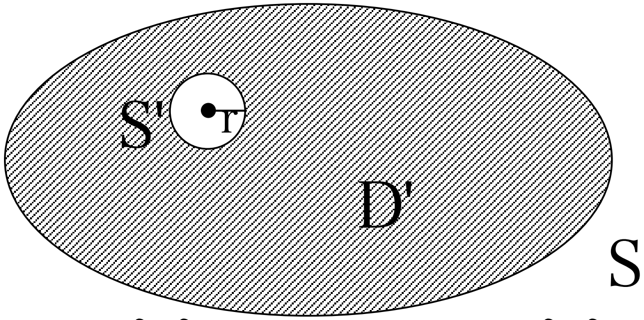
$$0 = \iiint_{D'} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = \iint_{S-S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

ここで $\displaystyle \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot \mathbf{n}dS$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ガウスの発散定理

内部にあるときは、原点中心で S の内部に収まる小さな半径 r の球を S' とし、S と S' の間の領域を D' とすると



$$0 = \iiint_{D'} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV = \iint_{S-S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

ここで $\displaystyle\iint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot \mathbf{n}dS$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{1}{r^2} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

従って、$\displaystyle\iint_{S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

宿題

問題集 p.92 例題 1〜 p.101 例題 9