曲面積分

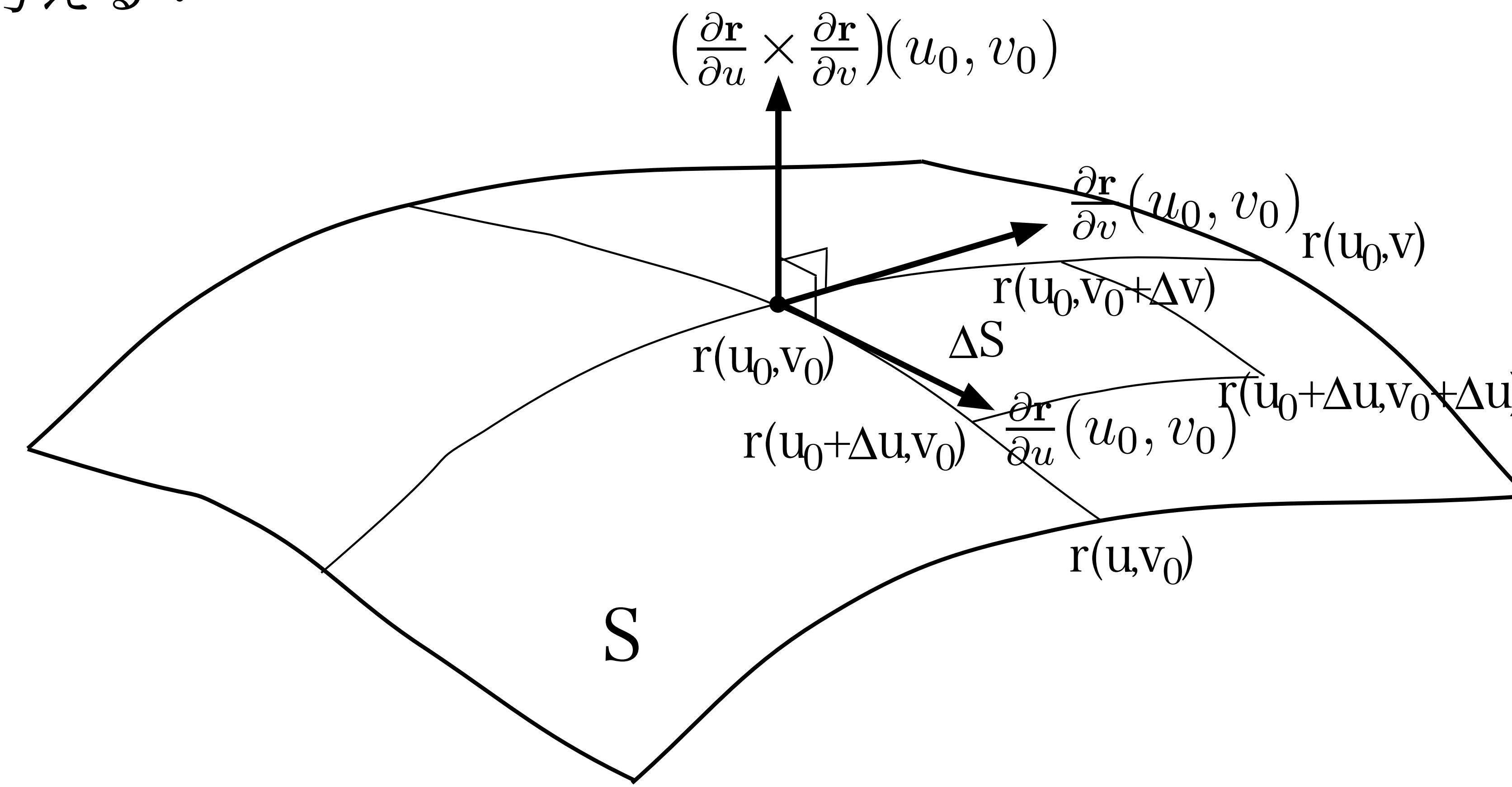
曲面積分

曲面 S: $\mathbf{r}(u,v)$ $(a \le u \le b,\ c \le u \le d)$ について下図の面積 ΔS を考える：

曲面積分

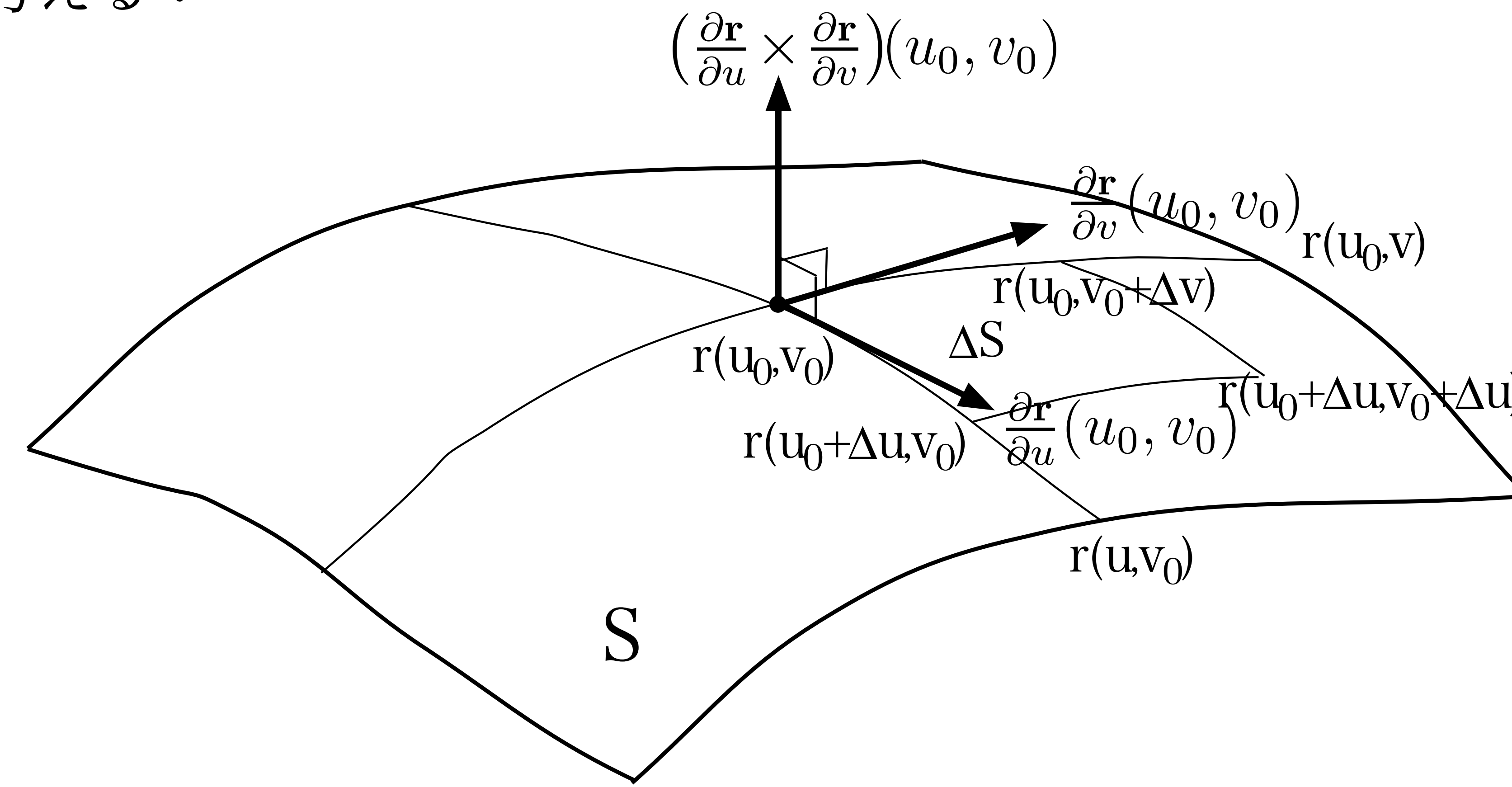
曲面 S: $\mathbf{r}(u, v)$ $(a \le u \le b,\ c \le u \le d)$ について下図の面積

ΔS を考える：



曲面積分

曲面 S: $\mathbf{r}(u,v)$ $(a \leq u \leq b,\ c \leq u \leq d)$ について下図の面積 ΔS を考える：



$$\Delta S = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v + (\text{余り})$$

スカラーの曲面積分

S 上の関数 $f(\mathbf{r})$ のリーマン和を考える：

スカラーの曲面積分

S 上の関数 $f(\mathbf{r})$ のリーマン和を考える：

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\big(\mathbf{r}(\xi_i, \eta_j)\big)\Delta S_{i,j}$$

スカラーの曲面積分

S 上の関数 $f(\mathbf{r})$ のリーマン和を考える：

$$\begin{aligned} S_\Delta &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\Delta S_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1},v_{j-1})\right|(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1}) \end{aligned}$$

但し $u_{i-1}\le\xi_i\le u_i$, $v_{j-1}\le\eta_j\le v_j$ とする。

スカラーの曲面積分

S 上の関数 $f(\mathbf{r})$ のリーマン和を考える：

$$
\begin{aligned}
S_\Delta &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\Delta S_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})
\end{aligned}
$$

但し $u_{i-1} \leq \xi_i \leq u_i,\ v_{j-1} \leq \eta_j \leq v_j$ とする。

上のリーマン和について $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} S_\Delta$ を $\int_S f dS$ 等で表す。

スカラーの曲面積分

S 上の関数 $f(\mathbf{r})$ のリーマン和を考える：

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i, \eta_j))\Delta S_{i,j}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i, \eta_j)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$$

但し $u_{i-1} \leq \xi_i \leq u_i,\ v_{j-1} \leq \eta_j \leq v_j$ とする。

上のリーマン和について $\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta$ を $\int_S f dS$ 等で表す。

従って $\int_S f dS = \iint_{a \leq u \leq b, c \leq v \leq d} f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right| dudv$

スカラーの曲面積分

[例題]

x-y 平面上の領域 D で定義された関数 $z = \varphi(x, y)$ のグラフとして曲面 S が与えられているとする。このとき、S 上で定められた関数 f について次が成り立つ事を示せ：

$$\int_S f dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

スカラーの曲面積分

[例題]

x-y 平面上の領域 D で定義された関数 $z = \varphi(x, y)$ のグラフとして曲面 S が与えられているとする。このとき、S 上で定められた関数 f について次が成り立つ事を示せ：

$$\int_S f dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

[解答例]

スカラーの曲面積分

[例題]

x-y 平面上の領域 D で定義された関数 $z=\varphi(x,y)$ のグラフとして曲面 S が与えられているとする。このとき、S 上で定められた関数 f について次が成り立つ事を示せ：

$$\int_S f dS = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

[解答例]

S は $\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\varphi(x,y)\mathbf{k}$ と表される。

スカラーの曲面積分

[例題]

x-y 平面上の領域 D で定義された関数 $z = \varphi(x, y)$ のグラフとして曲面 S が与えられているとする。このとき、S 上で定められた関数 f について次が成り立つ事を示せ：

$$\int_S f dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

[解答例]

S は $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \varphi(x, y)\mathbf{k}$ と表される。

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

スカラーの曲面積分

[例題]

x-y 平面上の領域 D で定義された関数 $z = \varphi(x, y)$ のグラフとして曲面 S が与えられているとする。このとき、S 上で定められた関数 f について次が成り立つ事を示せ：

$$\int_S f dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

[解答例]

S は $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \varphi(x, y)\mathbf{k}$ と表される。

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

従って $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$ より結論を得る。

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S を半径 R の球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ とするとき次を求めよ：

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS$$

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S を半径 R の球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ とするとき次を求めよ：

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS$$

[解答例]

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S を半径 R の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ とするとき次を求めよ：

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS$$

[解答例]

S は球座標を用いると次の様に表される：

$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = R\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + R\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + R\cos\theta\mathbf{k}$

$\mathbf{(}0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\mathbf{)}$

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S を半径 R の球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ とするとき次を求めよ：

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS$$

[解答例]

S は球座標を用いると次の様に表される：

$\mathbf{r}(\theta,\varphi)=R\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i}+R\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j}+R\cos\theta\mathbf{k}$

$(0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi)$

$\therefore \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right| = R^2\sin\theta$

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S を半径 R の球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ とするとき次を求めよ：

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS$$

[解答例]

S は球座標を用いると次の様に表される：

$\mathbf{r}(\theta,\varphi)=R\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i}+R\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j}+R\cos\theta\mathbf{k}$

$(0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi)$

$\therefore \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|=R^2\sin\theta$

$\int_S\left(\frac{z}{R}\right)^2 dS=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos^2\theta R^2\sin\theta d\theta\right\}d\varphi$

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S を半径 R の球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ とするとき次を求めよ：

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS$$

[解答例]

S は球座標を用いると次の様に表される：

$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + R\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + R\cos\theta\mathbf{k}$

$(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$\therefore \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right| = R^2\sin\theta$

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos^2\theta R^2\sin\theta d\theta\right\}d\varphi = R^2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi}d\varphi$$

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S を半径 R の球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ とするとき次を求めよ：

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS$$

[解答例]

S は球座標を用いると次の様に表される：

$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + R\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + R\cos\theta\mathbf{k}$

$(0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi)$

$\therefore \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right| = R^2\sin\theta$

$$\int_S \left(\frac{z}{R}\right)^2 dS = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos^2\theta R^2\sin\theta d\theta\right\}d\varphi = R^2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi}d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^2$$

スカラーの曲面積分

同様に以下のリーマン和も考えられる：

スカラーの曲面積分

同様に以下のリーマン和も考えられる：

$$\mathbf{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i, \eta_j))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1})(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$$

但し $u_{i-1} \leq \xi_i \leq u_i$, $v_{j-1} \leq \eta_j \leq v_j$ とする。

スカラーの曲面積分

同様に以下のリーマン和も考えられる：

$$\mathbf{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i, \eta_j))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1})(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$$

但し $u_{i-1} \leq \xi_i \leq u_i$, $v_{j-1} \leq \eta_j \leq v_j$ とする。

上のリーマン和について $\lim_{|\Delta|\to 0} \mathbf{S}_\Delta$ を $\int_S f d\mathbf{S}$ 等で表す。

スカラーの曲面積分

同様に以下のリーマン和も考えられる：

$$\mathbf{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1},v_{j-1})(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})$$

但し $u_{i-1}\leq \xi_i \leq u_i$, $v_{j-1}\leq \eta_j \leq v_j$ とする。
上のリーマン和について $\lim_{|\Delta|\to 0}\mathbf{S}_\Delta$ を $\int_S f d\mathbf{S}$ 等で表す。
従って $\displaystyle \int_S f d\mathbf{S} = \iint_{a\leq u\leq b, c\leq v\leq d} f(\mathbf{r}(u,v))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)dudv$

スカラーの曲面積分

同様に以下のリーマン和も考えられる：

$$\mathbf{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1},v_{j-1})(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})$$

但し $u_{i-1} \le \xi_i \le u_i$, $v_{j-1} \le \eta_j \le v_j$ とする。

上のリーマン和について $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} \mathbf{S}_\Delta$ を $\int_S f d\mathbf{S}$ 等で表す。

従って $\displaystyle\int_S f d\mathbf{S} = \iint\limits_{a\le u\le b, c\le v\le d} f(\mathbf{r}(u,v))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)dudv$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dudv$ を $d\mathbf{S}$ と書いたり、

スカラーの曲面積分

同様に以下のリーマン和も考えられる：

$$\mathbf{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1},v_{j-1})(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})$$

但し $u_{i-1} \leq \xi_i \leq u_i$, $v_{j-1} \leq \eta_j \leq v_j$ とする。

上のリーマン和について $\lim_{|\Delta|\to 0} \mathbf{S}_\Delta$ を $\int_S f d\mathbf{S}$ 等で表す。

従って $\int_S f d\mathbf{S} = \iint_{a\leq u\leq b, c\leq v\leq d} f(\mathbf{r}(u,v))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)dudv$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dudv$ を $d\mathbf{S}$ と書いたり、 単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \dfrac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}$ を用いて $\mathbf{n}dS$ と書いたりする。

スカラーの曲面積分

同様に以下のリーマン和も考えられる：

$$\mathbf{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1},v_{j-1})(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})$$

但し $u_{i-1} \le \xi_i \le u_i$, $v_{j-1} \le \eta_j \le v_j$ とする。

上のリーマン和について $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}\mathbf{S}_\Delta$ を $\displaystyle\int_S f d\mathbf{S}$ 等で表す。

従って $\displaystyle\int_S f d\mathbf{S} = \iint_{a\le u\le b, c\le v\le d} f(\mathbf{r}(u,v))\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)dudv$

$\displaystyle\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dudv$ を $d\mathbf{S}$ と書いたり、 単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \dfrac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}$ を用いて $\mathbf{n}dS$ と書いたりする。 dS を面積要素と呼ぶ。

ベクトルの曲面積分

S 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}$ に対しリーマン和を考える：

ベクトルの曲面積分

S 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}$ に対しリーマン和を考える：

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1},v_{j-1})\right)(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})$$

但し $u_{i-1} \leq \xi_i \leq u_i$, $v_{j-1} \leq \eta_j \leq v_j$ とする。

ベクトルの曲面積分

S 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}$ に対しリーマン和を考える：

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_i, \eta_j)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right) (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$$

但し $u_{i-1} \le \xi_i \le u_i$, $v_{j-1} \le \eta_j \le v_j$ とする。

上について $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} S_\Delta$ を $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 又は $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ 等で表す。

ベクトルの曲面積分

S 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}$ に対しリーマン和を考える：

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1},v_{j-1})\right)(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})$$

但し $u_{i-1}\leq\xi_i\leq u_i$, $v_{j-1}\leq\eta_j\leq v_j$ とする。

上について $\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$ を $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 又は $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ 等で表す。

従って

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{a\leq u\leq b, c\leq v\leq d} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\right)dudv$$

ベクトルの曲面積分

S 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}$ に対しリーマン和を考える：

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1},v_{j-1})\right)(u_i-u_{i-1})(v_j-v_{j-1})$$

但し $u_{i-1}\le\xi_i\le u_i$, $v_{j-1}\le\eta_j\le v_j$ とする。

上について $\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$ を $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 又は $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ 等で表す。

従って

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{a\le u\le b, c\le v\le d}\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\right)dudv$$

$\int_S \mathbf{F}dS$ や $\int_S \mathbf{F}\times d\mathbf{S}$ も同様に定義される。

ベクトルの曲面積分

[例]

ベクトルの曲面積分

[例]

- 流体の流速がベクトル場 $\mathbf{V}$ で与えられているとき、閉じた曲面 S で囲まれた内部から湧き出す流体の量は

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

で与えられる。

ベクトルの曲面積分

[例]

- 流体の流速がベクトル場 $\mathbf{V}$ で与えられているとき、閉じた曲面 S で囲まれた内部から湧き出す流体の量は
$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$
で与えられる。
- S を空間内の閉じた曲面とし、Q をその曲面の内部にある電荷の総量とする。$\mathbf{E}$ を電場とするとき次の関係が成り立つ：
$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (\varepsilon_0 : \text{真空の誘電率})$$
(ガウスの法則の積分形)

ベクトルの曲面積分

[例題]

ベクトルの曲面積分

[例題]

内部に空洞を持った導体について、空洞内の電場は零である事を示せ。但し、導体内部の電場は常に零である。

ベクトルの曲面積分

[例題]

内部に空洞を持った導体について、空洞内の電場は零である事を示せ。但し、導体内部の電場は常に零である。

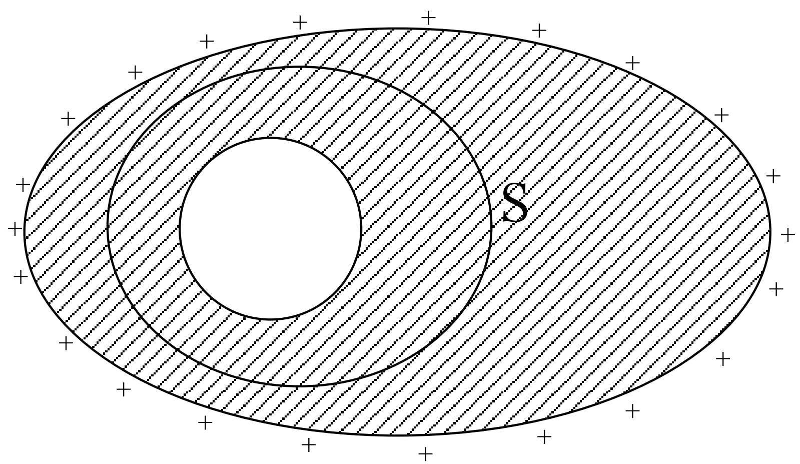
[解答例]

ベクトルの曲面積分

[例題]

内部に空洞を持った導体について、空洞内の電場は零である事を示せ。但し、導体内部の電場は常に零である。

[解答例]



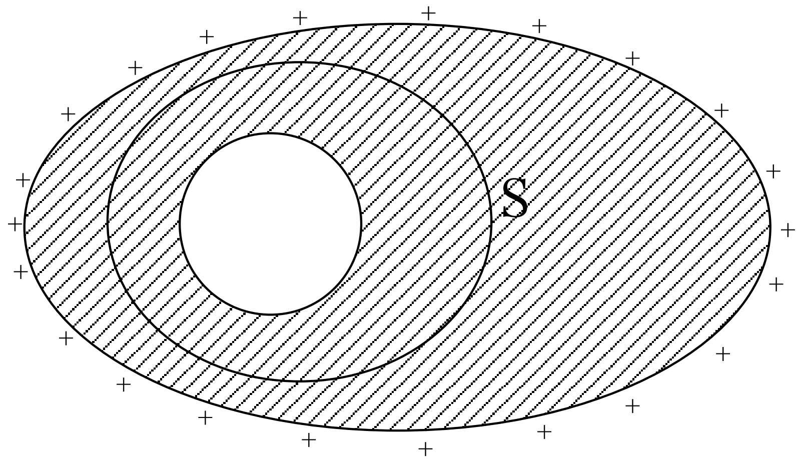
図の様に空洞を取り囲む閉じた曲面 S を考えると、導体内では電場は零なので $\displaystyle\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 0$ である。

ベクトルの曲面積分

[例題]

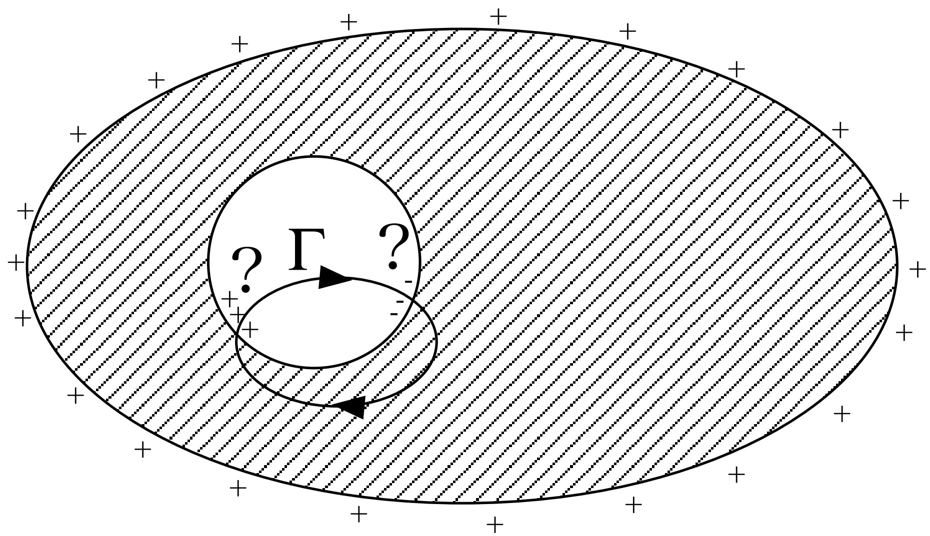
内部に空洞を持った導体について、空洞内の電場は零である事を示せ。但し、導体内部の電場は常に零である。

[解答例]



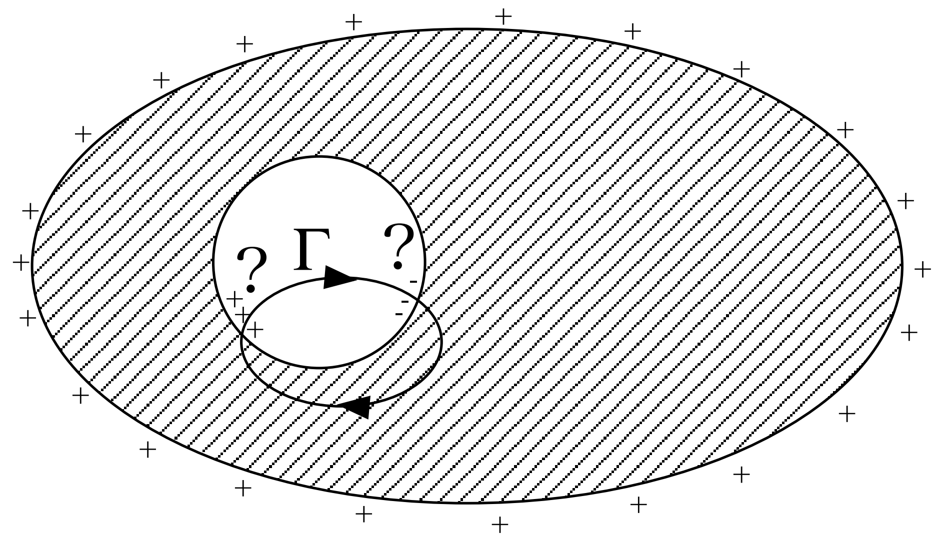
図の様に空洞を取り囲む閉じた曲面 S を考えると、導体内では電場は零なので $\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 0$ である。 従ってガウスの法則より空洞内の電荷の総量は零である。

ベクトルの曲面積分



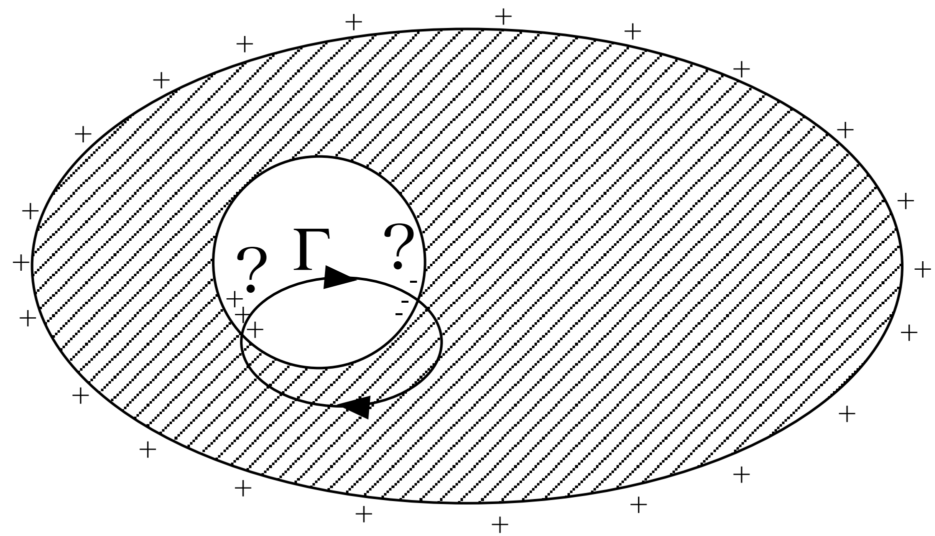
図の様に導体の空洞側の表面に正電荷と負電荷が同量分布して、総量が零である可能性については、

ベクトルの曲面積分



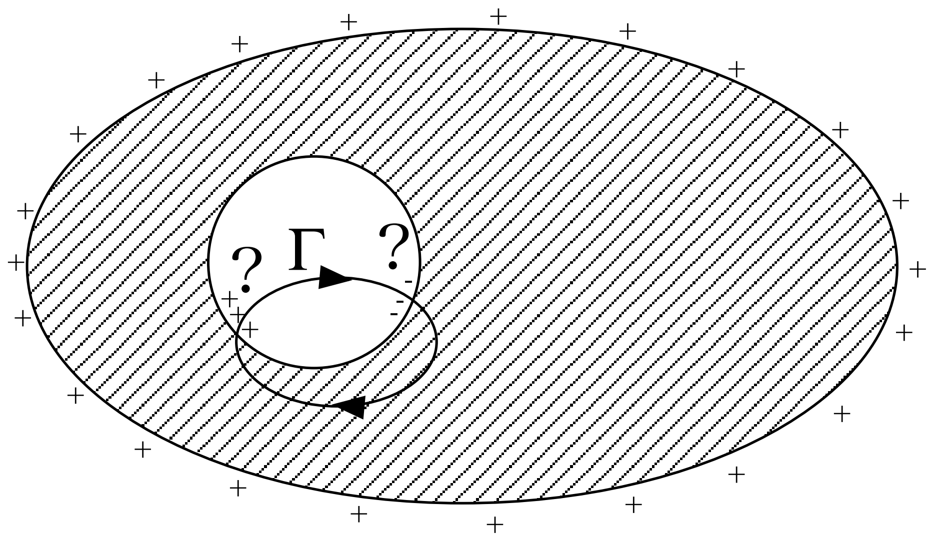
図の様に導体の空洞側の表面に正電荷と負電荷が同量分布して、総量が零である可能性については、空洞側表面の正電荷が分布しているところから、負電荷が存在しているところへ空洞内を通って行き、そこから導体内を通って元に戻る閉曲線 Γ を考えると、

ベクトルの曲面積分



図の様に導体の空洞側の表面に正電荷と負電荷が同量分布して、総量が零である可能性については、 空洞側表面の正電荷が分布しているところから、負電荷が存在しているところへ空洞内を通って行き、そこから導体内を通って元に戻る閉曲線 Γ を考えると、 $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \neq 0$ となり、 電位 φ に対し $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ となる事に矛盾する。

ベクトルの曲面積分



図の様に導体の空洞側の表面に正電荷と負電荷が同量分布して、総量が零である可能性については、 空洞側表面の正電荷が分布しているところから、負電荷が存在しているところへ空洞内を通って行き、そこから導体内を通って元に戻る閉曲線 Γ を考えると、 $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \neq 0$ となり、 電位 φ に対し $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ となる事に矛盾する。 $\therefore$ 空洞内の電場は零。

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S が下記の場合に次の積分を求めよ：

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\mathbf{r}\ は位置ベクトルとする。)$$

1. S は単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. S は平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ で決まる立方体の表面

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S が下記の場合に次の積分を求めよ：

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\mathbf{r} \text{ は位置ベクトルとする。})$$

1. S は単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. S は平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ で決まる立方体の表面

[解答例]

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S が下記の場合に次の積分を求めよ：

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\mathbf{r} \text{ は位置ベクトルとする。})$$

1. S は単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. S は平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ で決まる立方体の表面

[解答例]

1. 球座標を用いると：

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$$

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S が下記の場合に次の積分を求めよ：

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\mathbf{r}\text{ は位置ベクトルとする。})$$

1. S は単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. S は平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ で決まる立方体の表面

[解答例]

1. 球座標を用いると：

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \mathbf{r}\sin\theta d\theta d\varphi$$

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S が下記の場合に次の積分を求めよ：

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\mathbf{r}\text{ は位置ベクトルとする。})$$

1. S は単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. S は平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ で決まる立方体の表面

[解答例]

1. 球座標を用いると：

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \mathbf{r}\sin\theta d\theta d\varphi \qquad \int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$$

スカラーの曲面積分

[練習問題]

S が下記の場合に次の積分を求めよ：

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\mathbf{r} \text{ は位置ベクトルとする。})$$

1. S は単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. S は平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ で決まる立方体の表面

[解答例]

1. 球座標を用いると：

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = \mathbf{r}\sin\theta d\theta d\varphi \qquad \int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$$

2. 立方体の六つの面上で積分を計算すると $\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 24$

宿題

問題集 p.81 例題 6〜 p.87 例題 11