微分積分続論

新居 俊作

空間ベクトル

空間ベクトル

[用語]

空間ベクトル

[用語]

- n このベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対し、
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ のとき のみ であるとき、ベクトルの 組 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次独立であるという。

空間ベクトル

[用語]

- n このベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対し、
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ のとき <u>のみ</u> であるとき、ベクトルの <u>組</u> $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次独立であるという。
- $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が一次独立ではないとき、即ち
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となる $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ で $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ であるものが存在するとき、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次従属であるという。

空間ベクトル

[用語]

- n このベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対し、
$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ のとき のみ であるとき、ベクトルの 組 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次独立であるという。
- $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が一次独立ではないとき、即ち
$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となる $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ で $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ であるものが存在するとき、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次従属であるという。

[注意] 特に空間ベクトルについては

空間ベクトル

[用語]

- n このベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対し、
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ のとき<u>のみ</u>であるとき、ベクトルの<u>組</u> $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次独立であるという。
- $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が一次独立ではないとき、即ち
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となる $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ で $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ であるものが存在するとき、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次従属であるという。

[注意] 特に空間ベクトルについては

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が一次従属 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は原点を通る一直線上にある。

空間ベクトル

[用語]

- n このベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対し、
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ のとき<u>のみ</u>であるとき、ベクトルの<u>組</u> $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次独立であるという。
- $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が一次独立ではないとき、即ち
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となる $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ で $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ であるものが存在するとき、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次従属であるという。

[注意] 特に空間ベクトルについては

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が一次従属 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は原点を通る一直線上にある。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次従属 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は原点を通る一平面上にある。

空間ベクトル

[用語]

- n このベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ に対し、
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となるのは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ のとき のみ であるとき、ベクトルの 組 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は一次独立であるという。
- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が一次独立ではないとき、即ち
$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
となる $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ で $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ であるものが存在するとき、$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は一次従属であるという。

[注意] 特に空間ベクトルについては

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が一次従属 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は原点を通る一直線上にある。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次従属 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は原点を通る一平面上にある。

四つ以上の空間ベクトルの組は必ず一次従属である。

空間ベクトル

[用語続き]

- 大きさ 1 のベクトルを単位ベクトルとよぶ。特に
$$\mathbf{i} = (1,0,0),\ \ \mathbf{j} = (0,1,0),\ \ \mathbf{k} = (0,0,1)$$
を基本ベクトルとよぶ。

空間ベクトル

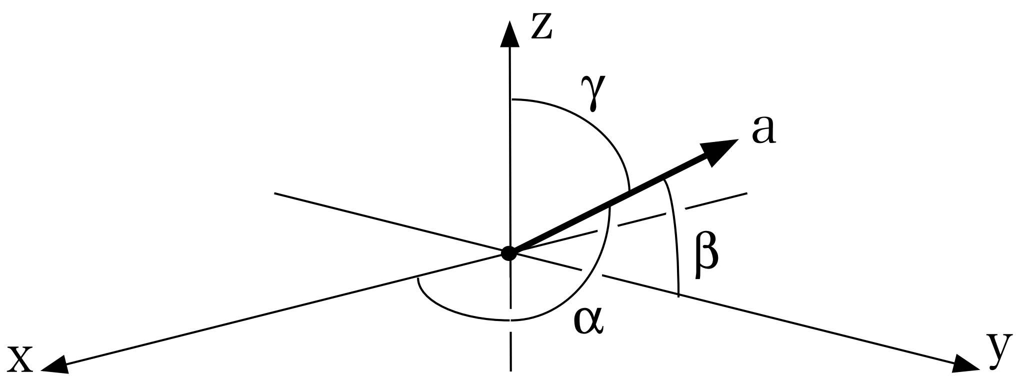
[用語続き]

- 大きさ 1 のベクトルを単位ベクトルとよぶ。特に
$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$
を基本ベクトルとよぶ。
- $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ に対し $\mathbf{a}$ が x-軸、y-軸、z-軸となす角 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ について $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ を $\mathbf{a}$ の方向余弦と呼ぶ。

空間ベクトル

[用語続き]

- 大きさ 1 のベクトルを単位ベクトルとよぶ。特に
$$\mathbf{i} = (1,0,0),\quad \mathbf{j} = (0,1,0),\quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$
を基本ベクトルとよぶ。
- $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ に対し $\mathbf{a}$ が x-軸、y-軸、z-軸となす角 α, β, γ について $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ を $\mathbf{a}$ の方向余弦と呼ぶ。
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{a}|\cos\alpha$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{a}|\cos\beta$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{a}|\cos\gamma$ なので
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|},\quad \cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|}$$



空間ベクトル

[空間内の直線**]**

空間ベクトル

[空間内の直線]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A を通り、方向ベクトル $\mathbf{n}$ に平行な直線上の点は、$\mathbf{r}$ をその位置ベクトルとして

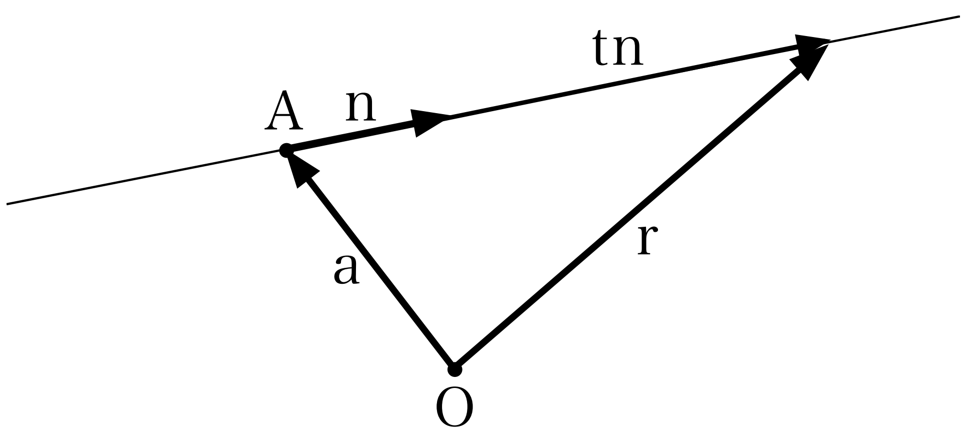
$\mathbf{r} - \mathbf{a} = t\mathbf{n}$、成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ と書ける。

空間ベクトル

[空間内の直線]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A を通り、方向ベクトル $\mathbf{n}$ に平行な直線上の点は、$\mathbf{r}$ をその位置ベクトルとして

$\mathbf{r} - \mathbf{a} = t\mathbf{n}$、 成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ と書ける。

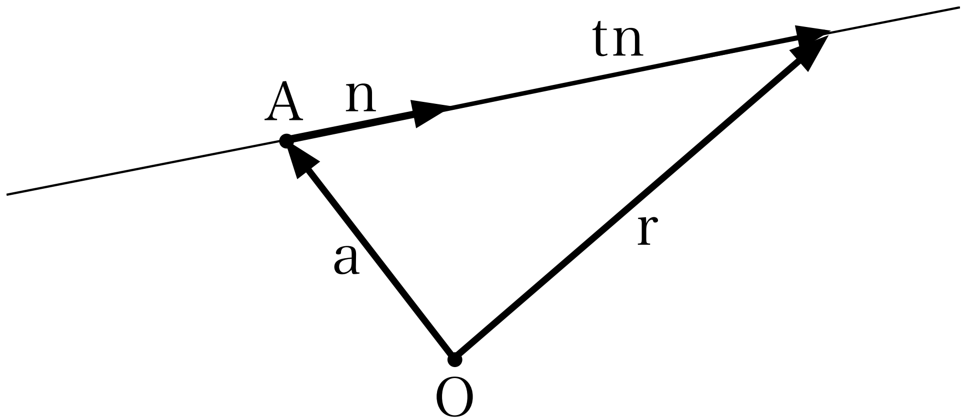


空間ベクトル

[空間内の直線]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A を通り、方向ベクトル $\mathbf{n}$ に平行な直線上の点は、$\mathbf{r}$ をその位置ベクトルとして

$\mathbf{r} - \mathbf{a} = t\mathbf{n}$、成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ と書ける。



この式から t を消すと $\dfrac{r_1 - a_1}{n_1} = \dfrac{r_2 - a_2}{n_2} = \dfrac{r_3 - a_3}{n_3}$ となる。

空間ベクトル

[空間内の平面**]**

空間ベクトル

[空間内の平面]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A を通り法線ベクトル $\mathbf{n}$ に垂直な平面上の点は、$\mathbf{r}$ をその位置ベクトルとして

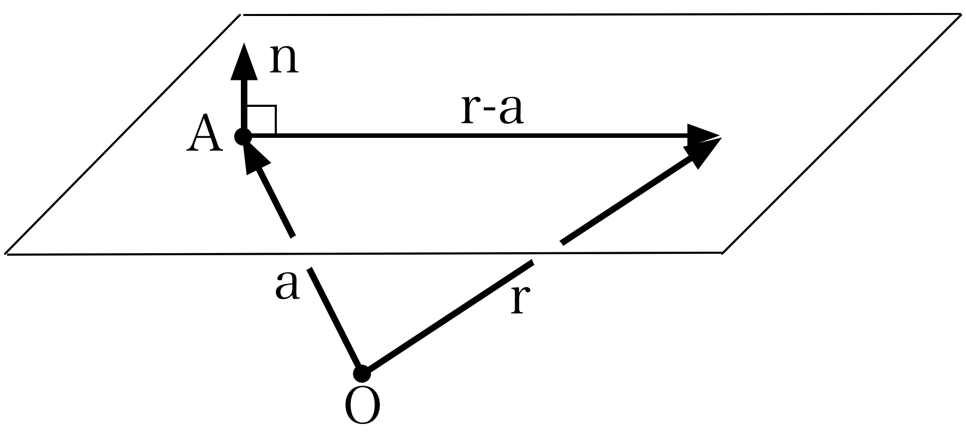
$(\mathbf{r} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$、成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ と書ける。

空間ベクトル

[空間内の平面]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A を通り法線ベクトル $\mathbf{n}$ に垂直な平面上の点は、$\mathbf{r}$ をその位置ベクトルとして

$(\mathbf{r} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$、成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ と書ける。

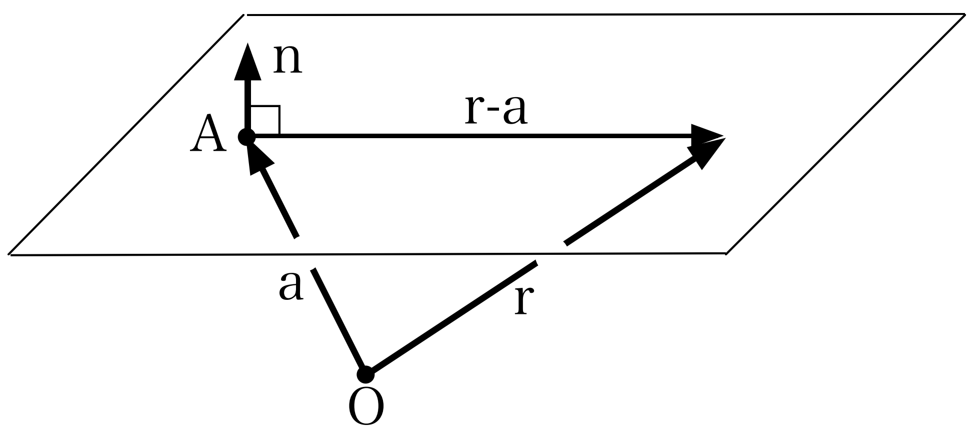


空間ベクトル

[空間内の平面]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A を通り法線ベクトル $\mathbf{n}$ に垂直な平面上の点は、$\mathbf{r}$ をその位置ベクトルとして

$(\mathbf{r} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$、成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ と書ける。



通常は $n_1(r_1 - a_1) + n_2(r_2 - a_2) + n_3(r_3 - a_3) = 0$ と書く。

空間ベクトル

[空間内の球面**]**

空間ベクトル

[空間内の球面]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A が中心で半径が R の球面上の点は、$\mathbf{r}$ を位置ベクトルとして $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = R^2$、

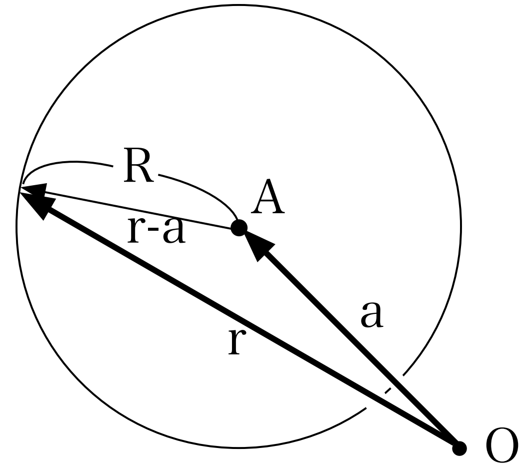
成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} = R^2$ と書ける。

空間ベクトル

[空間内の球面]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A が中心で半径が R の球面上の点は、$\mathbf{r}$ を位置ベクトルとして $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = R^2$、

成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} = R^2$ と書ける。

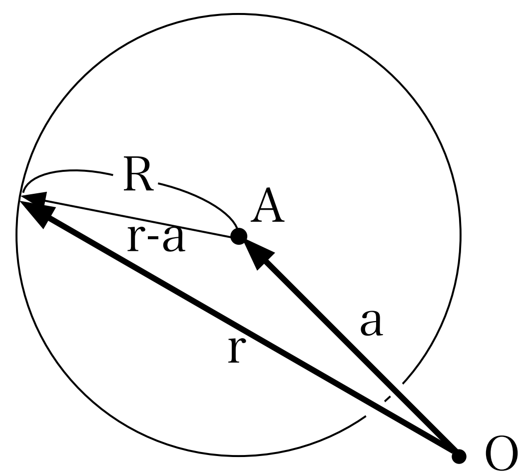


空間ベクトル

[空間内の球面]

位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の点 A が中心で半径が R の球面上の点は、$\mathbf{r}$ を位置ベクトルとして $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = R^2$、

成分表示では $\begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 - a_1 \\ r_2 - a_2 \\ r_3 - a_3 \end{pmatrix} = R^2$ と書ける。



通常は $(r_1 - a_1)^2 + (r_2 - a_2)^2 + (r_3 - a_3)^2 = R^2$ と書く。

空間ベクトル

[練習問題]

(i) 原点を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

(ii) 点 $(0, 0, 1)$ を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ

空間ベクトル

[練習問題]

(i) 原点を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

(ii) 点 $(0, 0, 1)$ を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ

[解答]

(i) $z = x + y$

空間ベクトル

[練習問題]

(i) 原点を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

(ii) 点 $(0, 0, 1)$ を通り $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ

[解答]

(i) $z = x + y$ **(ii)** $z = 1 - x - y$

空間ベクトル

[外積]

空間ベクトル

[外積]

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積とよぶ。

空間ベクトル

[外積]

$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3), \mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対し、

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積とよぶ。

- $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a},\mathbf{b}$ と直交する。

空間ベクトル

[外積]

$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3),\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対し、

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積とよぶ。

- $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a},\mathbf{b}$ と直交する。

$$\because\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}a_1+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}a_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}a_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

$\mathbf{b}$ も同様。

空間ベクトル

[外積]

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積とよぶ。

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ と直交する。

  $$\because\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

  $\mathbf{b}$ も同様。

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ で作られる平行四辺形の面積に等しい。

空間ベクトル

[外積]

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し、

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積とよぶ。

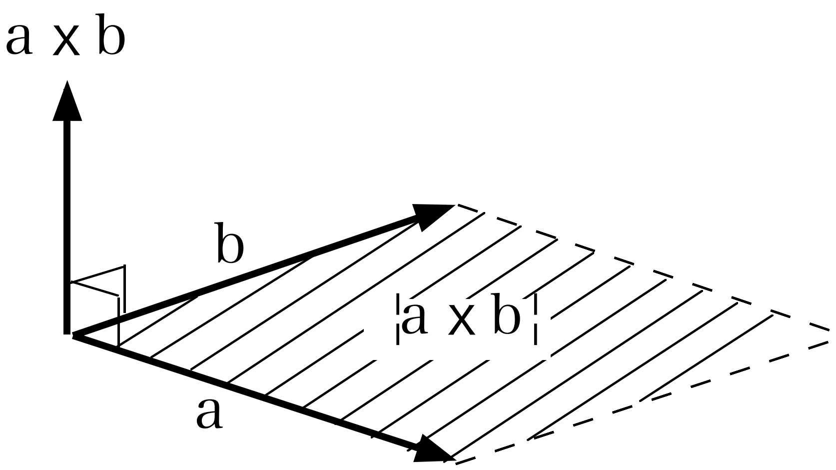
- $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ と直交する。

  $$\because (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}a_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

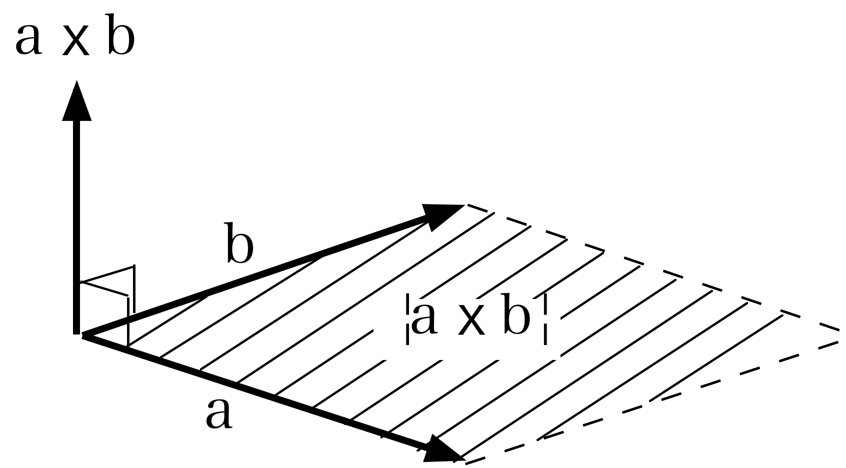
  $\mathbf{b}$ も同様。

- $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ で作られる平行四辺形の面積に等しい。
- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は、この順で右手系を成す。

空間ベクトル



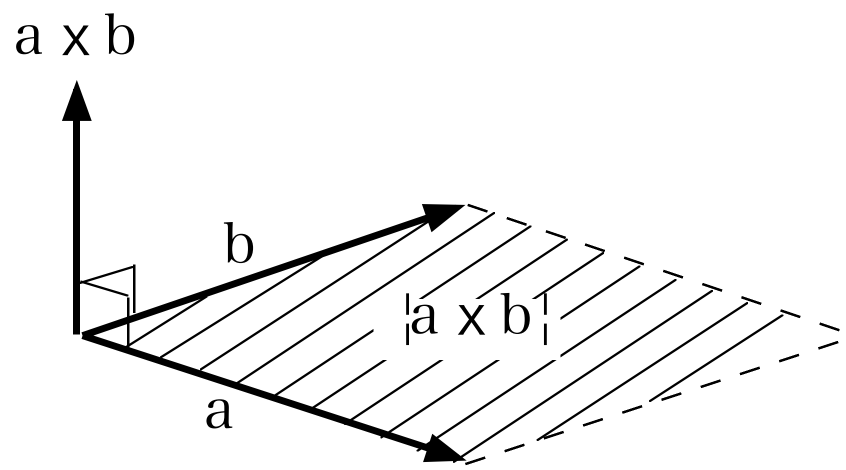
空間ベクトル



[注意]

$\mathbf{a} \,/\!/\, \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (但しどちらかが $\mathbf{0}$ である場合を含む)

空間ベクトル



[注意]

$\mathbf{a} /\!/ \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (但しどちらかが $\mathbf{0}$ である場合を含む)

[例]

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$

空間ベクトル

[スカラー三重積]

空間ベクトル

[スカラー三重積]

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対し、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(又は $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$)

を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のスカラー三重積 とよぶ。

空間ベクトル

[スカラー三重積]

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対し、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(又は $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$)

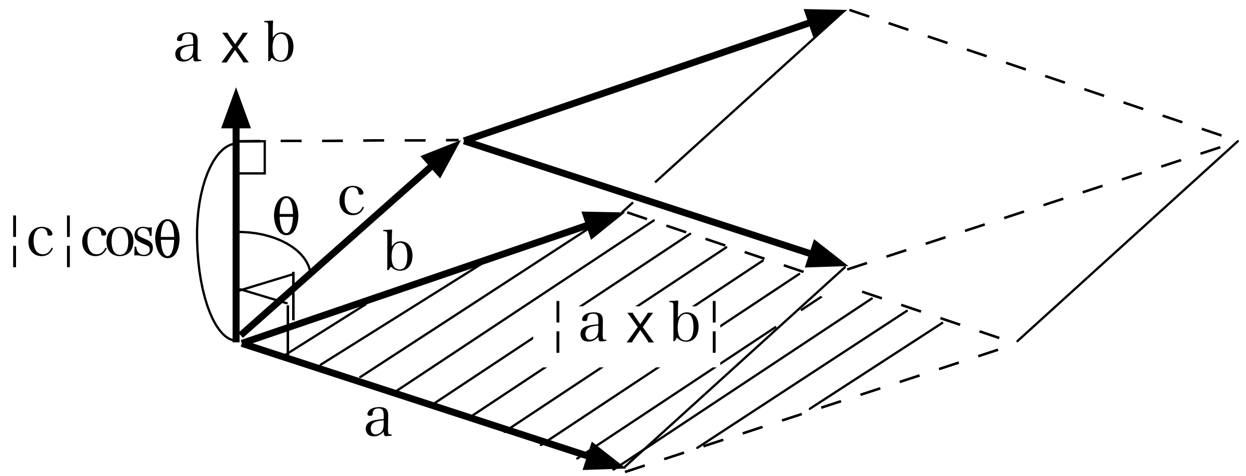
を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のスカラー三重積 とよぶ。

- 行列式の性質より

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) \end{aligned}$$

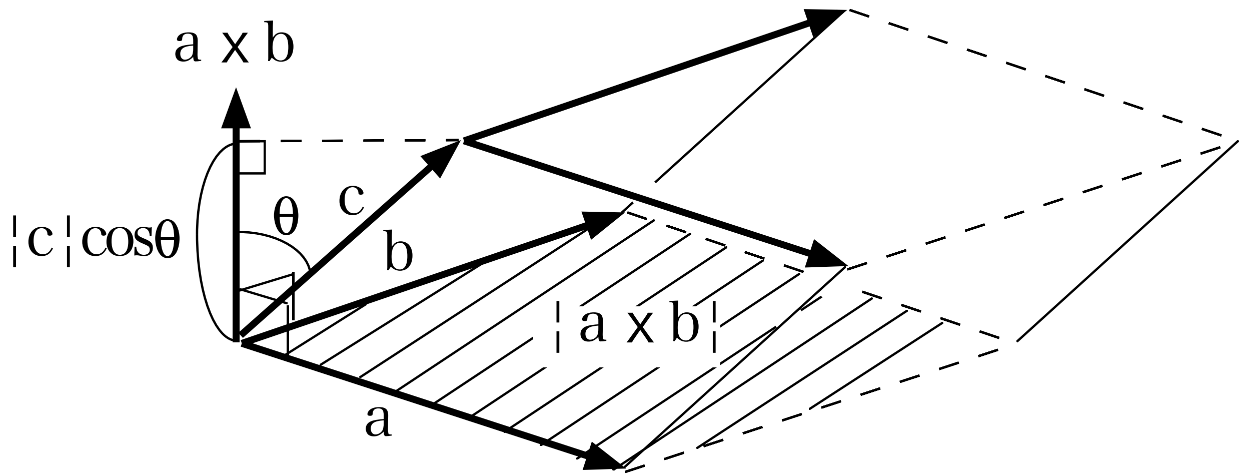
空間ベクトル

- $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が作る平行六面体の体積である。



空間ベクトル

- $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が作る平行六面体の体積である。

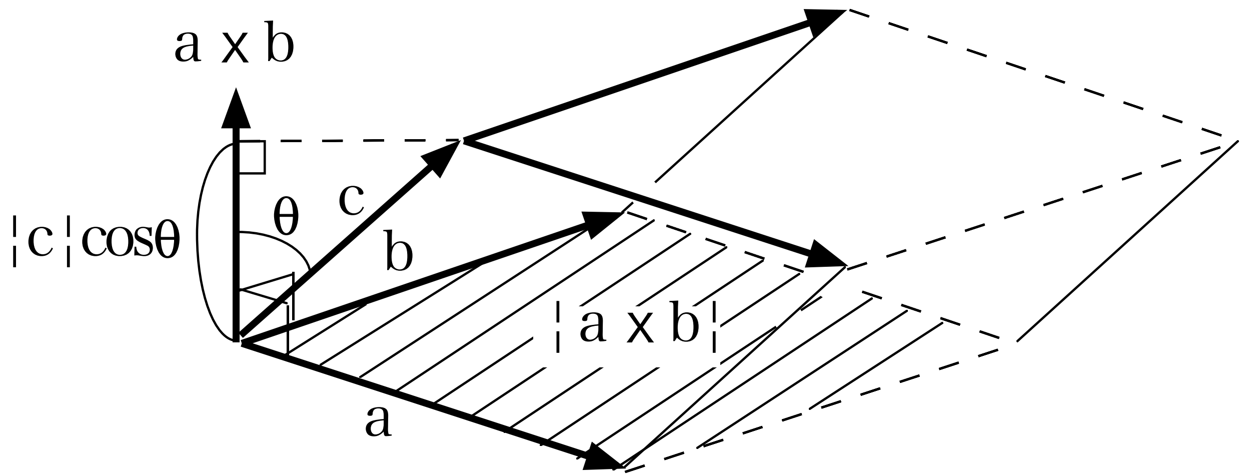


[ベクトル三重積]

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ や $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ をベクトル三重積とよぶこともある。

空間ベクトル

- $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が作る平行六面体の体積である。



[ベクトル三重積]

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ や $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ をベクトル三重積とよぶこともある。

[注意]

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

空間ベクトル

[有向平面**]**

空間ベクトル

[有向平面]

空間の平面の表と裏を区別するとき、これを有向平面とよぶ。

空間ベクトル

[有向平面]

空間の平面の表と裏を区別するとき、これを有向平面とよぶ。

- 有向平面に対しては、単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を裏から表の方向に取る。

空間ベクトル

[有向平面]

空間の平面の表と裏を区別するとき、これを有向平面とよぶ。

- 有向平面に対しては、単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を裏から表の方向に取る。

[例]

平面：$ax + by + cz = d$ は空間を二つの領域に分ける。

空間ベクトル

[有向平面]

空間の平面の表と裏を区別するとき、これを有向平面とよぶ。

- 有向平面に対しては、単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を裏から表の方向に取る。

[例]

平面：$ax+by+cz=d$ は空間を二つの領域に分ける。
$ax+by+cz>d$ の側を表とすると、この平面の単位法線ベクトルは

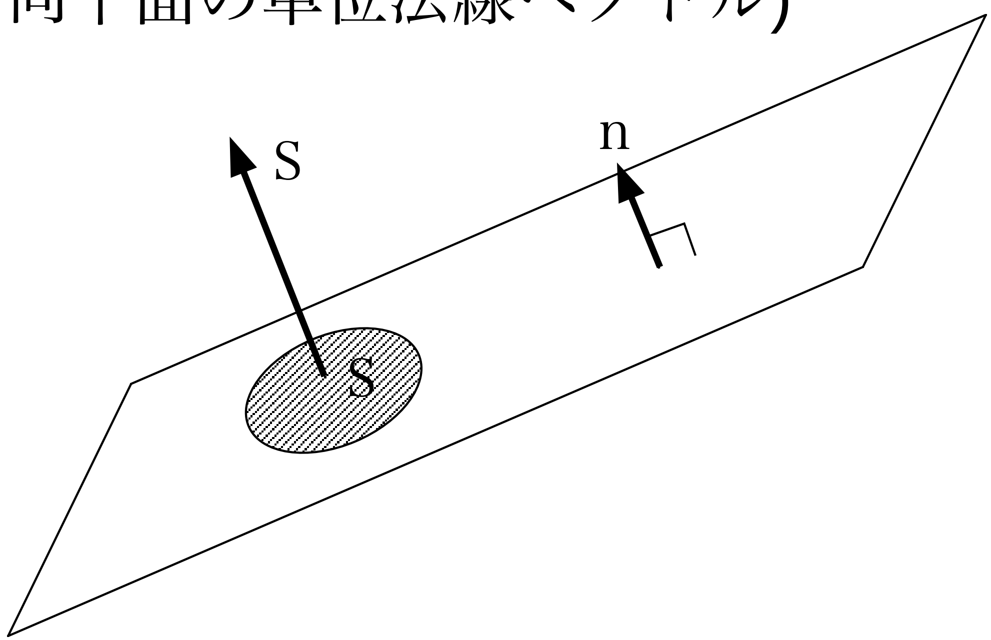
$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$$

空間ベクトル

- 有向平面上の面積 S の図形について、$\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ を、この図形の面積ベクトルという。(但し $\mathbf{n}$ はこの図形が乗っている有向平面の単位法線ベクトル)

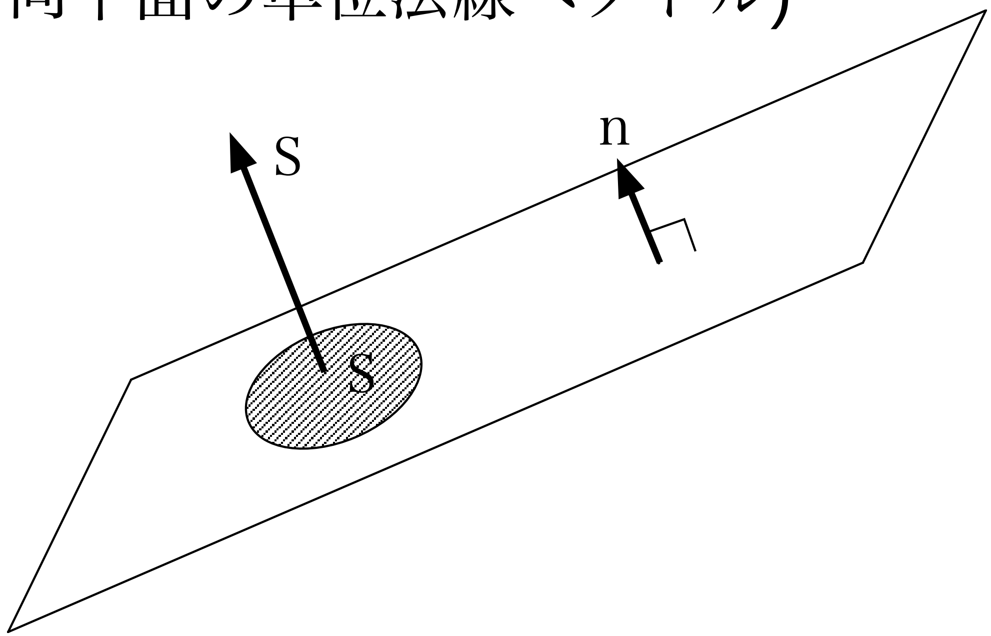
空間ベクトル

- 有向平面上の面積 S の図形について、$\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ を、この図形の面積ベクトルという。(但し $\mathbf{n}$ はこの図形が乗っている有向平面の単位法線ベクトル)



空間ベクトル

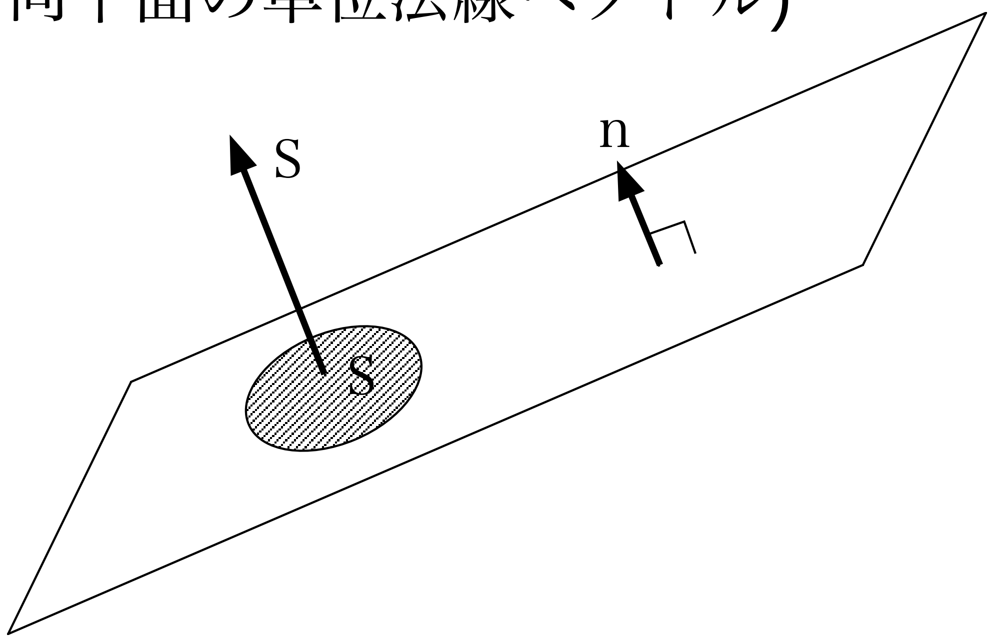
- 有向平面上の面積 S の図形について、$\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ を、この図形の面積ベクトルという。(但し $\mathbf{n}$ はこの図形が乗っている有向平面の単位法線ベクトル)



面積ベクトルは図形の面積と表裏を同時に表している。

空間ベクトル

- 有向平面上の面積 S の図形について、$\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ を、この図形の面積ベクトルという。(但し $\mathbf{n}$ はこの図形が乗っている有向平面の単位法線ベクトル)



面積ベクトルは図形の面積と表裏を同時に表している。

[例]

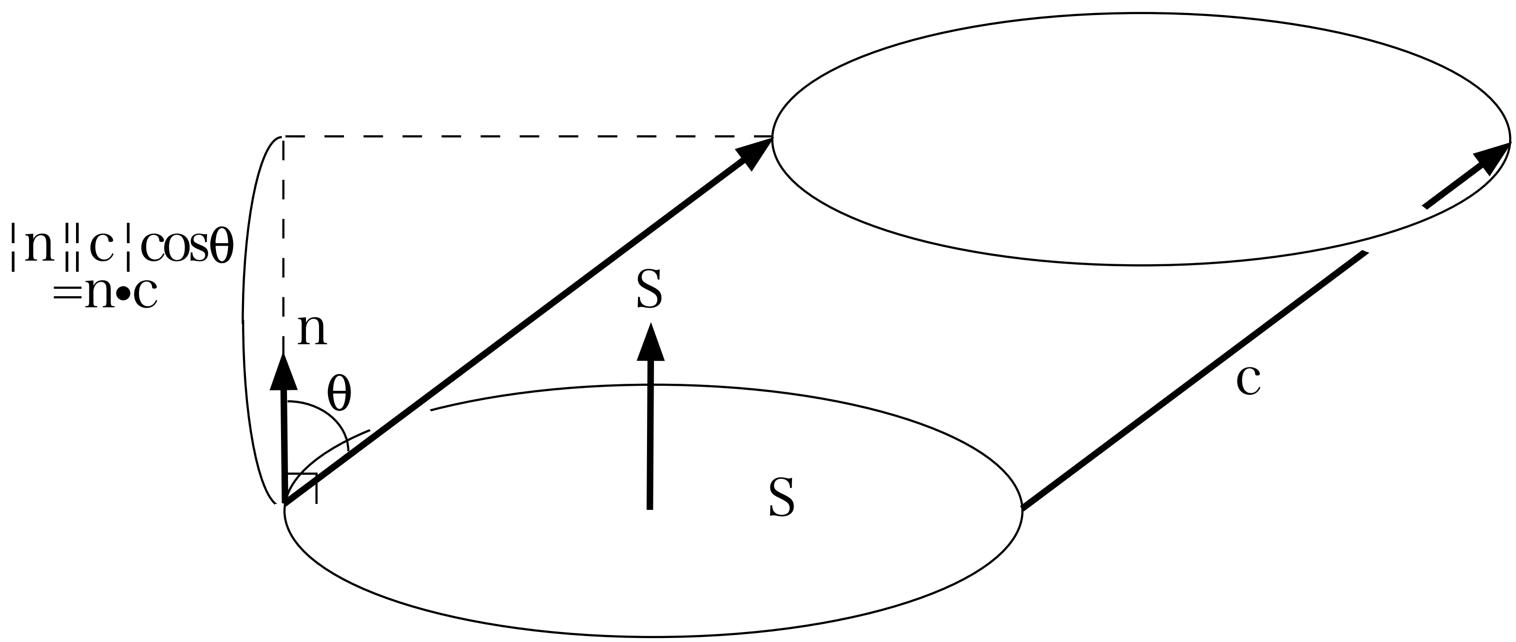
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が作る平行四辺形の面積ベクトルである。

空間ベクトル

- 面積ベクトルが $\mathbf{S}$ である図形を $\mathbf{c}$ だけ平行移動した時に出来る立体の体積は $|\mathbf{S}\cdot\mathbf{c}|$ である。

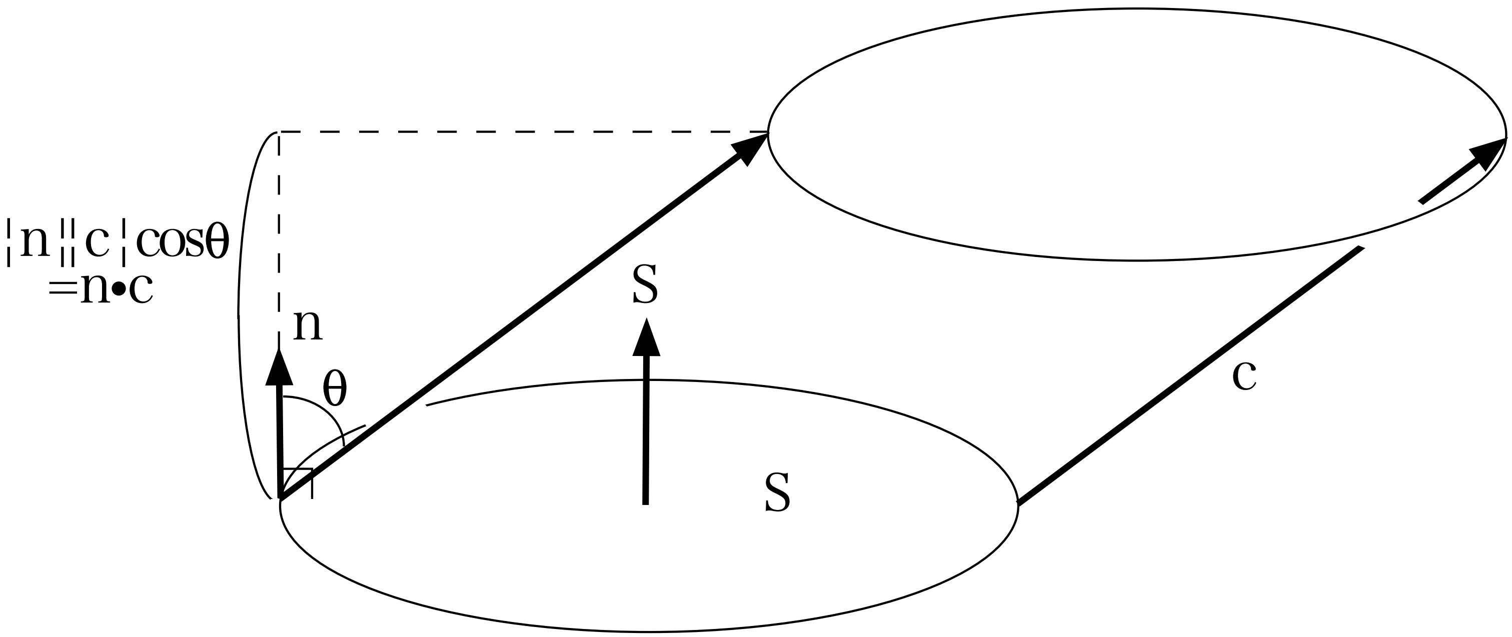
空間ベクトル

- 面積ベクトルが $\mathbf{S}$ である図形を $\mathbf{c}$ だけ平行移動した時に出来る立体の体積は $|\mathbf{S}\cdot\mathbf{c}|$ である。



空間ベクトル

- 面積ベクトルが $\mathbf{S}$ である図形を $\mathbf{c}$ だけ平行移動した時に出来る立体の体積は $|\mathbf{S}\cdot\mathbf{c}|$ である。



$\mathbf{S}\cdot\mathbf{c}$ をこの図形の符号付体積とよぶこともある。

宿題

問題集 p.23 例題 11 までの例題。

次回以降毎回小テストを行う。