社会と数理科学

第五回

ライプニッツの微積分法

新居 俊作

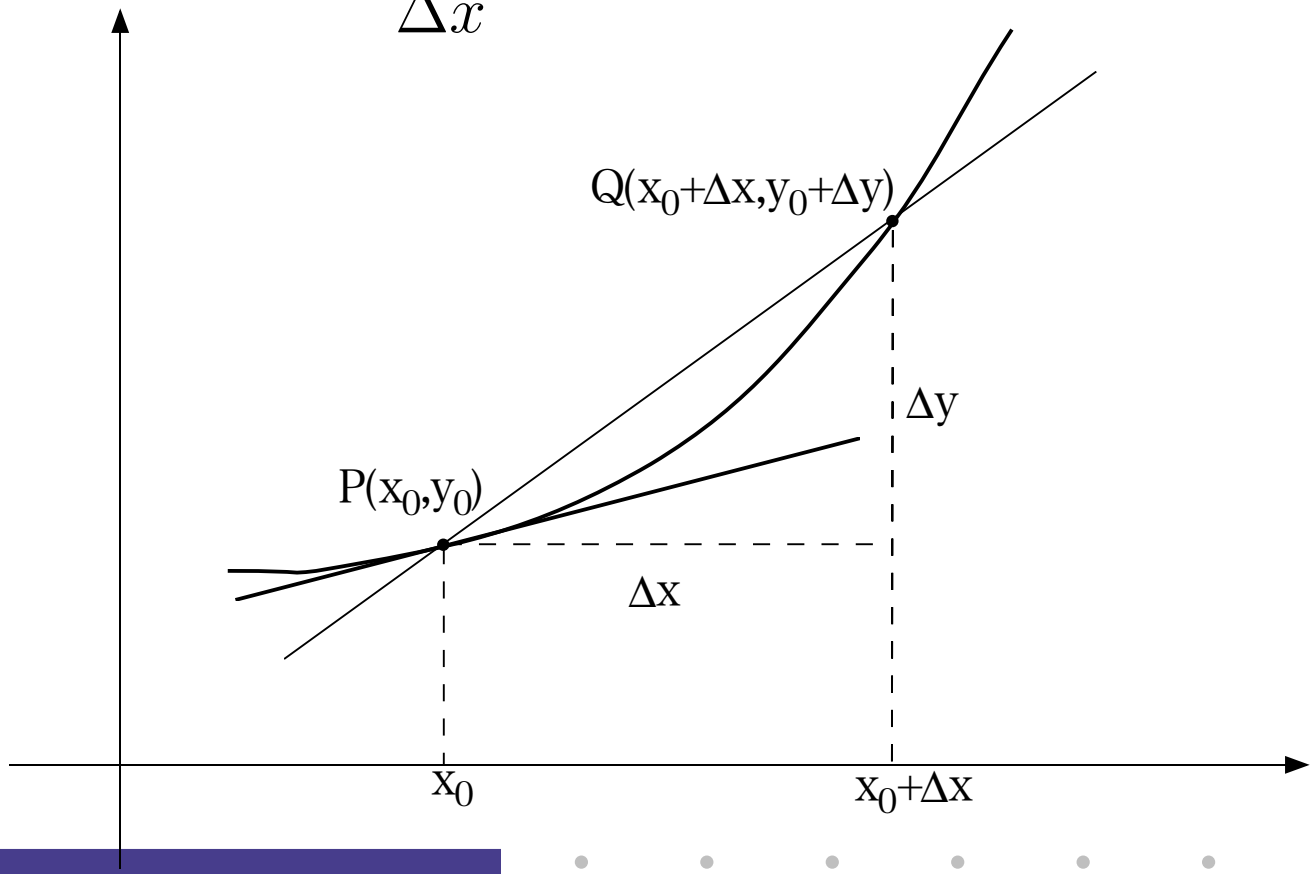
ライプニッツの微積分法

曲線の接線

曲線上の点 $P(x_0, y_0)$ における接線を求めることを考える。

曲線の接線

曲線上の点 $P(x_0, y_0)$ における接線を求めることを考える。
曲線上で P の近く点 $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ を考えると、P, Q を通る直線の傾きは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



曲線の接線

ここで Δx を 0 に近づけると、この比は P における接線の傾きに近づくと考えるのは、合理的と考えられる。

曲線の接線

ここで Δx を 0 に近づけると、この比は P における接線の傾きに近づくと考えるのは、合理的と考えられる。
つまり、P における曲線の接線の傾きを m_P として

$$m_P = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

曲線の接線

ここで Δx を 0 に近づけると、この比は P における接線の傾きに近づくと考えるのは、合理的と考えられる。
つまり、P における曲線の接線の傾きを m_P として

$$m_P = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

よって求める接線の方程式は

$$y - y_0 = m_P(x - x_0)$$

となる。

曲線の接線

具体例

曲線の接線

<u>具体例</u>

円：$x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

曲線の接線

<u>具体例</u>

円：$x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2$

曲線の接線

<u>具体例</u>

円：$x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2$　つまり

$x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = r^2$ である。

曲線の接線

<u>具体例</u>

円：$x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとると、

$(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = r^2$　つまり

$x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = r^2$ である。

$x_0^2 + y_0^2 = r^2$ なので $2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 = 0$

曲線の接線

<u>具体例</u>

円：$x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(x_0,y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ をとると、

$(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2=r^2$　つまり

$x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+y_0^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2=r^2$ である。

$x_0^2+y_0^2=r^2$ なので $2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2=0$

これより $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{2x_0+\Delta x}{2y_0+\Delta y}$

曲線の接線

<u>具体例</u>

円：$x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(x_0,y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ をとると、

$(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2=r^2$　つまり

$x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+y_0^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2=r^2$ である。

$x_0^2+y_0^2=r^2$ なので $2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2=0$

これより $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{2x_0+\Delta x}{2y_0+\Delta y}$

$$m_P=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{x_0}{y_0}$$

曲線の接線

<u>具体例</u>

円：$x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(x_0,y_0)$ をとる。

この円周上に $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ をとると、

$(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2=r^2$　つまり

$x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+y_0^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2=r^2$ である。

$x_0^2+y_0^2=r^2$ なので $2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+2y_0\Delta y+(\Delta y)^2=0$

これより $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{2x_0+\Delta x}{2y_0+\Delta y}$

$$m_P=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{x_0}{y_0}$$

よって、P における接線の方程式は

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

曲線の接線

注意

この具体例をレポート課題にすると、ほとんどの人が

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

の微分を計算するが、前のページの様に、定義どおりに考えれば四則計算だけで計算出来る。

曲線の接線

注意

この具体例をレポート課題にすると、ほとんどの人が

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

の微分を計算するが、前のページの様に、定義どおりに考えれば四則計算だけで計算出来る。
数学の勉強は、先ず定義のみに従って既存の知識のみで出来ることを考え，難しい公式や定理を勉強するのはその後である。

現代的な立場

関数

[定義]

実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、y は x の関数であるという。

関数

[定義]

実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、y は x の関数であるという。

このとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、$y = f(x)$ 等と書く。

関数

[定義]

実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、y は x の関数であるという。

このとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、$y = f(x)$ 等と書く。

[例]

実数 $a > 0$ について、指数関数

$$y = a^x$$

は x の関数である。

関数

[定義]

実数 x に対して実数 y が唯一つ決まるとき、y は x の関数であるという。

このとき、各 x に対し y を決める規則を $f(x)$ 等の記号で表し、$y = f(x)$ 等と書く。

[例]

実数 $a > 0$ について、指数関数

$$y = a^x$$

は x の関数である。

楕円の方程式

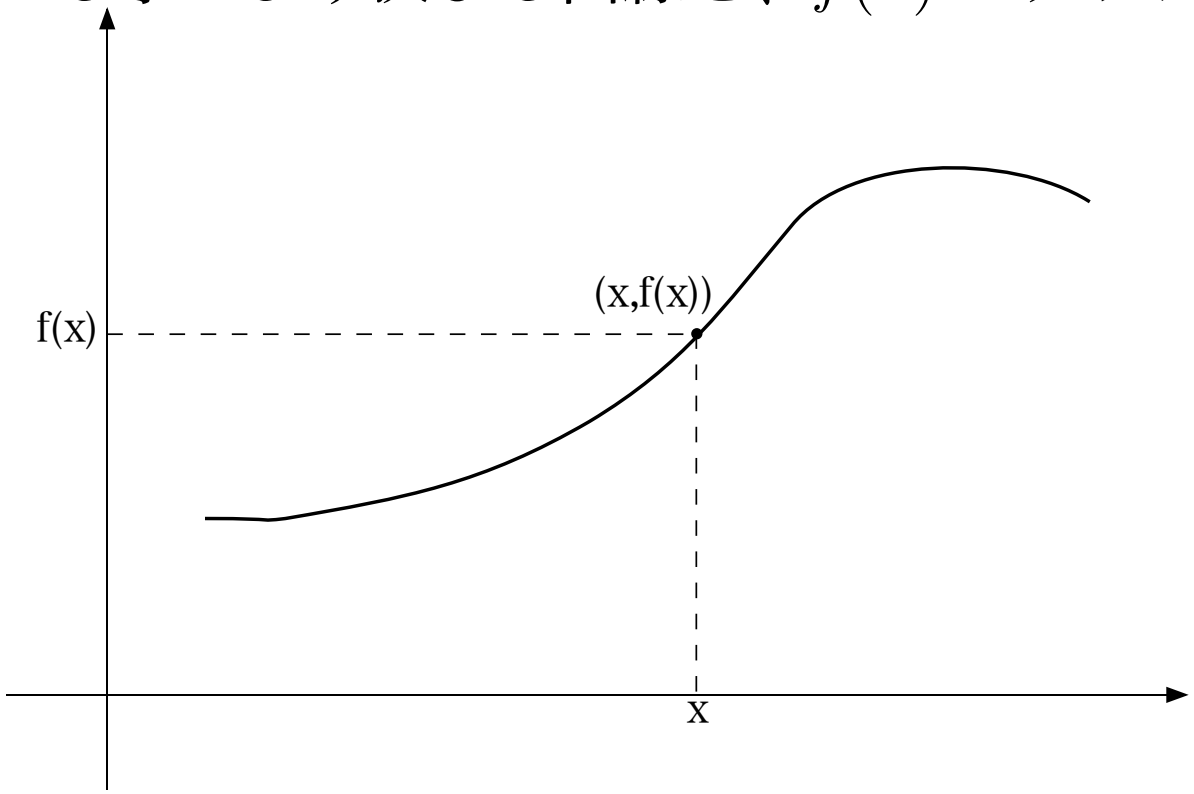
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

については、y は x の関数ではなく、x も y の関数ではない。

関数のグラフ

[定義]

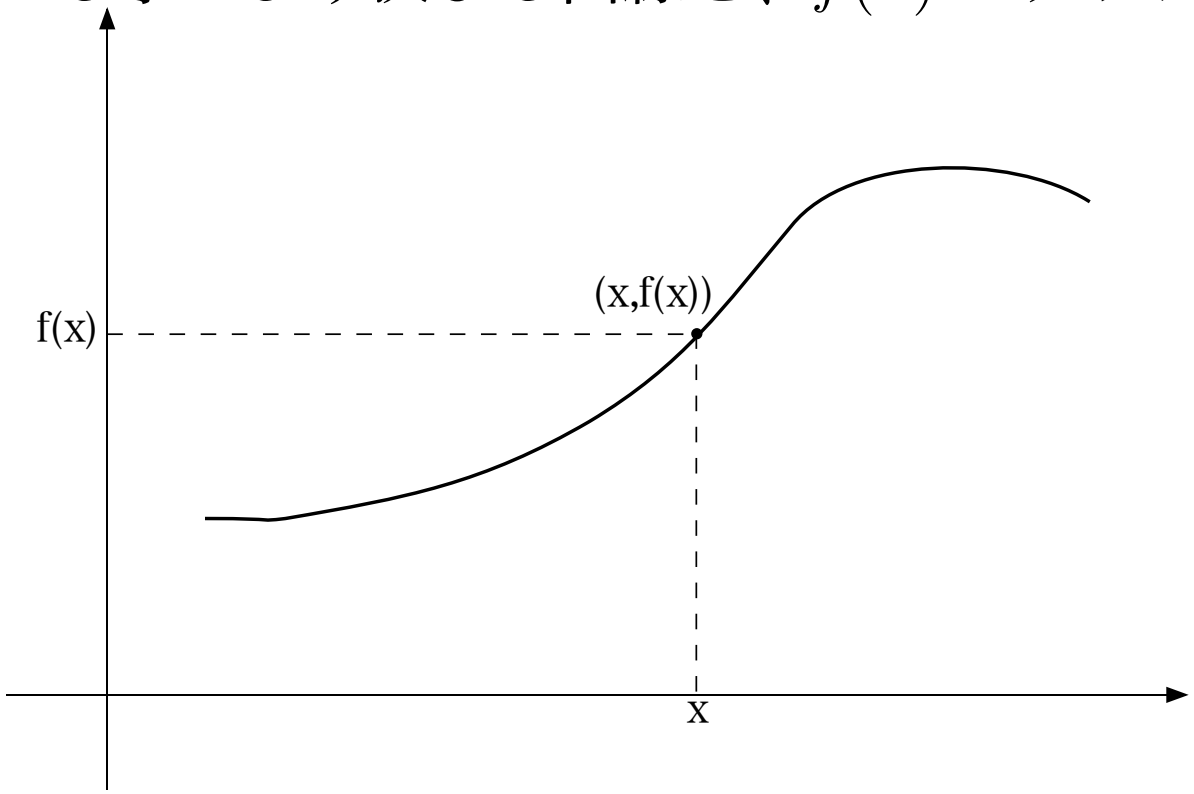
関数 $f(x)$ に対し、各 x に対しデカルト座標上の点 $(x, f(x))$ を対応させる事により決まる曲線を、$f(x)$ のグラフと呼ぶ。



関数のグラフ

[定義]

関数 $f(x)$ に対し、各 x に対しデカルト座標上の点 $(x, f(x))$ を対応させる事により決まる曲線を、$f(x)$ のグラフと呼ぶ。



$f(x)$ のグラフは、$y - f(x) = 0$ の定める曲線である。

関数の近似とグラフの接線

関数の近似とグラフの接線

[微分係数と接線の方程式]

$f(x)$ の x_0 での微分係数の定義は次の様に書き変えられる：

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

関数の近似とグラフの接線

[微分係数と接線の方程式]

$f(x)$ の x_0 での微分係数の定義は次の様に書き変えられる：

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$$

つまり $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)$ とおくと

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{x-x_0}=0$$

関数の近似とグラフの接線

[微分係数と接線の方程式]

$f(x)$ の x_0 での微分係数の定義は次の様に書き変えられる：

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$$

つまり $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)$ とおくと

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{x-x_0}=0$$

このことは $f(x)$ を $x=x_0$ の近くで一次関数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

で近似すると、x が x_0 に近付くとき「余り」 $R(x)$ は x の一次式より速く 0 に近付くということである。

関数の近似とグラフの接線

[微分係数と接線の方程式]

$f(x)$ の x_0 での微分係数の定義は次の様に書き変えられる：

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$$

つまり $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)$ とおくと

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{x-x_0}=0$$

このことは $f(x)$ を $x=x_0$ の近くで一次関数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

で近似すると、x が x_0 に近付くとき「余り」 $R(x)$ は x の一次式より速く 0 に近付くということである。 よって

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

は $y=f(x)$ のグラフの $(x_0,f(x_0))$ での接線の方程式である。

関数の近似とグラフの接線

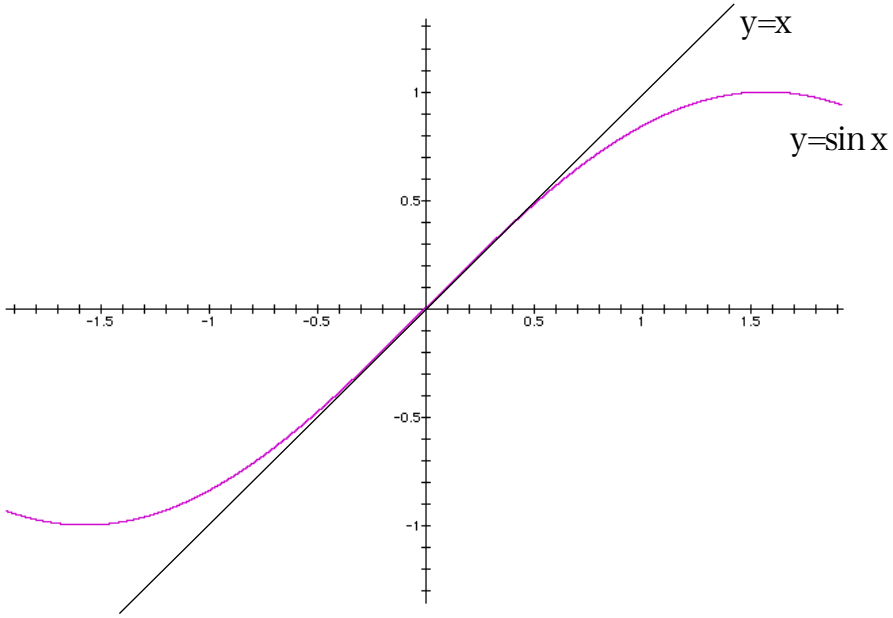
[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$

関数の近似とグラフの接線

[例]

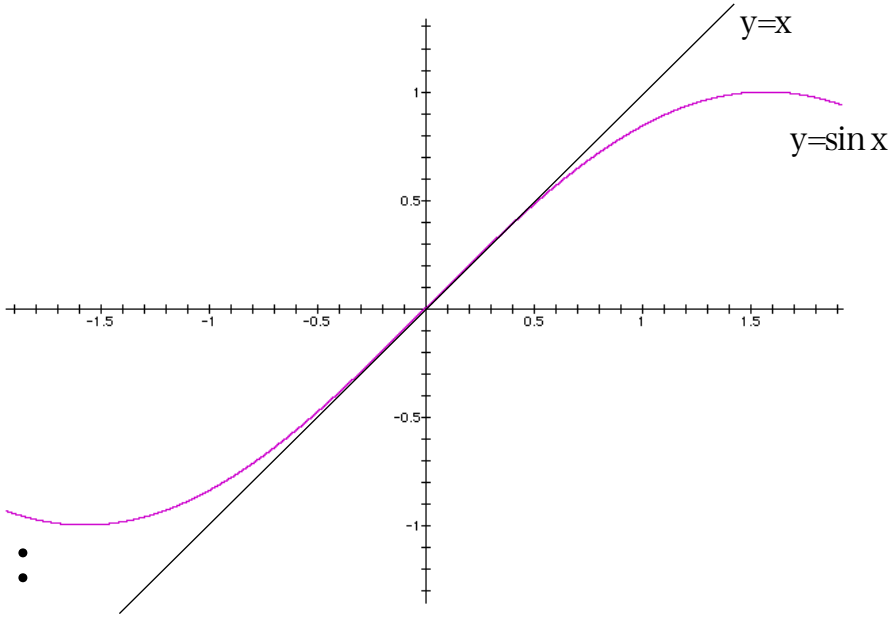
$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



関数の近似とグラフの接線

[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$

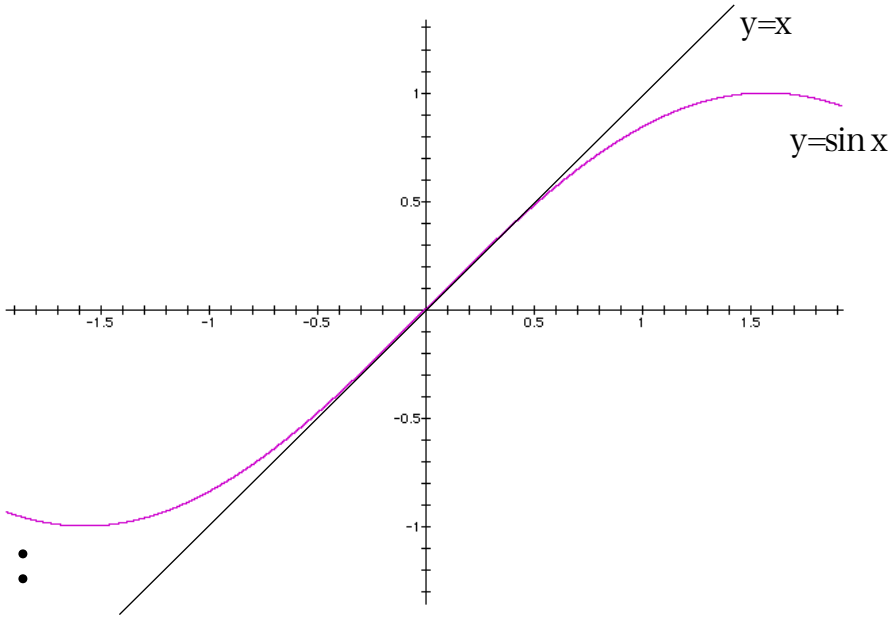


$\sin x - x$ の値：

関数の近似とグラフの接線

[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



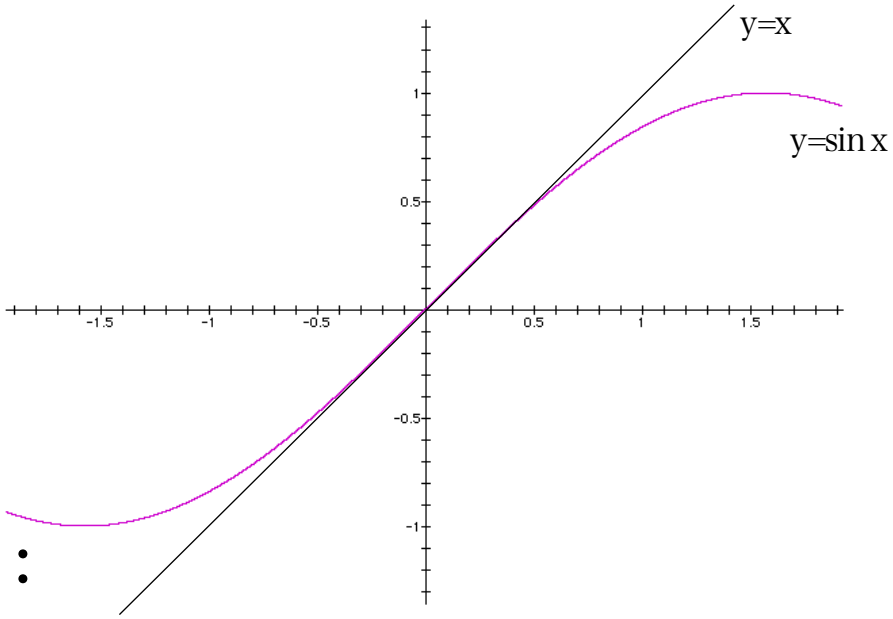
$\sin x - x$ の値：

$x = 1$：$\sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$

関数の近似とグラフの接線

[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



$\sin x - x$ の値：

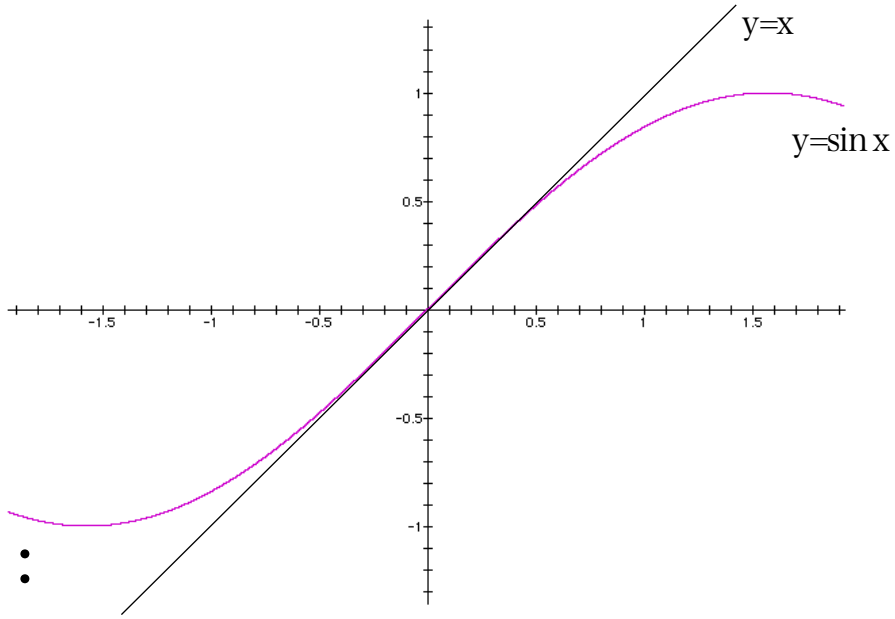
$x = 1$：$\sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$

$x = 0.1$：$\sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$

関数の近似とグラフの接線

[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



$\sin x - x$ の値：

$x = 1$：$\sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$

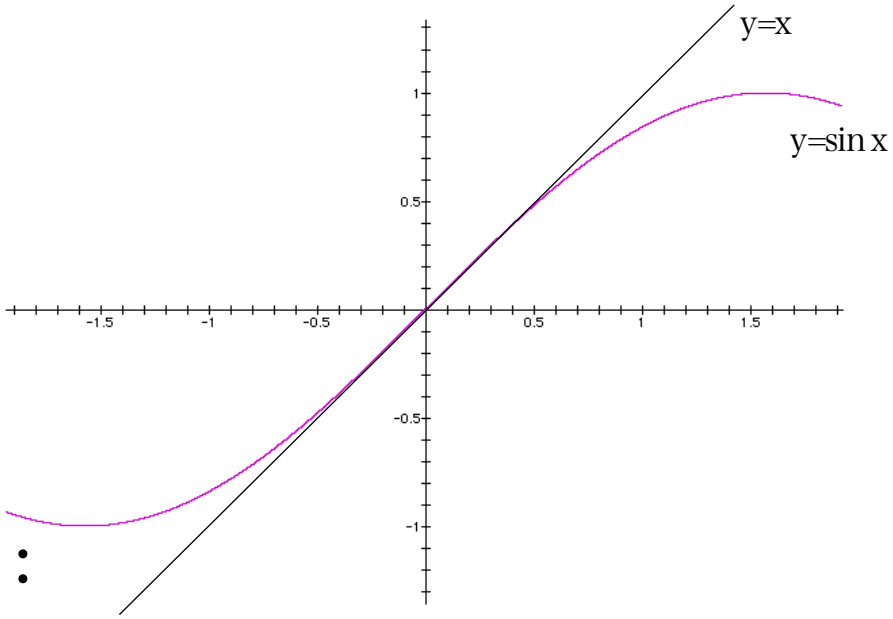
$x = 0.1$：$\sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$

$x = 0.01$：$\sin 0.01 - 0.01 = 0.00999983 - 0.01 = -0.00000017$

関数の近似とグラフの接線

[例]

$y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ での接線の方程式は $y = x$



$\sin x - x$ の値：

$x = 1$：$\sin 1 - 1 = 0.84147 - 1 = -0.15852$

$x = 0.1$：$\sin 0.1 - 0.1 = 0.09983 - 0.1 = -0.00016$

$x = 0.01$：$\sin 0.01 - 0.01 = 0.00999983 - 0.01 = -0.00000017$

と、x が 0 に近づくよりはるかに「速く」 0 に近づく。

極値問題

極値問題

[定理]

微分可能な関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極大値又は極小値を取るならば、 $f'(x_0) = 0$ である。

極値問題

[定理]

微分可能な関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極大値又は極小値を取るならば、 $f'(x_0) = 0$ である。

$\because f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

が成り立つ。

極値問題

[定理]

微分可能な関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極大値又は極小値を取るならば、 $f'(x_0) = 0$ である。

$\because f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

が成り立つ。　従って、$r(x) = \dfrac{R(x)}{x - x_0}$ とおくと $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$

極値問題

[定理]

微分可能な関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極大値又は極小値を取るならば、 $f'(x_0) = 0$ である。

$\because f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

が成り立つ。　従って、$r(x) = \dfrac{R(x)}{x - x_0}$ とおくと $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$

従って、もし $f'(x_0) > 0$ ならば

極値問題

[定理]

微分可能な関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極大値又は極小値を取るならば、 $f'(x_0) = 0$ である。

$\because f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

が成り立つ。　従って、$r(x) = \dfrac{R(x)}{x - x_0}$ とおくと $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$

従って、もし $f'(x_0) > 0$ ならば

$x > x_0$ で $f(x) = f(x_0) + \{f'(x_0) + r(x)\}(x - x_0) > f(x_0)$

$x < x_0$ で $f(x) = f(x_0) + \{f'(x_0) + r(x)\}(x - x_0) < f(x_0)$

となり、$f(x_0)$ は極値ではない。

極値問題

[定理]

微分可能な関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極大値又は極小値を取るならば、 $f'(x_0) = 0$ である。

$\because f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ とおくと

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

が成り立つ。　従って、$r(x) = \dfrac{R(x)}{x - x_0}$ とおくと $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$

従って、もし $f'(x_0) > 0$ ならば

$x > x_0$ で $f(x) = f(x_0) + \{f'(x_0) + r(x)\}(x - x_0) > f(x_0)$

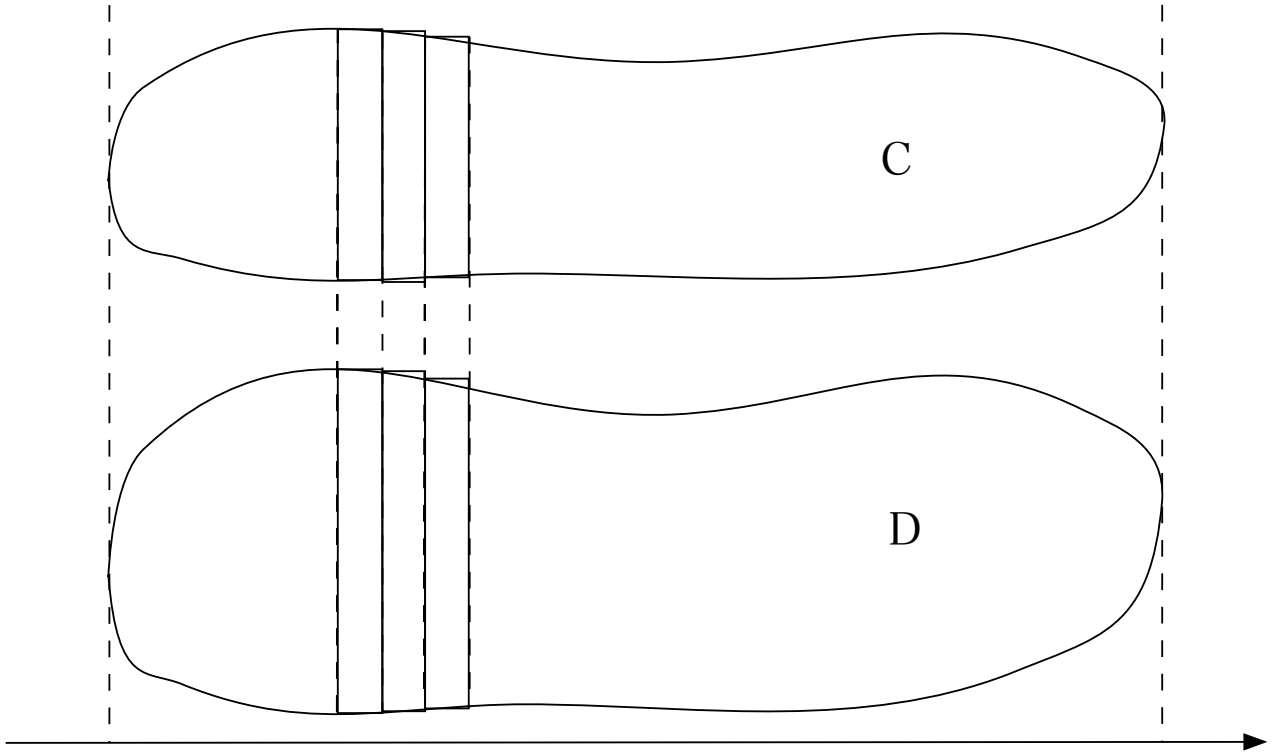
$x < x_0$ で $f(x) = f(x_0) + \{f'(x_0) + r(x)\}(x - x_0) < f(x_0)$

となり、$f(x_0)$ は極値ではない。　$f'(x_0) < 0$ も同様に不適。

カバリエリの原理

カバリエリの原理

x 軸の上に置かれた二つの図形を、図のように細い短冊に切ってそれぞれの短冊の面積を比較する。



カバリエリの原理

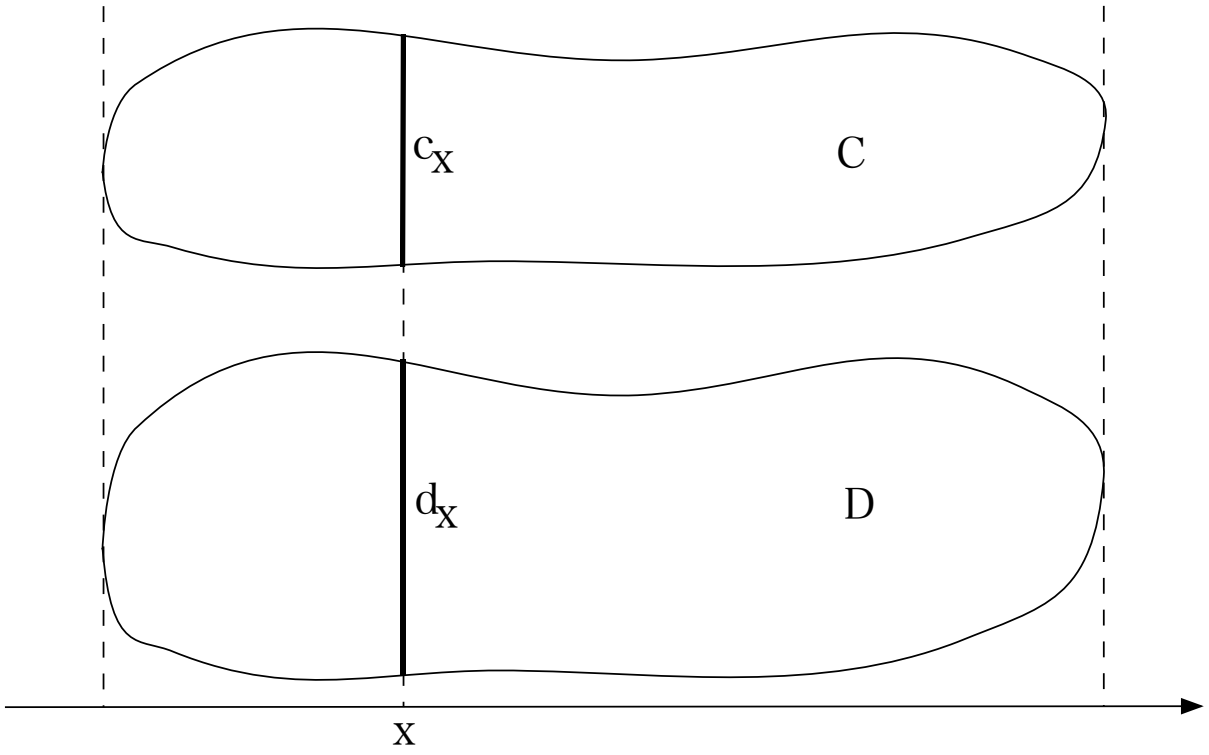
短冊の幅を無限に細くするとカバリエリの原理が得られる。

カバリエリの原理

短冊の幅を無限に細くするとカバリエリの原理が得られる。

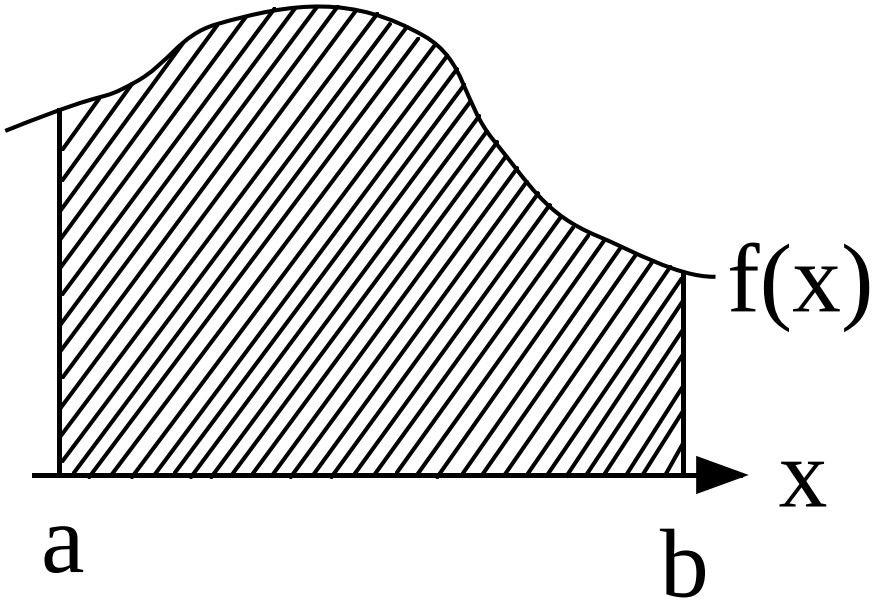
<u>カバリエリの原理</u>

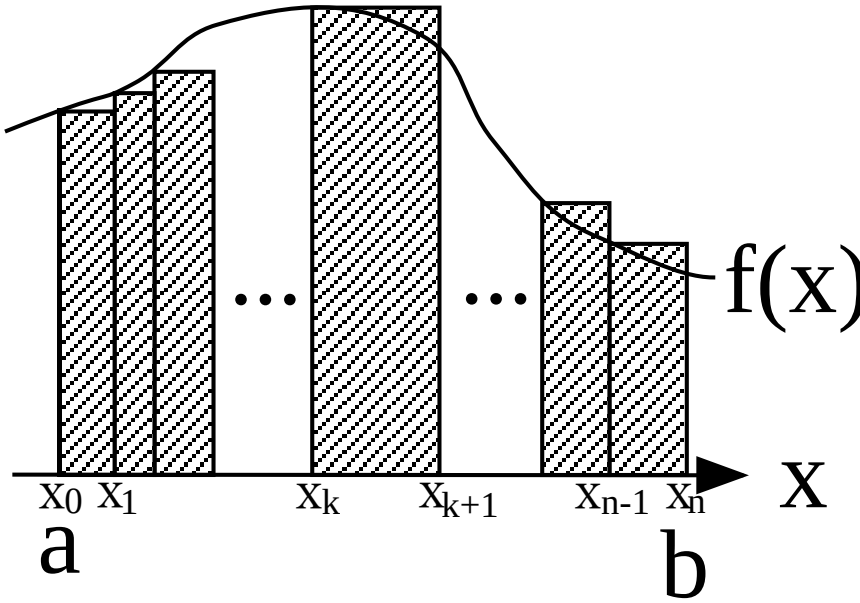
全ての x について $d_x = kc_x$ ならば $D = kC$ である。



面積と積分

関数 $f(x)$ について、左図の面積を右図の様な長方形の面積の和よって近似する：

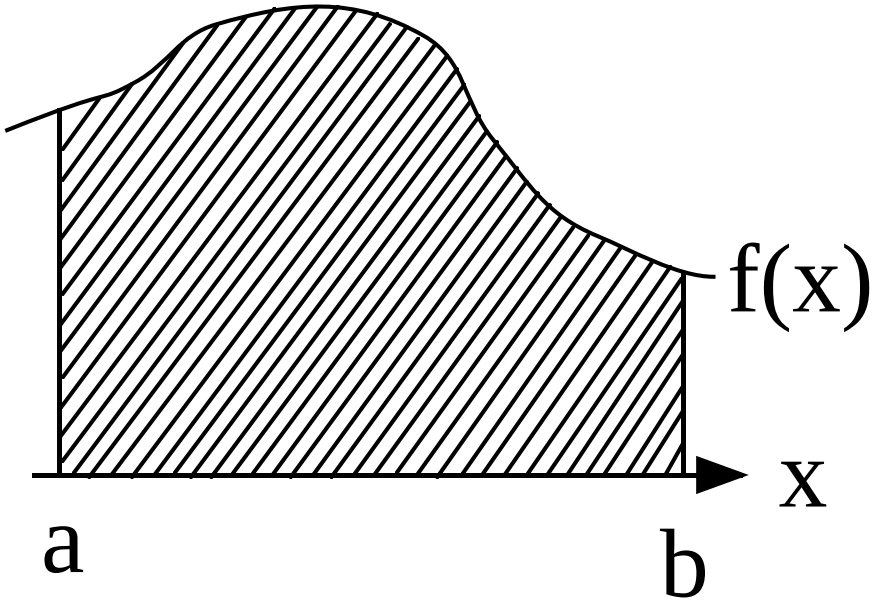


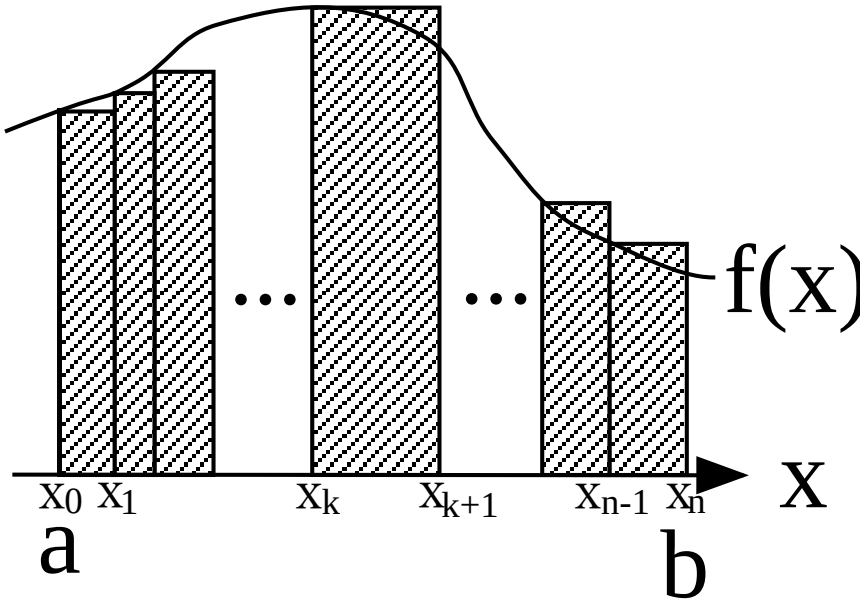


但し、各長方形の面積は $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ である。

面積と積分

関数 $f(x)$ について、左図の面積を右図の様な長方形の面積の和よって近似する：





但し、各長方形の面積は $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ である。

このとき、$x_{k+1} - x_k$ が十分小さいならば、十分良い近似が得られる。

面積と積分

更に、$dx = x_{k+1} - x_k$ が無限に小さい極限を考え、無限に細い長方形の面積 $f(x)dx$ を全て足し合わせると、求める面積が得られるはずである。

面積と積分

更に、$dx = x_{k+1} - x_k$ が無限に小さい極限を考え、無限に細い長方形の面積 $f(x)dx$ を全て足し合わせると、求める面積が得られるはずである。
(dx を x の「微分」と呼ぶ)

面積と積分

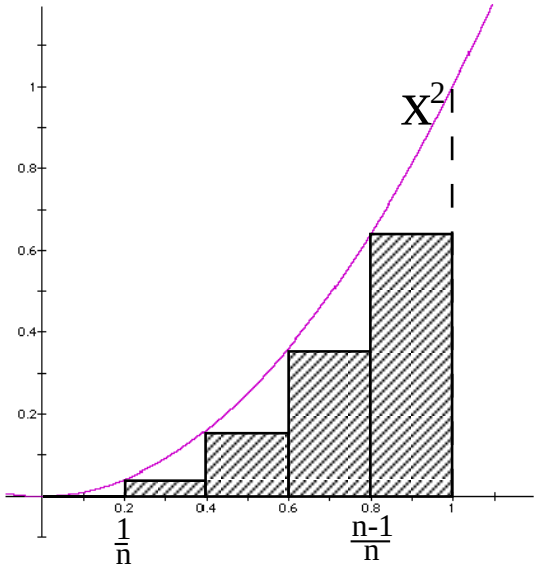
更に、$dx = x_{k+1} - x_k$ が無限に小さい極限を考え、無限に細い長方形の面積 $f(x)dx$ を全て足し合わせると、求める面積が得られるはずである。
(dx を x の「微分」と呼ぶ)

この無限に細い長方形の面積の和を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書き、$f(x)$ の a から b までの定積分と呼ぶ。

面積と積分

[例]

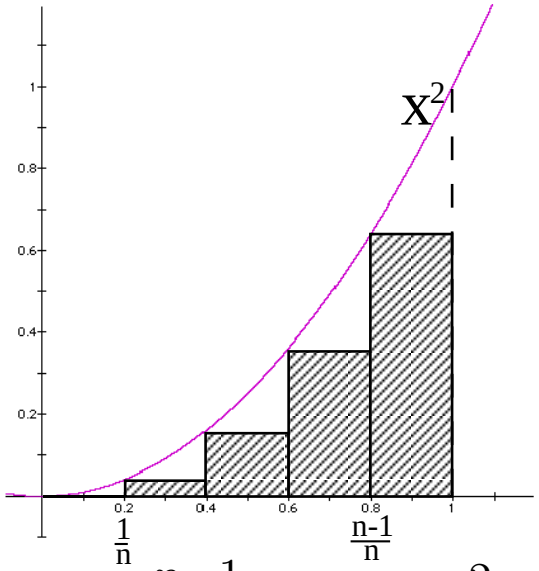
$\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ を下図の和の極限として求める。



面積と積分

[例]

$\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ を下図の和の極限として求める。



幅 $\dfrac{1}{n}$ が有限のときの和は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$

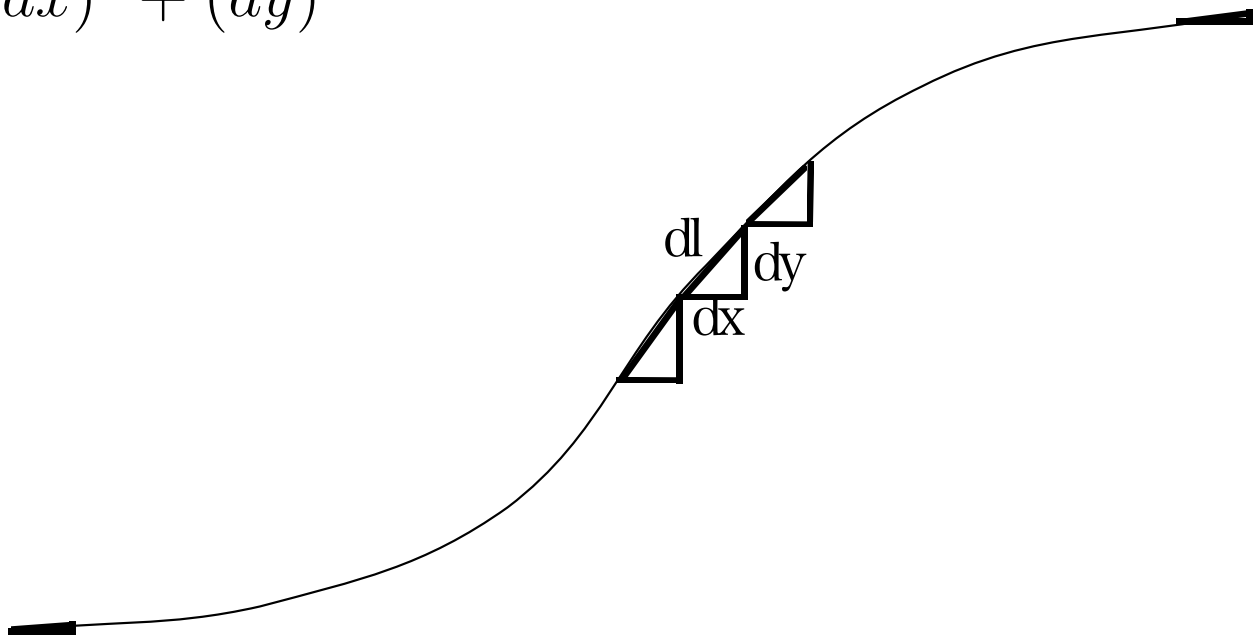
$= \dfrac{(1-\frac{1}{n})\cdot 1\cdot(2-\frac{1}{n})}{6}$。 よって $n\to\infty$ で $\frac{1}{3}$ に収束する。

曲線の長さ

曲線の長さ

曲線の各点で接線に沿って無限に小さい幅 dx と dy を考えると、三平方の定理より曲線の接線に沿った長さは

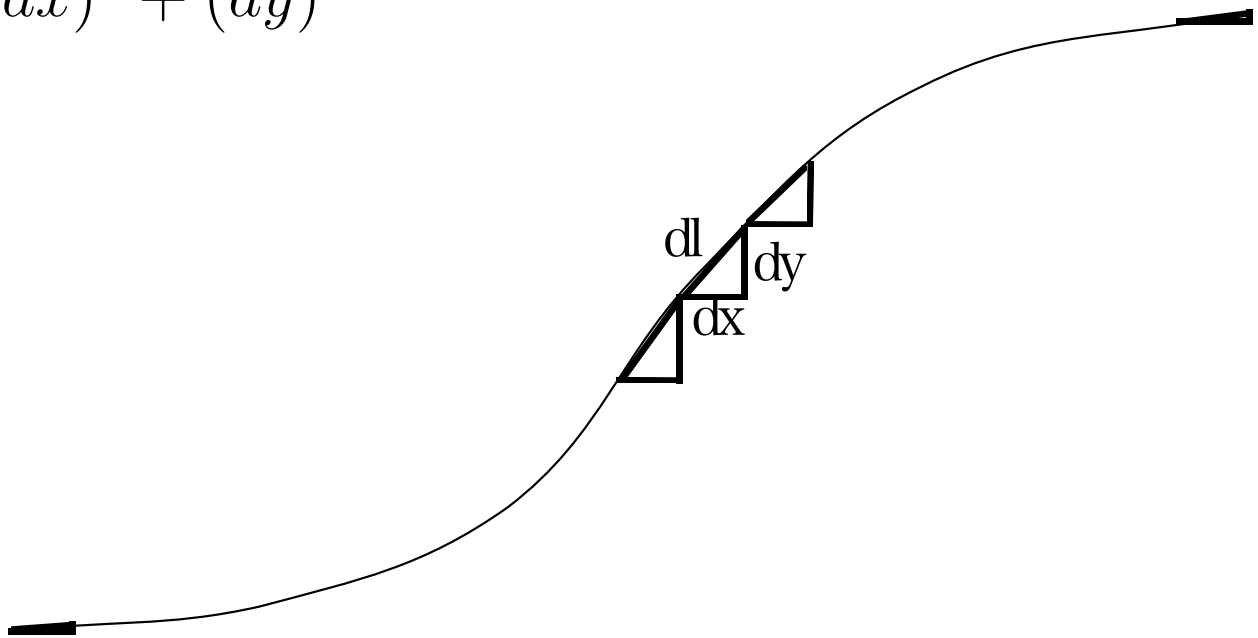
$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



曲線の長さ

曲線の各点で接線に沿って無限に小さい幅 dx と dy を考えると、三平方の定理より曲線の接線に沿った長さは

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



よって曲線の長さは $\displaystyle\int dl = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

曲線の長さ

すなわち、区間 $[a, b]$ で定義された微分可能な関数によって $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ で表される平面上の曲線の長さは次で求められる：

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} dt$$

曲線の長さ

すなわち、区間 $[a, b]$ で定義された微分可能な関数によって $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ で表される平面上の曲線の長さは次で求められる：

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} dt$$

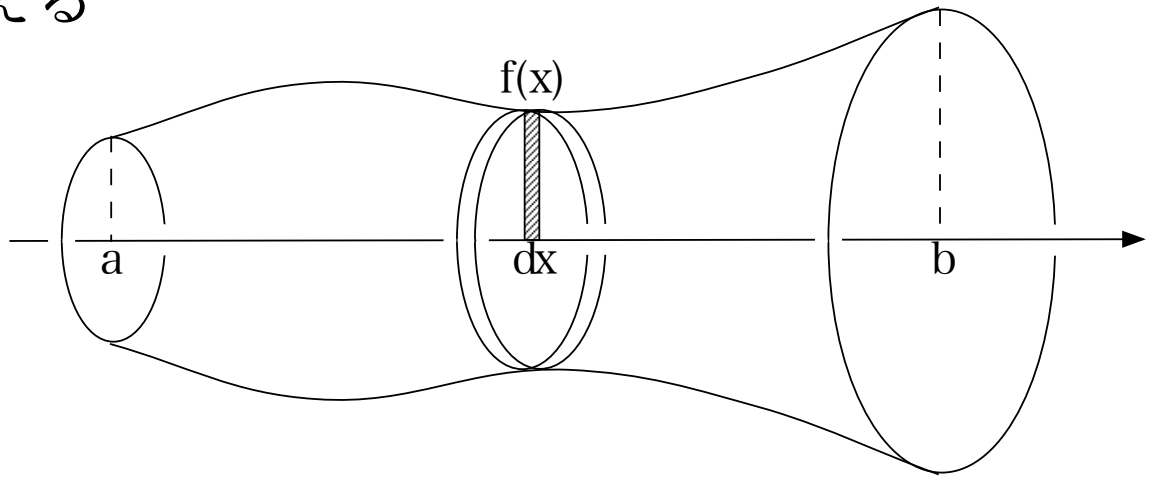
特に、関数 $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ から $x = b$ までの部分の長さは次のようになる：

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

回転体の体積

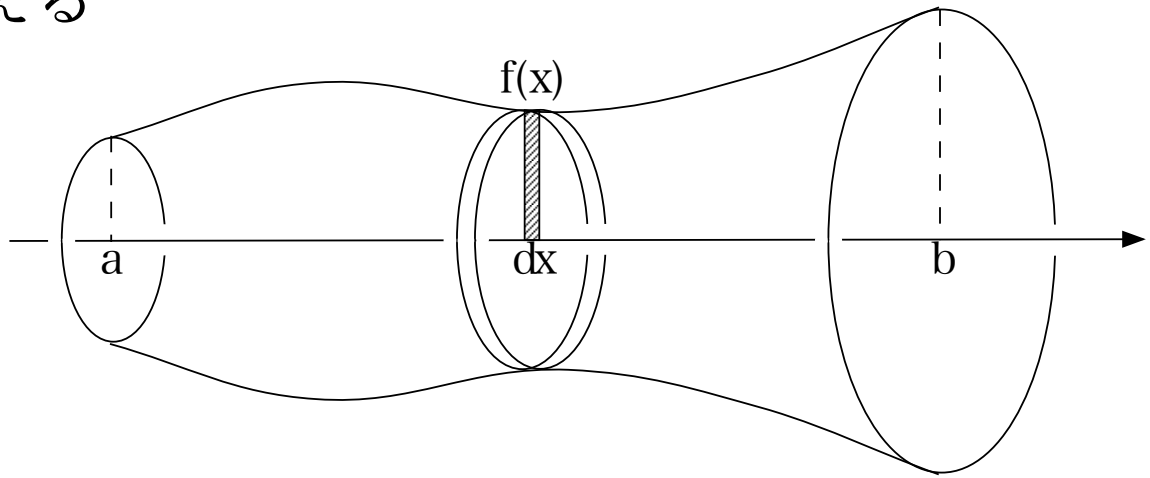
回転体の体積

関数 $f(x)$ のグラフを x 軸周りに回転させて得られる立体の体積を考える



回転体の体積

関数 $f(x)$ のグラフを x 軸周りに回転させて得られる立体の体積を考える



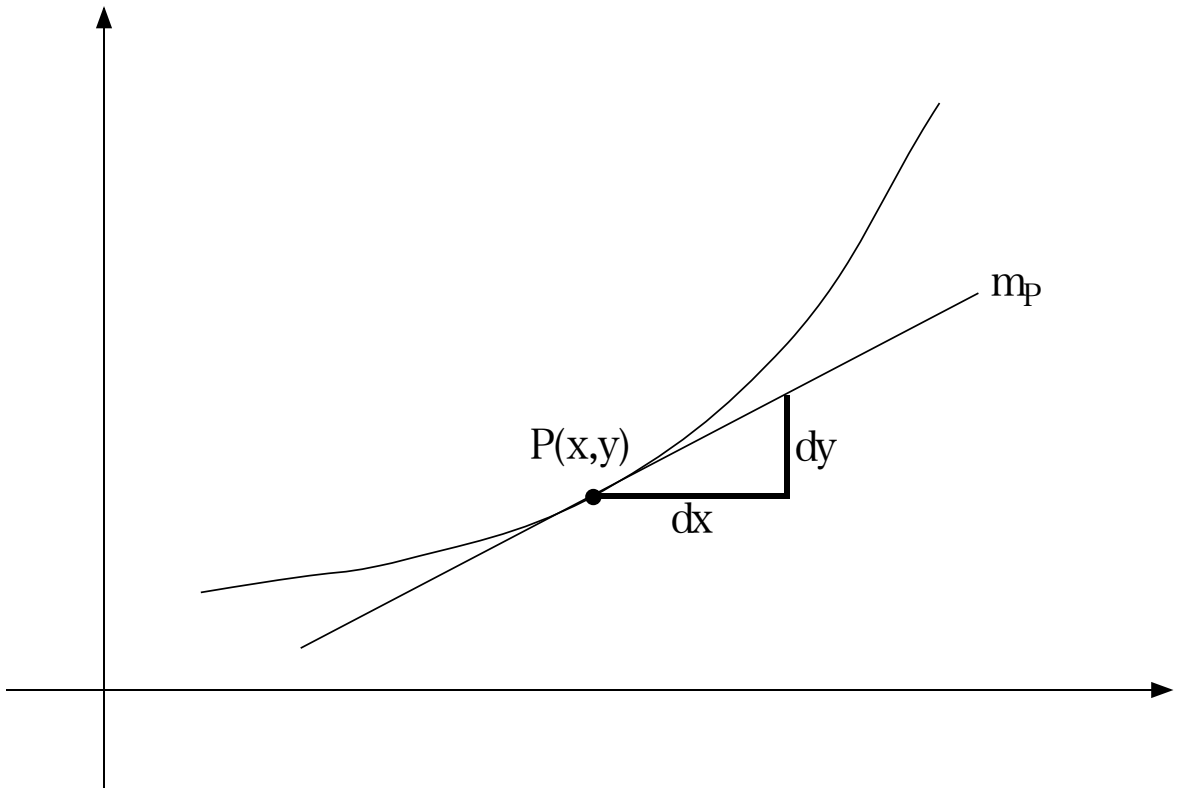
半径 $f(x)$ 厚さ dx の円盤の体積は $\pi\{f(x)\}^2 dx$ で与えられるので、この立体の体積は次で与えられる

$$V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$$

微分

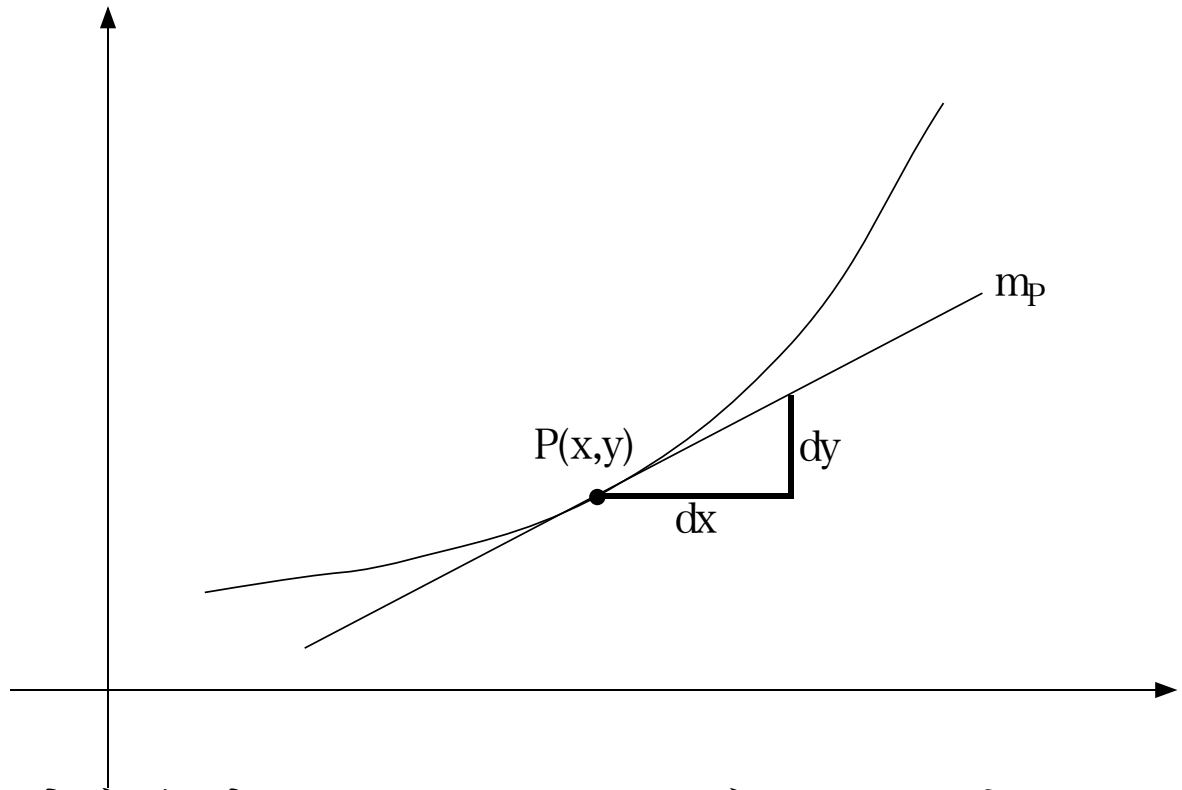
微分

曲線上の点 $P(x, y)$ における接線の傾きを m_P とし、図の三角形を考える：



微分

曲線上の点 $P(x, y)$ における接線の傾きを m_P とし、図の三角形を考える：



$\dfrac{dy}{dx} = m_P$ すなわち $dy = m_P \cdot dx$ だが、dx と dy が無限に小さいと考えるとき、dx を x の微分 dy を y の微分とよぶ。

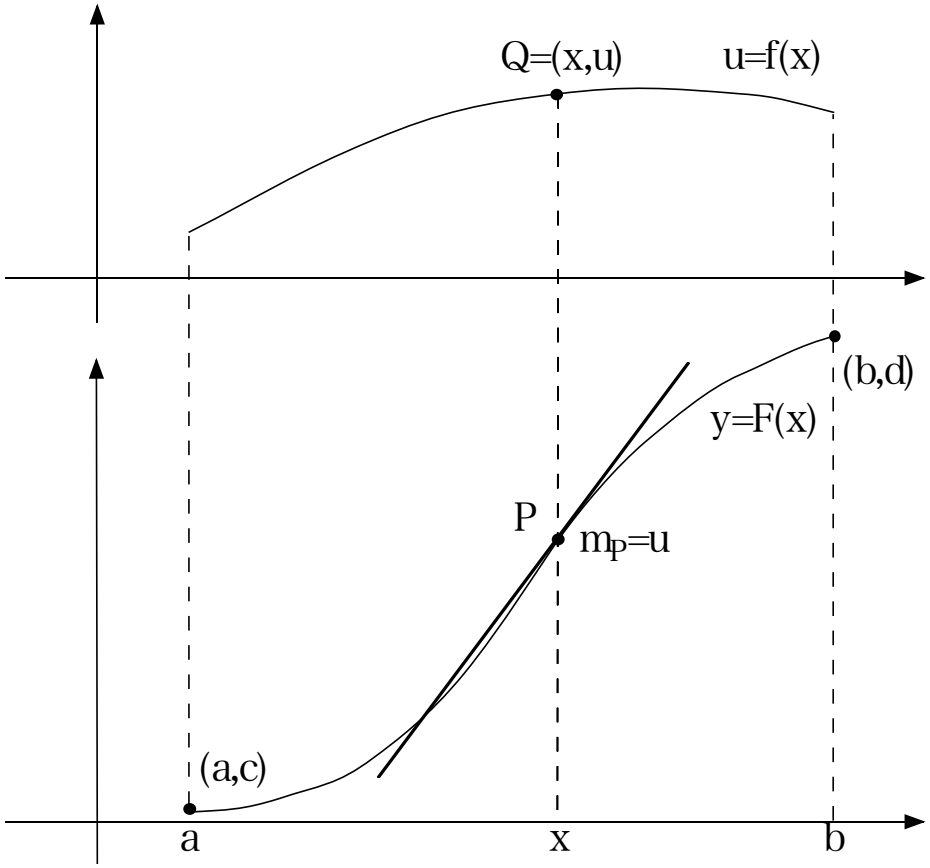
微積分法の基本定理

微積分法の基本定理

区間 $[a, b]$ で定義された二つの関数 $u = f(x)$ と $y = F(x)$ について、$y = F(x)$ のグラフ上の点 $P(x, y)$ における接線の傾き m_P が $f(x)$ の値に等しい、つまり $m_P = u$ が成り立っているとする：

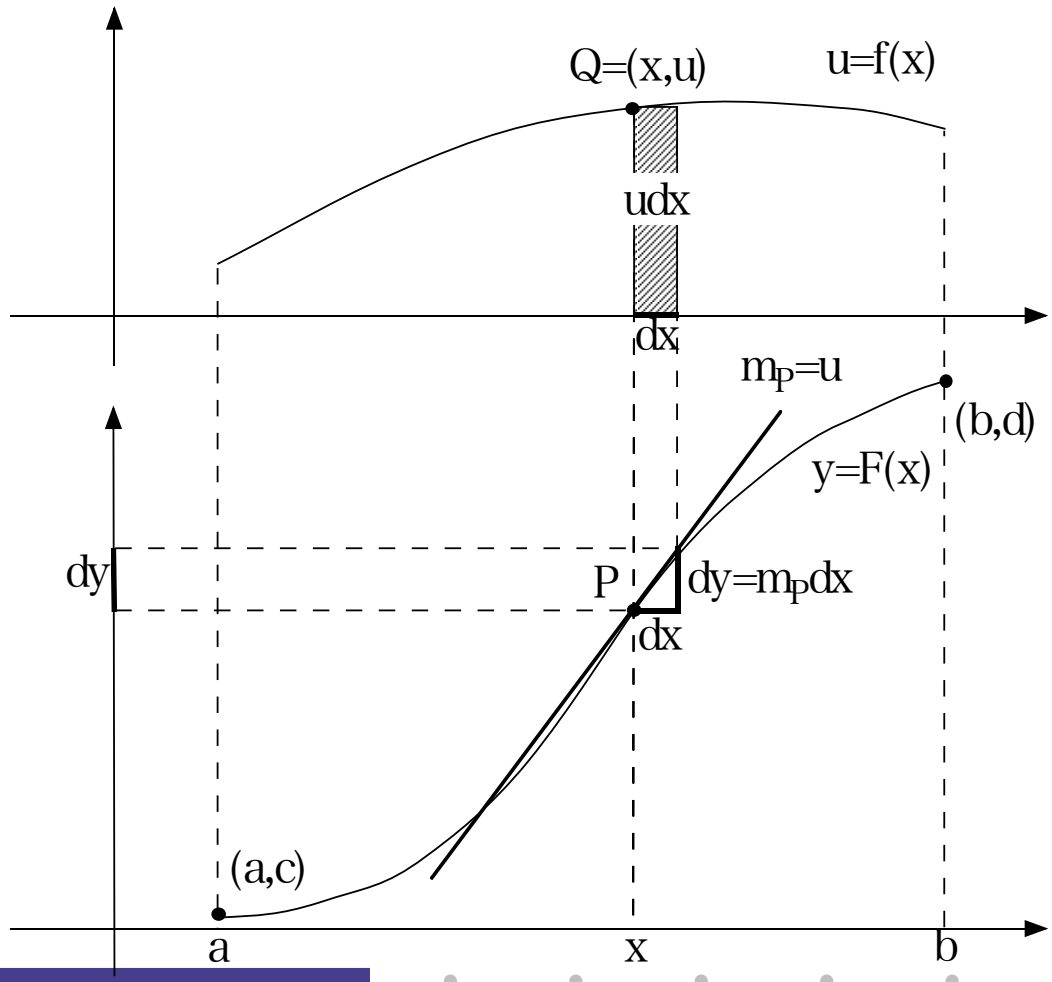
微積分法の基本定理

区間 $[a, b]$ で定義された二つの関数 $u = f(x)$ と $y = F(x)$ について、$y = F(x)$ のグラフ上の点 $P(x, y)$ における接線の傾き m_P が $f(x)$ の値に等しい、つまり $m_P = u$ が成り立っているとする：



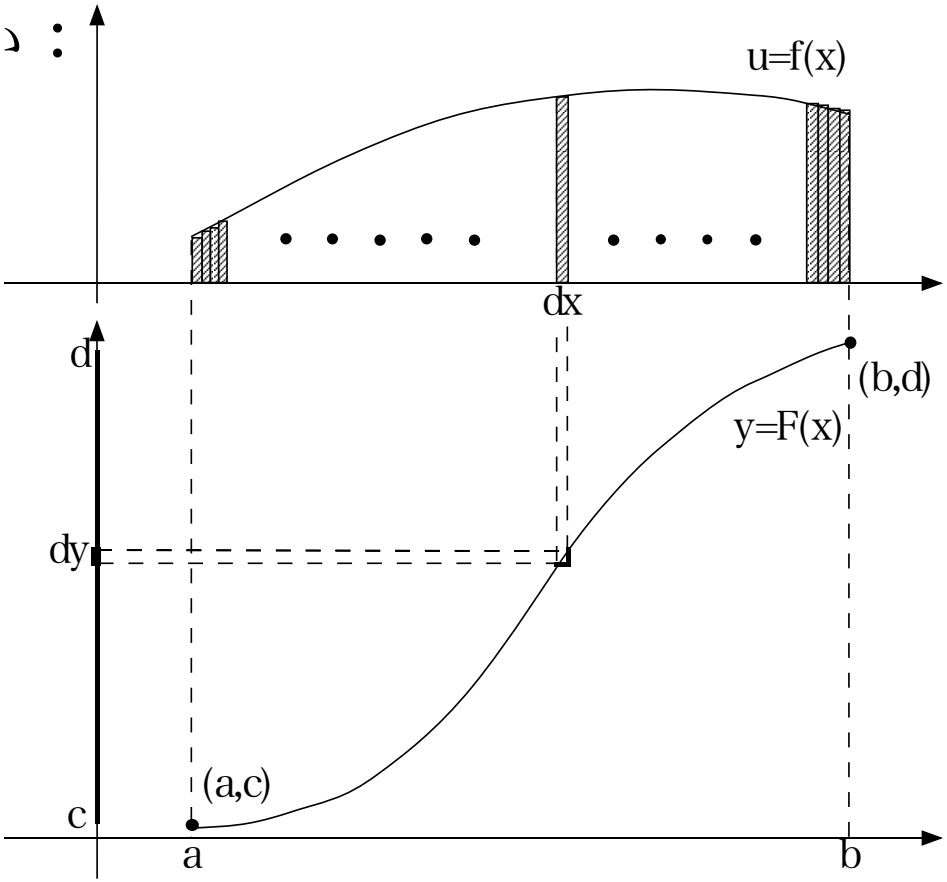
微積分法の基本定理

無限に小さい幅 dx によって定まる $u = f(x)$ の下の、上図の部分の面積は udx で、これは $m_P = u$ より下図の dy の長さに等しい：



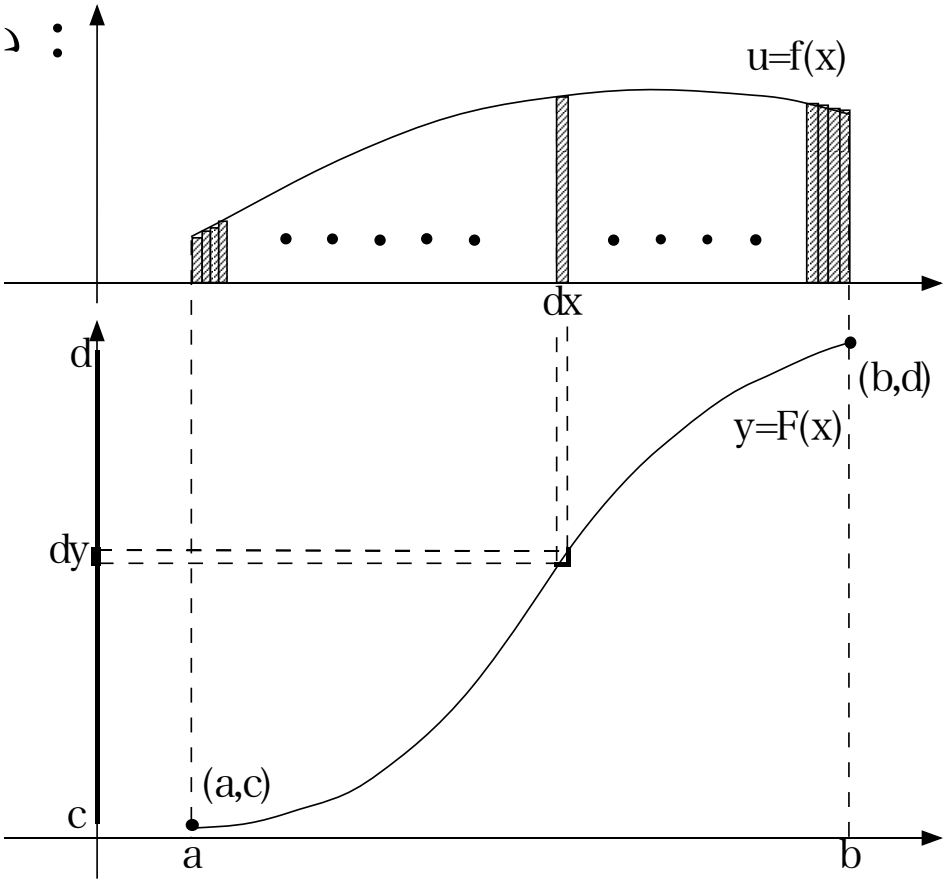
微積分法の基本定理

従って、$u = f(x)$ のグラフの下の面積は、$y = F(x)$ の増分 $d - c$ に等しい：



微積分法の基本定理

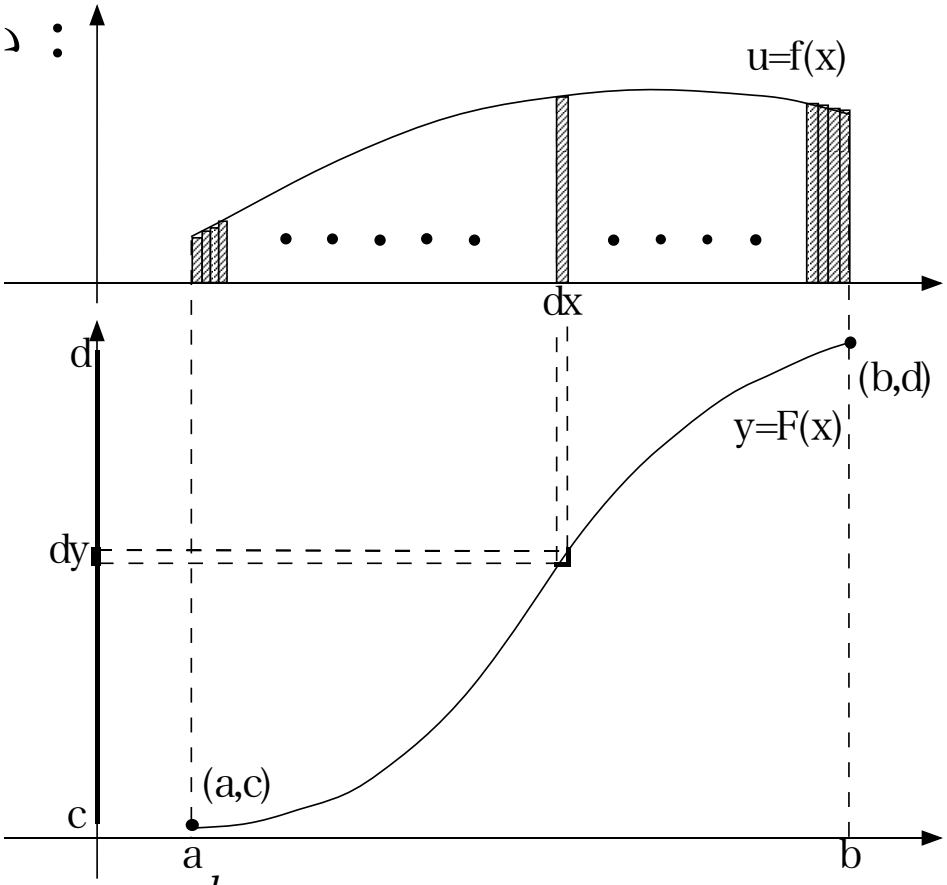
従って、$u = f(x)$ のグラフの下の面積は、$y = F(x)$ の増分 $d - c$ に等しい：



即ち、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

微積分法の基本定理

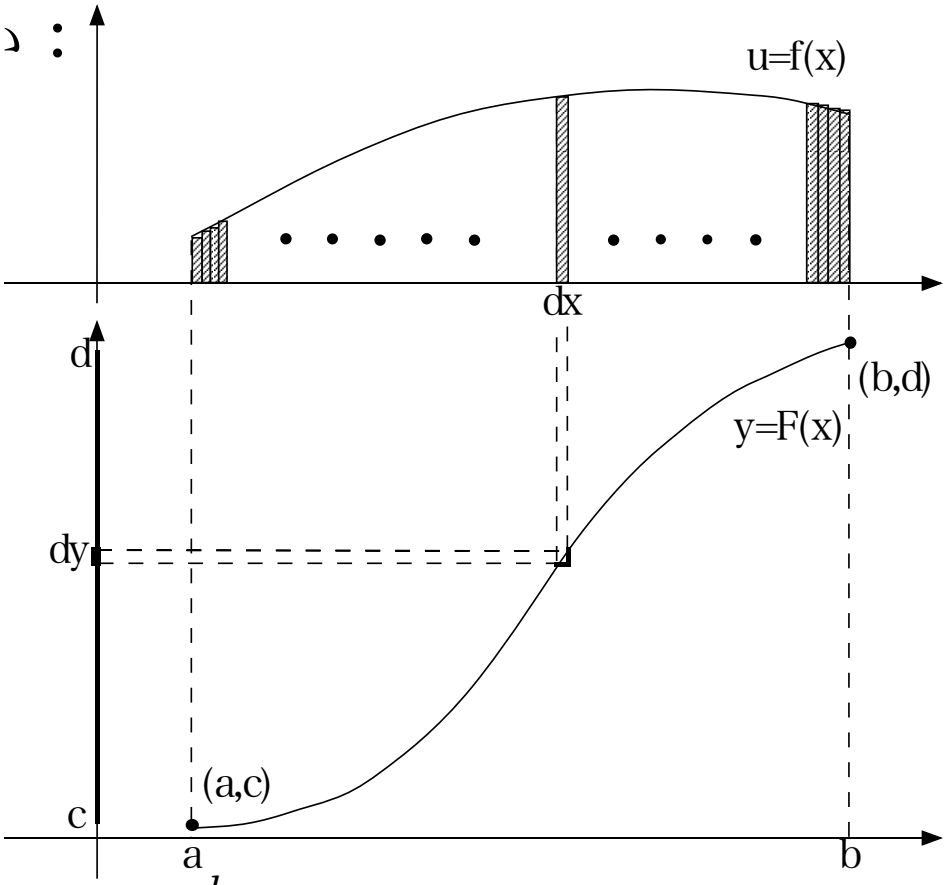
従って、$u = f(x)$ のグラフの下の面積は、$y = F(x)$ の増分 $d - c$ に等しい：



即ち、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u dx$

微積分法の基本定理

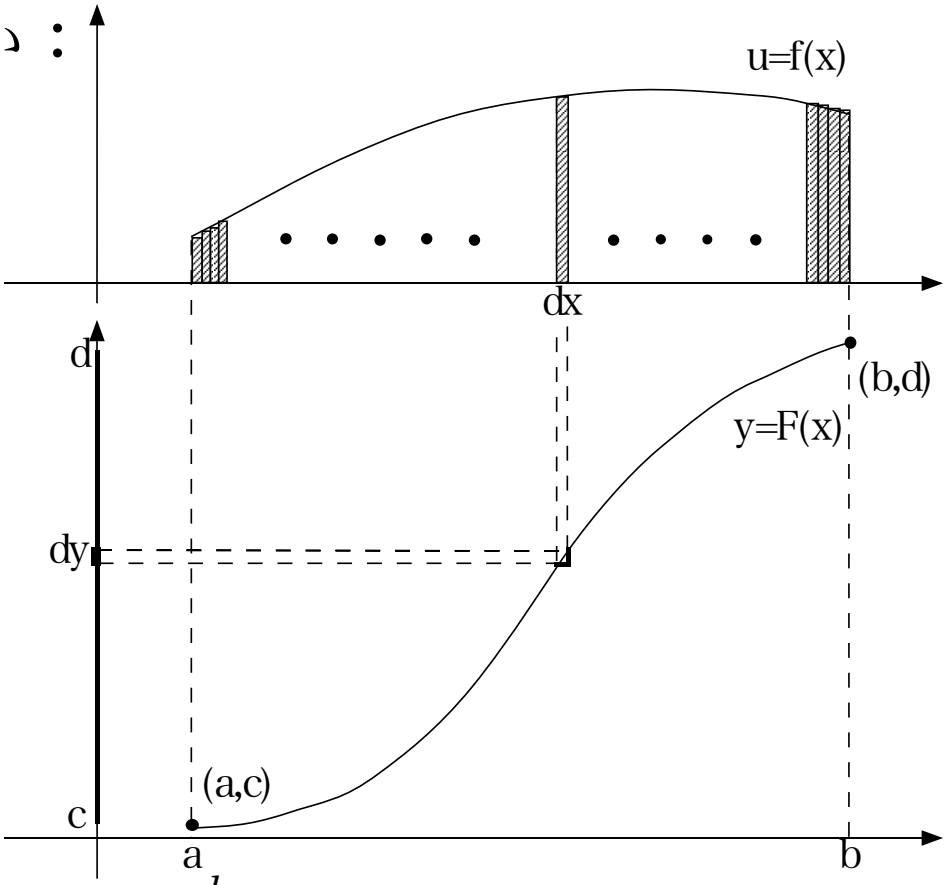
従って、$u = f(x)$ のグラフの下の面積は、$y = F(x)$ の増分 $d - c$ に等しい：



即ち、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u dx = d - c$

微積分法の基本定理

従って、$u = f(x)$ のグラフの下の面積は、$y = F(x)$ の増分 $d - c$ に等しい：



即ち、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u dx = d - c = F(b) - F(a)$ が成り立つ。

導関数と原始関数

導関数と原始関数

[定義]

関数 $f(x)$ が各 x で微分係数 $f'(x)$ を持つとする。このとき、x に対して $f'(x)$ を対応させることにより、新しい関数が得られる。これを $f(x)$ の導関数とよぶ。

導関数と原始関数

[定義]

関数 $f(x)$ が各 x で微分係数 $f'(x)$ を持つとする。このとき、x に対して $f'(x)$ を対応させることにより、新しい関数が得られる。これを $f(x)$ の導関数とよぶ。

[定義]

関数 $f(x)$ に対し、関数 $F(x)$ でその導関数 $F'(x)$ が $f(x)$ となるものが存在するとき、$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよぶ。

導関数と原始関数

[定義]

関数 $f(x)$ が各 x で微分係数 $f'(x)$ を持つとする。このとき、x に対して $f'(x)$ を対応させることにより、新しい関数が得られる。これを $f(x)$ の導関数とよぶ。

[定義]

関数 $f(x)$ に対し、関数 $F(x)$ でその導関数 $F'(x)$ が $f(x)$ となるものが存在するとき、$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよぶ。

[定理]

区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が存在するとき、次が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

平均値の定理

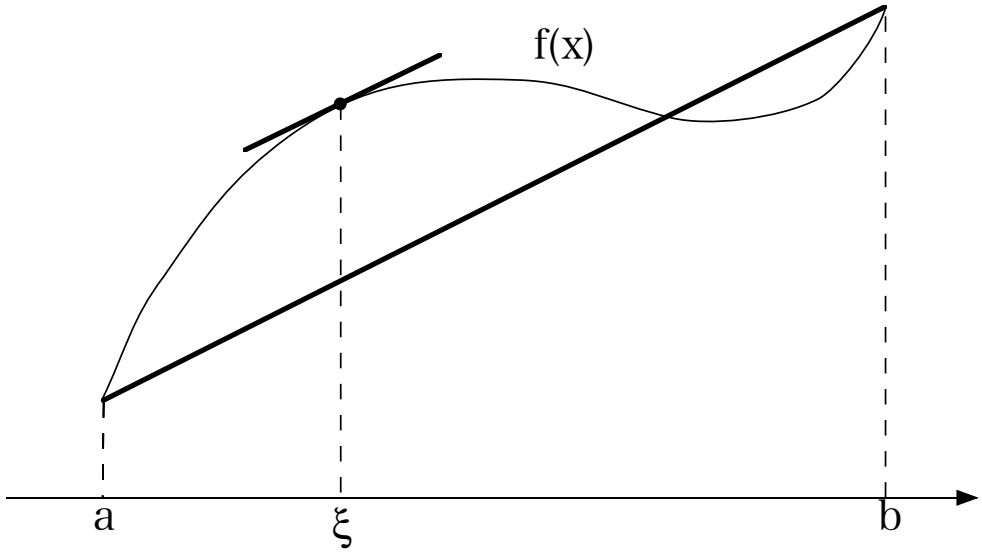
平均値の定理

[平均値の定理]

$[a, b]$ を含む区間で定義された関数 $f(x)$ が微分可能ならば

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

となるような $a < \xi < b$ が存在する。



平均値の定理

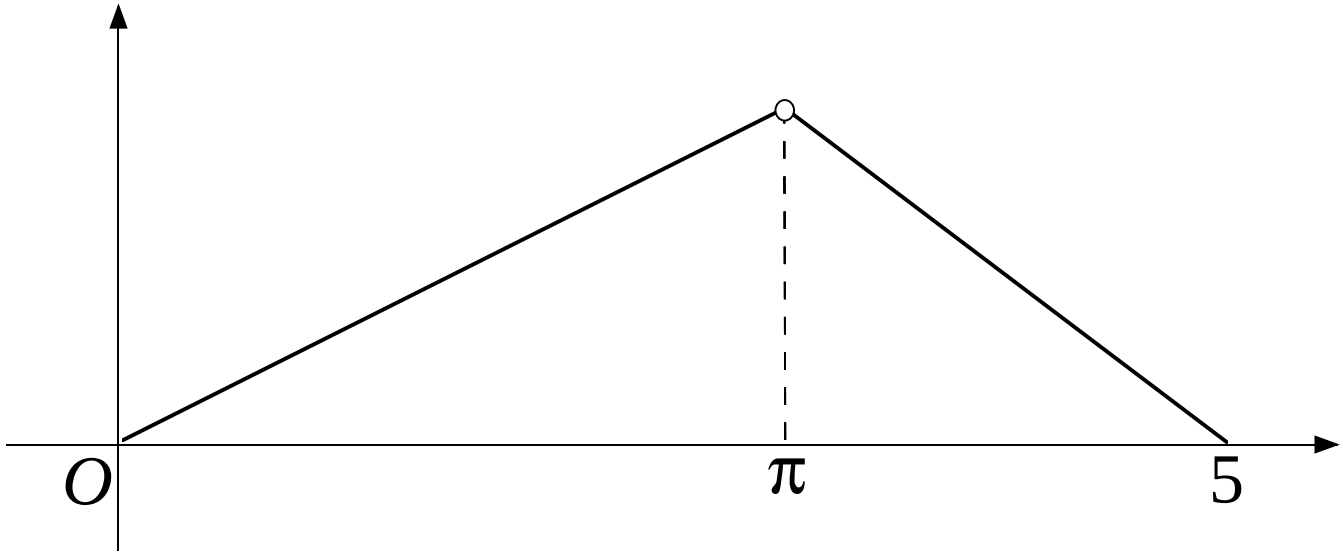
[平均値の定理] に対する注意

もし π という実数が存在しなかったらこの定理は成立しない。

平均値の定理

[平均値の定理] に対する注意

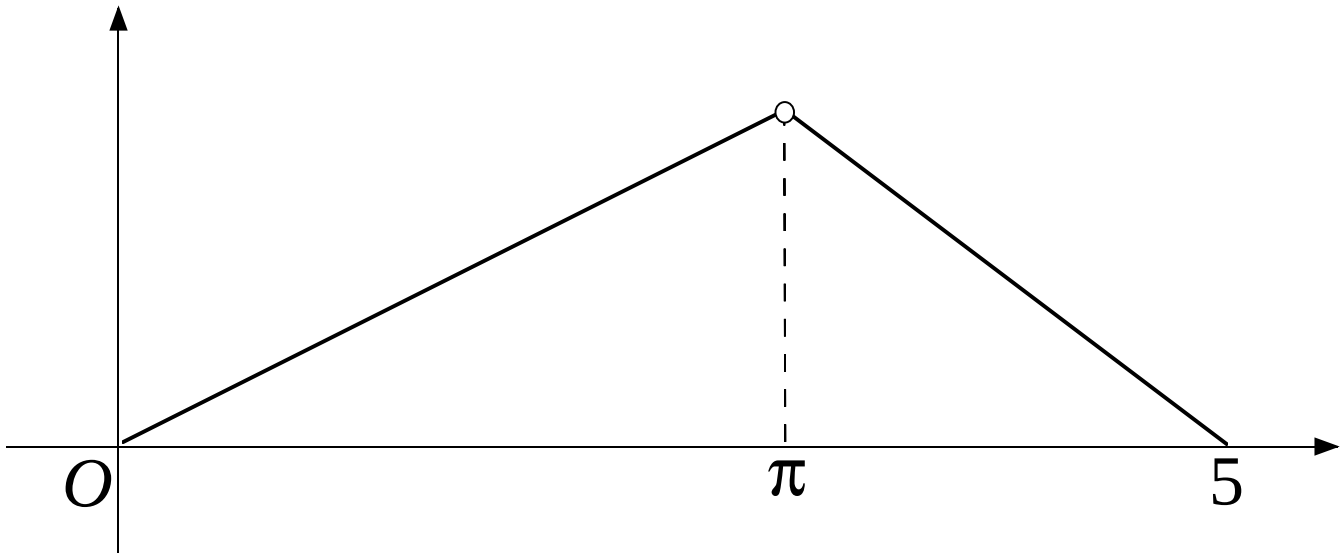
もし π という実数が存在しなかったらこの定理は成立しない。



平均値の定理

[平均値の定理] に対する注意

もし π という実数が存在しなかったらこの定理は成立しない。

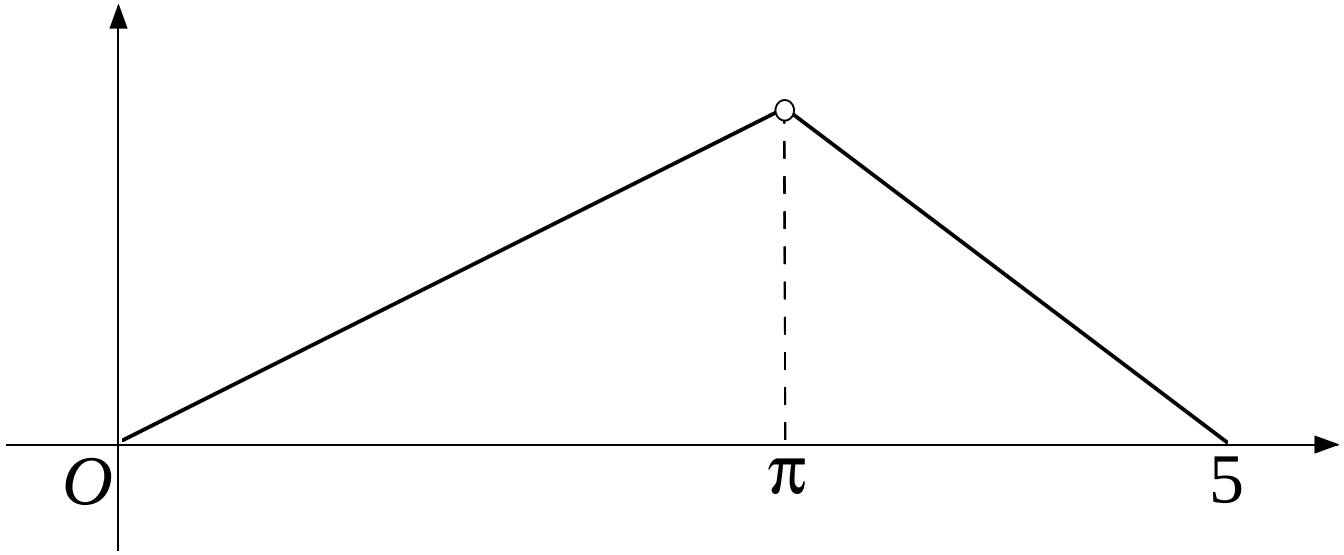


「平均値の定理」

平均値の定理

[平均値の定理] に対する注意

もし π という実数が存在しなかったらこの定理は成立しない。

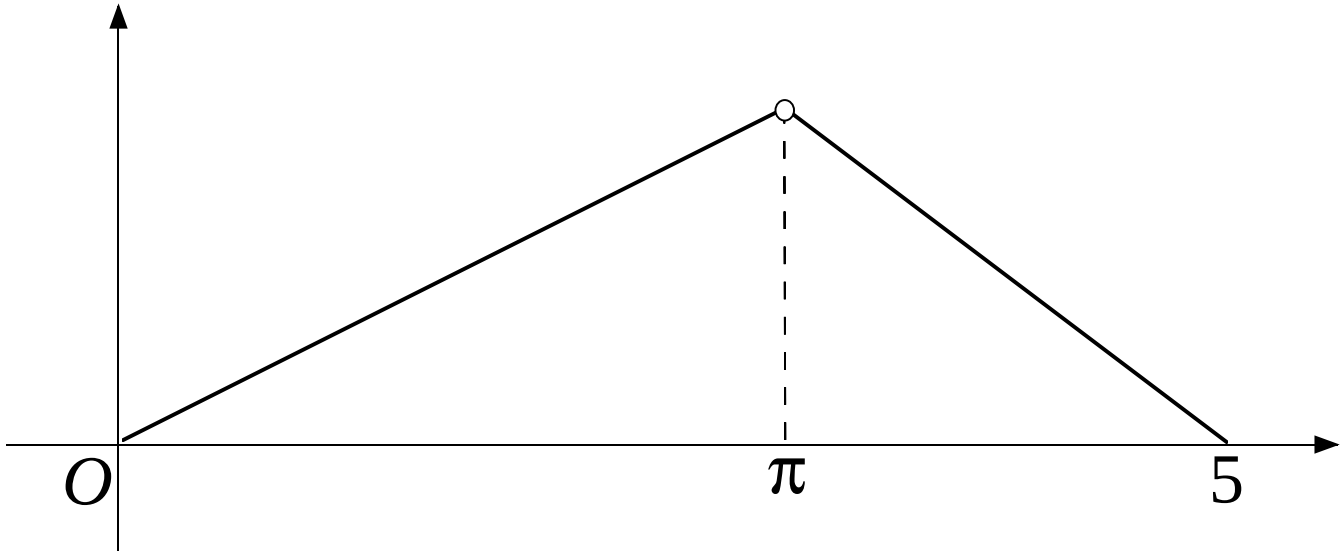


「平均値の定理」 $\Longleftarrow$ 「実数の連続性」

平均値の定理

[平均値の定理] に対する注意

もし π という実数が存在しなかったらこの定理は成立しない。



「平均値の定理」 $\Longleftarrow$ 「実数の連続性」 $\Longleftarrow$ 実数とは何か？

導関数と原始関数

[注意]

区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ の二つの原始関数 $F_1(x)$ と $F_2(x)$ について、 $F_1(x) = F_2(x) + C$ となる定数が存在する。

導関数と原始関数

[注意]

区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ の二つの原始関数 $F_1(x)$ と $F_2(x)$ について、 $F_1(x) = F_2(x) + C$ となる定数が存在する。

$\because$ もし $F_1(x_0) - F_2(x_0) \neq F_1(x_1) - F_2(x_1)$ となる x_0, x_1 があれば、平均値の定理より

$$0 \neq \frac{\{F_1(x_0) - F_2(x_0)\} - \{F_1(x_1) - F_2(x_1)\}}{x_0 - x_1} = \{F_1(\xi) - F_2(\xi)\}'$$

となる ξ があり、 $\{F_1(x) - F_2(x)\}' = f(x) - f(x) = 0$ に矛盾する。

導関数と原始関数

[注意]

区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ の二つの原始関数 $F_1(x)$ と $F_2(x)$ について、 $F_1(x) = F_2(x) + C$ となる定数が存在する。

$\because$ もし $F_1(x_0) - F_2(x_0) \neq F_1(x_1) - F_2(x_1)$ となる x_0, x_1 があれば、平均値の定理より

$$0 \neq \frac{\{F_1(x_0) - F_2(x_0)\} - \{F_1(x_1) - F_2(x_1)\}}{x_0 - x_1} = \{F_1(\xi) - F_2(\xi)\}'$$

となる ξ があり、 $\{F_1(x) - F_2(x)\}' = f(x) - f(x) = 0$ に矛盾する。

よって $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$ となり、$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ は、原始関数 $F(x)$ の選び方によらない。