

2.2 ポアソン過程の特徴付け

$N(t)$ を生起率 λ のポアソン過程とする． $N(t)$ は時刻 t までにある現象を観測した回数で，また

$$T_j = \min\{t \geq 0; N(t) = j\}$$

は j 回目の観測時間であった．

定義 2.2 では，ポアソン過程は観測時間 $T_j, j = 1, 2, \dots$ を用いて定義されたが，ここでは観測回数 $\{N(t), t \geq 0\}$ を用いた同値な定義を与える．

命題 2.8. $\{N(t), t \geq 0\}$ が生起率 λ のポアソン過程であることと，以下の 2 条件がみたされることは同値である．

1. 任意の $t, s > 0$ に対して， $N(t+s) - N(s) \perp N(s)$
2. $N(t+s) - N(s) \sim Po(\lambda t)$.

証明. 1°) 条件 2 より， $N(t+s) - N(s)$ は非負確率変数．つまり， $N(t)$ は単調非減少である．

2°) $T_1 > t$ は $N(t) = 0$ と同値であるから，

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

3°) $T_1 \perp (T_2 - T_1)$ かつ $T_2 - T_1 \sim Ex(\lambda)$ を示す．

$$\begin{aligned} P(T_1 > s, T_2 - T_1 > t) &= \int_0^\infty P(T_1 > s, T_2 - T_1 > t | T_1 = u) f_{T_1}(u) du \\ &= \int_s^\infty P(T_2 - u > t | T_1 = u) f_{T_1}(u) du \\ &= \int_s^\infty P(T_2 > u + t | T_1 = u) f_{T_1}(u) du \\ &= \int_s^\infty P(N(u+t) - N(u) = 0 | N(r) = 0 (r < u), N(u) = 1) f_{T_1}(u) du \\ &= \int_s^\infty e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= e^{-\lambda t} e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

これは，

$$P(T_2 - T_1 > t | T_1 > s) = e^{-\lambda t}$$

を意味するが右辺は s によらないので， $T_1 \perp (T_2 - T_1)$ で $T_2 - T_1 \sim Ex(\lambda)$ であることがわかる．
一般の場合も同様に繰り返していけばよい． $\square$

ランダウの記号を復習しておこう．ある関数の具体形よりも $h \rightarrow 0$ や $h \rightarrow \infty$ での振るまいの大雑把な挙動のみ興味あるときによく使われる記号である．

$$f(h) = o(h) \ (h \rightarrow 0) \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

と定義する．大雑把にいうと，関数 f は $h \rightarrow 0$ で h よりも早く 0 に減衰することを意味する．
例えば，テイラー展開 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ に注意すれば

$$h^2 = o(h), \quad h(e^h - 1) = o(h), \quad e^h - 1 - h = o(h)$$

補題 2.9. (1) $o(h) \pm o(h) = o(h)$ (2) $o(h) \times o(h) = o(h)$

命題 2.10. 任意の $t, s > 0$ に対して, $N(t+s) - N(s) \perp N(s)$ とする. このとき, $N(t+s) - N(s) \sim Po(\lambda t)$ であることと以下の 2 条件は同値.

$$1. P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h) \quad (\forall t > 0)$$

$$2. P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h) \quad (\forall t > 0)$$

注意. 条件 1. 2. より $P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$.

証明. 1°) 任意の $t, s > 0$ に対して $N(t+s) - N(s) \sim Po(\lambda t)$ を仮定すると, $N(t+h) - N(t) \sim Po(\lambda h)$ であるから

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) = 1) &= \lambda h e^{-\lambda h} \\ &= \lambda h + \lambda h(e^{-\lambda h} - 1) \\ &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

となる. 同様にして

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) \geq 2) &= 1 - P(N(t+h) - N(t) = 0) - P(N(t+h) - N(t) = 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} \\ &= o(h) \end{aligned}$$

2°) 逆に条件 1, 2 を仮定する.

$$p_n(t) := P(N(t+s) - N(s) = n)$$

と定義する.

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= P(N(t+h+s) - N(s) = n) \\ &= \sum_{k=0}^n P(N(t+s) - N(s) = n-k, N(t+h+s) - N(t+s) = k) \\ &= \sum_{k=0}^n p_{n-k}(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = k) \\ &= p_n(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = 0) + p_{n-1}(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = 1) \\ &\quad + \sum_{k=2}^n p_{n-k}(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = k) \\ &= p_n(t) \{1 - \lambda h + o(h)\} + p_{n-1}(t) \{\lambda h + o(h)\} + o(h) \end{aligned}$$

二つ目の等式で独立性の仮定を用いた. 3 項目が $o(h)$ となることは, $p_k(t) \leq 1$ に注意して以下のようにしてわかる.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n p_{n-k}(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = k) &\leq \sum_{k=2}^n P(N(t+h+s) - N(t+s) = k) \\ &\leq P(N(t+h+s) - N(t+s) \geq 2) \\ &= o(h) \end{aligned}$$

よって,

$$p_n(t+h) - p_n(t) = -\lambda h p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h)$$

であるから両辺 h で割って $h \rightarrow 0$ とすれば,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p_n(t) &= -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \\ \frac{d}{dt}p_0(t) &= -\lambda p_0(t) \\ p_0(0) &= 1, \quad p_n(0) = 0 \quad (n \geq 1)\end{aligned}\tag{*}$$

上式において,

$$q_n(t) := e^{\lambda t} p_n(t)$$

と変換して $q_n(t)$ の方程式に書きなおすと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q_n(t) &= \lambda q_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \\ \frac{d}{dt}q_0(t) &= 0 \\ q_0(0) &= 1, \quad q_n(0) = 0 \quad (n \geq 1),\end{aligned}$$

という一つの式であらわすことができる．よって，帰納的に積分することにより

$$q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

を得るので,

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

となる．つまり， $N(t+s) - N(s) \sim Po(\lambda t)$. □

ここまでの事をまとめると，ポアソン過程の定義の仕方は以下のとおり複数ある．

定義 2.11. 単調非減少な計数過程 $N(t)$ が以下の (1) ~ (3) のいずれかをみたすとき，生起率 λ のポアソン過程であるという．

- (1) $T_j = \min\{t \geq 0; N(t) = j\}$ とするとき， $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ は独立同分布で， $T_1 \sim Ex(\lambda)$.
- (2) 任意の $t, s > 0$ に対して $N(t+s) - N(s) \perp N(s)$ かつ， $N(t+s) - N(s) \sim Po(\lambda t)$.
- (3) 任意の $t, s > 0$ に対して $N(t+s) - N(s) \perp N(s)$ かつ，任意の $t > 0$ に対して

$$\begin{cases} P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h) \\ P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h) \end{cases}$$

注意．もちろん (1) ~ (3) の条件のいずれかが成り立てばすべて成り立つ．

演習問題

問題 22. ランダウの記号 $o(h)$ について以下を示せ．テイラー展開で大らかに確かめた後，厳密にはロピタルの定理で示せ．

- (i) $\sin 2h - 2h = o(h)$ (ii) $e^{ah} - 1 - ah = o(h)$ (iii) $\log(1+h) - h = o(h)$

略解. (i) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$ ($x \rightarrow 0$) であるから

$$\sin 2h - 2h = -\frac{(2h)^3}{6} + \cdots = o(h)$$

厳密には,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 \cos 2h - 2) = 0.$$

(ii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$ ($x \rightarrow 0$) であるから

$$e^{ah} - 1 - ah = \frac{(ah)^2}{2} + \cdots = o(h)$$

厳密には,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ah} - 1 - ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (ae^{ah} - a) = 0.$$

(iii) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$ ($x \rightarrow 0$) であるから

$$\log(1+h) - h = -\frac{h^2}{2} + \cdots = o(h)$$

厳密には,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+h} - 1 \right) = 0.$$

問題 23. 九大工学部前のバス停には A, B, C の 3 系統のバスが互いに無関係に各々平均 12 分, 10 分, 15 分ごとにやってくる. このとき, 時刻 t までにバス停に来るバスの本数をポアソン過程 $N_A(t), N_B(t), N_C(t)$ でモデル化したい. 以下の問に答えよ.

- (1) $N_A(t), N_B(t), N_C(t)$ の生起率を求めよ.
- (2) $P(N_A(t) = k), P(N_B(t) = k), P(N_C(t) = k)$ を求めよ.
- (3) $N_B(t) + N_C(t)$ の分布は何か. また, $N_A(t) + N_B(t) + N_C(t)$ の分布は何か.
- (4) A または B のバスは平均何分ごとに来ると言えるか?
- (5) A, B, C いずれかのバスは平均何分ごとに来ると言えるか?

略解. (1) 生起率はそれぞれ $\frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$.

(2) (1) より $N_A(t) \sim Po(\frac{t}{12}), N_B(t) \sim Po(\frac{t}{10}), N_C(t) \sim Po(\frac{t}{15})$ であるから,

$$P(N_A(t) = k) = \frac{(\frac{t}{12})^k}{k!} e^{-\frac{t}{12}}, \quad P(N_B(t) = k) = \frac{(\frac{t}{10})^k}{k!} e^{-\frac{t}{10}}$$

$$P(N_C(t) = k) = \frac{(\frac{t}{15})^k}{k!} e^{-\frac{t}{15}}$$

(3) $N_B(t)$ と $N_C(t)$ は独立であるから, $N_B(t) + N_C(t) = Po(\frac{t}{10} + \frac{t}{15}) = Po(\frac{t}{6})$. また, 同様にして独立性より $N_A(t) + N_B(t) + N_C(t) = Po(\frac{t}{12} + \frac{t}{10} + \frac{t}{15}) = Po(\frac{t}{4})$.

(4) $N_B(t) + N_C(t)$ は生起率 $\frac{1}{6}$ のポアソン過程であるから, 平均 6 分ごとに一本 B または C のバスが来るといえる.

(5) $N_A(t) + N_B(t) + N_C(t)$ は生起率 $\frac{1}{4}$ のポアソン過程であるから, 平均 4 分ごとに一本 A, B, C のどれかのバスが来るといえる.

2.3 非斉時ポアソン過程，複合ポアソン過程

バスの問題で注意したように，平均もしくは生起率が時間的に一様でない場合はしばしば起こる．この節では，生起率が時間 t に依存する場合について考えよう．

前節で，単調非減少な $\{N(t), t \geq 0\}$ が生起率 λ であるポアソン過程であるための同値な条件を定義を含めて 3 つ述べた．

- (1) $T_j = \min\{t \geq 0; N(t) = j\}$ とするとき， $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ は独立同分布で， $T_1 \sim Ex(\lambda)$.
- (2) 任意の $t, s > 0$ に対して， $N(t+s) - N(s) \perp\!\!\!\perp N(s)$ かつ $N(t+s) - N(s) \sim Po(\lambda t)$.
- (3) 任意の $t, s > 0$ に対して， $N(t+s) - N(s) \perp\!\!\!\perp N(s)$ かつ

$$\begin{cases} P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h) \\ P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h) \end{cases}$$

生起率が時間に依存する場合には，条件 (1), (2) はわかりにくい，(3) の条件はほとんどそのまま定義として採用できる．

定義 2.12 (非斉時ポアソン過程). 単調非減少な計数過程 $N(t)$ が，任意の $t, s > 0$ に対して $N(t+s) - N(s) \perp\!\!\!\perp N(s)$ かつ，

$$\begin{cases} P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h) \\ P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h) \end{cases}$$

をみたすとき，生起率 $\lambda(t)$ の非斉時ポアソン過程という．

命題 2.13. $N(t)$ が生起率 $\lambda(t)$ の非斉時ポアソン過程のとき，

$$N(t+s) - N(s) \sim Po\left(\int_s^{t+s} \lambda(u) du\right) \quad (\forall t, s \geq 0)$$

となる．

証明. $m(t) = \int_s^{t+s} \lambda(u) du$ として，

$$p_n(t) := P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{m(t)^n}{n!} e^{-m(t)}$$

を示せばよい．

証明は，斉時の場合の λt を $m(t)$ で読みかえればまったく同様にできる．

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= P(N(t+h+s) - N(s) = n) \\ &= \sum_{k=0}^n P(N(t+s) - N(s) = n-k, N(t+h+s) - N(t+s) = k) \\ &= \sum_{k=0}^n p_{n-k}(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = k) \\ &= p_n(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = 0) \\ &\quad + p_{n-1}(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = 1) \\ &\quad + \sum_{k=2}^n p_{n-k}(t) P(N(t+h+s) - N(t+s) = k) \\ &= p_n(t) \{1 - \lambda(t+s)h + o(h)\} + p_{n-1}(t) \{\lambda(t+s)h + o(h)\} + o(h) \end{aligned}$$

よって,

$$p_n(t+h) - p_n(t) = -\lambda(t+s)hp_n(t) + \lambda(t+s)hp_{n-1}(t) + o(h)$$

であるから両辺 h で割って $h \rightarrow 0$ とすれば,

$$\begin{cases} \dot{p}_n(t) = -\lambda(t+s)p_n(t) + \lambda(t+s)p_{n-1}(t), & n \geq 1 \\ \dot{p}_0(t) = -\lambda(t+s)p_0(t), & n = 0 \\ p_0(0) = 1, p_n(0) = 0 \ (n \geq 1) \end{cases}$$

上式において,

$$q_n(t) := e^{m(t)}p_n(t)$$

と変換し, $\dot{m}(t) = \lambda(t+s)$ に注意して $q_n(t)$ の方程式に書きなおすと

$$\begin{cases} \dot{q}_n(t) = \dot{m}(t)q_{n-1}(t), & n \geq 1 \\ \dot{q}_n(0) = 0, & n = 0 \\ q_0(0) = 1, q_n(0) = 0 \ (n \geq 1) \end{cases}$$

とあらわすことができる．よって, 帰納的に積分することにより

$$q_n(t) = \frac{m(t)^n}{n!}$$

を得るので,

$$p_n(t) = \frac{m(t)^n}{n!}e^{-m(t)}$$

となる．つまり, $N(t+s) - N(s) \sim Po(m(t))$. □

問題 24. 上で省略した帰納的に積分して $q_n(t)$ を求める部分を実際に行せよ．

問題 25. $N(t)$ を下図の生起率 $\lambda(t)$ の非斉時ポアソン過程とする．このとき以下を計算せよ．

- (i) $N(1), N(3) - N(1)$ はそれぞれどのような分布に従うか?
- (ii) $N(3), N(2), N(4)$ はそれぞれどのような分布に従うか?
- (iii) $P(N(1) = 2)$ (iv) $P(N(1) = 2, N(3) = 5)$ (v) $E(N(4))$ (vi) $\text{var}(N(4))$
- (vii) $E[N(4)|N(1) = 2]$

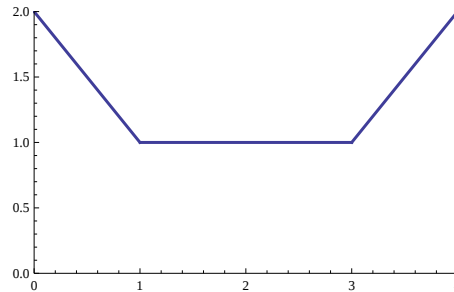


図 11: 非斉時ポアソン過程の生起率 $\lambda(t)$

略解. 命題 2.13 より, $t \geq s \geq 0$ のとき $N(t) - N(s) \sim Po\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)$. 特に, $N(t) \sim Po\left(\int_0^t \lambda(u)du\right)$ であることに注意する.

(i) $\int_0^1 \lambda(u)du = \frac{3}{2}$ と $\int_1^3 \lambda(u)du = 2$ より

$$N(1) \sim Po\left(\int_0^1 \lambda(u)du\right) = Po\left(\frac{3}{2}\right), \quad N(3) - N(1) \sim Po\left(\int_1^3 \lambda(u)du\right) = Po(2)$$

(ii) (i) と同様にして,

$$N(2) \sim Po\left(\int_0^2 \lambda(u)du\right) = Po\left(\frac{5}{2}\right), \quad N(3) \sim Po\left(\int_0^3 \lambda(u)du\right) = Po\left(\frac{7}{2}\right),$$

$$N(4) \sim Po\left(\int_0^4 \lambda(u)du\right) = Po(5)$$

(iii) $N(1) \sim Po\left(\frac{3}{2}\right)$ より

$$P(N(1) = 2) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!} e^{-\frac{3}{2}} = \frac{9}{8} e^{-\frac{3}{2}}$$

(iv) (iii) と $N(3) - N(1) \sim Po(2)$ より

$$\begin{aligned} P(N(1) = 2, N(3) = 5) &= P(N(1) = 2, N(3) - N(1) = 3) \\ &= P(N(1) = 2)P(N(3) - N(1) = 3) \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!} e^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{3}{2} e^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

(v), (vi) $N(4) \sim Po(5)$ より, $E(N(4)) = \text{var}(N(4)) = 5$.

(vii) $N(1) \sim Po\left(\frac{3}{2}\right)$ と $N(4) - N(1) \sim Po\left(\frac{7}{2}\right)$ が独立であることに注意して,

$$\begin{aligned} E[N(4)|N(1) = 2] &= E[N(1) + (N(4) - N(1))|N(1) = 2] \\ &= 2 + E[N(4) - N(1)|N(1) = 2] \\ &= 2 + E[N(4) - N(1)] \\ &= 2 + \frac{7}{2} \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

例 2.14 (装置の故障率). ある装置の購入後の時刻 t における故障回数 $N(t)$ が生起率 $\lambda(t)$ の非斉時ポアソン過程になっていると見なせるとする. ただし, $\lambda(t)$ は図 12 で与えられるものとする. 装置の購入価格 K , 運転費用は時間あたり C , 修理費は一回あたり R かかるとする. 時刻 t までの総コスト $C_{total}(t)$ の期待値は

$$E[C_{total}(t)] = K + Ct + RE[N(t)] = K + Ct + R \int_0^t \lambda(s)ds$$

よって, 単位時間あたりの総コストは

$$U(t) = \frac{1}{t} \{K + Ct + R \int_0^t \lambda(s)ds\}$$

であるから ,

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{1}{t^2} \left(K + R \int_0^t \lambda(s) ds - Rt\lambda(t) \right) = -\frac{1}{t^2} \left(K + R \int_0^t (\lambda(s) - \lambda(t)) ds \right)$$

最右辺の式で , $0 \leq t < 3$ において $\lambda(s) - \lambda(t) > 0$, $(0 \leq s < t)$ であるから $U'(t) < 0$ に注意しておこう .

機械更新の目安時刻は単位時間あたりの平均コストが増加に転ずる時間 , つまり $\frac{dU(t)}{dt} = 0$ とするのが自然であろう . 上の注意よりその時間は $t \geq 3$ となることがわかる .

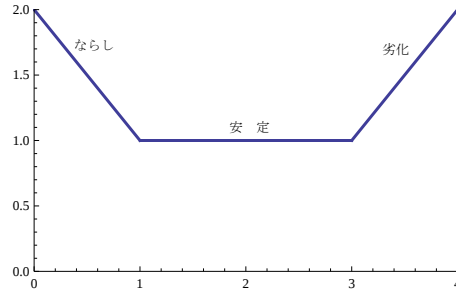


図 12: 非斉時ポアソン過程の生起率 $\lambda(t)$

例 2.15. 初期投資 $K = 30$, 運転費用 $C = 1$, 修理費 $R = 3$ とする . 故障発生回数が図 12 の生起率の非斉時ポアソン過程であるとして , 機械更新の目安時刻を求めてみよう . 生起率 $\lambda(t)$ は

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2 - t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 3, \\ t - 2, & 3 \leq t, \end{cases}$$

定積分の簡単な計算 (もしくは台形の面積の計算) より

$$\int_0^t \lambda(u) du = \begin{cases} \frac{1}{2}t(4 - t), & 0 \leq t \leq 1 \\ t + \frac{1}{2}, & 1 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 10), & t \geq 3 \end{cases}$$

これより ,

$$\begin{aligned} C_{total}(t) &= K + Ct + R \int_0^t \lambda(u) du = 30 + t + 3 \int_0^t \lambda(u) du \\ &= 30 + t + 3 \begin{cases} \frac{1}{2}t(4 - t), & 0 \leq t \leq 1 \\ t + \frac{1}{2}, & 1 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 10), & t \geq 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 30 + 7t - \frac{3}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{63}{2} + 4t, & 1 \leq t \leq 3 \\ 45 - 5t + \frac{3}{2}t^2, & t \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

よって、 $0 \leq t \leq 3$ のときは $U'(t) < 0$ であるから、 $t \geq 3$ のときを考えればよい。このとき、単位時間あたりのコストは

$$U(t) = \frac{C_{total}(t)}{t} = \frac{45}{t} - 5 + \frac{3}{2}t$$

であるから、

$$U'(t) = \frac{-45}{t^2} + \frac{3}{2} = 0 \iff t = \sqrt{30} = 5.47723 \dots$$

約 5.5 年後が機械更新の目安と言える。

2.3.1 複合ポアソン過程

ポアソン過程はジャンプ 1 の場合であったが、一般にランダムな幅のジャンプも考える。例えば、銀行の窓口に入金にやってくる人の数の分布がポアソン分布に従ったとしても、その入金額は必ずしも一定とは限らない。時刻 t までの入金総額を $X(t)$ とあらわすと、複合ポアソン過程によってモデル化することができる。

定義 2.16 (複合ポアソン過程). $N(t)$ を生起率 λ のポアソン過程、 $Y_1, Y_2, \dots$ は独立同分布確率変数列で $N(t)$ と独立であるとする。これらによって定義される確率過程

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

を複合ポアソン過程という。ポアソン過程 $N(t)$ のジャンプ時間 $T_1, T_2, \dots$ を用いて具体的に書き下すと、

$$X(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T_1 \\ Y_1, & T_1 \leq t < T_2 \\ Y_1 + Y_2, & T_2 \leq t < T_3 \\ \vdots & \vdots \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, & T_n \leq t < T_{n+1} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

注意. $P(Y_i = 1) = 1$ であるときは、通常生起率 λ のポアソン過程である。

命題 2.17. $X(u)$ の特性関数は

$$\varphi_{X(u)}(t) = \exp(\lambda u(\varphi_{Y_1}(t) - 1))$$

によって与えられる。特に、

$$E[X(u)] = \lambda u E[Y_1], \quad \text{var}(X(u)) = \lambda u E[Y_1^2].$$

注意. N を非負整数値確率変数、 $Y_1, Y_2, \dots$ を i.i.d. 確率変数列で N と独立であるとする。このとき、 $X = \sum_{k=1}^N Y_k$ とおくと、Wald の等式

$$E[X] = E[N]E[Y_1]$$

が成り立つ。上の平均の結果はこの特別な場合である。

証明. $\{N(u) = n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ で場合分けして考える. まず次のことに注意しておこう.

$$E[e^{it \sum_{k=1}^{N(u)} Y_k} | N(u) = n] = E[e^{it \sum_{k=1}^n Y_k} | N(u) = n] = E[e^{it \sum_{k=1}^n Y_k}] = \{\varphi_{Y_1}(t)\}^n$$

二つ目の等式は $N(t)$ と $Y_1, \dots$ の独立性による. よって,

$$\begin{aligned} \varphi_{X(u)}(t) &= E[e^{itX(u)}] = E[e^{it \sum_{k=1}^{N(u)} Y_k}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{it \sum_{k=1}^{N(u)} Y_k} | N(u) = n] P(N(u) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi_{Y_1}(t)\}^n \frac{(\lambda u)^n e^{-\lambda u}}{n!} \\ &= \exp(\lambda u(\varphi_{Y_1}(t) - 1)) \end{aligned}$$

平均と分散はこれを微分すればよい. □

演習問題

問題 26. 複合ポアソン過程 $X(u)$ の特性関数 $\varphi_{X(u)}(t) = \exp(\lambda u(\varphi_{Y_1}(t) - 1))$ を微分することにより, $X(u)$ の平均と分散を求めよ.

証明. 一般に $E[Y^n] = i^{-n} \varphi_Y^{(n)}(0)$ に注意すれば,

$$E[X(u)] = i^{-1} \varphi'_{X(u)}(0) = i^{-1} \lambda u \varphi'_{Y_1}(0) = \lambda u (i^{-1} \varphi'_{Y_1}(0)) = \lambda u E[Y_1].$$

また,

$$\begin{aligned} E[X(u)^2] &= i^{-2} \varphi''_{X(u)}(0) = i^{-2} \{\lambda u \varphi''_{Y_1}(0) + (\lambda u \varphi'_{Y_1}(0))^2\} \\ &= \lambda u (i^{-2} \varphi''_{Y_1}(0)) + (\lambda u i^{-1} \varphi'_{Y_1}(0))^2 \\ &= \lambda u E[Y_1^2] + (\lambda u E[Y_1])^2 \\ &= \lambda u E[Y_1^2] + (E[X(u)])^2 \end{aligned}$$

よって, $\text{var}(X(u)) = \lambda u E[Y_1^2]$. □

問題 27. ある装置は, 初期投資 $K = 120$, 運転費用 $C = 1$, 修理費 $R = 3$ であるとする. 故障発生回数が図 13 の生起率の非斉時ポアソン過程であるとして, 機械更新の目安時刻を求めよ.

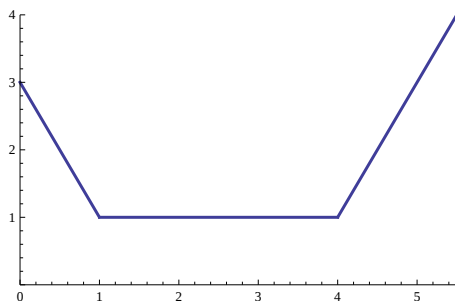


図 13: 非斉時ポアソン過程の生起率 $\lambda(t)$

略解. 生起率 $\lambda(t)$ は

$$\lambda(t) = \begin{cases} 3 - 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 4, \\ 2t - 7, & 4 \leq t, \end{cases}$$

$t \geq 4$ のときを考えれば十分. $t \geq 4$ のとき,

$$\int_0^t \lambda(u) du = 2 + 3 + \int_4^t (2u - 7) du = t^2 - 7t + 17$$

となるから,

$$\begin{aligned} C_{total}(t) &= K + Ct + \int_0^t \lambda(u) du = 120 + t + 3 \int_0^t \lambda(u) du = 120 + t + 3(t^2 - 7t + 17) \\ &= 171 - 20t + 3t^2 \end{aligned}$$

よって,

$$U(t) = \frac{C_{total}(t)}{t} = \frac{171}{t} - 20 + 3t$$

であるから,

$$U'(t) = \frac{-171}{t^2} + 3 = 0 \iff t = \sqrt{57} = 7.54983 \dots$$