無限粒子系の確率幾何と力学
–ランダム行列と無限次元干渉ブラウン運動–

日本数学会: 2014/3/21/Sat 明治大学

- 1986年 Herbert Spohn at Minnesota:

研究集会「Hydrodynamic behavior amd interacting particle systems」

- Dyson model :

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

- $\mathbf{X}_t = (X_t^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\mathbb{R}$を運動する無限粒子系.
- Tracy-Widom, KPZ eq. Airy process, determinantal process,

Spohn, Hairer, Johansson, Borodin, Olshanski, Virág, Yau, Tao, ...

１次元と２次元の典型例：共に干渉ポテンシャルは、

$$\Psi(x,y) = -\log|x-y|$$

逆温度：$\beta > 0$

- Dyson model ： $\mathbb{R}$, $\beta = 1, 2, 4$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

- Ginibre IBM: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $\beta = 2$.

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{\infty\{\}} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

- Ginibreのシミュレーション

- 干渉ブラウン運動：

自由ポテンシャル$\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

干渉ポテンシャル$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2}\nabla\Phi(X_t^i)dt - \frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{\infty}\nabla\Psi(X_t^i - X_t^j)dt \quad (i \in \mathbb{N})$$

- ラベル力学

$$\mathbf{X} = (X_t^i)_{i=1}^{\infty}$$

- アンラベル力学

$$\mathsf{X} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_t^i}$$

配置空間： S は粒子が運動する空間：（$S = \mathbb{R}^d, [0,\infty)$）

$$\mathsf{S} = \{\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}\, ;\ \mathsf{s}(S_r) < \infty \quad \text{for all } r \in \mathbb{N}\}$$

μ （**点過程**：Sの上の確率測度）

相関関数 m: S のラドン測度、

$$\int_{A_1^{k_1}\times\cdots\times A_m^{k_m}} \rho^n(x_1,\ldots,x_n)m(dx_1)\cdots m(dx_n) \tag{1}$$

$$= \int_{\mathsf{S}} \prod_{i=1}^m \frac{\mathsf{s}(A_i)!}{(\mathsf{s}(A_i)-k_i)!} d\mu$$

但し、$A_1,\ldots,A_m \in \mathcal{B}(S)$、$k_1,\ldots,k_m \in \mathbb{N}$、$k_1+\cdots+k_m = n$.
$\mathsf{s}(A_i) - k_i < 0$ の時は、$\mathsf{s}(A_i)!/(\mathsf{s}(A_i)-k_i)! = 0$ と解釈する。

Sine$_\beta$ 干渉ブラウン運動: 無限次元Dyson model

Let $d=1$, $\Phi(x)=0$, $\Psi(x,y)=-\log|x-y|$, and $\beta=1,2,4$. We set

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i-X_t^j|<r,\ j\neq i}\frac{1}{X_t^i-X_t^j}dt \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{2}$$

全体としてアンラベル粒子の定常分布は平行移動不変性を持ち、係数の和は、絶対収束はしない。この無限次元確率微分方程式 は$\beta=2$の時、特に**Dyson model in infinite dimensions**と呼ばれる。これが前述のSpohnのDyson modelと対応している。

アンラベル粒子の定常分布は、Sine$_2$点過程と呼ばれるもので、行列式点過程の一つで有り、Lebesgue測度に対するn点相関関数は

$$\rho^n_{\mathrm{sin},2}(x) = \det[K_{\mathrm{sin},2}(x_i - x_j)]^n_{i,j=1}$$

で与えられる。ここで$K_{\mathrm{sin},2}$はsine核で、次で定義される連続関数である。

$$K_{\mathrm{sin},2}(x-y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{x-y} \tag{3}$$

$\beta = 1, 4$の場合は、類似の公式が4元数を用いて与えられる。他のランダム行列の関わる1次元系も同様である。

Airy$_\beta$ 干渉ブラウン運動:

$d=1,\ \Phi(x)=0,\ \Psi(x,y)=-\log|x-y|,\ \beta=1,2,4.$
$(i\in\mathbb{N})$

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\Big\{\Big(\sum_{\substack{j\neq i,\\ |X_t^j|<r}}\frac{1}{X_t^i-X_t^j}\Big)-\int_{|x|<r}\frac{\widehat{\varrho}(x)}{-x}dx\Big\}dt.$$

ここで関数$\widehat{\varrho}$は

$$\widehat{\varrho}(x)=\frac{1_{(-\infty,0)}(x)}{\pi}\sqrt{-x}. \tag{4}$$

アンラベル力学の定常分布$\mu_{\mathrm{Ai},2}$は、行列式点過程であり、
そのn点相関関数 $\rho^n_{\mathrm{Ai},2}$は

$$\rho^n_{\mathrm{Ai},2}(\mathbf{x}_n) = \det[K_{\mathrm{Ai},2}(x_i, x_j)]^n_{i,j=1}. \tag{5}$$

核関数は 次式で与えられる連続関数である。

$$K_{\mathrm{Ai},2}(x,y) = \frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y} \quad (x \neq y), \tag{6}$$

ただし$\mathrm{Ai}'(x) = d\mathrm{Ai}(x)/dx$また$\mathrm{Ai}(\cdot)$はAiry関数:

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{i(zk+k^3/3)}, \qquad z \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Bessel$_{\alpha,\beta}$ 干渉ブラウン運動:

$d = 1,\ S = [0, \infty),\ 1 \le \alpha < \infty.$

$$dX_t^i = dB_t^i + \{\frac{\alpha}{2X_t^i} + \frac{\beta}{2}\sum_{j \neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\}dt. \tag{8}$$

定常分布$\mu_{\mathrm{Be},\alpha,\beta}$は行列式過程であり、Bessel$_{\alpha,\beta}$点過程とよぶ。.
$[0, \infty)$のLebesgue測度に対するn-点相関関数$\rho^n_{\mathrm{Be},\alpha,2}$は、

$$\rho^n_{\mathrm{Be},\alpha,2}(\mathbf{x}^n) = \det[\mathsf{K}_{\mathrm{Be},\alpha,2}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

$$\mathsf{K}_{\mathrm{Be},\alpha,2}(x, y) = \frac{J_\alpha(\sqrt{x})\sqrt{y}J'_\alpha(\sqrt{y}) - \sqrt{x}J'_\alpha(\sqrt{x})\sqrt{y}J_\alpha(\sqrt{y})}{2(x-y)}$$

Ginibre 干渉ブラウン運動: $d = 2,\ \Psi(x, y) = -\log|x - y|$

２つの相異なる無限次元確率微分方程式を考える。

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j|<r,\ j\neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N})$$

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^j|<r,\ j\neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2} dt \quad (i \in \mathbb{N})$$

定常分布はGinibre点過程μ_{gin}と呼ばれる行列式過程で有り、その核関数は$\mathbb{R}^2$を$\mathbb{C}$と同一視して、複素関数で表すと

$$K_{\mathrm{gin}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\{-\frac{1}{2}|x|^2 + x\bar{y} - \frac{1}{2}|y|^2\} \qquad (9)$$

- 明らかに、これら二つは異なる方程式だが、Ginibre点過程のサポートの上では、共に強解を持ちパスワイズに一意である。更にこれらの強解は同じ解になる。相異なる無限次元確率微分方程式が同じ一意的強解を持つのである。これは、対数干渉ポテンシャルに付随する干渉ブラウン運動の力学的剛性の最初の例である。

- 粒子$\mathbf{X} = (X_t^i)_{i=1}^{\infty}$が運動する空間$\mathbf{S}_{Gin}$を$(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$の「部分多様体」とみなす。ISDEのdrift係数は、その上の「接ベクトル」となっている。2つの接ベクトルが、（空間全体では異なっても）$\mathbf{S}_{Gin}$では一致する、ということが、この現象の理由である。

- 2次元で2次元Coulombポテンシャルで干渉する確率力学を考えるからこの現象が起こる。

Ruelle クラスポテンシャルに付随するGibbs測度の例を挙げる。実は、この研究の一般論は、本質的にすべてのGibbs測度に適用できる。以下は、その具体例である。次の二つの例では、定常分布は、Gibbs測度となる。

Lennard-Jones 6-12 potential: Let $d = 3$, $\beta > 0$, and $\Psi_{6,12}(x) = \{|x|^{-12} - |x|^{-6}\}$. 干渉ポテンシャル$\Psi_{6,12}$はLennard-Jones 6-12ポテンシャルと呼ばれる。

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j=1,j\neq i}^{\infty}\{\frac{12(X_t^i - X_t^j)}{|X_t^i - X_t^j|^{14}} - \frac{6(X_t^i - X_t^j)}{|X_t^i - X_t^j|^{8}}\}dt.$$

Riesz potentials of Ruelle's class: Let $d < a \in \mathbb{N}$, $0 < \beta$, and set $\Psi_a(x) = (\beta/a)|x|^{-a}$.

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^{a+2}} dt. \tag{10}$$

- 一見するとこのISDEはGinibre干渉ブラウン運動(2)と似ている。実際(10)で$a = 0$の場合は、(2)でに対応している。しかし確率微分方程式のドリフト項は(2)と異なって絶対収束する。
- 更に(10)の拡散的スケーリングに於ける大局的構造は(2)と完全に異なっている。以下、もう少し説明する。

- 一般にRuelleクラスのポテンシャルを持つ干渉ブラウン運動は、拡散的スケーリングで独立なブラウン運動と同じ大局的挙動をする[41,32,33,34]。正確には、1次元で互いに順序交換を許す場合か、2次元以上の空間の場合である。干渉ポテンシャルが凸のハードコアを持つ場合に、粒子の密度によらず常に拡散的スケーリングで非退化なブラウン運動に収束することが証明されている[34]。尚、ここでは平衡分布は平行移動不変なものを考えている。
- 一方、Ginibreのtagged粒子は、劣拡散的である。

Thm 1. $\mathbf{X}=(X_t^i)$が*Ginibre*干渉ブラウン運動とする。
$\mathsf{X}_0 \sim \mu_{\mathrm{gin}}$ならば、

$$\lim_{\epsilon\to\infty} \epsilon X^i_{t/\epsilon^2} = 0 \qquad \textit{for all } i \in \mathbb{N}.$$

これは第2の力学的剛性である。

ランダム行列と干渉ブラウン運動： The Gaussian unitary ensembles (GUE) are Hermitian random matrices M^N :

$$M^N = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{pmatrix}$$

Here $m_{ij} = \bar{m}_{ji}$ and $m_{ij} = m_{ij}^1 + \sqrt{-1} m_{ij}^2$. Moreover,

$$\{m_{ij}^1, m_{ij}^2, m_{kk}\}_{1 \le i \le j \le N,\, 1 \le k \le N}$$

are independent real Gaussian random variables with mean zero and variance one.

Real symmetric RMs $\Longleftrightarrow$ Gaussian orthogonal ensembles

Quaternion symmetric RMs $\Longleftrightarrow$ Gaussian symplectic ensembles

大数の法則 (Wignerのsemi-circle法則)

- The distribution of eigen values of the G(O/U/S)E Random Matrices are given by ($\beta = 1, 2, 4$)

$$m_\beta^N(d\mathbf{x}_N) = \frac{1}{Z}\prod_{i<j}^{N}|x_i - x_j|^\beta e^{-\frac{\beta}{4}\sum_{i=1}^N |x_i|^2} d\mathbf{x}_N, \tag{11}$$

- The distribution of

$$\mathbb{X}_N = N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i/\sqrt{N}} \qquad \text{under } m_\beta^N$$

converges to the semi-circle law

$$\sigma_{\mathsf{semi}}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{(-2,2)}(x) \tag{12}$$

極限がノンランダムという意味で、この定理はランダム行列論の大数の法則と見なせる。では、中心極限定理の対応物はどうなるのだろうか?

半円分布$\sigma_{\mathrm{semi}}(x)dx$を考察した$\mathbb{R}$の各点をマクロな位置とよぶ。各マクロな位置$\theta \in \mathbb{R}$において意味のある極限があるように、適切に(11)をリスケールする。これは$|\theta| < 2$と$\theta = \pm 2$の場合に可能で前者をBulk、後者をSoft Edgeの位置と呼ぶことにする。

Bulk極限と普遍性 Bulkの位置$\{|\theta| < 2\}$のスケーリングをBulk極限という。このとき

$$x_i \mapsto \frac{s_i + \theta N}{\sqrt{N}} \tag{13}$$

とスケーリングする。すると$m_\beta^N(d\mathrm{s}_N)$の分布は

$$\widetilde{m}_\beta^N(d\mathrm{s}_N) = \frac{1}{Z}\{\prod_{i<j}^N |s_i - s_j|^\beta\} \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum_{k=1}^N |\frac{s_i + \theta N}{\sqrt{N}}|^2\right\} d\mathrm{s}_N \tag{14}$$

対応する配置空間Sの分布を$\mu_{\beta,\theta}^N$と表すと、極限はSine$_{\beta,\theta}$点過程$\mu_{\beta,\theta}$になる。

$$\lim_{N\to\infty}\mu_{\beta,\theta}^N=\mu_{\beta,\theta}\qquad \text{weakly.} \tag{15}$$

ただし$\mu_{\beta,\theta}$はLebesgue測度に対する相関関数が、核関数

$$K_\theta(x,y)=\frac{\sin\{\sqrt{4-\theta^2}(x-y)\}}{\pi(x-y)} \tag{16}$$

で与えられる行列式点過程である。ここで$\theta=0$の場合が、(3)で現れた。一般の場合は、その密度を定数倍したものである。行き先が、常にSine点過程(密度のパラメーターがマクロな位置に依存するが)となるという意味で、bulk極限は普遍性を持つ。

次にこの普遍性の確率力学版を考える。

(14) から対応する N 粒子系の確率微分方程式は次で与えられる。β は一般とする。$i=1,\dots,N$ に対して、$\mathbf{X}^N=(X^{N,i})_{i=1}^N$ の方程式は

$$dX_t^{N,i}=dB_t^i+\frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{X_t^{N,i}-X_t^{N,j}}dt-\frac{\beta}{2N}X_t^{N,i}dt-\frac{\beta}{2}\theta dt \tag{17}$$

この確率微分方程式で N を形式的に飛ばした極限は

$$dX_t^{\infty,i}=dB_t^i+\frac{\beta}{2}\sum_{j\neq i}^{\infty}\frac{1}{X_t^{\infty,i}-X_t^{\infty,j}}dt-\frac{\beta}{2}\theta dt \tag{18}$$

この方程式は $\theta=0$ 以外では正しい極限を与えない。実際、極限の無限次元確率微分方程式は− いつでも −

$$dX_t^i=dB_t^i+\frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i-X_t^j|<r,\ j\neq i}\frac{1}{X_t^i-X_t^j}dt\quad(i\in\mathbb{N}) \tag{2}$$

実際、河本氏と共に以下の現象–SDE gap–を最近証明した。

Thm 2 (河本-O. [25]). $\beta = 2$とする。アンラベル粒子の初期分布を$\mu_{\beta,\theta}^{N}$で与え、初期のラベルを適切に設定すると、任意の$m \in \mathbb{N}$に対して$\mathbf{X}^N = (X^{N,i})_{i=1}^{N}$の最初の$m$個は

$$\lim_{N\to\infty} (X^{N,i})_{i=1}^{m} = (X^i)_{i=1}^{m} \qquad \textit{weakly in } C([0,\infty);\mathbb{R}^m). \tag{19}$$

ここで右辺は(2)の解である。

上で「SDE gap」と述べたのは、確率微分方程式(SDE)の形が有限粒子系と極限の無限次元確率微分方程式とで異なる（gapができる）からである。

行き先がθに依存せず常に同じ無限次元確率微分方程式になるという意味で、この現象は上述の(幾何的)普遍性に対応する力学的普遍性になっている。確率微分方程式がθを全く含まなくなるので、むしろそれ以上の普遍性かもしれない。

なお、θは初期条件の中だけに含まれている。この無限次元確率力学は極めて非エルゴード的であり、自らが出発した層(無限次元の部分多様体)にずっととどまる。しかしそれを記述する確率微分方程式は同一になるわけである。

Soft Edge極限とAiry過程

半円分布の両端の点$\theta = \pm 2$でのスケーリングをSoft Edge極限という。この時、

$$x \longmapsto 2\sqrt{N} + \frac{s}{N^{1/6}} \tag{20}$$

という対応を考える。するとN粒子系の分布$m^N_{\mathrm{Ai},\beta}(d\mathbf{s})$は、

$$m^N_{\mathrm{Ai},\beta}(d\mathbf{s}_N) = \frac{1}{Z}\{\prod_{i<j}^N |s_i - s_j|^\beta\} \exp\left\{ -\frac{\beta}{4}\sum_{k=1}^N |2\sqrt{N} + \frac{s_k}{N^{1/6}}|^2 \right\} d\mathbf{s}_N. \tag{21}$$

N粒子系$\mathbf{X}^N = (X_t^{N,1}, \dots, X_t^{N,N})$ が満たす確率微分方程式:

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\sum_{j=1,\, j\neq i}^N \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{\beta}{2}\{N^{1/3} + \frac{1}{2N^{1/3}} X_t^{N,i}\} dt. \tag{22}$$

ここで $N \to \infty$ の極限をとる難しさは、(22) の係数が

$$-\frac{\beta}{2}N^{1/3}dt$$

という発散項を含むからである。
種村氏との一連の共同研究 [44–48] で無限次元確率微分方程式

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\Big\{\Big(\sum_{j\neq i,\ |X_t^j|<r}\frac{1}{X_t^i - X_t^j}\Big) - \int_{|x|<r}\frac{\widehat{\varrho}(x)}{-x}dx\Big\}dt \qquad (23)$$

がパスワイズに一意な強解を持つことを示し、更に [25] と [47] で (22) の解が (23) の解に収束することを示した。

以下、(23) の無限次元確率微分方程式が導出される理由を説明する。Soft Edge 極限の逆変換を考え、極限の半円分布を変換する：

$$\widehat{\varrho}^N(x) = N^{1/3}\sigma_{\mathrm{semi}}(xN^{-2/3} + 2). \qquad (24)$$

この(24)の$\widehat{\varrho}^N$を、N粒子系の点xで条件つけたPalm測度の1-相関関数$\rho^{N,1}_{\mathrm{Ai},\beta,x}$の第一近似と考える。すると、

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varrho}^N(x)dx = N. \tag{25}$$

簡単な計算から

$$\widehat{\varrho}^N(x) = \frac{1_{(-4N^{2/3},0)}(x)}{\pi}\sqrt{-x\left(1+\frac{x}{4N^{2/3}}\right)}, \tag{26}$$

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{\varrho}^N(x) = \widehat{\varrho}(x) \qquad \text{compact uniformly.} \tag{27}$$

鍵になるのは、次の等式である。

$$N^{1/3} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\varrho}^N(x)}{-x}dx. \tag{28}$$

方程式(26)と(27)は、ISDE(23)で$\widehat{\varrho}(x)$が現れる原因である。

実際 $N \to \infty$ の時

$$dX_t^i \sim dB_t^i + \frac{\beta}{2}\Big\{\Big(\sum_{j\neq i,\ j=1}^{N} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\Big) - N^{1/3}\Big\}dt$$

$$\sim dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\Big\{\Big(\sum_{j\neq i,\ |X_t^j|<r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\Big) - \int_{|x|<r} \frac{\widehat{\varrho}^N(x)}{-x}dx\Big\}dt \quad \text{by (28)}$$

$$\sim dB_t^i + \frac{\beta}{2}\lim_{r\to\infty}\Big\{\Big(\sum_{j\neq i,\ |X_t^j|<r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\Big) - \int_{|x|<r} \frac{\widehat{\varrho}(x)}{-x}dx\Big\}dt \quad \text{by (27).}$$

尚、極限の方程式の解が非衝突を満たすこともわかる。つまり、$\mathbf{X} = (X_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ は次を満たす。

$$P(X_t^i \neq X_t^j \text{ for all } 0 \leq t < \infty, i \neq j) = 1. \tag{29}$$

そこで粒子のラベルを $X_t^i > X_t^j$ for all $i < j \in \mathbb{N}$. と選択すると、確率力学は $(X_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ is a $\mathbb{R}_>^{\mathbb{N}}$-値過程となる。但し、$\mathbb{R}_>^{\mathbb{N}} = \{(x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; x_i > x_j \ (i < j)\}$.

代数的に構成された $\beta = 2$ の場合この対象は、Johannson、Spohn、Ferrari、Katori-Tanemura その他によって研究された。

特に右端の粒子 X^1 は Airy 過程と呼ばれ様々な性質が研究されている。この対象は確率解析的構成による対象と一致する。

代数的構成:時空間相関関数の方法（Sine、Airy、Bessel 点過程の場合）

干渉ポテンシャルが対数関数の時、1次元系に於いて逆温度 $\beta = 2$ ならば、時空間相関関数を拡張核関数の行列式で与えることで確率力学を構成できる。

S 値過程 X_t の多重時間モーメント生成関数を以下で定義する。

$$\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}] \equiv \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{m=1}^{M}\int_{\mathbb{R}} f_m d\mathsf{X}_{t_m}\right\}\right], \tag{30}$$

いま $\mathbb{K}(s,x;t,y)$ を拡張核関数とする。以上の例に於いては以下で定義する $\mathbb{K}$ の Fredholm 行列式を用いて $\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}]$ を表示できる。

$$\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}] = \underset{\substack{(s,t)\in\{t_1,t_2,\dots,t_M\}^2,\\ (x,y)\in\mathbb{R}^2}}{\mathrm{Det}}\Big[\delta_{st}\delta(x-y) + \mathbb{K}(s,x;t,y)\chi_t(y)\Big], \tag{31}$$

ここで $M \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_M) \in C_0(\mathbb{R})^M$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_M)$ $(0 < t_1 < \cdots < t_M < \infty)$ である。また、$\chi_{t_m} = e^{f_m} - 1$, $1 \le m \le M$。

$\mathbb{K}$ は時空間相関関数と呼ばれる [20,23].

(i) Extended sine kernel:

$$\mathbb{K}_{\mathsf{sin}}(s,x;t,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 du\, e^{u^2(t-s)/2} \cos\{u(y-x)\} & \text{if } s<t, \\ K_{\mathsf{sin}}(x,y) & \text{if } s=t, \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_1^\infty du\, e^{u^2(t-s)/2} \cos\{u(y-x)\} & \text{if } s>t. \end{cases}$$

(ii) Extended Airy kernel:

$$\mathbb{K}_{\mathsf{Ai}}(s,x;t,y) \equiv \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty du\, e^{-u(t-s)/2} \mathrm{Ai}(u+x)\mathrm{Ai}(u+y) & \text{if } s<t, \\ K_{\mathsf{Ai}}(x,y) & \text{if } s=t, \\ -\displaystyle\int_{-\infty}^0 du\, e^{-u(t-s)/2} \mathrm{Ai}(u+x)\mathrm{Ai}(u+y) & \text{if } s>t. \end{cases}$$

(iii) Extended Bessel kernel: $\mathbb{K}_{J_\nu}(s,x;t,y), s,t \in \mathbb{R}^+, x,y \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{K}_{J_\nu}(s,x;t,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 du\, e^{-2u(s-t)} J_\nu(2\sqrt{ux}) J_\nu(2\sqrt{uy}) & \text{if} \quad s<t, \\ K_{J_\nu}(x,y) & \text{if} \quad s=t, \\ \displaystyle -\int_1^\infty du\, e^{-2u(s-t)} J_\nu(2\sqrt{ux}) J_\nu(2\sqrt{uy}) & \text{if} \quad s>t. \end{cases}$$

これらの関数を使ってS値確率力学が定義できることが知られている。

実は有限粒子系で対応する表示が有り、これらの無限次元アンラベル確率力学はその極限である。しかし有限系はマルコフ性を持つ（拡散過程になる）が、その性質が無限系まで遺伝するかどうかは非自明である。

なぜなら状態空間の基礎の測度が粒子が異なれば互いに特異だからである。マルコフ性については[23]、強マルコフ性については[47]で示された。

これらの結果と、最近の[44–48]の結果を合わせると、時空間相関関数で構成した確率力学と、[44]で確率解析的に構成したものが一致することが分かる。

もともとAiryに関する無限次元確率力学は、Prähofer-Spohn, やJohansson によって有限系の時空間相関関数の極限を考えることにより構成されていた[49,19]。しかし、最初は極限の粒子の軌跡が連続であることを示すことさえ非自明であった。特に、粒子同士がぶつからないことを示すのはこの方法では難しい。

極限の確率力学の各粒子の軌跡がsemimartingaleを示すことがJohansson[19]で未解決問題として提起され、Hägg [14] やCorwin-Hammond [5] によって示されたが、それはこれらが確率微分方程式の解(Airy干渉ブラウン運動)となることを示した結果からは、自明に従う。

香取-種村両氏は一連の研究でDysonやAiryといった無限粒子系の確率力学を代数的手法によって研究してきた。上述の拡張核は、いわば無限次元の「遷移確率密度」の類似だが、これをもちいて、特別な出発点から動き出す無限粒子系の確率密度を明快に表現した[22]。そういう意味で確率論の可解モデルの風を持っている[20–24]。

1977年 Richard Lang: 干渉ブラウン運動の一般論の始まり

干渉ポテンシャル $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ で相互作用しながら運動する $\mathbb{R}^d$ のブラウン粒子は次の確率微分方程式で記述される。この方程式は $\Phi = 0$ の場合である。

$$dX_t^i = dB_t^i - \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq i}^{\infty} \nabla \Psi (X_t^i - X_t^j) dt \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{32}$$

ここで $\beta \geq 0$ は、逆温度と呼ばれる定数、また、$\{B^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は無限個の独立な d 次元標準ブラウン運動である。この確率力学 $\mathbf{X} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ は、$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値である。

直感的には、(32) の解の不変測度 $\breve{\mu}$ は、

$$\breve{\mu}(d\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta \sum_{i \neq j,\, i,j=1}^{\infty} \Psi(x_i - x_j)} \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \tag{33}$$

となるが、Lebesgue測度の無限直積 $d\mathrm{x}^{\infty}$ を含み、そのままでは正当化できない。

これを解決する伝統的な手法はDLR方程式に基づくGibbs測度を導入することである。

配置空間Sを考える。Sの確率測度の正則条件付き確率 $\mu_{r,\xi}^{n}$:

$$\mu_{r,\xi}^{n}(d\mathsf{x}) = \mu(\pi_{S_r}(\cdot) \in \cdot | \pi_{S_r^c}(\mathsf{x}) = \pi_{S_r^c}(\xi),\ \mathsf{x}(S_r) = n) \tag{34}$$

$\pi_A(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(\cdot \cap A)$、$S_r = \{s \in S;\ |s| < r\}$, $\xi \in \mathsf{S}$。

Λ をLebesgue測度を強度とするPoisson点過程、
$\Lambda_r^n = \Lambda(\cdot \cap \mathsf{S}_r^n)$ とおく。$\mathsf{S}_r^n = \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}; \mathsf{s}(S_r) = n\}$.
μ が (Φ, Ψ)-カノニカルGibbs測度とは、DLR方程式を満たすこと：

$$\mu_{r,\xi}^{n}(d\mathsf{x}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\mathcal{H}_{r,\xi}} \Lambda_r^n(d\mathsf{x}) \quad \forall n, r \in \mathbb{N},\ \mu\text{-a.s. } \xi \in \mathsf{S} \tag{35}$$

ここで $\mathcal{H}_{r,\xi} = \mathcal{H}_r + \mathcal{I}_{r,\xi}$ とする。ただし

$$\mathcal{H}_r(\mathsf{s}) = \beta\{\sum_{i=1}^{n} \Phi(s_i) + \sum_{i<j,\, s_i, s_j \in S_r} \Psi(s_i, s_j)\},\ \mathcal{I}_{r,\xi} = \beta \sum_{s_i \in S_r,\, \xi_k \in S_r^c} \Psi(s_i, \xi_k)$$

$\mathcal{H}_r$ が S_r 内のハミルトニアン、$\mathcal{I}_{r,\xi}$ は内部と外部の干渉項である。このように(33)の代わりに、DLRを介して (Φ, Ψ)-カノニカルGibbs測度を考える。

確率微分方程式(32)は、Lang [26,27]によって始めて一般的に解かれた。

通常、確率微分方程式を解くためには、Ito schemeを用いる。つまり常微分方程式の場合と類似のPicard近似による方法をとる。従って、少なくとも局所的な、係数のLipschitz連続性が必要となる。これを無限次元で実行する難しさは、無限次元では、係数がLipschitz連続は期待できないし、局所化も非常に複雑になる点である。実際、係数が定義されているのは空間のごく一部である。

Langは係数が、

$$\Psi \in C_0^3(\mathbb{R}^d) \tag{36}$$

の場合に、Gibbs測度の評価と組み合わせることにより、実行した。したがって、たとえRuelleクラスという扱いやすい範疇でも多項式減衰のΨの場合は、Langの方針—伝統的な伊藤の方法を用いること—で証明するのはとても無理だった。

つまり、Lennard-Jones 6-12ポテンシャルは、とても無理だった。

Dyson model の場合、干渉ポテンシャルは対数ポテンシャルである：

$$\Psi(x,y) = -\log|x-y| \tag{37}$$

減衰どころか、無限遠点で無限大に発散する対数ポテンシャルになるわけで、通常ならDLR方程式が意味を持ち、局所密度の一様評価など様々な手段が使えるが、それらが不可能になる。これが、当時私がDysonモデルを記述する無限次元確率微分方程式を、とても解けないと考えた理由である。逆にこのような遠方で強く相互作用を生むポテンシャルの元で運動する粒子の様相は、通常のRuelleクラスのそれと鮮やかに異なるはずである。それを追求することは興味深い問題だと思われた。

$\Rightarrow$ Dynamical Rigidity (力学的剛性)

一般のISDEと対称性のあるISDE: 一般には、無限個の異なる係数b_iによって

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= dB_t^1 + b_1(\mathbf{X}_t)dt \\ dX_t^2 &= dB_t^2 + b_2(\mathbf{X}_t)dt \\ dX_t^3 &= dB_t^3 + b_3(\mathbf{X}_t)dt \\ &\cdots . \end{aligned} \tag{38}$$

もし、b_iが$i \to \infty$で十分に早く0に収束すれば、通常のSDEと同様に解ける。
今の場合、問題はb_iが「対称性」を持ち、$i \to \infty$で減衰しない点である。
つまり、1つの関数$b:\mathbb{R}^d \times \mathsf{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ によって、次の形で与えられる。

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= dB_t^1 + b(X_t^1, \mathsf{X}_t^{1\diamondsuit})dt \\ dX_t^2 &= dB_t^2 + b(X_t^2, \mathsf{X}_t^{2\diamondsuit})dt \\ dX_t^3 &= dB_t^3 + b(X_t^3, \mathsf{X}_t^{3\diamondsuit})dt \qquad (\mathsf{X}^{i\diamondsuit} = \sum_{j\neq i}^{\infty} \delta_{X_t^j}) \\ &\cdots \end{aligned} \tag{39}$$

　繰り返すが、ここで関数$b(x,\mathrm{s})$が粒子の番号iに依存しないことに注意する。
　対称性は従来の感覚の手法を使う障害となった。しかし、逆にそのことにより、系全体を配置空間に値をとる対象と見なすことが出来て、その確率力学

$$\mathsf{X}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_t^i} \tag{40}$$

は不変確率測度を持つ。そしてより幾何的な確率解析的手法、Dirichlet形式論が有効になる。
　まとめると、相反する２つの構造（対称性とLipschitz性）を以下にすりあわせるかが問題。

Itô scheme ⇔ Lipschitz連続性

対称性 ⇔ 不変確率測度の存在(配置空間への帰着)

2nd stage: O.-種村 Lipschitz連続性をtailσ-fieldの解析で置き換えた。

Itô scheme ⇔ tailσ-fieldの解析

その結果、強解の存在とパスワイズ一意性を証明した。

Dirichlet form approach : Brownian運動の場合

正双線形形式を考えMarkov過程(拡散過程)を構成し解析する手法
有限次元のブラウン運動$B = (B^1, \ldots, B^d)$の場合、Dirichlet空間は

$$\mathcal{E}^{dx}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{D}[f,g]dx \quad L^2(\mathbb{R}^d, dx) \tag{41}$$

ここで$\mathbb{D}$は$\mathbb{R}^d$の標準的な２次場

$$\mathbb{D}[f,g] = \frac{1}{2}(\nabla f, \nabla g)_{\mathbb{R}^d} \tag{42}$$

重要なことは$\mathbb{D}$を介して、次の対応関係があることである。

$$dx \Longleftrightarrow (\mathcal{E}^{dx}, L^2(\mathbb{R}^d, dx)) \Longleftrightarrow B = \{B_t\} \tag{43}$$

dxをRadon測度μに置き換えても(緩やかな仮定の下で)この関係は成立する。

$$\mu \Longleftrightarrow (\mathcal{E}^{\mu}, L^2(\mathbb{R}^d, \mu)) \Longleftrightarrow X = \{X_t\} \tag{44}$$

ここで最右辺はμ可逆な拡散過程である。この対応関係が成り立つ十分条件として、μがLebesgue測度に対する上半連続な密度関数をもつことが知られてる。

この場合、対応する拡散過程(もしくはDirichlet形式)はdistorted Brownian motionとよばれる。尚、一般にDirichlet形式においてどの領域を選択したかを記述する必用がある。ブラウン運動の場合は、$H^1(\mathbb{R}^d)$である。

今、(44)を念頭に$\mathbb{D}$から構成されるラドン測度から「正双線形形式」の空間、さらにそこから「拡散過程の空間」への写像$F_{\mathbb{D}} = F_{\mathbb{D}}(\mu)$

$$\mu \longmapsto (\mathcal{E}^{\mu}, L^2(\mathbb{R}^d, \mu)) \longmapsto X = \{X_t\} \tag{45}$$

を考える。この写像が本当に何処まで意味を持つのかが問題で、拡散過程の空間までたどり着くための十分条件を探したい。

この方針は$\mathbb{R}^d$にとどまらず、良い２次場$\mathbb{D}$が存在する空間で有効である。「では、よい２次場$\mathbb{D}$とは何か」が問題だが、それは最も良い拡散過程(ブラウン運動)を最も良い測度(Lebesgue測度)で(43)の対応で表現できる２次場ということに成る。つまり、「ブラウン運動」と「Lebesgue測度」の二つがあれば$\mathbb{D}$は構成できる。

(43)の関係式から、「ブラウン運動」と「Lebesgue測度」と「$\mathbb{D}$」のうちどれか二つがあれば他の一つは自然に構成できることが期待できる。

無限次元ブラウン運動の列：２次場$\mathbb{D}$とブラウン運動だけの世界

無限次元確率微分方程式を解く空間は$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$である。無限次元確率微分方程式には、$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$-ブラウン運動$\mathbf{B}=(B^i)_{i\in\mathbb{N}}$が現れる。幸い$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$では、$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$-ブラウン運動$\mathbf{B}=(B^i)_{i\in\mathbb{N}}$と２次場$\mathbb{D}^\infty$で標準的なものが存在する。

実際、$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$-ブラウン運動$\mathbf{B}=(B^i)_{i\in\mathbb{N}}$の構成は簡単で、単に$d$次元標準ブラウン運動$B$の加算無限個の独立なコピーを準備するだけである。

その生成作用素$\mathbb{L}^\infty$は

$$\mathbb{L}^\infty=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i \tag{46}$$

となる。ここで各Δ_iは$\mathbb{R}^d$のラプラシアンである。$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$の２次場$\mathbb{D}^\infty$は

$$\mathbb{D}^\infty[f,g]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(\nabla_i f,\nabla_i g)_{\mathbb{R}^d} \tag{47}$$

従ってDirichlet形式は前述の対応からDirichlet形式を考えると、

$$\mathcal{E}^{d\mathbf{x}^\infty}(f,g)=\int_{(\mathbb{R}^d)^\infty}\mathbb{D}^\infty[f,g]d\mathbf{x}^\infty, \qquad L^2((\mathbb{R}^d)^\infty, d\mathbf{x}^\infty) \tag{48}$$

となるが、これは正当化できない。なぜなら、Lebesgue測度の無限直積$d\mathbf{x}^\infty$を含むからである。そのため、(45)の対応の第一段階から壊れてしまう。

「ブラウン運動があるのにDirichlet形式がない」

というのは困った状況である。そのため

「測度のない空間の**Dirichlet**形式論」

を考える必要がある。そこで$(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$の代わりに

「測度を持つ空間の**Dirichlet**形式の無限列」

で$(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$を解析しよう。

$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$の近似列—小さな無限次元と大きな無限次元—

$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$の代わりに$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$上の配置空間$\mathsf{S}$：

$$\mathsf{S} = \{\mathsf{s} = \sum \delta_{s_i}\,;\ \mathsf{s}(K) < \infty \ \text{ for all compact } K \subset \mathbb{R}^d\} \tag{49}$$

Sは漠位相でPolish空間（完備可分距離空間と位相同型な空間）となる。
この空間の点は、可算個の名前のつけない粒子$\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$を表す。Radon測度と見なしているため、自然に位相が入り便利である。一方、粒子に名前（ラベル）$(s_1, s_2, \ldots,)$をつけると$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$の元と見なすことになる。

無限直積$d\mathrm{x}^{\infty}$の代用品として通常使用されるのは、Lebesgue測度を強度とするPoisson点過程である; Lebesgue測度λに対してS上の確率測度Λを

(1) $A \cap B = \emptyset$ならば、$\Lambda \circ \pi_A^{-1}$と$\Lambda \circ \pi_B^{-1}$ は独立。

(2) $\Lambda(\mathsf{s}(A) = n) = e^{-\lambda(A)} \lambda(A)^n / n!$

で定める。ここで$\pi_A : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$は$\pi_A(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(\cdot \cap A)$.

Sの関数fは、$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}\bigcup\{\sum_{i=0}^{\infty}(\mathbb{R}^d)^i\}$の部分集合上の対称な関数$\check{f}$によって

$$f(\mathsf{s}) = \check{f}(s_1, s_2, \ldots) \quad (\mathsf{s} = \sum \delta_{s_i}) \tag{50}$$

と一意的に表示される。S上の２次場$\mathbb{D}$を次で与える。

$$\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s}) = \mathbb{D}^{\infty}[\check{f},\check{g}](s_1, s_2, \ldots) \tag{51}$$

右辺は、(s_i)について対称で有り、$\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$の関数と見なせる。Dirichlet形式

$$\mathcal{E}^{\Lambda}(f,g) = \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}[f,g]d\Lambda, \quad L^2(\mathsf{S},\Lambda) \tag{52}$$

を考えると、それに対して、S値ブラウン運動B

$$\mathsf{B}_t = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{B_t^i} \tag{53}$$

が対応する。つまり$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$に比べてはるかに小さな無限次元空間Sには、Lebesgue測度Λと２次場$\mathbb{D}$とブラウン運動B が存在し(43)の関係を有している。

尚、各時刻tにおいて(53) をみたすB_t^iには、様々な選択の余地がある。うまく選べば、$\mathbf{B} = (B^i)_{i\in\mathbb{N}}$は$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$値ブラウン運動となる。この選択は後述するように、各B_t^iが連続過程かつ互いにぶつからなければ初期のラベルの任意性だけで一意的に定まる。

二つの無限次元空間Sと$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$との間には、大きな差がある。そこで、

小さな無限次元Sと大きな無限次元$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ を繋ぐ無限次元空間の列

を考える。

$$\mathsf{S}, \quad \mathbb{R}^d \times \mathsf{S}, \quad (\mathbb{R}^d)^2 \times \mathsf{S}, \quad (\mathbb{R}^d)^3 \times \mathsf{S}, \quad (\mathbb{R}^d)^4 \times \mathsf{S}, \quad (\mathbb{R}^d)^5 \times \mathsf{S}, \quad \cdots$$

それぞれの空間の「Lebesgue測度」の列は

$$\Lambda, \quad dx \times \Lambda, \quad dx^2 \times \Lambda, \quad dx^3 \times \Lambda, \quad dx^4 \times \Lambda, \quad dx^5 \times \Lambda, \quad \cdots$$

ブラウン運動の列は、$\mathsf{B} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{B_t^i}$、$\mathbf{B}^n = (B^1, \ldots, B^n)$と置くと

$$\mathsf{B}, \quad \mathbf{B}^1 \times \mathsf{B}, \quad \mathbf{B}^2 \times \mathsf{B}, \quad \mathbf{B}^3 \times \mathsf{B}, \quad \mathbf{B}^4 \times \mathsf{B}, \quad \mathbf{B}^5 \times \mathsf{B}, \quad \cdots$$

という対応関係になる。これらの列の n 番目の要素に対してはDirichlet形式

$$\Xi^{[n]} := (\mathcal{E}^{dx^n \times \mathsf{\Lambda}}, L^2((\mathbb{R}^d)^n \times \mathsf{S}, dx^n \times \mathsf{\Lambda})) \tag{54}$$

が付随している。ここでCampbell測度の概念（後述）を $\mathsf{\Lambda}$ に適用する。、$\mathsf{\Lambda}^{[n]} = dx^n \times \mathsf{\Lambda}$ である。更に $\mathsf{S}^{[n]} = (\mathbb{R}^d)^n \times \mathsf{S}$ と置いて、

$$\Xi^{[n]}(\mathsf{\Lambda}) = (\mathcal{E}^{\mathsf{\Lambda}^{[n]}}, L^2(\mathsf{S}^{[n]}, \mathsf{\Lambda}^{[n]})) \tag{55}$$

と表すことにする。$\Xi^{[n]}(\mathsf{\Lambda})$ の表記は一般の点過程 μ でも意味を持つから、$\Xi^{[n]}(\mu)$ をThm 5で使用する。

今、$d \geq 2$ とする。するとブラウン運動粒子は互いにぶつからないから、初期状態でラベル $\mathfrak{l}$ を一つ選ぶと、各粒子はそのラベルを変えずずっと背負っていける（ゼッケンである）。従って S 値のパス空間 $C([0,\infty);\mathsf{S})$ から $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ 値パス空間 $C([0,\infty);(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}})$ への自然な写像をラベル $\mathfrak{l}$ から構成できるので $\mathfrak{l}_{\mathsf{path}}$ と表す。この時次が成立する。

$$\mathfrak{l}_{\mathsf{path}}(\mathsf{B}) = \mathbf{B} \tag{56}$$

重要なことは、この対応は、Dirichlet形式の間のカップリングを与えることである。つまり、元々$\Xi^{[0]}$で構成された拡散過程（ブラウン運動）であるBとこの写像$\mathfrak{l}_{\mathsf{path}}$によって、$\Xi^{[n]}$で構成される拡散過程(ブラウン運動)は表示できる。

言い換えると、加算無限個のDirichlet形式の列の各要素$\Xi^{[n]}$は、元来それぞれ他のDirichlet形式とは無関係な拡散過程$\mathbf{B}^n \times \mathsf{B}$ —$(\mathbb{R}^d)^n \times \mathsf{S}$値ブラウン運動—を構成するのだが、それらすべての拡散過程の間に、$\mathfrak{l}_{\mathsf{path}}$を用いて作ったカップリングが存在するのである。すべては最も小さい空間のブラウン運動Bの関数として表現できる。つまり、一番小さいDirichlet空間は、無限個のDirichlet空間の間の構造を入れる役割を果たす。そして、任意の$n \in \mathbb{N}$に対して

$$(B^1, \ldots, B^n) \tag{57}$$

をうまく扱うDirichlet空間$\Xi^{[n]}$を構成しその間の関係を見出したから、それによって$\mathbf{B} = (B^n)_{n \in \mathbb{N}}$をうまく扱う$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$上のDirichlet空間を作ったことになる、と考えているのである。

この視点は、$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$のすべてをカバー出来ないにせよ、目標としている無限次元確率微分方程式を解くためには十分である。

Dirichlet form approach : 干渉ブラウン運動の場合

前節のアイデアを非自明な場合、つまり干渉ブラウン運動に対して実行し主結果を述べる。この章の目的は、つぎの無限次元確率微分方程式をとく一般論を展開することである。

$$dX_t^i = \sigma(X_t^i, \mathsf{X}_t^{i\diamondsuit})dB_t^i + b(X_t^i, \mathsf{X}_t^{i\diamondsuit})dt \tag{58}$$

ただし

$$\mathsf{X}_t^{i\diamondsuit} = \sum_{j \neq i}^{\infty} \delta_{X_t^j}$$

この確率微分方程式は具体例のすべてを含んでいる。鍵になるのは点過程 μ の

準 Gibbs 性と**対数微分**

の概念である。前者はアンラベル拡散過程、後者は確率微分方程式 (58) の解の構成に主な役割を果たす。

アンラベル拡散過程の構成

Definition 1. [準 Gibbs 測度] Φ, Ψ をそれぞれ自由および干渉ポテンシャルとする。μ が (Φ, Ψ) 準 Gibbs 測度とは、(34) で定義された正則条件付き確率 $\mu_{r,\xi}^{n}$ が、(r, ξ, n) に依存する正定数 $C = C(r, \xi, n)$ に対して次の不等式を満たすことである。μ-a.s. ξ とすべての $r, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C(r, \xi, n)^{-1} e^{-\mathcal{H}_r(\mathsf{s})} d\Lambda_r^n \le \mu_{r,\xi}^{n}(d\mathsf{s}) \le C(r, \xi, n) e^{-\mathcal{H}_r(\mathsf{s})} d\Lambda_r^n \tag{59}$$

ここで二つの測度 μ と ν が $\mu \le \nu$ とは、すべての A に対して $\mu(A) \le \nu(A)$ が成り立つことを表す。 $\mathcal{H}_r(\mathsf{s})$ は S_r 内部だけのハミルトニアンである。

Remark 1. (1) Gibbs 測度は準 Gibbs 測度である。

(2) $C(r, \xi, n)$ が ξ にも依存していることに注意する。

(3) この概念は自由ポテンシャルの変動に対してロバスト. μ が (Φ, Ψ) 準 Gibbs 測度ならば、任意の局所有界な Φ_0 に対して μ は $(\Phi + \Phi_0, \Psi)$ 準 Gibbs 測度である。

(4) 典型例で挙げた対数関数で干渉しあう点過程はすべて $(0, -\beta \log|x-y|)$ 準 Gibbs 測度である。

実際の定理より少し制限した条件でアンラベル拡散過程の構成定理を述べる。これは簡単のためである。

Thm 3 ([32,38]). μが上半連続なポテンシャル(Φ,Ψ)を持つ準*Gibbs*測度、かつある$1<p$に対してμのn点相関関数がすべての$n\in\mathbb{N}$についてL^p局所有界とする。このとき*Dirichlet*形式は可閉となり、更にその閉包に付随する拡散過程$(\mathsf{X},\{\mathsf{P_s}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{s}})$が存在する。

点過程μが準Gibbs測度になるための具体的な十分条件は[38,39]で与えられた。それを用いてこのabstractのすべての点過程の準Gibbs性を示すことができる。

ただし、対数関数を扱う場合、それでも計算は各モデルに依存し、非自明である。[38,39]の一般論では与えられた干渉ポテンシャルに対して、それに応じたμの幾何的剛性の下で準Gibbs性が成立することを証明した。この必用な幾何的剛性の証明が、各対数干渉ポテンシャルに対してcase by caseの証明になるのである。

無限次元確率微分方程式

つぎに確率微分方程式 (58) をとく。そのため、対数微分 d^{μ} の概念を導入する。
μ の k-Campbell 測度 $\mu^{[k]}$ とは

$$\mu^{[k]}(d\mathbf{x}d\mathsf{s}) = \rho^k(\mathbf{x})d\mathbf{x}\mu_{\mathsf{x}}(d\mathsf{s}) \tag{60}$$

ただし $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$, ρ^k は μ の k 点相関関数、
μ_{x} は x で条件づけられた reduced Palm 測度である：

$$\mu_{\mathsf{x}}(d\mathsf{s}) = \mu(d\mathsf{s} - \mathsf{x} |\, \mathsf{s}(x_i) \geq 1 \text{ for all } i) \tag{61}$$

S 上の局所的、かつ、滑らか、かつ有界な関数全体を $\mathcal{D}_{\circ}$ と表す。
Definition 2. d^{μ} が μ の対数微分とはすべての $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}_{\circ}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathsf{S}} \mathsf{d}^{\mu} f d\mu^{[1]} = - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathsf{S}} \nabla_x f d\mu^{[1]} \tag{62}$$

d^{μ} を以下で表す。

$$\mathsf{d}^{\mu}(x, \mathsf{s}) = \nabla_x \log \mu^{[1]}(x, \mathsf{s})$$

μに関する次の微分方程式を考える。

$$2b(x,\mathsf{s}) = \nabla_x a(x,\mathsf{s}) + a(x,\mathsf{s})\nabla_x \log \mu^{[1]}(x,\mathsf{s}) \tag{63}$$

ここで $a(x,\mathsf{s}) = 2\sigma(x,\mathsf{s})\,{}^t\sigma(x,\mathsf{s})$.

Thm 4 ([37])**.** 微分方程式(63)の解μが存在したとする。更にμが *Thm 3*の仮定、および各粒子が非衝突かつ非爆発という条件をみたすとする。このとき与えられたラベル$\mathfrak{l}$に対して確率微分方程式(58)は$\mu^{\mathfrak{l}}$-*a.s.* の出発点に対して解をもつ。解は、$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$値拡散過程になる。また対応するアンラベル確率力学はμ可逆拡散過程である。

- Ruelleクラスのポテンシャルであれば(63)が解けるのは明らかである。
- [37]於いて、μの対数微分を計算するための一般論—(63)を解くための一般論—を用意した。それを用いて、このabstractの例はすべて計算できる。
- 準Gibbs性と同様に、μに応じた幾何的剛性を証明するのが鍵になるが、その部分は対数ポテンシャルに関してはcase by caseであり、しばしば精密な評価を必用とする。N粒子系の対数微分のtailの部分の一様評価が、鍵になる。

Couplingの存在：

証明の鍵はSection で説明したconsistency (カップリングの存在) がThm 3で構成したアンラベル拡散過程に対しても成立することである。つまり6章のように、各Campbell測度 $\mu^{[k]}$ に対応する $(\mathbb{R}^d)^k \times$Sの上のDirichlet 空間を $\Xi^{[k]}(\mu)$ と置く。

Thm 5 ([36]).
$\Xi^{[k]}(\mu)$ に対して、カップリングが存在する。

一旦、Thm 5を証明すれば(58)を解くことは難しくない。
実際、$\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ において、各座標関数 x_i はDirichlet形式 $\Xi^{[k]}$、但し $i \leq k$ の定義域に局所的に入る。そこでそれに対して伊藤の公式（福島分解とRevue対応）を使えば、これらが確率微分方程式(58)を満たすことが分かる。カップリングの存在から、k までではなく、すべての $i \in \mathbb{N}$ で(58)が解けたことになる。

その後の展開:
無限次元確率微分方程式の強解の存在とパスワイズ一意性

2nd stage : 2011年から種村氏との共同研究が始まった[44–48]。

- [44]によって、確率微分方程式(58)の強解の存在とパスワイズの一意性が一般的に証明された。仮定も現段階とほとんど変わらない。無論、このabstractのすべての例に適用できる。

アイデアとしては、無限次元確率微分方程式にたいして新しい解の概念を導入したことである。この概念は、無限次元特有であり、従来のものと同値だが、無限次元を解析する上で適切である。一言で述べると、無限次元確率微分方程式が、無限個の有限次元確率微分方程式の列でconsistencyを持つものと同値であると言うのが、基本的なアイデアである。ここでも前述のカップリングの類似を使う。

consistencyが成り立つ原因は、アンラベル拡散過程Xの存在である。更に、ラベルについてのパス空間の末尾σ-fieldを無限次元確率微分方程式の境界条件に対する境界条件と見なし、その自明性と無限次元確率微分方程式の解の存在やパスワイズ一意性が一対一対応することを一般的に示すものである。

　このあたりの議論はロバストであり、伊藤型確率微分方程式を超えて様々な無限次元確率微分方程式に有効であると思われる。そして、最後に、パス空間の末尾σ-fieldの自明性を、配置空間Sの点過程μについての自明性に帰着されることを、確率幾何的考察によって示したものである。このアイデアは、今後多くの応用を持つと思われる。

- [45] ではAiry干渉ブラウン運動の無限次元確率微分方程式を解いた。

Soft Edge場合が他のBulkやHard Edgeに比べて計算が一番大変になる。2011年に種村氏がAiryの場合の対数微分、従って、無限次元確率微分方程式の形を特定し、この共同研究が始まった。3.2章の計算は[45]から転載したものだが、これはその時の氏の発見に基づいている。

　それまでAiryについては、非常に多くの研究があったのにもかかわらず極限の確率微分方程式は、形すら分かっていなかった。有限系の時空間相関関数の極限として、何か確率力学がある、と言うことが分かっていた感じだった。それでも様々な種類の興味深い有限粒子系の極限として(少なくとも右端のAiry過程は)出現するものなので、大きな興味を集めていた。

極限の分布、今の場合は、Wignerの半円分布、が与えられたとき、その端の点に対応する無限次元確率微分方程式を導出する、この考えは普遍的だと思われる。半円分布以外の様々な極限分布と関連する極限定理があるが、他のSoft Edgeでも同様の[45]の手順で、確率微分方程式の形が導出されるはずである。

- 一旦、確率微分方程式の解の一意性が証明されると、様々な応用が考えられる。例えば、Dirichlet形式の一意性[46,48]やSDE Gap [25]、代数的構成と解析的構成の一致[46,47]などである。

力学的普遍性:　ランダム行列に関係する点過程についてSoshnikov [55], Tao [59], H.T. Yau [4]など様々な形の普遍性が調べられてきた。しかしその確率力学的対応物は、河本-O.[25]が初めてである。今後、この研究は様々な方向に進展すると思われる。

- Wignerの半円法則がランダム行列の世界の大数の法則、
- Sine/Airy/Bessel点過程への収束が中心極限定理 (幾何的普遍性)
- その次に、Donskerの不変原理の対応物(力学的普遍性)があるはずである。

それが当面の目標である

力学的剛性:

　Ginibre 点過程は様々な幾何的剛性を持つが、その反映として、Ginibre 干渉ブラウン運動が力学的剛性を持つことが期待できる。

　それに関して、tagged 粒子が劣拡散的挙動をするということを示した。この問題は、2006 年から考え始め、ずっとこの研究の目標としてきた。

　更に、2007 年当時、β について、自己拡散行列に対する相転移が生じるという予想を見いだし、その解決を—遠い—目標にしてきた。

　尚、この相転移予想の Toy モデルである、周期的クーロンランダム環境における粒子のホモジナイゼーションについて、相転移が起こることは、2007 年に既に証明し何度か講演したが、まだ論文にはしていない。これは相転移予想が成立することを強くサポートする結果である。

Ginibre点過程の幾何的剛性—そして、対数干渉ポテンシャルを超えて: Ginibre点過程は最も代表的な、かつ現時点では唯一の２次元空間の２次元クーロンポテンシャルで相互作用する平行移動不変な点過程である。それについての剛性が、Ghosh [12], Ghosh-Peres [13], O. [40], O.-Shirai [52], Shirai [52] などで続々と見つかっている。

今後、より剛性の強いGAF（ガウシアン解析関数の零点）を始め、βアンサンブル、すべての行列式過程、更に世の中にある様々な点過程に、この研究が発展していくものと思われる。それには、これらの点過程の剛性、さらには、様々な確率幾何的研究が欠かせない。まず、必用なものは準Gibbs性と対数微分の表現の２点である。

1986–2015: もう一度DysonのISDEを思い出すと、

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

最近、Tsaiさんは、つぎの非平衡解を$\beta \geq 1$に対して構成した。

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{j\neq i, \\ |X_t^i - X_t^j| < r}}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

証明は、「単調性」による。

今後の研究

1st stage: アンラベル力学の構成とISDEの弱解の構成 (done) :
2nd stage: ISDEの強解の構成とパスワイズ一意性 (done) :
3rd stage: ISDEの非平衡解の構成と一意性(to be done) :
4th stage: galaxy ISDEs (妄想):

interactionがすべてを決め、例えば、Dyson, Airy, Besselはすべて同じものの「異なる観測系」から生まれたISDEとしての理想化。
宇宙に多量の（しかし有限）個数の（同一種類の）粒子が有り、
おなじ干渉ポテンシャルの元で運動する。うまく時空間を選べば、多量の粒子の運動は整然としたものに見え、ISDEの解として記述できる。広い範囲の初期値に対して、ISDEは、ある程度普遍的に取れる。
ISDEを考えるとき、粒子全体がどの「部分集合」（銀河）の上を動くか、をまず求めないといけない。その後、ISDEがきまる。その部分集合が、点過程のサポートとして与えられている場合は、対数微分がISDEの係数になる。