末尾 σ-加法族と無限次元確率微分方程式の強解の存在と一意性

種村秀紀 (千葉大学大学院理学研究科)
長田　博文 (九州大学大学院数理学研究院)

2014 年度日本数学会 (September 25, 2014)

Introduction

S ：$\mathbb{R}^d$ の閉集合で内部 $S_{\rm int}$ が連結開集合, その閉包 $\overline{S_{\rm int}} = S$, 境界 ∂S のルベーグ測度が零となるものとする.

S 内の無限個の粒子配置の空間: 番号付けがされている場合 $S^{\mathbb{N}}$,
番号付けがされていない場合

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S) = \{\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i} \ ; \ \ \mathsf{s}(K) < \infty, \forall K \subset S \text{ コンパクト } \}$$

とする. $\mathfrak{M}$ は, 漠位相の下で完備可分距離空間となる.
各 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して写像 $\mathsf{u}_m : S^m \to \mathfrak{M}$ および $\mathsf{u}_m : S^m \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ を

$$\mathsf{u}_m(\mathbf{x}) = \sum_i^m \delta_{x_i}, \quad \mathsf{u}_m((\mathbf{x}, \mathsf{y})) = \mathsf{u}_m(\mathbf{x}) + \mathsf{y}, \qquad \mathbf{x} \in S^m, \ \mathsf{y} \in \mathfrak{M}$$

と定義する.

Introduction

$\mathbf{x}=(x^j)_{j\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$, $m\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mathbf{x}^{m*}=(x^1,\dots,x^{m-1},x^{m+1},\dots),\quad \mathbf{x}^{m\sharp}=(x^{m+1},x^{m+2},\dots)\in S^{\mathbb{N}},$$

確率過程 $\mathbf{X}=(X^i)_{i\in\mathbf{N}}\in C([0,\infty);S^{\mathbb{N}})$ に対して,

$$\mathsf{X}_t=\mathsf{u}_\infty(\mathbf{X}_t),\quad \mathsf{X}_t^{i*}=\mathsf{u}_\infty(\mathbf{X}_t^{i*}),\quad \mathsf{X}_t^{i\sharp}=\mathsf{u}_\infty(\mathbf{X}_t^{i\sharp})$$

とおく. H を $\mathfrak{M}$ の部分集合とし, $\mathsf{H}^{[1]}=\mathsf{u}_1^{-1}(\mathsf{H})\subset S\times\mathfrak{M}$ とおく.
$\sigma:\mathsf{H}^{[1]}\to\mathbb{R}^{d^2}$ と $b:\mathsf{H}^{[1]}\to\mathbb{R}^d$ を可測関数とし, 次の無限次元確率微分方程式（ISDE）を考える.

$$\begin{aligned} dX_t^i&=\sigma(X_t^i,\mathsf{X}_t^{i*})dB_t^i+b(X_t^i,\mathsf{X}_t^{i*})dt,\\ \mathsf{X}_t&\in\mathsf{H}\quad \text{for all } t\in[0,T],\\ \mathbf{X}_0&=\mathbf{s}.\end{aligned}\tag{1}$$

仮定 (A.0)-(A.3)

本講演では，この ISDE の解の存在と一意性について論じる．

(A.0) $a(x,y) = \sigma(x,y)^t\sigma(x,y)$ は，

$$c^{-1}a_0(|x|)|w|^2 \le \langle a(x,y)w, w\rangle_{\mathbb{R}^d} \le ca_0(|x|)|w|^2, \quad \forall w \in \mathbb{R}^d.$$

をある滑らかな正値関数 a_0 と 正定数 c に対してみたす．

(A.1) $\mathfrak{M}$ 上の確率測度 μ で次をみたすものが存在する：

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\{\nabla_x a(x,y) + a(x,y)\mathrm{d}_\mu(x,y)\}$$

ここで $\mathrm{d}_\mu(x,y)$ は μ の対数微分．

(A.2) μ は，(Φ,Ψ)-準ギッブス分布であり，
(Φ,Ψ) は，ある上半連続関数 $(\hat{\Phi},\hat{\Psi})$ とある正定数 C より
$C^{-1}\hat{\Phi}(x) \le \Phi(x) \le C\Phi(x)$, $C^{-1}\hat{\Psi}(x) \le \Psi(x) \le C\hat{\Psi}(x)$ をみたす．

仮定 (A.3)

$S_r = \{s \in S : |s| \le r\}$ とし, $\mathfrak{M}_r^k = \{\mathsf{s} \in \mathfrak{M} : \mathsf{s}(S_r) = k\}$ とおく. そして, σ_r^k を μ の S_r 上の k-密度関数とする.

(A.3) (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\mathfrak{M}_r^k) < \infty$, $\forall r \in \mathbb{N}$, が成り立つ.
(ii) ある $p \in (1, \infty]$ に対して $\sigma_r^k \in L^p(\mathcal{S}_r^k, d\mathbf{x}^k)$, が $\forall r, \forall k \in \mathbb{N}$ で成り立つ.

条件 **(A.0)–(A.3)** の下で, 係数 a, b に対応する準正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E}^{a,\mu}, \mathcal{D})$ が存在し, 拡散過程 $(\mathsf{X}_t, \mathsf{P}_\mathsf{s})$ が構成できる (Osada AOP13 SPA13)

仮定 (A.4)–(A.7)

(A.4) $\mu(\mathsf{H}) = 1$ であり, 任意の $\mathsf{s} \in \mathsf{H}$ に対して $P_{\mathsf{s}}(\mathsf{X}_t \in \mathfrak{M}_{\mathrm{s.i.}}) = 1$ が成り立つ.
ここで $\mathfrak{M}_{\mathrm{s.i.}} = \{\mathsf{s} \in \mathfrak{M} : \mathsf{s}(S) = \infty,\ \mathsf{s}(\{x\}) \le 1,\ \forall x \in S\}$.

(A.5) $P_{\mathsf{s}}(\exists \mathbf{X} \in C([0,\infty), S^{\mathbb{N}})\ \text{ s.t. }\ \mathsf{u}_{\infty}(\mathbf{X}) = \mathsf{X}) = 1, \forall \mathsf{s} \in \mathsf{H}$.

条件 **(A.5)** の下では, ある番号付け $\mathfrak{l}$ が存在して $\mathfrak{l}(\mathsf{X})_t = \mathbf{X}_t = (X_t^j)_{j \in \mathbb{N}}$ とできる. 以降この番号付け $\mathfrak{l}$ を固定する.

(A.6) $P_\mu = \int_{\mathfrak{M}} \mu(ds) P_{\mathsf{s}}$ とおく. 各 $r, T \in \mathbb{N}$ に対して
$P_\mu(\limsup_{j\to\infty}\{|X_t^j| < r \text{ for some } t \in [0.T]\}) = 0$.

(A.7) $P_{\mathsf{s}}(\mathsf{X}_t \in \mathsf{H}) = 1,\ \forall \mathsf{s} \in \mathsf{H}$.

条件 **(A.0)–(A.7)** の下で, ISDE (1) の解（弱解）の存在が示される.

仮定 (A.8)–(A.9)

$\mathbf{X} \in C([0,\infty) \to \mathsf{H})$ と $m \in \mathbb{N}$ を定めたとき, $\sigma^m_{\mathsf{X}} : [0,\infty) \times S^m \to S^m$, $b^m_{\mathsf{X}} : [0,\infty) \times S^m \to S^m$ を次で定義する：

$$\sigma^{m,i}_{\mathsf{X}}(t,\mathbf{x}) = \sigma(x_i, \sum_{j\neq i}^m \delta_{x_j} + \mathsf{X}^{m\sharp}_t), \quad b^{m,i}_{\mathsf{X}}(t,\mathbf{x}) = b(x_i, \sum_{j\neq i}^m \delta_{x_j} + \mathsf{X}^{m\sharp}_t).$$

(A.8)　各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{s} \in S^m$ が $\mathsf{u}_m(\mathbf{s}, \mathsf{X}^{m\sharp}_0) \in \mathsf{H}$ をみたすとき, つぎの有限次元確率微分方程式の強解が存在して一意である：

$$dY^{m,i}_t = \sigma^{m,i}_{\mathsf{X}}(t,\mathbf{Y}^m_t)dB^i_t + b^{m,i}_{\mathsf{X}}(t,\mathbf{Y}^m_t)dt \quad (i = 1,\dots,m) \tag{2}$$
$$\mathbf{Y}^m_0 = \mathbf{s}$$

(A.9)　任意の末尾事象 A に対して $\mu(\mathsf{A})$ は, 1 か 0 である．（tail trivial）

主定理

この講演での主結果は次の定理である．

定理 1 (Osada-T 2014)　条件 **(A.0)–(A.9)** を仮定する．このとき $\mu(\mathfrak{M}_0)=1$ である H の部分集合 $\mathfrak{M}_0$ が存在して, 各 $\mathbf{s}\in \mathsf{l}(\mathfrak{M}_0)$ に対して, ISDE (1)–(2) の強解 $(\mathbf{X}, \mathbb{P}_{\mathbf{s}})$ で,

$$\mathsf{P}_{\mu}\circ \mathsf{X}_t^{-1} \prec \mu \quad \forall t>0 \tag{3}$$

をみたすものが存在する．さらに, ISDE (1)–(2) の解で (3) をみたしマルコフ性を持つものは一意である．

適用例 1

Bulk scaling limit : [Osada:PTRF12] $\beta = 1, 2$ and 4

$$dX_t^j = dB_t^j + \frac{\beta}{2} \lim_{L\to\infty} \left\{ \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}, k\neq j \\ |X_t^k|\le L}} \frac{dt}{X_t^j - X_t^k} \right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Soft edge scaling limit : [Osada-T:arXiv:1408.0632] $\beta = 1, 2$ and 4

$$dX_t^j = dB_t^j$$
$$+ \frac{\beta}{2} \lim_{L\to\infty} \left\{ \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}, k\neq j \\ |X_t^k|\le L}} \frac{1}{X_t^j - X_t^k} - \int_{|y|\le L} \frac{\widehat{\rho}(y)}{-y} dy \right\} dt, \; j \in \mathbb{N},$$

where $\widehat{\rho}(x) = \frac{\sqrt{-x}\mathbf{1}(x<0)}{\pi}$.

適用例 2

Hard edge scaling limit : [Honda-Osada:arXiv:1405.0523] $\nu > -1$

$$dX_t^j = dB_t^j + \frac{2\nu+1}{2}\frac{1}{X_t^j}dt + \frac{\beta}{2}\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\neq j}}\left\{\frac{1}{X_t^j - X_t^k} + \frac{1}{X_t^j + X_t^k}\right\}dt, \ j \in \mathbb{N}.$$

Ginibre : [Osada:PTRF12] $\quad d = 2$

$$dX_t^j = dB_t^j + \lim_{L\to\infty}\left\{\sum_{\substack{k\in\mathbb{N},k\neq j\\ |X_t^k - X_t^j|\leq L}}\frac{X_t^j - X_t^k}{|X_t^j - X_t^k|^2}dt\right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

適用例 3

Ruelle's potential: ψ_0：Ruelle クラスポテンシャルで原点以外では滑らかで、対応する Gibbs 分布は、仮定 (A.2), (A.3), (A.5') をみたす。$d=1$ の時は、さらに衝突しないための条件を加える。

$$dX_t^j = dB_t^j - \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\neq j}} \nabla_x \Psi_0(X_t^j - X_t^k)dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

証明のあらすじ

(A.8) 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{s} \in S^m$ が $\mathsf{u}_m(\mathbf{s}, \mathsf{X}_0^{m\sharp}) \in \mathsf{H}$ をみたすとき, つぎの有限次元確率微分方程式の強解が存在して一意である：

$$dY_t^{m,i} = \sigma_{\mathsf{X}}^{m,i}(t, \mathbf{Y}_t^m)dB_t^i + b_{\mathsf{X}}^{m,i}(t, \mathbf{Y}_t^m)dt \quad (i = 1, \dots, m)$$
$$\mathbf{Y}_0^m = \mathbf{s}$$

より各 $m \in \mathbb{N}$ に対して、写像 F^m をつぎのように定義できる：

$$F^m(\mathbf{s}, \mathbf{X}, \mathbf{B}) = (\mathbf{Y}^m, \mathbf{X}^{m\sharp})$$

$\mathbf{X}$ が ISDE (1) の解（弱解）であれば

$$F^m(\mathbf{s}, \mathbf{X}, \mathbf{B}) = \mathbf{X}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{m\to\infty} F^m(\mathbf{s}, \mathbf{X}, \mathbf{B}) \equiv F^\infty(\mathbf{s}, \mathbf{X}, \mathbf{B}) = \mathbf{X}$$

従って、$\mathbf{X}$ は、$\mathbf{s}, \mathbf{B}$ を固定したとき、$C([0,T], S^{\mathbb{N}})$ の末尾 σ 加法族

$$\mathcal{T}_{path}(S^{\mathbb{N}}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma(\mathbf{X}^{\mathbf{m}\sharp}) - \text{可測}.$$

弱解を $(\mathbf{X}_t, P_s)$ としたとき、$P_{s,\mathbf{B}} = P_s(\ |\mathbf{B})$ とおくと

$$\mathbf{X}_t \text{ が強解} \iff \mathcal{T}_{path}(S^{\mathbb{N}}) \text{ が } P_{s,\mathbf{B}}\text{- trivial for a.s. } \mathbf{B}$$

$C([0,T], S^{\mathbb{N}})$ 上の確率測度 Q に対して

$$\mathcal{T}_{path}^{[1]}(S^{\mathbb{N}} : Q) = \{A \in \mathcal{T}_{path}(S^{\mathbb{N}}) : Q(A) = 1\}$$

二つの強解 $(\mathbf{X}_t, P_s)$, $(\mathbf{X}'_t, P'_s)$ に対して

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}', a.s. \iff \mathcal{T}_{path}^{[1]}(S^{\mathbb{N}}, P_{s,\mathbf{B}}) = \mathcal{T}_{path}^{[1]}(S^{\mathbb{N}}, P'_{s,\mathbf{B}}) \text{ for a.s } \mathbf{B}$$

$$\text{強解が唯一} \iff \mathcal{T}_{path}^{[1]}(S^{\mathbb{N}}, P_{s,\mathbf{B}}) \text{ が } P_{s,\mathbf{B}} \text{ と独立} \quad \text{for a.s } \mathbf{B}$$

右の条件を

(A.9)　任意の末尾事象 A に対して $\mu(\mathsf{A}) \in \{0,1\}$.　(tail trivial)

$$+$$

$$\mathsf{P}_\mu \circ \mathsf{X}_t^{-1} \prec \mu \quad \forall t > 0 \qquad (3)$$

$$+$$

$\forall r, T \in \mathbb{N}$ に対して

(A.6)　$\mathsf{P}_\mu(\limsup_{j\to\infty}\{|X_t^j| < r \text{ for some } t \in [0.T]\}) = 0.$

とマルコフ性を用いて導く.

Thanks

Thank you for your attention!