Airy random point field に対応する無限次元確率微分方程式

種村秀紀 (千葉大学大学院理学研究科)
長田　博文 (九州大学大学院数理学研究院)

2014 年度日本数学会 (September 25, 2014)

Introduction 1

ガウス型行列集団は, 各成分がガウス分布に従っているランダム行列であり, 変換の不変性に基づいて,

ガウス型直行行列集団 (GOE),

ガウス型ユニタリ行列集団 (GUE),

ガウス型シンプレクテック行列集団 (GSE)

の３つに分類されている.
サイズ $N \times N$ のガウス型行列集団の固有値分布:

$$m_\beta^N(d\mathbf{x}_N) = \frac{1}{Z} \prod_{1 \le i < j \le N} |x_i - x_j|^\beta \exp\left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right\} d\mathbf{x}_N$$

GOE⇒ $\beta = 1$, GUE⇒ $\beta = 2$, および GSE ⇒ $\beta = 4$.

Introduction 2

Wigner's theorem Under m_β^N, $\beta = 1, 2$ and 4

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{x_j/\sqrt{N}} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}dx, \quad N\to\infty \quad \text{in law}$$

Bulk scaling

$$x_j = y_j/\sqrt{N} \Longleftrightarrow y_j = \sqrt{N}x_j$$

In general for $\theta \in (-2, 2)$

$$x_j = \theta\sqrt{N} + y_j/\sqrt{N} \Longleftrightarrow y_j = \sqrt{N}(x_j - \theta\sqrt{N})$$

Soft edge scaling

$$x_j = 2\sqrt{N} + y_j N^{-1/6} \Longleftrightarrow y_j = N^{1/6}(x_j - 2\sqrt{N})$$

Introduction 3

Bulk scaling limit $\mu^N_{\mathrm{sin},\beta}$: m^N_β の下での $\{\sqrt{N}x_j\}_{j=1}^n$ の分布

$$\mu^N_{\mathrm{sin},\beta} \Rightarrow \mu_{\mathrm{sin},\beta}, \quad N \to \infty$$

Soft edge scaling limit $\mu^N_{\mathrm{Ai},\beta}$: m^N_β の下での $N^{1/6}(x_j - 2\sqrt{N})$ の分布

$$\mu^N_{\mathrm{Ai},\beta} \Rightarrow \mu_{\mathrm{Ai},\beta}, \quad N \to \infty$$

$\beta = 2$ のときはそれぞれ

(正弦核) $$K_{\mathrm{sin},2}(x,y) = \frac{\sin\{\pi(x-y)\}}{\pi(x-y)},$$

(エアリー核) $$K_{\mathrm{Ai},2}(x,y) = \frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y},$$

を相関核とする行列式点過程（DPP）である．ここで Ai はエアリー関数であり Ai′ は，その微分である．

$\beta = 1, 4$ の時は、四元数行列式点過程である．

Configuration space

$\mathbb{R}$ 上の（番号付けのない）粒子の配置空間：

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}) = \Big\{ \xi(\cdot) = \sum_{j \in \mathbb{I}} \delta_{x_j}(\cdot) : \xi(K) < \infty,\ \forall K \subset \mathbb{R} \text{ compact} \Big\}$$

$\mathfrak{M}$ は漠位相のもとで完備可分距離空間（Polish space）.
多重点をもたない配置の空間は, 集積点をもたない集合と対応する：

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0 &= \Big\{ \xi \in \mathfrak{M} : \xi(\{x\}) = 1,\ \forall x \in \operatorname{supp} \xi \Big\} \\ &= \Big\{ \{x_j\} : \sharp\{j : x_j \in K\} < \infty,\ \forall K \text{ compact} \Big\}. \end{aligned}$$

配置の集合 $\mathcal{X} \subset \mathfrak{M}$

$$\mathcal{X} \text{ が relative compact} \Leftrightarrow \sup_{\xi \in \mathcal{X}} \xi(K) < \infty,\ \forall K \subset \mathbb{R} \text{ compact}$$

Dirichlet forms

ある $\ell \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathbb{R}^\ell$ 上の多項式 Q と $\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台をもつ滑らかな関数 ϕ_k, $k = 1, \dots, \ell$ により

$$f(\xi) = Q\left(\langle \phi_1, \xi \rangle, \langle \phi_2, \xi \rangle, \dots, \langle \phi_\ell, \xi \rangle\right)$$

と表される関数 f を $\mathfrak{M}$ 上の多項式いう．ここで $\langle \phi, \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\xi(dx)$ である．$\mathfrak{M}$ 上の多項式全体の集合を $\mathcal{P}$ とおく．$f, g \in \mathcal{P}$ に対して

$$\mathcal{E}^\mu(f, g) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} \sum_{x : \xi(\{x\}) > 0} \frac{\partial f(\xi)}{\partial x} \frac{\partial g(\xi)}{\partial x} \mu(d\xi),$$

と定義する．$\mu_\star = \mu_{\mathrm{sin},\beta}$, $\mu_{\mathrm{Ai},\beta}$, $\beta = 1, 2, 4$ のとき $(\mathcal{E}^{\mu_\star}, \mathcal{P})$ 　は, 可閉であり, 閉包は準正則ディリクレ形式であり, 対応する拡散過程 $(\Xi_\star, P_\xi)$ が存在することが示されている．(0sada: CMP1996, SPA2013)

Theorem 1

$\mathbf{X}(t)$ を $\Xi_{\mathrm{Ai},\beta}$ に番号付けして得られる $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 値連続確率過程：

$$\Xi_{\mathrm{Ai},\beta}(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_{X_j(t)}$$

厳密な構成は、番号付けのある有限粒子と番号付けのない無限粒子からなる確率過程の列による. (Osada:JMSJ2010)
本講演の主定理は, 次の結果である.

定理 1 ([Osada-T 2014]) $\beta = 1, 2, 4$ のとき $\mathbf{X}(t) = (X_1, X_2, \dots)$ が次の無限次元確率微分方程式 (ISDE) の唯一の強解である:

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \lim_{L\to\infty} \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{k\neq j, |X_k(t)|<L} \frac{1}{X_j(t) - X_k(t)} - \int_{|x|<L} \frac{\widehat{\rho}(x)dx}{-x} \right\} dt,$$

ここで $\widehat{\rho}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{-x}\mathbf{1}(x<0)$ であり、 $B_j(t), j \in \mathbb{N}$ は, 独立な 1 次元標準ブラウン運動である.

Bulk scaling limit case との比較

$\mathbf{X}(t)$ を $\Xi_{\sin,\beta}(t)$ に番号付けして得られる確率過程とする。 $\beta = 1, 2, 4$ のとき $\mathbf{X}(t)$ が次の無限次元確率微分方程式 (ISDE) の唯一の強解である (Osada:PTRF2012 + Osada-T:preprint2014)

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \lim_{L\to\infty} \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{k\neq j, |X_k(t)|\leq L} \frac{1}{X_j(t) - X_k(t)} \right\} dt,$$

主定理での Soft edge scaling の ISDE

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \lim_{L\to\infty} \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{k\neq j, |X_k(t)|<L} \frac{1}{X_j(t) - X_k(t)} - \int_{|x|<L} \frac{\widehat{\rho}(x)dx}{-x} \right\} dt,$$

Theorem 2

$\mu_{\mathrm{Ai},2}$ を平衡分布とする可逆確率過程は, 拡張されたエアリー核を多時刻相関関数とる行列式点過程としても構成されている (Johansson03, Prähofer-Spohn02, Katori-T07). この確率過程を $(\widehat{\Xi}_{\mathrm{Ai},2}(t), P)$ とおく.

定理 2 $(\widehat{\Xi}_{\mathrm{Ai},2}(t), P)$ に番号付けして得られる確率過程を $\widehat{\mathbf{X}}$ とおく. $\widehat{\mathbf{X}}$ は、ISDE

$$d\widehat{X}_j(t) = dB_j(t) + \lim_{L\to\infty}\left\{\frac{\beta}{2}\sum_{k\neq j, |\widehat{X}_k(t)|<L}\frac{1}{\widehat{X}_j(t)-\widehat{X}_k(t)} - \int_{|x|<L}\frac{\widehat{\rho}(x)dx}{-x}\right\}dt,$$

をみたす. そして

$$(\widehat{\Xi}_{\mathrm{Ai},2}(t), P) = (\Xi_{\mathrm{Ai},2}, P_{\mu_{\mathrm{Ai},2}})$$

が確率過程の分布の意味で成立する. ここで $P_\mu(\cdot) = \int_{\mathcal{M}}\mu(d\xi)P_\xi(\cdot)$.

この定理の 2 つめの主張は, 次の講演で議論される ISDE の解の一意性からみちびかれる.

対数微分

$\mu^1(dxd\eta) = \rho(x)\mu_x(\eta)dx$：1-Campbell measure
$\mu_x(\cdot) = \mu(\cdot - \delta_x|\xi(x) > 0)$：Palm 測度　$\rho(x)$：一次の相関関数

定義（対数微分）$d_\mu \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathfrak{M})$ が μ の対数微分であるとは

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathfrak{M}} \nabla_x f(x,\eta) d\mu^1(x,\eta) = -\int_{\mathbb{R}\times\mathfrak{M}} f(x,\eta) d^\mu(x,\eta) d\mu^1(x,\eta)$$

が $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ に対して成り立つことである.

定理 (Osada PTRF 2012):
μ が準ギッブス分布　＋　対数微分 d_ν の存在　＋ ϵ
の下で、番号付けされた確率過程 **X** が構成でき、次に ISDE をみたす。

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \frac{1}{2} d^\mu(X_j(t), \sum_{k=\neq j} \delta_{X_k(t)})dt.$$

Soft-edge scaling での有限粒子系の分布：

$$\frac{1}{c_N} h_N(\mathbf{x})^2 \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} |2\sqrt{N} + n^{-1/6}x_j|^2 \Big\}$$

この分布に対応する番号付けされた粒子系がみたす SDE:

$$dX_j^N(t) = dB_j(t) - \Big(N^{1/3} + \frac{X_j^N(t)}{N^{1/3}} \Big) dt + \sum_{\substack{1\le k\le N \\ k\ne j}} \frac{1}{X_j^N(t) - X_k^N(t)} dt,$$

$\rho^N(X) = N^{1/3}\rho_{semi}(N^{-2/3}x+2)$ と半円分布の密度関数を Soft-edge scaling　を用いたとき

$$\rho^N(X) \to \widehat{\rho}(x), \quad N\to\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \rho^N(x)dx = N^{1/3}$$

有限系の対数微分が無限系の対数微分に収束することにより ISDE のドリフト部分を決定する.

積率母関数と相関関数

$\mathfrak{M}$-値過程 $\Xi(t)$ の多時刻分布の積率母関数

$$\Psi^{(t_1,\dots,t_M)}(f_1,\dots,f_M) = \Psi^{\mathbf{t}}(\mathbf{f}) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{m=1}^{M}\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\Xi(t_m,dx)\right\}\right] \quad (1)$$

$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_M$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_M) \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})^M$.
この積率母関数は、相関関数の母関数として表すと次のようになる：

$$\Psi^{\mathbf{t}}(\mathbf{f}) = \sum_{aaa\substack{N_m\ge 0,\\ 1\le m\le M}} \int_{\prod_{m=1}^{M}\mathbb{R}^{N_m}} \prod_{m=1}^{M}\left\{\frac{1}{N_m!}d\mathbf{x}_{N_m}^{(m)}\prod_{i=1}^{N_m}\chi_m\left(x_i^{(m)}\right)\right\} \times\rho_\xi\left(t_1,\mathbf{x}_{N_1}^{(1)};\dots;t_M,\mathbf{x}_{N_M}^{(M)}\right),$$

ここで $\chi_m(\cdot) = e^{f_m(\cdot)} - 1$ であり $\rho_\xi(\dots)$ が 多時刻相関関数.

行列式過程

$\mathfrak{M}$-値過程 $\Xi(t)$ が行列値過程 であるとは、 積率母関数 が Fredholm 行列式

$$\Psi^{\mathbf{t}}[\mathbf{f}] = \operatorname*{Det}_{\substack{(s,t)\in\{t_1,t_2,\dots,t_M\}^2,\\ (x,y)\in\mathbb{R}^2}} \Big[\delta_{st}\delta_x(y) + \mathbb{K}(s,x;t,y)\chi_t(y)\Big], \qquad (2)$$

で表せることである. また同値であるが、多時刻相関関数が

$$\rho\left(t_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; \dots; t_M, \mathbf{x}_{N_M}^{(M)}\right) = \det_{\substack{1\le j\le N_m, 1\le k\le N_n\\ 1\le m,n\le M}} \left[\mathbb{K}(t_m, x_j^{(m)}; t_n, x_k^{(n)})\right].$$

で表せると言うこともできる. ここで $\mathbb{K}$ は、確率過程 $\Xi(t)$ の相関核 と呼ばれる関数である.

The 拡張された正弦核

(3) The bulk scaling limit:

$$\mathbb{K}_N\left(\frac{2N}{\pi^2}+s, x; \frac{2N}{\pi^2}+t, y\right) \to \mathbf{K}_{\sin}(s,x;t,y), \quad N \to \infty,$$

$$\mathbf{K}_{\sin}(s,x;t,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 du\, e^{\pi^2 u^2 (t-s)/2} \cos\{\pi u(y-x)\} & \text{if } t > s \\ \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} = K_{\sin}(x,y) & \text{if } t = s \\ \displaystyle -\int_1^\infty du\, e^{\pi^2 u^2 (t-s)/2} \cos\{\pi u(y-x)\} & \text{if } t < s. \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{R}$.

The 拡張されたエアリー核

(5) The soft-edge scaling limit: Let $f_N(u) = 2N^{2/3} + N^{1/3}u - u^2/4$.

$$\mathbb{K}_N\Big(N^{1/3} + s, f_N(s) + x; N^{1/3} + t, f_N(t) + y\Big) \\ \to \mathbf{K}_{\mathrm{Ai}}(s, x; t, y), \quad N \to \infty.$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{Ai}}(s, x; t, y) \equiv \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty du\, e^{-u(t-s)/2} \mathrm{Ai}(u + x)\mathrm{Ai}(u + y) & \text{if } t > s, \\ \dfrac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x - y} & \text{if } t = s, \\ -\displaystyle\int_{-\infty}^0 du\, e^{-u(t-s)/2} \mathrm{Ai}(u + x)\mathrm{Ai}(u + y) & \text{if } t < s, \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{R}$.

有限系

Bulk scaling での有限粒子系の分布：

$$\frac{1}{c_N} h_N(\mathbf{x})^2 \exp\{-\frac{\rho|\mathbf{x}|^2}{2N}\}.$$

この分布に対応する番号付けされた粒子系がみたす SDE:

$$dX_j^N(t) = dB_j(t) - \frac{\rho}{2N} X_j^N(t)dt + \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\neq j}} \frac{1}{X_j^N(t) - X_k^N(t)} dt,$$

有限系の対数微分が無限系の対数微分に収束することにより ISDE のドリフト部分を決定する.

Thanks

Thank you for your attention!