

# 非線形共振を利用した 生体試料形状観察法

藪野浩司  
慶應義塾大学理工学部機械工学科  
産業技術の連携研究のためのワークショップ  
2011年12月2日

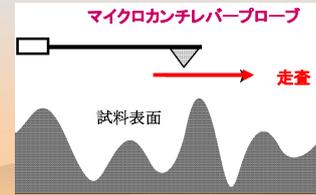
## 1. はじめに

### AFMの原理

#### マイクロカンチレバープローブ

↓ 試料表面を走査

試料表面の形状をナノスケールオーダーで測定



## 生体試料の液中構造観察 AFMの今後の目標

### 半導体表面形状観察と比較して困難な点

- (1) 測定環境が液中である(高粘性条件下での測定)
- (2) 試料が極めて柔軟でプローブの接触により容易に破壊される

### ファンデルポール型自励発振方式AFMを提案

特許第3817589号:カンチレバー制御装置  
U. S. PATENT NO. 7886366

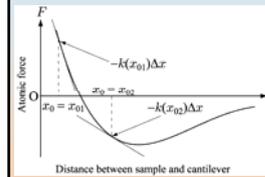
(産業技術総合研究所 黒田雅治氏との共同研究)

## AFMによる表面形状測定原理

カンチレバーの先端の原子

≦ 対向する測定対象表面の原子から原子間力を受ける

原子間力は原子間距離の非線形な関数(勾配が変化する)



カンチレバーと試料表面との距離の違い(勾配の違い)

↓ ↑

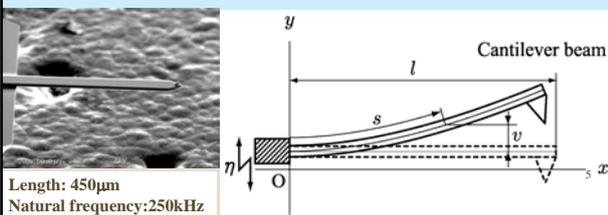
カンチレバーの固有振動数

↓

変化

Key point: どのようにすれば正確に固有振動数を測れるか?

## 固有振動数の測定法(従来法:強制加振の利用)



### Micro cantilever with piezo actuator

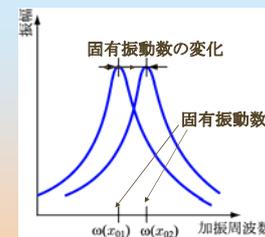
$v$ : Deflection of cantilever at point  $s$

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) + C_{lim} \frac{\partial v}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \dots = 0 \quad (1)$$

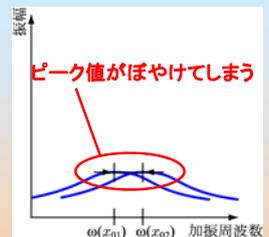
$$\text{強制加振} \quad \eta = a \cos \nu t \quad (2)$$

## 高粘性液中生体試料観察における強制加振法の問題点

### 真空中での周波数応答曲線



### 液中での周波数応答曲線



### Frequency response curve under external excitation

$$\text{問題点} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a\nu^2 \cos \nu t \quad (3)$$

・減衰の影響により正確な固有周波数が計測不可能

$$x = \frac{a/m}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2})^2 + \frac{2c}{m\nu}}} \cos(\nu t + \phi), \quad \sqrt{k/m} = \omega$$

## 2. 非線形共振の利用

強制加振  $\rightarrow$  自励発振

線形速度フィードバックによる自励発振系

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = K_l \dot{x} \quad (4)$$

$\rightarrow$  速度正帰還

$$m\ddot{x} + (c - K_l)\dot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

$\rightarrow$  負減衰系: 自励振動発生

$$x = a_0 e^{\frac{k_l - c}{m}t} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{k_l - c}{m}}t + \phi_0\right) \quad (6)$$

自励発振: 固有周波数で発振する  
(Hopf 分岐: 固有値の虚部が振動数)

液中観察(高粘性環境での固有周波数測定のため)      非接触観察(生体にダメージを与えないため)

自励発振を保ちつつ振幅は発散しないように (低振幅)

リミットサイクルを発生させる

Application of nonlinear force

### 自励発振の振幅制御法の提案

Van der Pol oscillator

Amplitude

非線形フィードバックによる振幅の低減化

Linear velocity feedback gain

非線形フィードバックゲインを適切に設定することで振幅特性曲線の勾配を小さく抑える (分岐制御) リミットサイクルを作り、その大きさを小さくする

### 積分フィードバック制御

#### カンチレバーの運動方程式

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) + C_{lin} \frac{\partial v}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \dots = 0 \quad (1)$$

支持位置の変位を以下のように与える

$$\eta = K_{lin} \int \frac{\partial v}{\partial s} dt \Big|_{s=l} - K_{non} \int \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^3 dt \Big|_{s=l} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = K_{lin} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_{s=l} - K_{non} \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_{s=l} \quad (10)$$

### 理論解析

#### 無次元運動方程式

$$\ddot{v}^* + v^{*4} + \mu_{lin} \dot{v}^* + v^{*4} v^{*2} + 4v^* \dot{v}^* v^{*3} + v^{*6} + \left[ v^* \int_1^{s^*} \int_0^{s^*} (\dot{v}^{*2} + v^* \dot{v}^*) ds^* ds^* \right] = - (k_{lin}^* \dot{v}^* \Big|_{s^*=1} - k_{non}^* v^{*2} \Big|_{s^*=1} \dot{v}^* \Big|_{s^*=1}) \quad (11)$$

Negative damping      Nonlinear viscous damping

Dynamics of van der Pol oscillator

#### 無次元境界条件

$$v^{*3} \Big|_{s^*=1} = v^{*3} \Big|_{s^*=1} = v^{*3} \Big|_{s^*=0} = v^{*3} \Big|_{s^*=0} = 0 \quad (12)$$

( $\cdot$ ) and ( $t$ ) are the partial differential respected to  $t$  and  $s$ , respectively.

### 多重尺度法による解析

#### Uniform expansion for the solution

$$v = \epsilon v_1(s, t_0, t_2) + \epsilon^3 v_3(s, t_0, t_2) + \dots \quad (13)$$

Amplitude equation  $\leftarrow$  Solvability condition of  $v_3$

Set the order of feedback gain

$$k_{lin} = \epsilon^2 \hat{k}_{lin}, \quad k_{non} = \hat{k}_{non} \quad (\hat{k}_{lin} = \hat{k}_{non} = O(1)) \quad (14)$$

Multiple time scales

$$t_0 = t, \quad t_2 = \epsilon^2 t \quad (15)$$

$O(\epsilon^1)$

$$D_0^2 v_1 + v_1'''' = 0$$

$$v_1'''(1) = v_1''(1) = v_1'(0) = v_1(0) = 0$$

where  $D_0 = \frac{\partial}{\partial t_0}$

**Solution**

$$v_1 = \Phi_1(s)A(t_2)e^{i\omega t_0} + C.C.$$

$$\Phi_1''' - \omega^2 \Phi_1 = 0$$

$$\Phi_1'''(1) = \Phi_1''(1) = \Phi_1'(0) = \Phi_1(0) = 0,$$

$O(\epsilon^3)$  :

$$D_0^2 v_3 + v_3'''' = -2D_0 D_2 v_1 - \hat{\mu}_{lin} D_0 v_1$$

$$- v_1'''' v_1'^2 - 4v_1' v_1'' v_1''' - v_1''^3$$

$$- v_1'' \int_1^s \int_0^s \{D_0^2 v_1'^2 + v_1' D_0^2 v_1'\} ds ds$$

$$- w_1' \int_1^s \{D_0^2 v_1'^2 + v_1' D_0^2 v_1'\} ds$$

$$- (\hat{k}_{lin} - \hat{k}_{non} v_1'^2) D_0 v_1'|_{s=1}$$

**Particular solution**

$$v_3 = \Phi_3(s, t_2)e^{i\omega t_0} + C.C.$$

$$\Phi_3'''' - \omega^2 \Phi_3 = -2i\omega \Phi_1 D_2 A(t_2) + C(s)|A|^2 A$$

$$- i\hat{\mu}_{lin}\omega \Phi_1 A$$

$$+ i\omega \{ \hat{k}_{lin} - \hat{k}_{non} \Phi_1'|_{s=1} |A|^2 \} A \Phi_1'|_{s=1}$$

$$\Phi_3'''(1) = \Phi_3''(1) = \Phi_3'(0) = \Phi_3(0) = 0,$$

Solvability condition of  $\Phi_3$

↓

Modulation equation of complex amplitude  $A$

**Solution**  $v_1 = \Phi_1(s)A(t_2)e^{i\omega t_0} + C.C.$

**Approximate solution**

$$v = a(t)\Phi_1(s) \cos\{\omega t - \gamma(t)\} \quad (16)$$

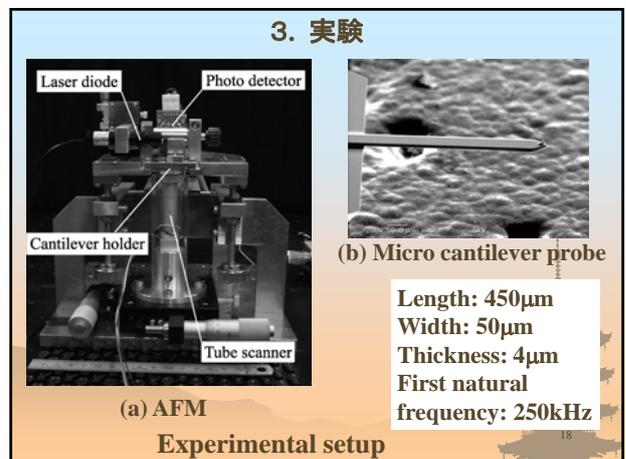
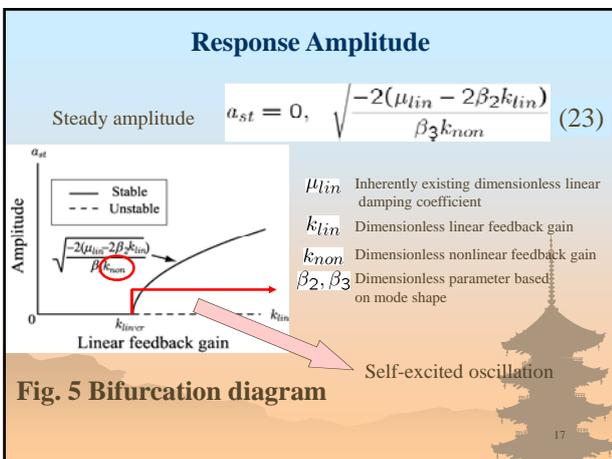
$$\frac{da}{dt} + \left(\frac{1}{2}\mu_{lin} - \beta_2 k_{lin}\right)a + \frac{1}{4}\beta_3 k_{non} a^3 = 0 \quad (17)$$

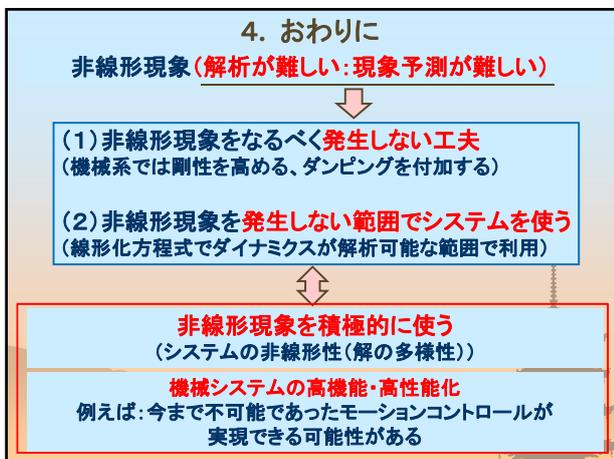
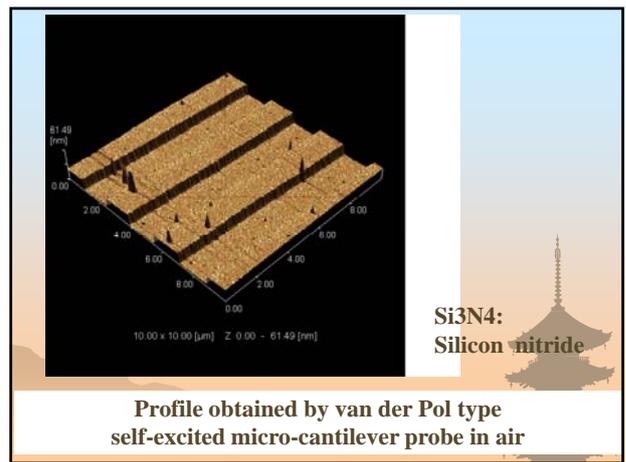
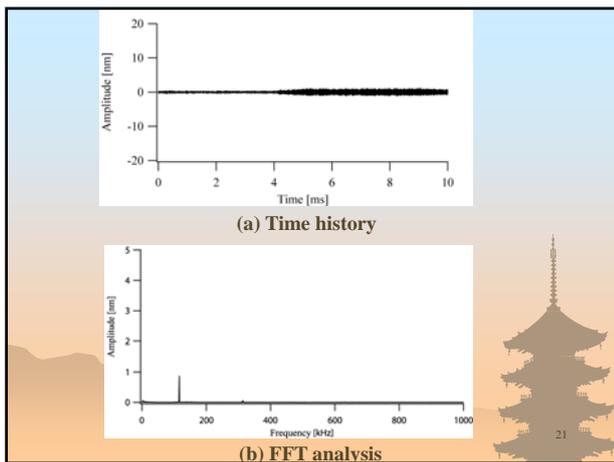
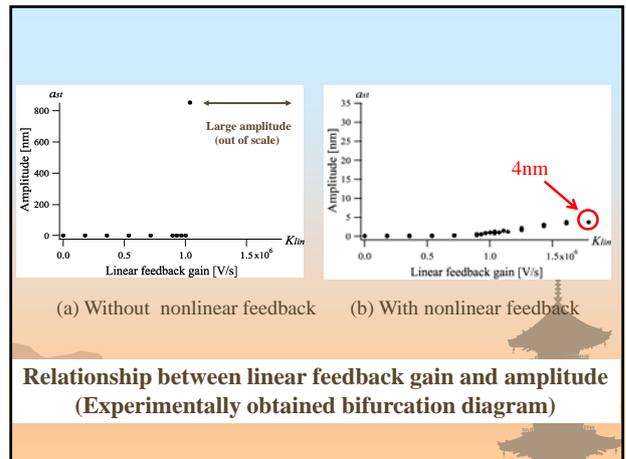
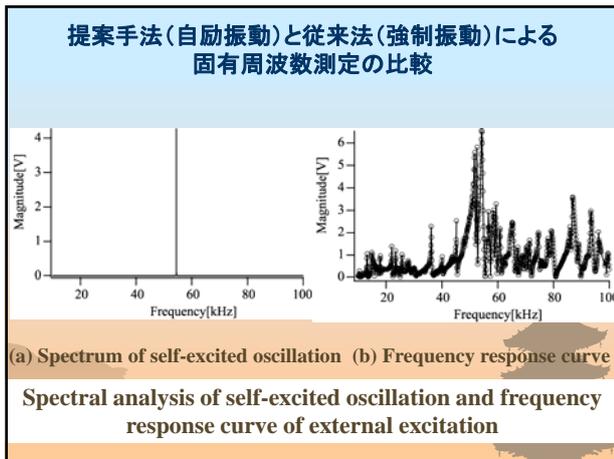
$$\frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{4}\beta_1 a^2 = 0, \quad (18)$$

**Steady state self-excited oscillation**

$$v = a_{st}\Phi_1(s) \cos\left\{\left(\omega - \frac{1}{4}\beta_1 a_{st}^2\right)t - \gamma_0\right\} \quad (19)$$

**Steady state amplitude**

$$a_{st} = 0, \quad \sqrt{\frac{-2(\mu_{lin} - 2\beta_2 k_{lin})}{\beta_3 k_{non}}} \quad (20)$$




参考文献

- (1) Yabuno, H., Kuroda, M., Someya, T., Hayashi, K., and Ashida, K., Van der Pol-Type Self-Excited Microcantilever probe for atomic force microscopy, Japanese Journal of Applied Physics, 2011, 50, 076601.
- (2) Yabuno, H., Stabilization and utilization of nonlinear phenomena based on bifurcation control for slow dynamics, Journal of Sound and Vibration, 2008, 315, pp766-780.
- (3) Yabuno, H., Matsuda, Y., and Aoshima, N., Reachable and stabilizable area of an underactuated manipulator without state feedback control, IEEE-ASME Transaction on Mechatronics, 2005, 10, pp. 397-403.