平成23年度 数学・数理科学と諸科学・産業との連携研究ワークショップ
ウィンタースクール「数理モデルの産業・諸科学への活用 -数理モデルの夢-」

有限要素スキームを用いた流れ問題の数値解析

田上 大助
(九州大学 MI研究所)

数値計算の手続き

自然現象

誤差

モデル化

数理モデル

誤差

離散化

近似方程式

非圧縮
粘性流体

質量保存
運動方程式
構成方程式

Navier-Stokes
方程式

有限差分法
有限要素法
有限体積法

連立 (非) 線形方程式

キーワード

流れ問題の有限要素スキーム

1. 計算手法の誤差評価
2. 大規模化への対応

<u>キーワード</u>

1.計算手法の誤差評価

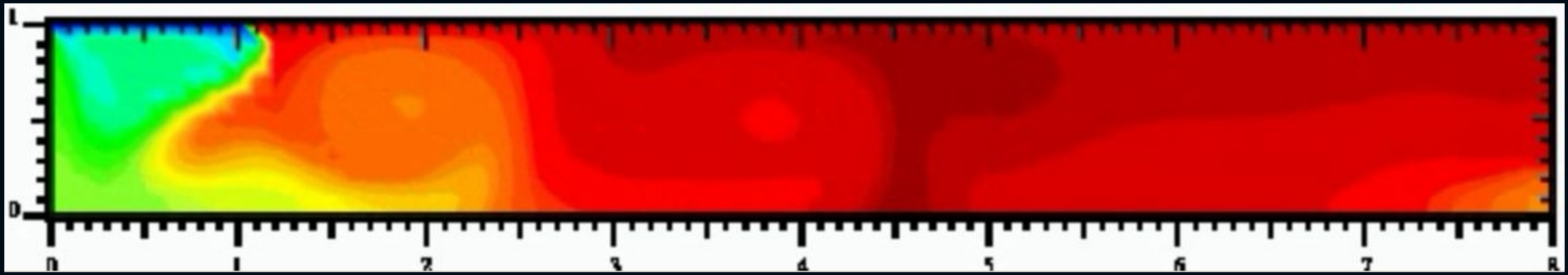
熱対流問題

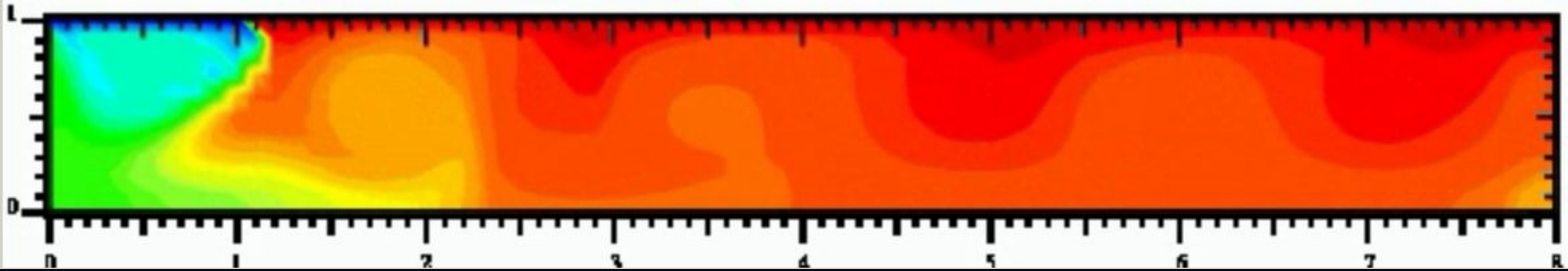
・・・・・・・・   T-ITOH (2003), TABATA-T (2005).

境界上の熱収支への応用

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・T(2007).

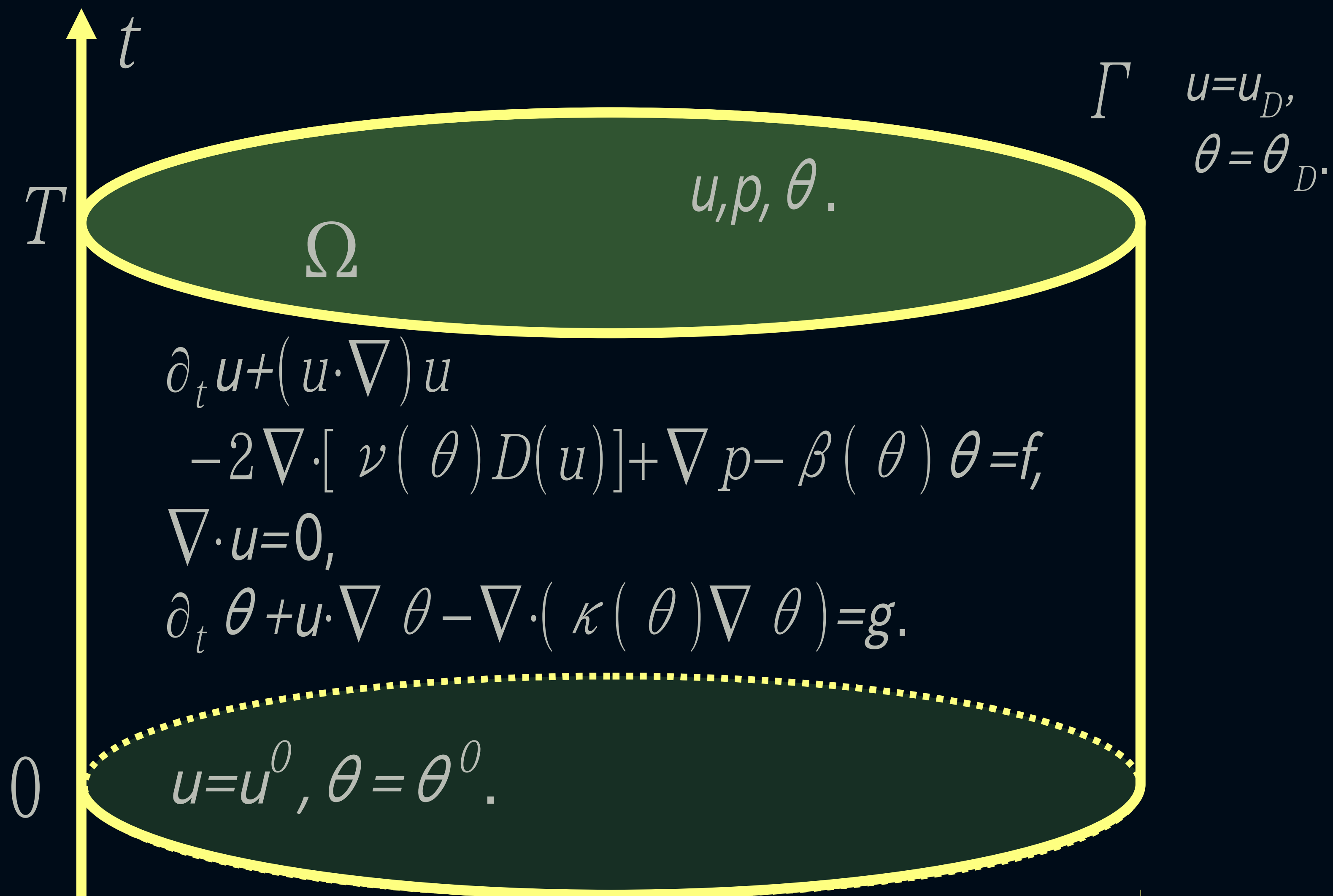
熱対流問題: ガラス溶融炉計算例





電極挿入の有無による, ガラス溶融炉内部の温度分布の違い
(上段: 電極有り; 下段: 電極無し)

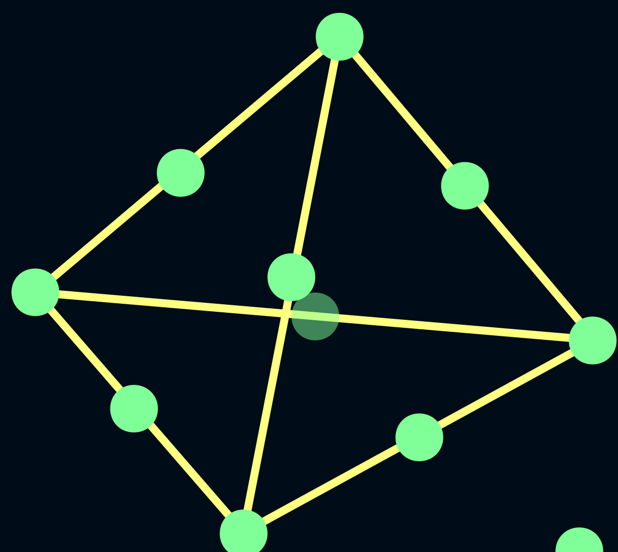
熱対流問題: 定式化


t
T
0
Γ
$u = u_D,$
$\theta = \theta_D.$
$u, p, \theta.$
Ω
$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u$
$-2\nabla \cdot [\nu(\theta) D(u)] + \nabla p - \beta(\theta)\theta = f,$
$\nabla \cdot u = 0,$
$\partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa(\theta) \nabla \theta) = g.$
$u = u^0, \theta = \theta^0.$

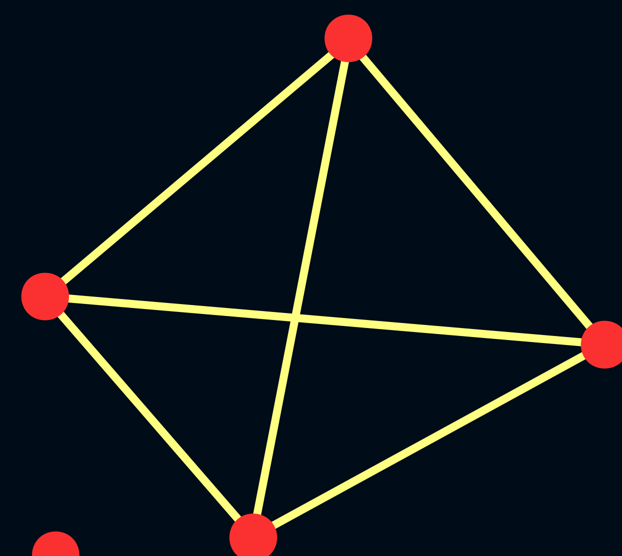
熱対流問題: 有限要素空間

3次元 (2次元) 解析領域を4面体 (3角形) 分割した場合を考える.

-流速場 & 温度場:
P2 要素



-圧力場 & 物理係数:
P1 要素



DOF

熱対流問題: 誤差評価

$$\|u-u_h\|,\ \|\theta-\theta_h\| \le c(\Delta t+h^2),$$

$$\|p-p_h\| \le c\,\Delta t^{-1/2}(\Delta t+h^2)$$

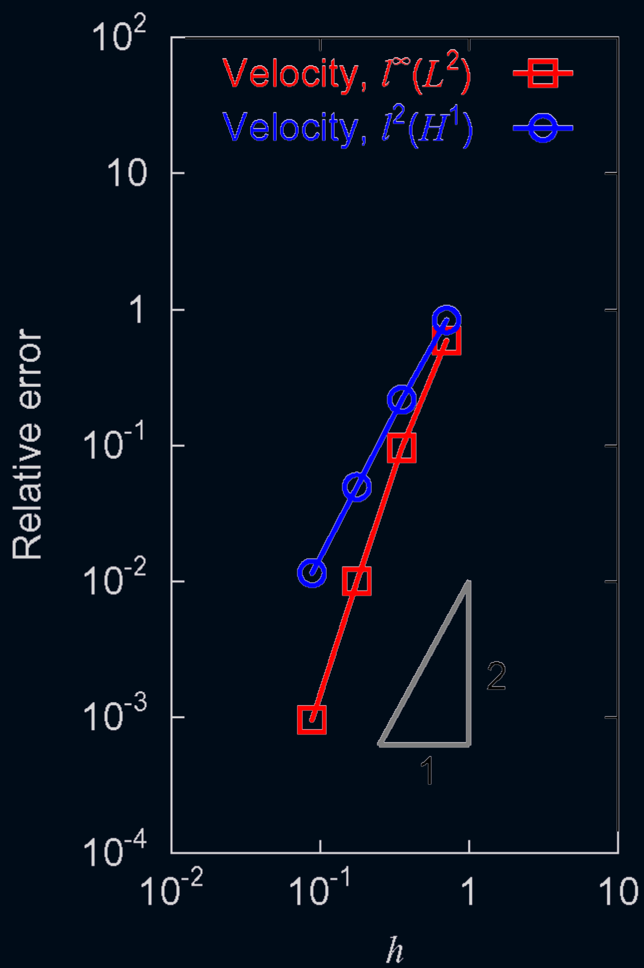
Δt : 時間刻み, h : 要素最大直径.

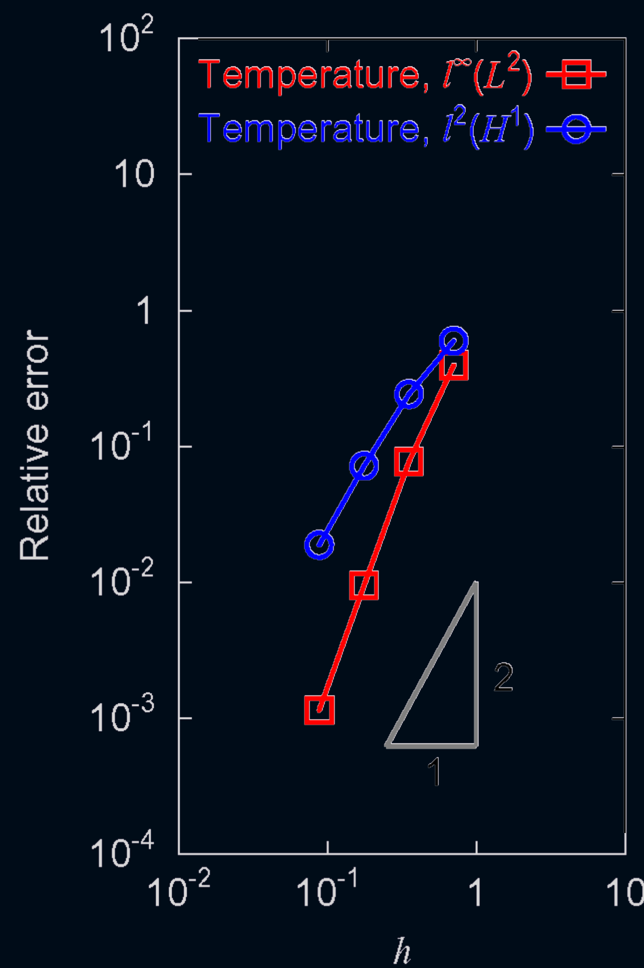
TABATA & T (2005)

$$\Delta t=ch^2 \ \Rightarrow\ \|p-p_h\| \le ch$$

流れが“滑らか” $\Rightarrow$ $\|p-p_h\| \le c(\Delta t+h^2)$

熱対流問題: 誤差評価の確認





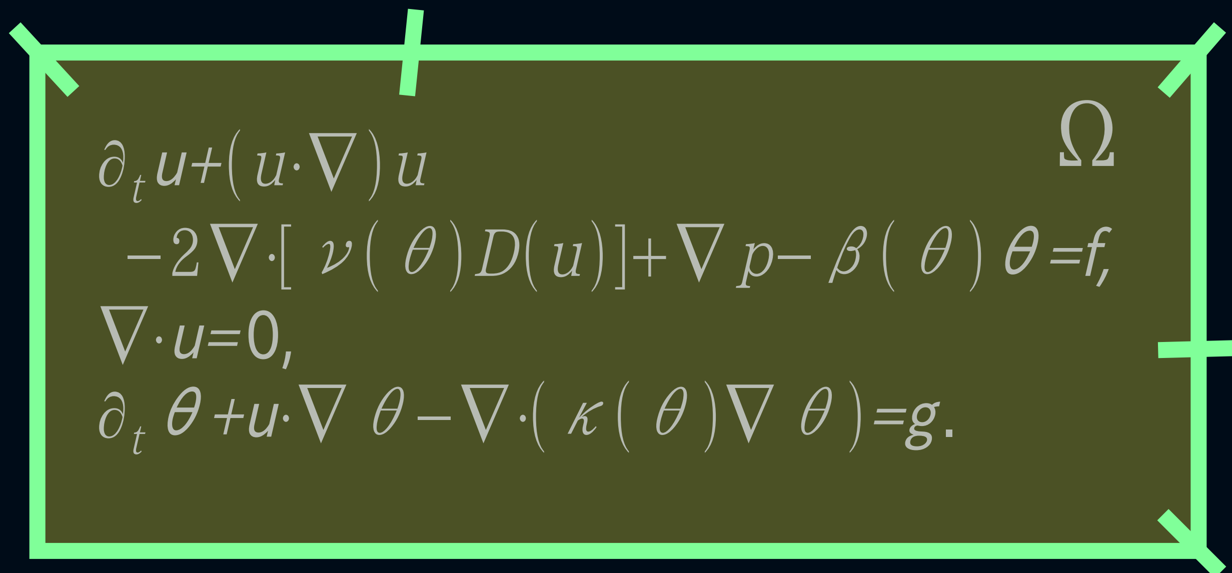
ある検証問題における誤差の収束の様子. h の2乗に比例して相対残差が収束している様子が分かる. ただし $\Delta t=ch^2$ とした.

境界流束の計算: 熱収支の計算 [1/3]

Γ_2 **原料流入境界**

$u = u_D, \quad \theta = \theta_D.$

Γ_1 **自由表面境界** $u \cdot n = 0, \quad \theta = \theta_D.$



$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u - 2\nabla \cdot [\nu(\theta) D(u)] + \nabla p - \beta(\theta)\theta = f,$$

$$\nabla \cdot u = 0,$$

$$\partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa(\theta) \nabla \theta) = g.$$

Γ_3 **炉壁境界**

Γ_0 **原料流出境界**

$\tau(u, p, \theta) = 0,$

$\partial_n \theta = 0.$

Γ_3 **炉壁境界** $u = 0, \; \partial_n \theta = 0.$

境界流束の計算: 整合流束法の導入 [1/2]

$$\mathrm{OE} := \int \theta\, u\cdot n\, ds$$

$$= -\int \partial_t \theta\ \phi_O\, dx + \int (u\cdot\nabla)\ \phi_O\, \theta\ dx$$

$$-\int \nabla\theta\cdot\nabla\phi_O\, dx + \int f\ \phi_O\, dx$$

$$\mathrm{OE}_h^n := -\int D_\tau \theta_h^n\ \phi_{O_h}\, dx + \int (u_h^{n-1}\cdot\nabla)\ \phi_{O_h}\, \theta_h^n\, dx$$

$$-\int \nabla\theta_h^n\cdot\nabla\phi_{O_h}\, dx + \int f^n\ \phi_{O_h}\, dx$$

適当な試験関数を採用することで,境界積分を領域積分での評価に変換

境界流束の計算: 整合流束法の誤差評価

定数係数/変数係数 (空間依存)

$$\|\mathrm{OE}-\mathrm{OE}_h\| \le c\,(\Delta t + h^2)$$

変数係数 (温度, 空間, 時間依存)

$$\|\mathrm{OE}-\mathrm{OE}_h\| \le c\;\Delta t^{-1/2}(\Delta t + h^2)$$

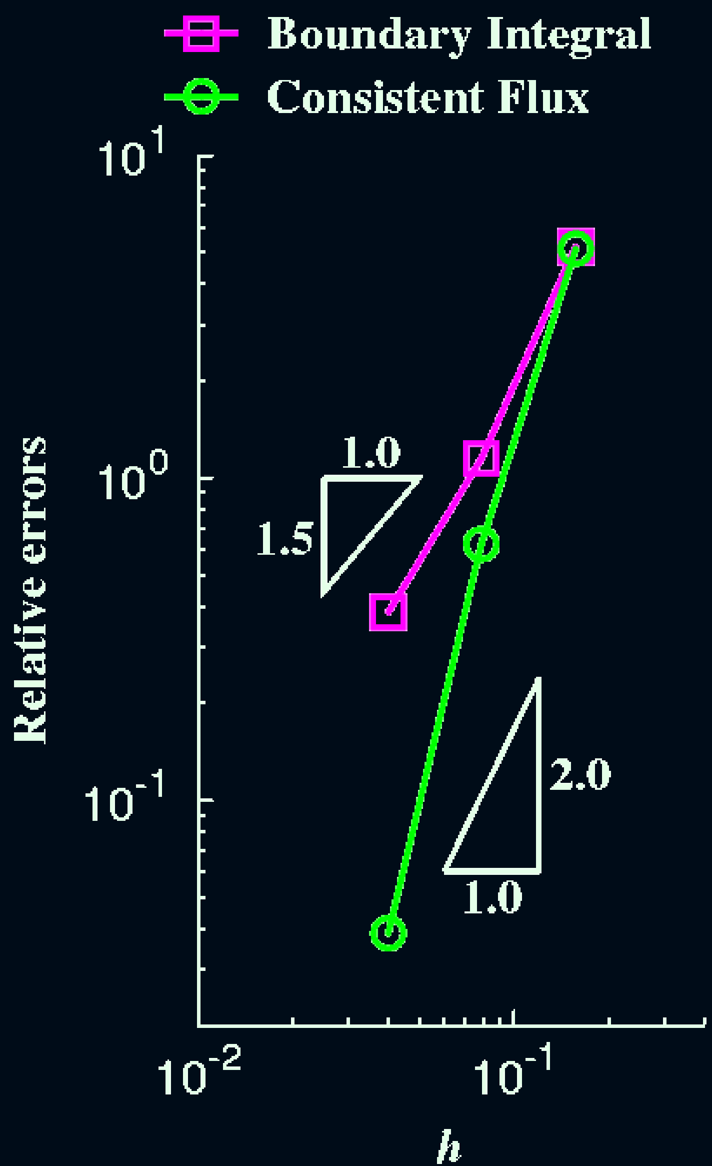
$$\Delta t = ch^2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathrm{OE}-\mathrm{OE}_h\| \le ch$$

解が“滑らか” $\Rightarrow \quad \|\mathrm{OE}-\mathrm{OE}_h\| \le c(\Delta t + h^2)$

Δt : 時間刻み, h: 要素最大直径.

T (2007)

境界流束の計算: 誤差評価の確認



$$
\begin{aligned}
C_D :=& \int \tau(u,p)\cdot m_U \, ds \\
=& -\int \partial_t u \, v_D \, dx - \int (u\cdot\nabla)\, u \, v_D \, dx \\
& -\frac{2}{\mathrm{Re}} \int D(u)\cdot D(v_D)\, dx + \int p \,\mathrm{div}\, v_D \, dx \\
& + \int f \, v_D \, dx
\end{aligned}
$$

with $v_D = m_U$ on Γ_G, $v_D = 0$ on Γ_C,

m_U: unit vector along with U.

ある検証問題における抗力の数値計算. 境界近傍での物体周りの流れが“複雑な場合”を考えている. このとき, 定義通り境界積分 (Boundary Integral) を用いるよりも整合流束法 (Consistent Flux) を用いた方が, 精度および誤差の収束次数がより良くなっていることが分かる.

境界流束の計算: 整合流束法の利点

1. 熱の流入・流出の他にも, 抗力・揚力など境界積分で定義された様々な物理量に対して, **領域積分による再定義** が可能.

2. 境界積分を用いたときと比較して, **収束次数を“最適に”保つ誤差評価** が可能.

3. 有限要素法を用いている場合, 領域積分には既に得られている近似方程式の係数行列を流用できるため, **計算コストの削減** が可能.

キーワード

2.大規模化への対応

移流拡散問題やNavier-Stokes方程式に対する反復型領域分割法の導入

Yagawa & Shioya (1993)
Kanayama, T & Chiba (2006)

Navier-Stokes方程式: 定式化

$\Gamma : u = u_D$

Ω

$$(u \cdot \nabla) u - 2 \nabla \cdot [\nu D(u)] + \nabla p = f,$$
$$\nabla \cdot u = 0.$$

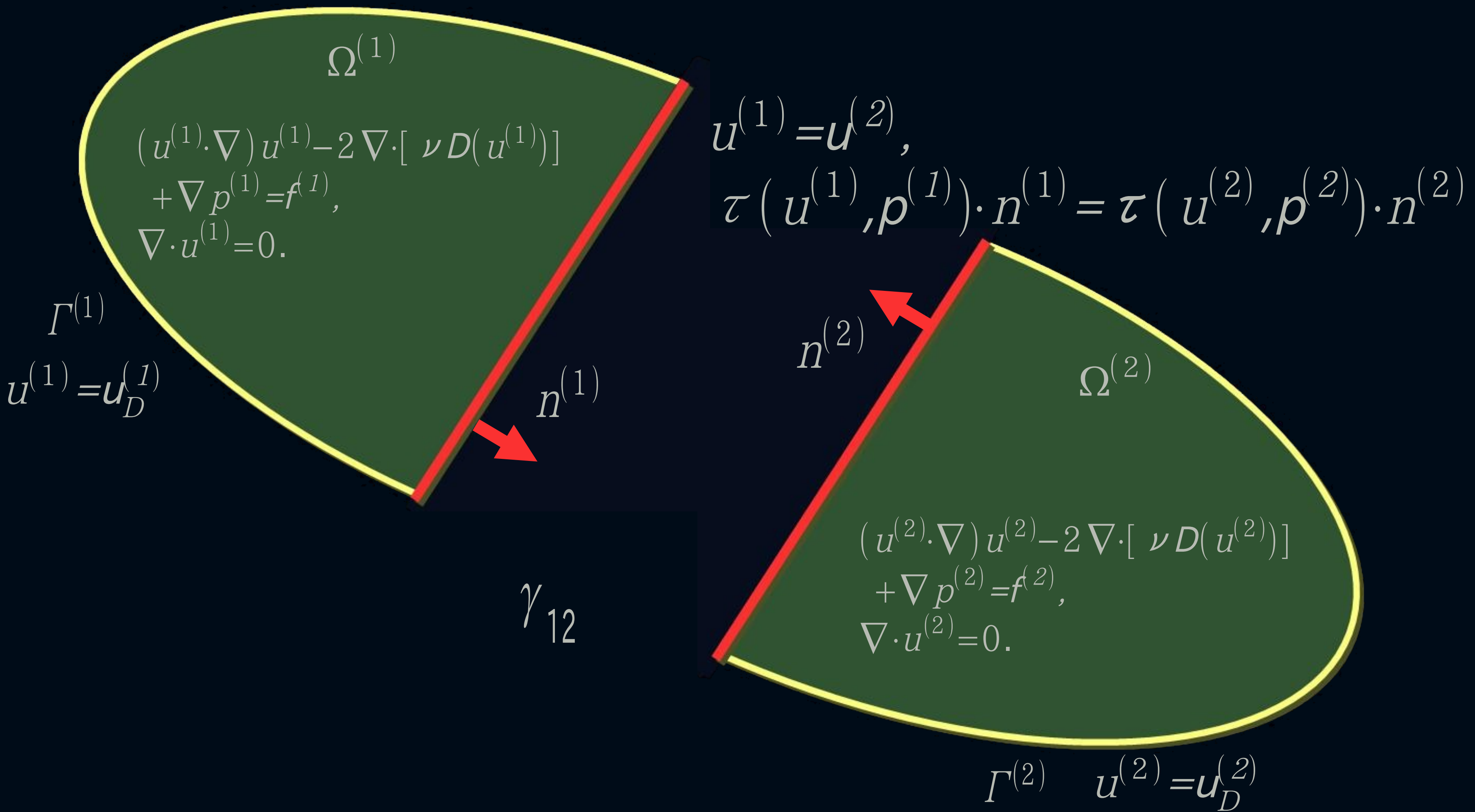
Ω, Γ; domain (in R^d, d=2, 3) and its boundary,

$u : \Omega \to R^d$; velocity,
$p : \Omega \to R$; pressure,
$\nu : \Omega \times R \to R$; physical coefficients,

$f : \Omega \to R^d$; force,
$u_D : \Gamma \to R^d$; boundary velocity,

$D(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$; strain-rate tensor.

Navier-Stokes方程式: 2領域問題

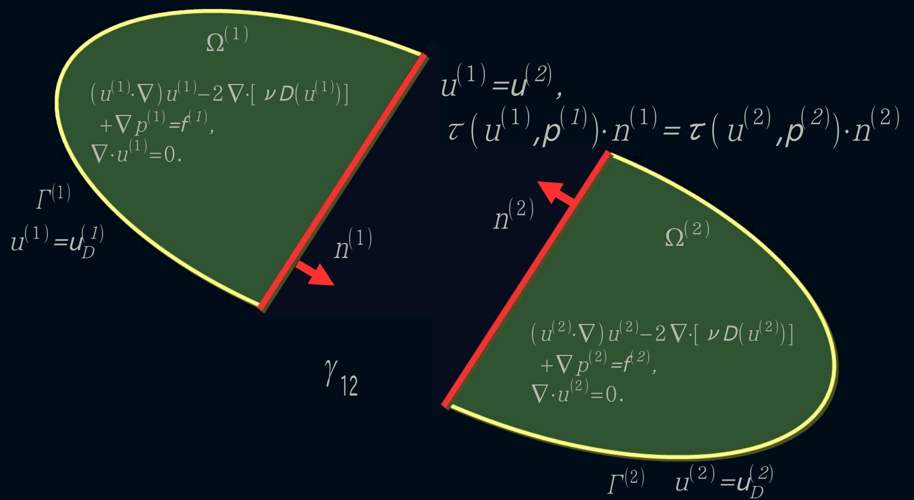


Navier-Stokes方程式: 人工境界問題

有限要素方程式 $\mathrm{A}\mathrm{x} = f$

部分領域および人工境界
ごとに番号付けを整理

$$
\begin{pmatrix} A_{\mathrm{II}}^{(1)} & O & A_{\mathrm{IB}}^{(1)} \\ O & A_{\mathrm{II}}^{(2)} & A_{\mathrm{IB}}^{(2)} \\ A_{\mathrm{BI}}^{(1)} & A_{\mathrm{BI}}^{(2)} & A_{\mathrm{BB}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I^{(1)} \\ x_I^{(2)} \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I^{(1)} \\ f_I^{(2)} \\ f_B \end{pmatrix}
$$



I: Corresponding to Inner DOF,
B: Corresponding to Interface DOF.

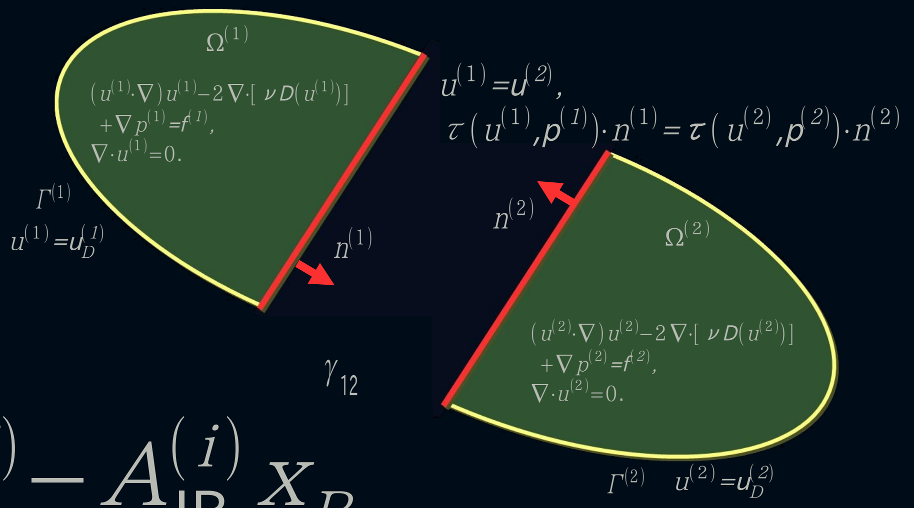
人工境界上にない
自由度を消去

人工境界問題 $\mathrm{K}\mathrm{x}_B = g$

$$
K := A_{BB} - \sum_{i=1}^{2} A_{\mathrm{BI}}^{(i)} \left\{ A_{\mathrm{II}}^{(i)} \right\}^{-1} A_{\mathrm{IB}}^{(i)}, \quad g := f_B - \sum_{i=1}^{2} A_{\mathrm{BI}}^{(i)} \left\{ A_{\mathrm{II}}^{(i)} \right\}^{-1} f_I^{(i)}.
$$

Navier-Stokes方程式: 人工境界問題

人工境界問題 $\quad \mathrm{K}x_B = g$



求まったx_Bを人工境界上の条件として部分領域問題を確定

部分領域問題 $\quad A_{II}^{(i)} x_I^{(i)} = f_I^{(i)} - A_{IB}^{(i)} x_B$

部分領域ごとに解を求め, これを利用して元の1領域問題の解を構成

解の再構成

$$x := \begin{cases} x_I^{(1)} & \text{in } \Omega^{(1)}, \\ x_I^{(2)} & \text{in } \Omega^{(2)}, \\ x_B & \text{on } \gamma_{12}. \end{cases}$$

まとめ

流れ問題の数値解析

1. 計算手法の誤差評価の整備
2. 大規模化への対応
   →反復型領域分割法