割当問題の数理モデル

神山 直之

九州大学
マス・フォア・インダストリ研究所

Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

私の問題意識と研究分野

- 私の研究分野：離散最適化 ＋計算量理論，グラフ理論

$$\min\{f(x) \mid x \in \mathcal{F}\}$$

- 最適化は様々な場面で現れる
  例えば，施設配置やスケジューリング，データマイニングなど...
- 本日その中でも割当問題を紹介
  1. 現実問題と数理モデルが非常に近い
  2. 理論的にも興味深い （マトロイド等の離散構造との関連）

発表内容

- 効率的に解くことができる割当モデルを紹介

割当問題

定義 (割当問題)

- 二つのグループ間の割当を決める問題

例えば...
- 研究室と学生
- 仕事のスケジューリング
- オークション
- 病院と医学生
  厚生労働省「新たな医師臨床研修制度」HP 参照

疑問

どのような割り当てが望ましいのか？

$\Longrightarrow$ 解の質の良さ ＋ 計算時間

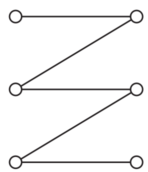
割り当ての質とモデル

- 全体の利益を追求
  例えば... 強力な意思決定者が存在する状況
  $\Longrightarrow$ 最大マッチング
- 個人の利益を追求
  例えば... 全ての個人が納得をすればよい状況
  $\Longrightarrow$ 安定マッチング
- その中間
  例えば... 参加者の多数決で意思を決定する状況
  $\Longrightarrow$ 最適選好マッチング

二部グラフとマッチング

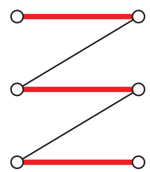
定義 (二部グラフ)

- 左右の点の集合は各集団を表わしている
- 点の間を結ぶ線は可能性のある割り当て



定義 (マッチング)

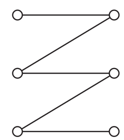
- 可能性のある割り当ての部分集合
- 各参加者が高々一つの割り当てに含まれる

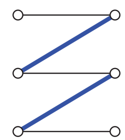


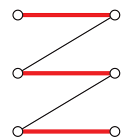
最大マッチング

定義 (最大マッチング問題)

- 入力：二部グラフ
- 出力：サイズが最大のマッチング



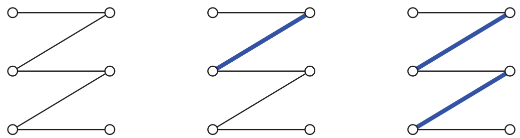




- ○ 効率よく求めることができる ($O(m\sqrt{n})$ 時間)
- ○ サイズが最大
- × 個々の選好は考慮出来ない

基本的なアイデア

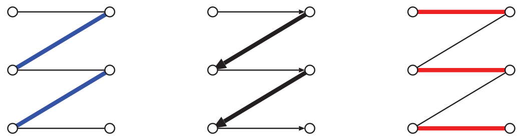
- 貪欲に加えることのできる辺を加えていく



- 最大？ $\Longrightarrow$ NO!! (先ほどの例を思い出す)
- 一度加えた辺を賢く交換する必要がありそう...

交換可能グラフ

- マッチングに加えられている辺を左向き
- マッチングに加えられていない辺を右向き



増加路

- マッチングに入っていない点から始まりマッチングに入っていない点で終わる向きに沿った道

- 増加路に沿って辺を入れ替えるとサイズが増える
- 増加路がある限り辺を増やす
- 有限界でアルゴリズムは停止する

定理

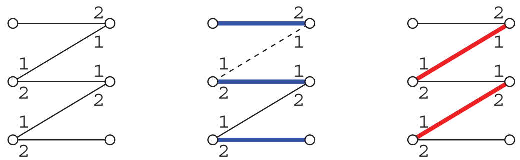
- あるマッチングが最大である必要十分条件は交換可能グラフにおいて増加路が存在しないことである

計算時間

- 増加路を見つけるのに $O(m)$ 時間
- 最大マッチングのサイズは高々 n
- 計算時間 $O(mn) \Rightarrow O(m\sqrt{n})$ [Hopcroft & Karp]

定義 (安定マッチング問題)

- 入力：二部グラフ ＋ 各点の相手に対する選好順序
- 出力：安定なマッチング



定義 (安定ではないマッチング)

- お互い現在の相手より好ましい組が存在

- そもそも安定なマッチングが存在するのか？$\Rightarrow$ Yes!!

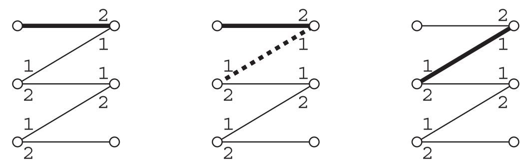
定理 (Gale & Shapley)

- 任意の問題例に対して少なくとも一つ安定マッチングが存在し効率的に求めることができる

- ○ 効率よく求めることができる ($O(m)$ 時間)
- × サイズが小さい
- ○ 個々の選好は考慮出来ている

相手がいないかつ全ての女性に断られていない男性 M がいる限り以下を繰り返す

1. M は断られていない最も好ましい女性 W にプロポーズする
2. W は相手がいないもしくは現在の相手より好ましければ乗り換える



アルゴリズム

計算時間

- それぞれの男性は各女性に高々一回しかプロポーズしない
- 合計で高々 m 回のプロポーズ
- 各プロポーズの判定は $O(1)$ 時間 $\Rightarrow$ $O(m)$ 時間

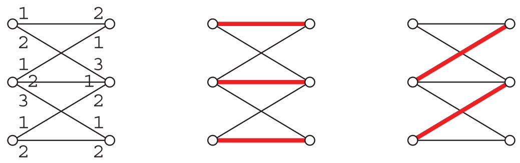
補足

- どの安定マッチングもサイズは同じ
- 上記のアルゴリズムは実はある関数の不動点を求めている
- マトロイドを用いた拡張が可能 (例えば，多対多)

最適選好マッチング

定義 (最適選好マッチング問題)

- 入力：二部グラフ ＋ 各点の相手に対する選好順序
- 出力：最適選好なマッチング



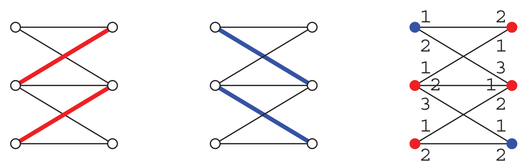
定義 (最適選好ではないマッチング)

- 支配するマッチングが存在

最適選好性

定義 (支配関係)

- 二つのマッチングを考える
- 各点においてどちらのマッチングが好ましいかを判定
- 好ましい点が多いほうのマッチングが他方のマッチングを支配する



存在性

- そもそも安定なマッチングが存在するのか？$\Rightarrow$ Yes!!
- 構成的に証明可能？$\Rightarrow$ NO...

定理

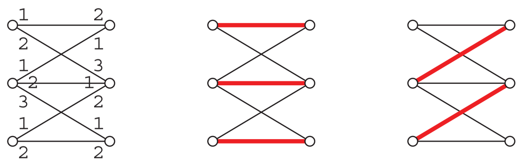
- あるマッチング M が最適選好マッチングである十分条件は M が安定マッチングであることである

  注：安定ではない最適選好マッチングが存在する

- ○ 効率よく求めることができる
- △ サイズがそこそこ大きい
- △ 個々の選好はそこそこ考慮出来ている

最大性

- 各最適選好マッチングによってサイズが変わる



- 可能ならば最も大きい最適選好マッチングを求めたい

定理 (Huang & Kavitha)

- サイズが最大の最適選好マッチングを多項式時間で見つけることが可能

まとめと課題

- 目的に応じた様々な割当モデルを紹介

  最大マッチング，安定マッチング，最適選好マッチング

- モデルが現実の問題に近い

  実際に使用されている例も

- アルゴリズムが整備されている

  理論的に高速なだけではなく非常に実用的

- 普及活動
- 良いソフトウェアの開発

ご清聴ありがとうございました