解析接続の問題に現れる解析と幾何

大沢健夫

数学はやればやるほど簡単になるはずであり、組み合わせの数は無限であっても、行き詰るはずはないのである。　岡潔　『一葉舟』(角川ソフィア文庫　2016)

目次

1　はじめに

解析接続はいうまでもなく基本的な概念であるが、問題によってそのあらわれ方は様々である。歴史的には、複素一変数の関数として登場した楕円関数を中心とした研究が進み、諸公式を整合的に書く必要が生じた結果、Weierstrass によってこの概念が導入された。多変数関数論の本格的な研究は Hartogs の 1906 年の論文 [H-1] に始まるが、これにより解析接続についての新たな課題が生まれた。本論では主にそれ以後に形成された多変数複素解析について述べるが、以下では Hartogs までのこともこめて、解析接続に関わる複素解析の研究の歴史をおおまかに振り返っておきたい。

周知のように、解析学は物理学からの要請によって生まれた数学である。その主要な目的は微分方程式の解を記述することである。もとより物理現象は極めて多様であるが、天体の運行などを縛る条件をエネルギー保存則のような比較的少数の原理に基づいて式で表したところから微分方程式が現れた。その結果、「宇宙という書物は数学の言葉で書かれている」(Galileo Galilei) という有名な言葉に示唆された通り、方程式をみたす関数の数学的構造が、物理現象をあまねく記述するに至ったのである。

物理現象と同様、関数も発見されると同時に遍在する。最も基本的な関数である指数関数

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \quad \left(e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \tag{1}$$

もその例で、これは増殖や減衰に対応する方程式

$$\frac{df}{dt} = f,\ f(0) = 1$$

の解であるが、乗法の結合法則の延長である指数法則 $e^{x+y} = e^x e^y$ を掘り下げることによって複素関数論という巨大な鉱脈が発見されるに至った。その間の事情は『大数学者』(小堀憲)、『近世数学史談』(高木貞治)、『代数函数論』(岩澤健吉)、『From Riemann surfaces to complex spaces』(Reinhold Remmert) などに詳しいが、かいつまんで述べると以下のとおりである。

本格的な複素関数論の展開は Cauchy の留数解析が発端であった。言うまでもなく Cauchy の積分定理こそが複素関数論の嚆矢である。指数関数と三角関数の関係式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2}$$

は Taylor 展開から直ちにわかることで、これなどは 18 世紀には知られていたが、指数法則は積分を使って

$$\int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{dt}{t} = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} \tag{3}$$

と書くこともできる。これを線積分

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{C}\setminus\{0\})^1, \gamma(0) = 1, \gamma(1) = z)$$

で表される z の多価関数がみたす公式とみなせば、Cauchy の定理に基礎づけられた種々の一般化が可能になる。

Abel と Jacobi が競うようにして建設した楕円積分と楕円関数の理論はその最初の例である。楕円関数の発見は Abel に帰せられるが、これは 5 次方程式の解の公式が四則演算と開平だけでは書けないという彼の有名な仕事にも関連している。1 のべき根が e^z の特殊値すなわち $e^{i\pi q}$ $(q \in \mathbb{Q})$ に他ならないことからも窺えるように、楕円関数論は Gauss の円周等分論や Fagnano のレムニスケート等分論を複素関数論の枠組みの中で一般化したものでもある。Abel の大発見は

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} \tag{4}$$

のような多価の積分が、$\mathbb{C}$ 上の二重周期の有理型関数の逆関数と自然に同一視できるということである。Weierstrass や Riemann はさらにそれを一般化した。その過程で生まれたのが**解析接続**と **Riemannn 面**の概念である。

たとえばガンマ関数の場合、定義式

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^x dx$$

は $\mathrm{Re}s > 0$ の範囲でしか意味を持たないが、等式 $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ を用いて $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として定義域を拡げることができる。これは解析接続の一例だが、一般の正則関数や有理型関数 (解析関数はこれらの総称) についても、定義域をそれらの Taylor 級数や Laurent 級数を用いて

[1] 可微分多様体 M, N と M の部分集合 A に対して $C^r(A,N) := \{f : A \to M; f$ は A 上 C^r 級 $\}$ $(r \in [0,\infty] \cup \omega)$。

拡げ、個々の関数を $\mathbb{C}$ または Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上に何葉にも重なった面上の一価関数とみなすことができる。

この観点からは、対数関数 $\log z$ の定義域は領域 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の普遍被覆面

$$\widetilde{\mathbb{C}^*} = \{\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{C}^*); \gamma(0) = 1\}/\sim \quad (\cong \mathbb{C}),$$

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 :\iff \exists h \in C^1([0,1]^2, \mathbb{C}^*) \text{ s.t. } h(j,t) = \gamma_j(t)\ (j = 0, 1,\ t \in [0,1])$$

である。この場合、$\widetilde{\mathbb{C}^*}$ から $\mathbb{C}$ への局所同相写像 π が $\pi(\gamma\text{の同値類}) = \gamma(1)$ によって定まるので、$\widetilde{\mathbb{C}^*}$ の点は $\log z$ $(= \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta})$ の分枝の Taylor 展開と同一視できる。Cauchy の積分定理により $\log z$ の値は 1 と z をつなぐ積分路のホモトピー類にしかよらないからである。このような例を一般化したのが解析接続で、二つのべき級数が収束円 D_1, D_2 の共通部分上で同じ関数を表していれば $D_1 \cup D_2$ 上で一つの関数が定まるという自明極まる事実を基礎に、Weierstrass は関数要素の集合体としての大域的な解析関数の概念を確立した。

その一方で、Riemann は「解析関数は $z = x + iy$ の関数である」という立場から Cauchy-Riemann 方程式の解としての正則関数を研究し、複素関数論に幾何学的な方法を持ち込んだ (1851)。それは解析関数の持つ等角性に着目したもので、この観点からは一次分数変換

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

は $\widehat{\mathbb{C}}$ の正則自己同型であり、有理型関数は $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像となる。しかしこの方法の最も革新的な点は、一旦は個々の関数要素から離れた抽象的な存在として $\widehat{\mathbb{C}}$ 上に分岐点を許した被覆面を考え[2]、その上で Gauss が提唱したポテンシャル論の精神により電磁気学や流体力学の原理に根差した関数論を構築したことであった。このような面として導入された Riemann 面は、位相幾何 (トポロジー) 的には球面にいくつかの把手がついた曲面になる。この文脈では楕円関数は輪環面 (トーラス) 上の有理型関数である。輪環面とは球面に一つの把手をつけた曲面と同相なものの総称だが、たとえば Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ を二個用意して、それぞれに区間 $[-2, -\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 2]$ に沿って二箇所の切り込みを入れてからそこで互い違いに貼り合わせると、$\widehat{\mathbb{C}}$ 上に $\{\pm\frac{1}{2}, \pm 2\}$ で分岐する二葉の被覆面ができる。これは位相的には輪環面であり、同時に

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\sqrt{(4\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - 4)}}$$

の逆関数の Riemann 面でもある。より詳しくは

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2, \quad \omega_1 = \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\sqrt{(4\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - 4)}}, \quad \omega_2 = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{(4\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - 4)}}$$

とおき、$\mathbb{C}$ の商空間 $\{z + \Lambda; z \in \mathbb{C}\}$ として得られる一次元複素多様体 $\mathbb{C}/\Lambda$ が、写像

$$\pi : \mathbb{C}/\Lambda \to \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z + \Lambda \mapsto \frac{10\wp(z) - 4\wp(\omega_1/2) - 6\wp(\omega_2/2)}{5\wp(z) - 8\wp(\omega_1/2) + 3\wp(\omega_2/2)} \quad \left(\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left\{\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right\}\right)$$

[2] 正則写像 $\tau : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ が分岐被覆であるとは、τ が S の各点のまわりで適当な局所座標に関して $z \mapsto z^k$ の形で書けることを言う。このとき S は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の分岐被覆 (面) であると言う。

により $\pm\frac{1}{2}, \pm 2$ で分岐する $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の二葉の被覆面として実現できる[3]。ちなみに $\mathbb{C}/\Lambda$ 上の楕円関数が $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理式で表されることや、$\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の間に

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_2\wp(z) - 140G_3, \quad G_k = \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}}$$

という関係があることなどが Weierstrass の理論として知られている (cf. [Ah-1, pp.293-304])。

複素関数論ではある種の公式が著しく簡単な方法で証明できることがある。その理由は、コンパクトな Riemann 面[4](閉 Riemann 面) 上の有理型関数は零点と極の位置を重複度もこめて与えさえすれば定数倍を除いて一意的に定まるからである。このことは最大値原理の重要な帰結である。ここから関数をその零点と極を用いて書き下すという問題が浮上した。例えば $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の有理型関数は有理関数に他ならず、多項式分の多項式という形で書けるわけだが、一般の閉 Riemann 面上の有理型関数[5]に対してもテータ関数を用いて似た形の因数分解式が書ける (Riemann の分解定理)。$\mathbb{C}$ 上の有理型関数については Weierstrass が得た例だと

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \tag{5}$$

が有名だが、楕円関数の分母として彼が好んだのはこれに似た展開式を持つシグマ関数

$$\sigma(z) = z\prod_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(1-\frac{z}{\omega}\right) e^{z/\omega+\frac{1}{2}(z/\omega)^2} \tag{6}$$

であった。これと上の $\wp(z)$ との関係は

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z)$$

なので、$\sigma(z)^2$ が $\wp(z)$ の分母になる。$\wp(z)$ は **Weierstrass のペー関数**と呼ばれる。ちなみに、これは一つの推測だが、Weierstrass は Abel をつづめた al を筆記体で書いた文字の上下を逆にした意味で、$\wp$ の文字を用いたのではなかろうか。

Weierstrass は明快であり Riemann は深遠である。Poincaré [P-1] の分類によれば前者は論理型であり、多変数の正則関数の局所理論へと歩を進めて重要な基礎定理 (Weierstrass の予備定理[6]) を確立した。後者は直観型であり、次の極めて重要な命題を発見した。

定理 1.1. 単連結な領域 $D \subset \mathbb{C}^*$ と D の任意の点 z_0 に対して正則な全単射 $f : D \to \mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$ で $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$ をみたすものが唯一つ存在する。

定理 1.1 を **Riemann の写像定理**または**等角写像の基本定理**という[7]。これを定式化したのは Riemann だが、証明は Osgood や Koebe による。単連結な開 (=非コンパクト)Riemann 面 X 上でも同様な結果が成立する。ただし条件 $D \subset \mathbb{C}^*$ は $X \not\cong \mathbb{C}$ に変え、正則な全単射 $f : X \to \mathbb{D}$ の一意性の条件中の $f'(z_0) > 0$ は z_0 のまわりの一つの局所座標に関するものとする。定理 1.1 のこのような一般化の証明は Koebe(1907) および Poincaré(1907) による。これにより任意の Riemann 面上の有理型関数は、有理関数であるか楕円関数であるか、または $\mathbb{D}$ 上の有理型関数で正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ の離散部分群の作用で不変なもの (保型関数) に限ることが確定した。Riemann 面の普遍被

[3]これは楕円関数 $\wp(z)$ の基本的な性質と一次分数変換の計算の結果である。
[4]連結な一次元複素多様体を **Riemann 面**という。
[5]一変数の代数関数はこのように特徴づけられる。
[6]Weierstrass の予備定理に関しては [H-U] の第一章が詳しい。
[7]f は **Riemann 写像**と呼ばれる。

覆は $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, または $\mathbb{D}$ のどれかに限るからである。上のような一般化は **Koebe の一意化定理**と呼ばれることが多い。これは Weierstrass と Riemann を受け継いだ Schwarz, Klein らのドイツ学派の思想に負うところが大きい[8]が、Poincaré も彼らと独立に保型関数を発見した頃から、普遍被覆面のアイディアの重要性を認識していたと思われる。ともあれ、Weyl(1913) はこれらの成果を集大成し、「最も単純な、最も適切な」方法を模索した結果として名著 "Die Idee der Riemannschen Fläche" を著した。Weyl によれば、一意化の理論において、Weierstrass と Riemann の思想圏は一つに結合し、完全な統一に達した。

ちなみに Gauss は Abel 以前に楕円関数論に達していたし、保型関数の最初の例である j-不変量を得てもいたが発表はしなかった。j-不変量を論文に最初に書いたのは Gauss の弟子の Dedekind(1877) であり、Hermite(1858) はその一般型である楕円モジュラー関数を詳しく研究して 5 次方程式の解の公式を書いた。保型関数は通常 $\mathbb{D}$ を存在域に持つ (: $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{D}$ を真に含む領域に解析接続できない) が、重要な関数がこのような狭い存在域を持つことは Weierstrass には想定外のことだったと伝えられる。もっとも $\mathbb{D}$ が狭いという感覚はユークリッド幾何的なもので、Riemann 多様体としては $\mathbb{D}$ は Poincaré 計量

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$$

に関して定負曲率の完備な曲面であり、測地円の周長が半径に比して指数的に増大するという意味で、見方によってはユークリッド平面よりずっと広い。

一方、単純閉曲線で囲まれた平面領域に限定すれば定理 1.1 はより精密な形になる。

定理 1.2. (Carathéodory, 1913) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ の境界 ∂D が円周と同相なら、Riemann 写像は $\overline{D}$ $(= D \cup \partial D)$ から $\overline{\mathbb{D}}$ への同相写像へと拡張できる。

同じころ、複素関数論においては多変数の場合一変数のときにはなかった現象が起きることが明らかになってきた。零点と極を与えて有理型関数を作る問題は多変数でも Poincaré(1883) や Cousin(1895) によって解かれ始めていたが、Poincaré が活躍中に書かれた Goursat の[9]の『解析学教程』[10]には次のコメントが記されている。

> 多変数の解析関数の特異点の性質については、一変数の場合に比べると未知の部分が多い。最も厄介な問題は特異点の座標が孤立し得ないことに起因している。

この文章には脚注がついており、

> この問題に関する詳細については Acta mathematica (t. XXVI) 所載の Poincaré 氏の論文、P.Cousin 氏[11]の学位論文 (同上, t.XIX) および W.-F. Osgood[12](氏) の最近の著書『Topics in the theory of functions of several complex variables』(The Madison Colloquium, published by the American mathematical society; 1914) を見よ。

とある。Poincaré と Cousin の理論を完成型に導いたのは岡潔による上空移行原理の発見 (1936) だったが[13]そこへの最重要の一歩が Hartogs(1906) による**擬凸性**の発見であった。Hartogs の理論

[8] Koebe の先生は Schwarz であった。
[9] É.Goursat (1858-1936) フランスの数学者。コーシーの積分公式の証明で有名。
[10] Cours d'analyse mathématique, 1918。
[11] P.Cousin (1867-1933) フランスの数学者。
[12] W.-F.Osgood (1864-1943) F. Klein の指導でドイツで学位を取得した米国の数学者。
[13] 第 4 節 4.7 を参照。

は多変数の解析関数は孤立特異点を持ちえないこと (Hurwitz,1897) と相対収束半径[14]の逆数が対数的劣調和性を持つこと (Faber,1902) を敷衍したものだが、正則領域すなわち正則関数の存在域が擬凸性という凸性に似た幾何学的性質を持つことを結論付けるもので[15]、まさに解析接続の原理的な急所を突くものであった。その結果、それでは任意の擬凸領域は正則領域であろうかという逆問題が自然に生じた。滑らかな境界を持つ領域に対して擬凸性の微分幾何的表現を与えた Levi(1911) にちなみ、この問題や同趣旨の一般化された問題は **Levi 問題**の名で知られるようになった。これはしばらく多変数関数論の中心的課題であった (cf. [Sa], [Siu-1])。

現代流の層の言葉で言えば、Weierstrass が考案した解析的形成体 (analytische Gebilde) は正則関数の定義域を $\mathbb{C}^n$ の構造層の連結成分と考えたもので、これらはとくに $\mathbb{C}^n$ 上の不分岐領域すなわち $\mathbb{C}^n$ への局所正則同型を持つ複素多様体になっている。これと Riemann の導入した分岐被覆の考えと合わせて、解析関数の自然な定義域は $\mathbb{C}^n$ 内の領域だけでなく、$\mathbb{C}^n$ のコンパクト化上で「自然に分岐した」領域であろうということになった。$\mathbb{C}^n$ 上の不分岐領域に対する Levi 問題は岡潔 [O-2,4] により解決されたが、この偉業は金字塔の名にふさわしい。分岐領域については様相はより複雑で未解明の部分が残されているが、その研究のために H.Cartan の研究 [C-1] に触発されて岡 [O-3] が導入した**不定域イデアル**の理論は、Weierstrass の理論 (=予備定理) の射程を大いに延ばすことになった。さらにこの理論は Cartan[C-3] により層係数コホモロジーの言葉に翻訳されて Stein 多様体上の基本定理 (Cartan の定理 A,B) として結実し、以後の数学の展開に多大な影響を与えた。

任意の Riemann 面は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の分岐領域として実現できる。これは一意化定理によると言ってもよいが、Riemann 面は正則写像により $\mathbb{CP}^3$ または $\mathbb{C}^3$ 内に閉部分多様体として埋め込めるからであると言ってもよい[16]。いずれにせよ Riemann 面上には然るべき変数があるので関数論が展開可能である。しかし複素多様体の中には Hopf 多様体 $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}/\sim \quad (n \geq 2,\ z \sim w \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 2^k z = w)$ のように、$\mathbb{CP}^n$ へのいかなる正則写像も退化するものが存在する。従って分岐領域の問題の中には Hopf 多様体のようなものをどう別扱いするかということも含まれる。

岡の仕事は主に 1936 年から 1953 年までの間になされたが、この間にコンパクトな複素多様体の理論にも大きな動きがあった。それは小平邦彦 (1915-97) による Weyl 流の閉 Riemann 面論の高次元への一般化と、それに続く変形論と分類論の展開である。小平 [K-1,2] は射影的代数多様体[17]の微分幾何的特徴づけ (小平の埋め込み定理) を得たが、これは直線束の正則切断に関する存在定理[18]であり、Levi 問題の解と相通ずるものである。

ちなみに小平の定理の系として、多変数の保型関数論における次の著しい結果が得られた。

定理 1.3. $\mathbb{C}^n$ の有界領域 D を $\mathrm{Aut}D$ の固定点を持たない離散部分群 Γ の作用で約して得られる商空間 D/Γ がコンパクトなら、D/Γ は射影的である。

$\mathbb{D}^2$ や $\mathbb{B}^2$、より一般には E.Cartan(1935) が分類した対称有界領域はすべて単連結であり、かつコンパクトな複素多様体を上の意味で商空間として持つことが知られている[19]。$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^2) \not\cong \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^2)$ であることを Poincaré(1907) が発見し Reinhardt(1921) が厳密に証明した[20]ことは、一意化定理に関連したこれらの仕事につながる先駆的で重要な動きであった。

---

[14]本文 §2.1 を参照。
[15]本文 §2.2 を参照。
[16]n 次元複素射影空間を $\mathbb{CP}^n$ で表す。
[17]複素多様体で正則写像により $\mathbb{CP}^N$ (N はある自然数) 内に埋め込めるものは**射影的**であるといい、その中でコンパクトなものを**射影的代数多様体**、または短く**射影多様体**と呼ぶ。
[18]詳しくは本文を見よ。
[19]$\mathbb{B}^n$ で n 次元複素球体 $\{z \in \mathbb{C}^n; \|z\| < 1\}$ を表す。
[20]Bergman 核を用いた証明が [Ym] にある。

小平の方法 [K-1] は複素多様体上の関数の正則性を局所的に特徴づける式

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(Cauchy−Riemann 方程式)}$$

を微分形式に対して延長してできる複体に層の理論と楕円型作用素の理論を適用したものだが、本質的には $\bar{\partial}$ 作用素[21]

$$\bar{\partial}(\sum_{I,J} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J) = \sum_{I,J} (\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k) dz_I \wedge d\bar{z}_J \tag{7}$$

についての方程式 $\bar{\partial} u = v$ の大域的な可解性の条件を明らかにしたものである[22]。その要点はベクトル束係数の $\bar{\partial}$ コホモロジー群に対する消滅定理であり、これは Andreotti と Vesentini[A-V-1,2] によって完備 Hermite 多様体上の L^2 理論へと一般化された。それとは独立に、Kohn[Kn] や Hörmander[Hm-1] はそれぞれ別の流儀の関数解析的方法で $\bar{\partial}$ 作用素の L^2 評価の方法を確立し、それを応用して岡・Cartan 理論における種々の構成を精密化した。特に Hörmander は Bergman 核の境界挙動に関する Bergman の予想を解決した[23]。岡・Cartan 理論の展開としては、Andreotti と Grauert[A-G] による一般化も著しい。彼らは一般化された Levi 問題の解が Grauert[G-2,3] により小平の結果を含む形で得られたことをふまえつつ、擬凸性の概念を一般化し、コホモロジー有限性定理を擬凸性または擬凹性の条件をみたす複素解析空間上で確立した。

これらの仕事によって岡理論が指し示したものが一層明確になった。Bergman 核の挙動の解析は Fefferman[Ff-1] により Carathéodory の定理 (定理 1.2) の高次元化へとつなげられ、Griffiths[Gf]、中野茂男 [N-2,3,4]、Grauert-Riemenschneider[G-R-1,2] は、小平理論を開多様体や特異点付きの解析空間へと拡張して種々の応用を見出した。いわば、コホモロジー理論を旗印として岡・Cartan 理論と小平理論を統合しながら精密化および一般化をめざすことが、1965 年頃からの一つの動きであった。

これはコンパクト多様体と Stein 多様体を両極端の存在と見る考え方なので、Riemann 面の理論において $\widehat{\mathbb{C}}$ と $\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ がいわば三項対立的な存在だったことからすれば新たな視点を提供していた。そのおかげで筆者にも解ける問題があったりしたので、約 40 年間、この線で多変数複素解析の研究に取り組んできた。具体的には小平理論を一般化した中野の仕事に導かれ、その応用を拡げる過程で L^2 消滅定理 [Oh-2,7, 本文の定理 4.7] と L^2 拡張定理 [Oh-T-1, Oh-13,16, 本文の定理 5.1 とその拡張] を得た。これは L^2 評価式の方法を掘り下げるという作業であった。

以下ではまず Hartogs に始まる正則領域の基礎理論を述べてから解析接続の問題を $\bar{\partial}$ コホモロジー群を用いて定式化し、擬凸多様体の $\bar{\partial}$ コホモロジー群に関する基本的結果 (定理 3.2) やそれを用いた Stein 多様体の特徴づけ (定理 3.4) について述べる。その後 L^2 評価式の方法ををなるべく標準的かつ簡単な方法で紹介し、L^2 消滅定理等の証明を行う。この理論をふまえて定理 3.2 を証明するのだが、本質的には [A-V-1,2] と [Hm-1,2] に含まれる内容である。擬凸性、$\bar{\partial}$ コホモロジー、接続定理、近似定理の相関を念頭に置いて記述したが、これは岡潔の第一論文 [O-1] で指摘されたことを踏襲したつもりである (詳しくは本文を参照)。ただ、L^2 消滅定理を用いて $\mathbb{C}$ の剛性に関する西野の定理の別証を与えた (cf.[Oh-24]) ところや、Grauert-Riemenschneider の消滅定理の延長上で多様体上の Hartogs 型接続定理を定式化した (cf. [Oh-18]) ところに新しい点がないでもない。後者に関連して千葉優作氏の仕事 [Ti-1,2]、および永田義一氏と Seungjae Lee 氏の仕事

[21] 詳しくは本文を参照。

[22] 小平の方法は岡のセミナーでも紹介された。その時小平論文を読んだ武内章氏 (1935-2018) によれば、岡は「そんな方法で関数が作れるはずはない」と言った後、「論文にはそう書いてあります」と言われてしばらく考えた後「コンパクト多様体上でなら可能であろう」と意見修正した。

[23] これをめぐる興味深い回想が [Hm-3] にある。

[L-N] にふれる。そのあとで L^2 拡張定理とその二三の応用を述べる。これらは [Oh-T-1] 以来の出来事であるが、合わせてここ 10 年くらいの間に L^2 拡張定理の周辺で起きた進展を、Bergman 核に関わる内容を中心に概観してみたい。最後に Grauert 理論 [G-2,3] の延長上の話として、強擬凸多様体上でのコホモロジー類の接続についての結果 [Oh-5,12] とそれに関連する最近の竹内有哉氏の仕事 [Ta]、および形式化原理 (formal principle) に関する進展などを紹介したい。

`Coffee Break` アイルランドの文豪 James Joyce の名作『Ulysses(ユリシーズ)』の最初の方の会話の中に「歴史は自分にとって醒めてほしい悪夢です」(History is a nightmare from which I am trying to awake) というセリフがあり、いわゆる戦後世代[24]に属する筆者としてはある時期これに大いに共感するものがあった。多変数関数論を専攻するようになった頃もそんな気分を引きずっていたようで、19 世紀に高度に発達した一変数関数論を詳しく知らなくても最先端の研究に参画できそうなところに魅力を感じていた。時あたかも、C^∞ 級の強擬凸領域間の双正則写像が境界まで C^∞ 級に拡張できるという Fefferman[Ff-1] による結果が耳目を集めていた頃であった。こんな基本的な性質がまだ解明されていなかったのかと驚く一方で、この分野の将来性に期待を抱くことになった。同じ頃、優秀な若手数学者がある賞の受賞講演で「硬直化した一変数関数論」と宣って長老たちの失笑を買ったこともあった。そんな時、Riemann 面の同時一意化で有名な Lipman Bers 教授が来日し、京大理学部の談話会で講演された。内容は当時学部生だった筆者には高度すぎたのでほとんど記憶にないが、細部にまで注意の行き届いた話の立派さには感銘を受けた。その帰り道、セミナーでお世話になっていた中野先生との話がたまたま Weyl の本におよび、先生は「あれをわかって研究している人とそうでない人がいる」とつぶやくように言われた。上のような理由から Riemann 面論をやや軽視していた筆者はつい何気なく「私は全然わかっていませんが」と口答えをし、言った瞬間激しく後悔したのだが、先生はそれを侮る素振りもなく「いや、キミはわかっている」ときっぱりとした口調で言われた。多変数関数論への入門的な講義録の序文でわざわざ Riemann 面論の歴史にもふれたのはこのような理由からでもある。

2 解析接続と正則領域

正則関数や Cauchy の積分定理、および複素多様体等の基礎概念については既知であるとする[25]が、解析接続の諸問題への方向性を明確にするため、**正則領域**についてやや詳しく述べておく。

2.1 収束域と相対収束域

2 変数のべき級数

$$P = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} z^j w^k, \quad a_{jk} \in \mathbb{C}$$

から話を始めよう。P が収束するような最大の領域を P の**収束域**と呼び、Ω_P で表す。Ω_P は $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2; |z| < r, |w| < s\} = r\mathbb{D} \times s\mathbb{D}\ \ (r,s>0)$ の形の領域の和集合になっているが、

$$(z,w), (z',w') \in \Omega_P \Rightarrow (|z|^t |z'|^{1-t}, |w|^t |w'|^{1-t}) \in \Omega_P, \ \ 0 \le \forall t \le 1$$

という**対数的凸性**を持っている。言い換えれば、集合

$$\log |\Omega_P| := \{(a,b) \in [-\infty,+\infty)^2; (e^a, e^b) \in \Omega_P\}$$

[24]正確には「団塊の世代」の次の「しらけ世代」であり、今風に言うなら「冷笑系」であろうか。
[25]初学者は必要に応じて [Ah-1] や [Kb] などを参照されたい。

は通常の意味で凸である。

Laurent 級数 $L=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} a_{jk}z^jw^k$ についても同様である。特に $(z,w)=(0,0)$ は L の収束域の孤立境界点ではありえない。

P を変数ごとに解析接続したときに定義域がどこまで広がるかを見てみよう。各変数について正則な関数は正則であるという Hartogs の正則性定理がこの方向にあるのだが、ともかく第一歩として P を

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\infty}a_{jk}z^j)w^k$$

と書き直し、$\sum_{j=0}^{\infty}a_{jk}z^j$ が z 平面の領域 D 上の関数 $a_k(z)$ として一斉に解析接続されるときを考える。つまり D 上の正則関数 $a_k(z)$ を係数とするべき級数 $P_w=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z)w^k$ を考える。

このとき各点 $z\in D$ に対して w に関するべき級数 P_w の収束半径を $R(z)$ とする。(R は一般には不連続関数である。) w 方向に回転対称な $D\times\mathbb{C}$ の部分領域の中で P が解析接続される最大のものを P_w の**相対収束域**と呼び Ω_{P_w} で表す。Ω_{P_w} は集合 $\{(z,w)\in D\times\mathbb{C};|w|<R(z)\}$ の開核なので、$\log\frac{1}{R}$ 以上の上半連続関数のうちで最小のものを u とおけば[26]、$\Omega_{P_w}=\{(z,w);|w|<e^{-u(z)}\}$ となる。e^{-u} を P_w の**相対収束半径**と呼ぶ。

R は $[0,\infty]$ 内に値をとる関数として Cauchy-Hadamard の公式

$$\frac{1}{R}=\limsup_{k\to\infty}|a_k(z)|^{\frac{1}{k}}$$

によって定まる。よって $\log|a_k(z)|$ がみたす劣平均値の性質[27]より、u は $u\not\equiv-\infty$ のとき次の三つの同値な性質を持つ。

1)　$\{z;|z-z_0|\le r\}\subset D$ ならば $u|_{|z-z_0|=r}$ は可積分であり、

$$u(z_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

2)　$\mathbb{C}$ の開集合 U およびその閉包 $\bar{U}$ が D に含まれるとき、U 上で調和で $\bar{U}$ 上で連続な関数 v が ∂U 上で u 以上なら U 上でもそうである。

3) u は局所可積分であり、D 上の非負 C^∞ 関数 φ で台がコンパクトなものに対してつねに

$$\int_D u\Delta\varphi d\lambda\ge 0\quad\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \ d\lambda=\text{Lebesgue 測度}\right)$$

が成り立つ。

一般に、これらの性質を持つ上半連続関数を**劣調和関数**という。3) は u が C^2 級なら $\Delta u\ge 0$ と同値である。従って C^2 級の関数に限って言えば、劣調和関数とはグラフの下に張り出す度合いが上への度合いに勝る関数のことである。

さて、べき級数 P と P_w はそれぞれ Ω_P と Ω_{P_w} 上で正則な関数を表すが、この話を少し拡げて、変数ごとに正則な関数について Hartogs[H-1] が示した次の結果を証明してみよう。

---

[26] $u(z)=\limsup_{\zeta\to z}\log\dfrac{1}{R(\zeta)}$。

[27] [Ah-1,p.224 (44)] 等を参照。

定理 2.1. $\mathbb{C}^n$ の領域上の関数が正則であるためには、一つの変数を止めるごとに残りの変数について正則であれば十分である。

証明. 簡単のため $n=2$ として証明するが、一般の場合の議論も同様である。D は $\mathbb{C}^2$ の領域で $(0,0) \in D$ であるとする。$f: D \to \mathbb{C}$ が変数ごとに正則であれば、$(0,0)$ のある近傍 $r\mathbb{D}^2$ $(r>0)$ および $r\mathbb{D}$ 上の関数 $a_k(z)$ $(k=0,1,\ldots)$ が存在して

$$f(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) w^k$$

と書ける。f が $r\mathbb{D}^2$ 上で正則であることを示そう。

f が連続であることが言えれば変数ごとの正則性と Schwarz の補題により $a_k(z)$ がすべて正則であることが言えるので、これと $a_k(z)$ に対する Cauchy の評価式を合わせれば f の正則性が従う。(ここは Cauchy の積分公式によると言ってもよい。)

f の連続性を示すため、ある空でない領域上で f が有界であることを示そう。そのために集合

$$E_m := \{w \in r\mathbb{D}; \forall z \in r\mathbb{D} \text{ に対し } |f(z,w)| \leq m\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

がすべて閉集合であることに注意する。これは f が変数ごとに連続だからである。

$$r\mathbb{D} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$$

であるので Baire のカテゴリー定理[28]よりどれかの E_m の開核 E_m° は空でない。したがってこの E_m に対し、f は $r\mathbb{D} \times E_m^{\circ}$ 上で $|f(z,w)| \leq m$ なので有界である。よって Schwarz の補題と変数ごとの正則性より、f はここで連続でもある。

したがって f は $r\mathbb{D} \times E_m^{\circ}$ 上で正則である。同様に、z 平面のある円板 Ω に対し f は $\Omega \times r\mathbb{D}$ 上で正則である。よって収束域の対数的凸性により、f は $r\mathbb{D}^2$ 上で正則である。 □

釈迦に説法ではあろうが、実変数の関数だと変数ごとに C^{ω} 級 (=実解析的) であっても連続であるかどうかさえ分からない。ここに実関数論と複素関数論の大きなギャップがある。とはいえ、変数ごとに C^{ω} 級の関数の特異集合についての研究がある (cf. [SR], [Sc-3], [Bł-1])。

収束域や相対収束域を一般化したものが正則領域である。すなわち一つの収束べき級数に Weierstrass 式の解析接続を最大限行って得られるのが正則領域だが、劣調和性は解析接続の一般論への道を開いている。正則領域の形状も劣調和性の概念をふまえて記述できるからである。その観点から、以下では正則領域の擬凸性について述べよう。

2.2 正則領域の擬凸性

ここからは一般の n 変数の関数について述べよう。$\mathbb{C}^n$ の座標を $z=(z_1,\ldots,z_n)=(z',z_n)$ で表し、$\|z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}$ とおく。正則関数の最大の定義域としての正則領域の性質をいくつか述べる。正しくは $\mathbb{C}^n$ 上の不分岐領域に対してこれらを述べないといけないのだが、いずれ複素多様体に対して一般化されることなので、ここでは $\mathbb{C}^n$ の領域に限って要点を述べることにする。

[28]完備距離空間の可算個の稠密な開集合の交わりは空でない。

定義 1. $\mathbb{C}^n$ の領域 D が**正則領域**であるとは、D 上の正則関数 f で次の性質 (H) を持つものが存在することを言う。

(H) $\mathbb{C}^n$ の領域 U が D と交わるとき、U 上の正則関数は $U \cap D$ のどの連結成分上でも f と一致しない。

f が (H) をみたすとき D は f の**存在域**であると言う。相対収束域の定義式 $|w| < e^{-u(z)}$ において u が劣調和であることを用いて、正則領域の重要な性質である擬凸性を導こう。

定義 2. $\mathbb{C}^n$ の領域 D 上の上半連続関数 $\varphi : D \to [-\infty, \infty)$ が**多重劣調和** (*plurisubharmonic*) であるとは、D の任意の点 z_0 と任意の $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し、$\varphi(z_0 + \zeta t)$ が t に関して $0 \in \mathbb{C}$ のある近傍上で劣調和になることを言う。

D 上の正則関数の集合を $\mathcal{O}(D)$ で、多重劣調和関数の集合を $PSH(D)$ で表す。以下は正則関数と多重劣調和関数の定義から容易に従う性質である。

0. $\varphi,\ \psi \in PSH(D),\ a, b \in [0, \infty) \Rightarrow a\varphi + b\psi \in PSH(D)$.

1. $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{O}(D) \Rightarrow \log \sum_{j=1}^N |f_j|^2 \in PSH(D)$.

2. $\varphi \in PSH(D)$, $\lambda : [-\infty, \infty) \to [-\infty, \infty)$ は増加凸関数 $\Rightarrow \lambda \circ \varphi \in PSH(D)$.

3. φ_μ $(\mu \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\sup_\mu \varphi_\mu)^* \in PSH(D)$ (F^*で F 以上の上半連続関数で最小のものを表す。)

4. $\varphi_\mu \in PSH(D)$ $(\mu \in \mathbb{N})$, $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \dots \geq \varphi_\mu \geq \dots \Rightarrow \lim \varphi_\mu \in PSH(D)$.

5. $\varphi \in PSH(D), \varphi \not\equiv -\infty,\ \chi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, \infty)),\ \ \mathrm{supp}\chi \subset [0, 1],\ \ \int_{\mathbb{C}^n} \chi(\|z\|) d\lambda_z = 1$
$$\Longrightarrow \varphi_\epsilon(z) = \epsilon^{-2n} \int_D \varphi(z + \zeta) \chi\left(\frac{\|\zeta\|}{\epsilon}\right) d\lambda_\zeta \in PSH(D^\epsilon) \cap C^\infty(D^\epsilon) \text{ かつ} \varphi_\epsilon \searrow \varphi.$$
ただし $d\lambda_z$で Lebesgue 測度を表し[29] $D^\epsilon = \{z \in D; \inf_{w \notin D} \|z - w\| > \epsilon\})$ とおく。

6. C^2 級の関数 $\varphi : D \to \mathbb{R}$ が多重劣調和であるための必要十分条件は、φ の複素 Hesse 行列[30]
$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta}\right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}$$
がいたるところ半正定値であることである。

特に 4,5,6 から、多重劣調和性が複素多様体上でも局所座標の取り方によらず矛盾なく定義されることがわかる。ここは正則関数の定義と違って少し注意を要する部分である。Levi 形式が正定値であるとき φ は**強多重劣調和**であるという。

$\varphi \in PSH(M)$ および $x \in M$ に対し、φ の x における **Lelong 数** $\nu(\varphi, x)$ を
$$\liminf_{y \to x} \frac{\varphi(y)}{\log \|y - x\|}$$

[29] 積分変数を書かないときには $d\lambda_n$ とも書く。

[30] **Levi 形式**と呼ぶことが多い。

で定義する。ただし $\|\cdot\|$ は局所座標に関する Euclid ノルムを表す。Lelong 数は多重劣調和関数の一点での (平均的な) 特異性を図る尺度である。

以下では複素多様体 M から複素多様体 N への正則写像の集合を $\mathcal{O}(M,N)$ で表し、M 上の正則関数の集合を $\mathcal{O}(M)$、多重劣調和関数の集合を $PSH(M)$、強多重劣調和関数の集合を $SPSH(M)$ で表す。$\pm\varphi \in PSH(M)$ のとき φ は**多重調和**であると言う。多重調和関数は定義より連続だが、上の 5 より C^∞ 級の多重調和関数の局所一様極限であり、従って局所的には正則関数の実部である。M 上の多重調和関数の集合を $PH(M)$ と書く。記号の種類を節約するため、M が一次元でも $PSH(M)$ や $PH(M)$ を使う。

$\delta_D(z) = \inf_{w\notin D} \|z-w\|,\ (z\in D)$ とおく[31]。$\delta_D(z)$ は z から ∂D までの Euclid 距離である。$z\in D,\ \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に対し

$$\delta_{D,\zeta}(z) = \sup\{r; |t|<r \Rightarrow z + \frac{t\zeta}{\|\zeta\|} \in D\} \tag{8}$$

とおく。

D は正則関数 f の存在域であるとする。連続関数 $F : \mathbb{D}^{n-1} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ があって

$$D = (\mathbb{D}^{n-1}\times\mathbb{C})\setminus\Gamma,\ \ \Gamma = \{(z',z_n); z_n = F(z')\}$$

と書ける場合、$|F(z')|$ が $(z',0)$ から z_n 方向に測った Γ までの距離であることに注意して z における f の Taylor 級数に相対収束域の性質を適用すれば、$-\log|F(z')| \in PSH(\mathbb{D}^{n-1})$ であることがわかる。同様に $\log|F(z')| \in PSH(\mathbb{D}^{n-1})$ となるので $\log|F(z')| \in PH(\mathbb{D}^{n-1})$ である。言い換えれば $\mathrm{Re}\log F(z')$ は多重調和であるが、正則な座標変換によって D が正則領域であるという性質は保たれるから $\mathrm{Im}\log F(z') \in PH(\mathbb{D}^{n-1})$ でもある[32]。同様に $F \in PH(\mathbb{D}^{n-1})$ であるので $\partial\bar\partial \log F = 0$ より $\partial F \bar\partial F = 0$ が得られる[33]。これより F または $\overline{F}$ が正則であることが従うが、F を $F + z_j (1\le j\le n-1)$ で置き換えるとこれらの零点以外では同様に $F+z_j$ または $\overline{F+z_j}$ が正則であることが従うので、F は正則でなければならない。つまり次の定理が成り立つ。

定理 2.2. ([H-2]) グラフの補集合が正則領域であるような連続関数は正則である。

D が一般の正則領域である場合にも、座標変換の自由度を勘案すれば上と同様の理由で $-\log\delta_{D,\zeta}(z) \in PSH(D)$ となる。従って $\delta_D = \inf_{\zeta\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \delta_{D,\zeta}$ であることと多重劣調和関数の性質 3 により $-\log\delta_D(z) \in PSH(D)$ となる。正則領域のこの性質は岡潔 [O-2] によるもので、**岡の補題**と呼ばれることが多い。

定義 3. $PSH(D)$ の元 φ で任意の $c\in\mathbb{R}$ に対して $\{z\in D; \varphi(z) < c\}$ が D 内で相対コンパクトであるようなものが存在するとき、D は**擬凸領域**であるという。

一般に、位相空間 X 上の関数 $\tau : X \to [-\infty,\infty)$ に対して $\tau^{-1}([-\infty,c))$ がすべての $c\in\mathbb{R}$ に対して相対コンパクトになるとき、τ は X 上**皆既的** (exhaustive) であるという。

多重劣調和関数の性質 2 および性質 5 を使うと、擬凸領域 D 上には C^∞ 級の多重劣調和関数で皆既的なものが存在することが言える[34]。

定理 2.3. 正則領域は擬凸である[35]。

[31] $D=\mathbb{C}^n$ のとき $\delta_D(z) \equiv +\infty$。

[32] この場合、$(z',z_n) \mapsto (z', z_n^i$ の分枝$)$ は Γ の近傍で正則な座標変換だから、F を $e^{i\log F}$ に置き換えて議論をすればよい。

[33] $\bar\partial F := \overline{\partial \overline{F}}$。

[34] 難しくないので初学者は証明を試みられたい。

[35] これの逆すなわち「擬凸領域は正則領域である」も成立するが、その証明には多少の準備を要する (cf. 定理 3.3)。

証明. D が正則領域ならば岡の補題より $-\log\delta_D \in PSH(D)$ であるので、$-\log\delta_D(z)+\|z\|^2$ は多重劣調和かつ皆既的である。 $\square$

正則領域のもう一つの重要な性質として正則凸性がある。

定義 4. 複素多様体 M が**正則凸**であるとは、任意のコンパクト集合 $K\subset M$ に対して次で定義される集合 $\hat{K}$ がコンパクトになることを言う。

$$\hat{K}=\{z\in M;\forall f\in\mathcal{O}(M)\text{ に対し }|f(z)|\le\sup_K|f|\}.$$

$\hat{K}$ を K の**正則凸包**という。通常の凸包は上で $\mathcal{O}(M)$ の代わりに $\{e^{f(z)};f(z)$ は z の一次多項式 $\}$ を用いたものになる。

コンパクトな複素多様体は正則凸多様体の自明な例だが、$\mathbb{C}^n$ やその閉複素部分多様体が正則凸であることもほぼ自明であろう。二つの正則凸多様体の直積が正則凸であることも定義からすぐわかる。正則凸な多様体の中でコンパクトなものの対極にあるのが Stein 多様体である。

定義 5. 正則凸な n 次元複素多様体 M が **Stein 多様体**であるとは、M の各点のまわりで局所座標として $\mathcal{O}(M,\mathbb{C}^n)$ の元が取れることをいう。

Stein 多様体について次は基本的である。証明は [Hm-2], [Gn-Rs] などを参照されたい。

定理 2.4. n 次元 Stein 多様体はある $\mathbb{C}^N$ の閉複素部分多様体と双正則同型である。

$\mathbb{C}^N$ の閉複素部分多様体が Stein であることは明らかだから、これは Stein 性の特徴づけでもある。ちなみに、$n\ge 2$ であれば $N=[\frac{3n}{2}]+1$ ([ ] は Gauss 記号) でよいことが知られている (cf. [E-G], [Sch])。$n=1$ のとき $N=2$ でよいかどうかは未解決である。

コンパクトな多様体の埋め込みに関して定理 2.4 と対をなすのは小平の埋め込み定理であるが、それについては次節で述べる。

一変数の関数論では Riemann 面上で極や零点を与えて関数を作る問題が重要であった。多変数の場合この種の問題は **Cousin の問題**と呼ばれるが、それは Cousin[Cs] が (平面領域の直積に限ってではあるが) 基本的な結果を示したからである。Stein 多様体は、与えられた零点集合を持つ正則関数が存在するための条件を解明する目的で、Stein[St] が“R-konvexe Gebiete in komplexen Mannigfaltigkeiten”(複素多様体内の R-凸領域) の名で正則領域の一般化として導入したものである。これを改めて Stein 多様体と命名したのは Cartan[C-3] である。

正則凸性の概念が生まれたのは H.Cartan と P.Thullen の論文 [C-T] で示された次の命題による。

定理 2.5. 正則領域は正則凸である。

証明. $\mathbb{C}^n$ の領域 D と D のコンパクトな部分集合 K に対し、$\hat{K}$ が有界集合であることは定義より明白であろう。いま D が f の存在域であるとする。$K^{(\epsilon)}=\{z\in D;\inf_{w\in K}\|z-w\|\le\epsilon\}$ $(\epsilon>0)$, $\delta(K)=\inf_{z\in K}\delta_D(z)$ とおけば、$z\in K$ に対して Cauchy の評価式より $\sqrt{n}\epsilon\le\frac{1}{2}\delta_D(K)$ のとき

$$\left|\frac{1}{J!}\frac{\partial^J f}{\partial z^J}(z)\right|\le\epsilon^{-|J|}\sup_{K^{(\epsilon)}}|f|$$

$$\left(J=(j_1,\dots,j_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n,\ J!=\prod_{k=1}^n j_k!,\ |J|=j_1+\cdots+j_n,\ \frac{\partial^J f}{\partial z^J}=\frac{\partial^{|J|}f}{\partial z_1^{j_1}\cdots\partial z_n^{j_n}}\right)$$

が成り立つ。したがって $\sqrt{n}\epsilon\le\frac{1}{2}\delta_D(K)$ のとき $\hat{K}$ の点 z_0 を中心とする f の Taylor 級数は多重円板 $z_0+\epsilon\mathbb{D}^n$ 上で収束する。D は f の存在域だったから $\frac{1}{2}\delta_D(K)\le\delta_D(z_0)$ でなければならない。よって $\hat{K}$ は有界閉集合であるのでコンパクトである。 $\square$

系. 正則領域は擬凸である[36]

証明. 正則領域 D に対し、定理2.3より D の相対コンパクトな部分領域の増大列 $D_\mu \ (\mu = 1, 2, \ldots)$ で $\hat{D}_\mu \subset D_{\mu+1}$ をみたすものが存在する。従って、各 μ に対して $f_{\mu,1}, \ldots, f_{\mu,N_\mu} \in \mathcal{O}(D)$ を適当にとれば、関数 $\varphi_\mu(z) = \sum_{k=1}^{N_\mu} |f_{\mu,k}(z)|^2$ は

$$\sup_{D_\mu} \varphi_\mu \leq \frac{1}{\mu^2} \ \text{かつ} \ \inf_{D_{\mu+2}\setminus D_{\mu+1}} \varphi_\mu \geq \mu$$

をみたすようにできる。$\varphi = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu$ とおけば φ は D 上で多重劣調和かつ皆既的である。 □

上の証明より明らかなように、正則凸多様体は多重劣調和で皆既的な C^ω 級関数を持つ。多重劣調和な皆既関数を持つ多様体を**擬凸多様体**と呼ぶことは自然だが、少なくとも現時点では任意の擬凸多様体が連続な多重劣調和皆既関数を持つかどうかさえ知られていない状況なので、以後 M が擬凸多様体であるというときには C^∞ 級の多重劣調和皆既関数を持つものに限り、多くの場合その関数を付けて "擬凸多様体 (M, φ)" のように言及する。擬凸多様体の好例は複素 Lie 群であろう (cf. [Kz-2])。擬凸で正則凸でない多様体は、ある種の複素 Lie 群をはじめ多数知られている。その最初の例は Grauert[G-4] による。これらに関連する話題を第 7 節で述べる。

2.3 擬凸性の判定

正則凸性は擬凸性の関数論的な十分条件であるが、以下でやや幾何学的な判定法について述べる。

D は複素多様体 M の領域で C^r 級の実超曲面を境界に持つものとする ($r \in [2, \infty] \cup \omega$)。すなわち ∂D の近傍 U と U 上の C^r 級実関数 ρ で次の性質をみたすものが存在するときを考える。

$$D \cap U = \{z \in U; \rho(z) < 0\} \ \text{かつ} \ \forall z \ \text{に対し} \ d\rho(z) \neq 0.$$

このような ρ を D の**定義関数**という。このとき D は C^r 級の領域であるという。

定義 6. ∂D の各点 z_0 において z_0 のまわりの局所座標 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ に関する二次形式

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \xi_\alpha \overline{\xi_\beta}$$

の値が $\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_\alpha} \xi_\alpha = 0$ をみたす任意の $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して非負であるとき、D は **Levi 擬凸**である、または ∂D は Levi 擬凸であるという。

Levi 擬凸性の条件を「∂D 上で $\partial\bar{\partial}\rho|_{\mathrm{Ker}\partial\rho} \geq 0$」と書くこともできる[37]。この定義が局所座標の取り方によらないことは、二つの局所座標 z, w に対して

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_\mu \partial \overline{w}_\nu}\right) = {}^t\left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial w_\mu}\right)_{\alpha,\mu} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right) \left(\frac{\partial \bar{z}_\beta}{\partial \overline{w}_\nu}\right)_{\beta,\nu}$$

であるから明白であろう。複素多様体 M 上の C^2 級実関数 φ に対し、$\partial\bar{\partial}\varphi$ をこれが定める正則接ベクトル束上の Hermite 形式と同一視する。これも (φ の)**Levi 形式**と呼ぶ。

[36] ここの証明は岡の補題を用いないという点でより初等的である。[C-T] の時点では岡の補題は知られていなかった。

[37] $\partial\bar{\partial}\rho|_{\mathrm{Ker}\partial\rho}$ を ∂D の **Levi 形式**と呼ぶ。式の左辺に $\sqrt{-1}$ をかけたほうがよいという向きも多いが特にこだわらない。本来は $\partial\bar{\partial}\rho$ は $(1,1)$ 形式であるので $\sqrt{-1}$ を掛けないと実形式ではなく、したがって正負の意味がないともいえるが、以下では $\partial\bar{\partial}\rho$ を臨機応変に ρ の複素 Hesse 形式と同一視する。

定義 7. Levi 擬凸領域 D が強多重劣調和な定義関数を持つとき、D は**強擬凸領域**であるという。

強擬凸領域については次が基本的である。

命題 2.1. 複素多様体 M 内の強擬凸領域 D の任意の境界点 z_0 に対し、D の定義関数 ρ と z_0 における M の局所座標 z を適当にとれば、$(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)$ に関する ρ の Hesse 行列は z_0 で単位行列に等しくなる。

つまり強擬凸領域は局所的に狭義凸である。証明は初学者には好適な演習問題なので省略する。

系. 強擬凸領域 D と $z_0 \in \partial D$ に対し、ある近傍 $U \ni z_0$ と $f \in \mathcal{O}(U)$ が存在して $f^{-1}(0) \cap \overline{D} = \{z_0\}$ となる。

命題 2.2. $\mathbb{C}^n$ 内の Levi 擬凸領域は擬凸である。

証明. 領域 D の定義関数 ρ として D の内部に C^∞ 級の負値関数として拡張されるものをとれば

$$\partial\bar\partial(-\log(-\rho)) = \frac{\partial\bar\partial\rho}{-\rho} + \frac{\partial\rho\bar\partial\rho}{\rho^2}$$

より、$\partial\bar\partial\rho|_{\mathrm{Ker}\partial\rho} \geq 0$ ならば十分急激に増大する凸関数 λ を適当に選んで $-\log(-\rho) + \lambda(\|z\|)$ が D 上で C^∞ 級多重劣調和かつ皆既的であるようにできる。 □

同様の方法で、相対コンパクトな強擬凸領域 D 上に、D 内のあるコンパクト集合の外で強多重劣調和になるような C^∞ 級皆既関数を作ることができる。

複素多様体上では相対コンパクトな領域に限っても Levi 擬凸領域で擬凸でないものが存在する。実際、$\mathscr{H}$ を Hopf 曲面 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/\mathbb{Z}$ とし、M として $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \widehat{\mathbb{C}})/\mathbb{Z}$ $(k \in \mathbb{Z} \Rightarrow ((z,w),\zeta) \sim ((2^k z, 2^k w), 2^k\zeta))$ で定まる $\mathscr{H}$ 上の $\widehat{\mathbb{C}}$ 束、D として $\mathrm{Im}\zeta > 0$ で定まる M 内の領域をとれば、∂D は C^ω 級の Levi 擬凸な超曲面だが $D \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times \{t; e^{-2\pi^2/\log 2} < |t| < 1\}$ であるので D は擬凸ではない (cf.[Di-Fn])。

$T_{r,s} = (r\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \cup (\mathbb{D}^2 \setminus s\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{D}) \quad (0 < r, s < 1)$ とおく。

定義 8. 複素多様体 M が **Hartogs 擬凸**であるとは、制限写像 $\mathcal{O}(\mathbb{D}^2, M) \to \mathcal{O}(T_{r,s}, M)$ がすべての (r,s) に対して全射であることをいう。

収束域の対数的凸性より $\mathbb{C}^n$ は Hartogs 擬凸である。

命題 2.3. $\mathbb{C}^n$ の領域が Hartogs 擬凸なら擬凸である。

証明. $D \subset \mathbb{C}^n$ が Hartogs 擬凸であるとする。任意の $z_0 \in D$ と $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$、および十分小なる $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に対して

$$\log \delta_{D,\zeta}(z_0) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \delta_{D,\zeta}(z_0 + \xi e^{i\theta}) d\theta \tag{9}$$

であることを示せばよい。

ξ を $z_0 + \overline{\mathbb{D}}\xi \subset D$ であるように取る。

$$\log \delta_{D,\zeta}(z_0 + \xi t) \geq h(t) \quad \forall t \in \partial\mathbb{D}$$

が成り立つような $\overline{\mathbb{D}}$ の近傍上の調和関数 h に対し、$\overline{\mathbb{D}}$ の近傍上の正則関数 f で ∂D 上で $\mathrm{Re}f = h$ をみたすものを取ると、正則写像 $H : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}^n$ が $(t, w) \mapsto (z_0 + t\xi, we^{f(t)})$ で定まり、作り方から $H(T_{r,s}) \subset D,\ \ r, s \ll 1$。よって D の Hartogs 擬凸性により $H(\mathbb{D}) \subset D$ となる。h は $\partial\mathbb{D}$ 上の積分平均すなわち $h(0)$ が $\int_0^{2\pi} \log \delta_{D,\zeta}(z_0 + \xi e^{i\theta})d\theta$ にいくらでも近く取れるから $(z_0 + h(0)\frac{\zeta}{\|\zeta\|}) \in D$ でなければならない。これより求める不等式 (9) が得られる。 □

C^2 級の領域が Hartogs 擬凸であれば Levi 擬凸であることを示すのは容易だが、上の例が示すように逆は成り立たない。

`Coffee Break`　岡潔と小林秀雄の有名な対談「人間の建設」の中で、岡が小林に「アメリカのマッハボーイ」の仕事を引きながら「知性には感情を説得する力がない」と力説する部分がある。そこでは「集合論では無限にいろいろな強さ、メヒティヒカイトというものを考えているのですね」で始まる文章で、連続体仮説と選択公理が Zermelo-Fraenkel の集合論の公理系と独立であることを示した P.Cohen の仕事のあらましが語られている。「メヒティヒカイト (Mächtigkeit)」はドイツ語で、「濃度」あるいは「cardinality」を指すのだが、これを読んだ当時高校一年生だった筆者の頭をこの面妖なる隠語はそのまま通り過ぎるしかなかった。しかし後年この部分を読むたびに、集合論の創始者である Cantor が Weierstrass や Dedekind の後継者にあたることや、岡の第一論文のきっかけを与えたのが Göttingen 大学の R.Courant の要請で書かれた Behnke-Thullen の総合報告 [B-T] であったことが思い出されたのである。Hartogs は学問的には Weierstrass のひ孫の世代であり、München 大学の教授であった。そして岡は [B-T] 以前に [H-1,2] を精読していたに違いない。とはいえ、岡の論文は全部フランス語で書かれているし、集合論や数学基礎論といえば、Cohen が頭角を現した時代には Gödel(米) や Russel(英) が有名で、濃度を岡がドイツ語で表現したことについてのいぶかしさは残ったままだったのである。ところが最近 Hartogs について Wikipedia で調べたところ、彼が集合論でも大きな足跡を残していることを知り大いに納得した。Hartogs が [H-3] で選択公理を仮定せずに存在を示した集合の Mächtigkeit は現在 Hartogs 数と呼ばれている。岡先生がこの論文も読んでいたであろうことは今や想像に難くない。

3　複素多様体上の接続問題と $\bar{\partial}$ コホモロジー

複素多様体上の $\bar{\partial}$ コホモロジーは代数幾何を通じて数論の問題とも関連する重要な不変量であるが、解析接続の文脈においても自然に現れる。以下では解析接続の障害が $\bar{\partial}$ コホモロジー類として表せることと、それが消えるための条件について述べる。

3.1　多様体上の解析接続

以下では M は特に断らない限り連結かつパラコンパクトな複素多様体であるとする。解析接続の問題は複素多様体上で自然な形で一般化できる。前節では $\mathbb{C}^n$ の領域に限って正則領域を論じたが、その定義は $\mathbb{C}^n$ を複素多様体に替えても不都合はない。そこで一般の複素多様体 M の領域 D が (H) において $\mathbb{C}^n$ を M に替えたものをみたすとき、D は M-**正則領域**であるということにする。ただしこの言葉を用いるときは M が擬凸でなければあまり意味がないことに注意しよう。値域が $\mathbb{C}$ ではなく、ベクトル値関数や他の複素多様体 N への正則写像であるときも同様であるが、より一般に、正則ファイバー束 $\pi : B \to M$ が与えられたとき、D 上の**切断** (section) すなわち正則写像 $s : D \to B$ で $\pi \circ s = id$ をみたすものに対しても、s が D を存在域に持つことを (H) と同様の

条件で定義することができる。この意味で D を存在域とする切断が存在するとき、D を B **値正則領域**と呼ぶ。これも M や N が擬凸であってはじめて興味ある対象となりうる。B-値正則領域の概念は M 上の不分岐領域に対して拡張できる。$\mathbb{C}^n$ 上の不分岐領域で自明束値正則領域になっているものが通常の意味の正則領域で、前節の定義を自然に拡張したものになっている。

定義 9. 複素多様体 $\mathscr{D}$ が M 上の**不分岐領域**であるとは正則な局所同相写像 $p:\mathscr{D}\to M$ が与えられていることをいう。

被覆空間は不分岐領域の特別な場合で、条件

$$\forall x\in M\ \exists\,\text{近傍}\ U\ni x\ \ \text{s.t.}\ \ p^{-1}(U)\ \text{の連結成分は}\ p\ \text{によって}\ U\ \text{と同相}$$

によって特徴づけられる。

定義 10. 不分岐領域 $\mathscr{D}\to M$ が**局所擬凸**であるとは、条件

$$\forall x\in M\ \exists\,\text{近傍}\ U\ni x\ \ \text{s.t.}\ \ p^{-1}(U)\ \text{の連結成分は Stein 多様体}$$

をみたすことを言う。

定理 3.1. (**岡の定理**)　$\mathbb{C}^n$ 上の局所擬凸な不分岐領域は Stein 多様体である。

局所擬凸性の概念は不分岐領域の部分多様体に対しても自然に拡張されるが、次は未解決である。

Griffiths 予想[38]　$\mathbb{C}^n$ 上の不分岐領域内の閉複素部分多様体が局所擬凸なら Stein 多様体である。

複素多様体 M の閉部分集合 A の**擬凹性**は次で定義される。

$$A\ \text{が擬凹}\iff M\setminus A\ \text{が局所擬凸}$$

3.2　解析接続と $\bar\partial$ コホモロジー

M を n 次元の複素多様体とし、$\pi:E\to M$ を M 上の正則ベクトル束とする。E のランクすなわちファイバー $\pi^{-1}(z)$ $(z\in M)$ の次元は有限であるとする。M 上の E-値 C^∞ 級 (p,q) 型微分形式の集合を $C^{p,q}(M,E)$ で表し、(7) で定まる $\bar\partial$ 作用素 $\bar\partial: C^{p,q}(M,E)\to C^{p,q+1}(M,E)$ が誘導する複体

$$0\to C^{p,0}(M,E)\to C^{p,1}(M,E)\to\cdots\to C^{p,q}(M,E)\to\cdots$$

のコホモロジー群を $H^{p,q}(M,E)$ で表す。これは M の E 値 (p,q) 型 $\bar\partial$ **コホモロジー群**と呼ばれる。$C_c^{p,q}(M,E)=\{u\in C^{p,q}(M,E);\mathrm{supp}u$ はコンパクト $\}$ とおき、$\bar\partial|_{C_c^{p,q}(M,E)}$ で誘導される複体のコホモロジー群を $H_c^{p,q}(M,E)$ と書く。これを M の E 値 (p,q) **型コンパクト台コホモロジー群**という。M の部分集合 A に対して $C_{(A)}^{p,q}(M,E)=\{u\in C^{p,q}(M,E);u|_A=0\}$ とおく。解

[38]1977 年 3 月、京都大学数理解析研究所 420 号室にて加藤昌英氏の講演に対するコメント内で提出。

析接続に関連して $\bar\partial$ 方程式 $\bar\partial u = v$ を境界条件 $u|_A = 0$ つきで解く問題が現れるが、一般には $\bar\partial(C^{p,q}_{(A)}(M,E)) \not\subset C^{p,q+1}_{(A)}(M,E)$ なので注意を要する。

$$H^{p,q}(M,E) = \mathrm{Ker}\bar\partial \cap C^{p,q}(M,E)/\bar\partial(C^{p,q-1}(M,E)),$$

$$H^{p,q}_c(M,E) = \mathrm{Ker}\bar\partial \cap C^{p,q}_c(M,E)/\bar\partial(C^{p,q-1}_c(M,E))$$

であり、それぞれ Fréchet 空間としての $C^{p,q}(M,E)$、および Fréchet 空間 $C^{p,q}_{(U)}(M,E)$ (U は M の相対コンパクトな開集合を動く) の帰納的極限としての $C^{p,q}_c(M,E)$ の、商位相ベクトル空間の構造を持っている。E が自明直線束のときは E を省略してこれらをそれぞれ $H^{p,q}(M)$, $H^{p,q}_c(M)$ と書く。これらの次元は位相多様体の Betti 数と同様、複素多様体の重要な不変量である。M がコンパクトならば $\sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^{p,q}(M,E)$ は E の位相ベクトル束としての構造だけで定まることが知られている (cf. [A-S])。

$\Omega^p(= \Omega^p_M)$ で正則 p 形式の芽の層を表し、$\Omega^p(E)(= \Omega^p_M(E))$ で E 値正則 p 形式の芽の層を表す[39]。M の正則接ベクトル束を T_M で表し[40]、その双対束を T^*_M で表す。この記号を用いると $\Omega^p_M = \Omega^0(\bigwedge^p T^*_M)$ と書ける。Ω^0 を $\mathcal{O}(= \mathcal{O}_M)$ と書き、Ω^n を $\mathcal{K}(= \mathcal{K}_M)$ と書く。$\mathcal{O}$ は**構造層**、$\mathcal{K}$ は**標準層**と呼ばれる。$\mathcal{K} = \mathcal{O}(\bigwedge^n T^*_M)$ である。$\bigwedge^n T^*_M$ を M の**標準束**といい、K_M で表す。自明直線束と $\mathcal{O}_M$、標準束と $\mathcal{K}$ は同一視されることが多い。

例 3.1. $\mathbb{CP}^n$ $(:= (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim\colon\quad z \sim w \iff \exists\lambda \in \mathbb{C}^*$ s.t. $z = \lambda w)$ は $\widehat{\mathbb{C}}(\cong \mathbb{CP}^1)$ と同様、$\mathbb{C}^n$ の標準的なコンパクト化である。点 $[z] := \{\lambda z; \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ を $(z_0 : \cdots : z_n)$ で表す。$\mathbb{CP}^n$ 上の直線束 $\coprod_{[z]\in\mathbb{CP}^n} \mathbb{C}z$ を**自給束** (*tautological bundle*) といい、τ_n と書く。双対束 τ_n^* は**超平面断面束** (*hyperplane section bundle*) と呼ばれる。$(\tau_n^*)^{\otimes\mu}$ $(\mu \in \mathbb{Z})$ を $\mathcal{O}(\mu)$ と書くのが慣用である。$K_{\mathbb{CP}^n} = \mathcal{O}(-n-1)$ である。自給束 $\tau_n \to \mathbb{CP}^n$ に対し、正則写像 $\sigma : \tau_n \to \mathbb{C}^{n+1}$ が $([z], \lambda z) \mapsto \lambda z$ で定まる。n 次元複素多様体 M と $z_0 \in M$ に対し、z の近傍 $U \cong \mathbb{B}^n$ を $\tau^{-1}_{n-1}(\mathbb{B}^n)$ で置き換えて得られる複素多様体 $\tilde M = (M \setminus U) \cup \sigma^{-1}(\mathbb{B}^n)$ に σ の $\tilde M$ への解析接続 $\tilde\sigma : \tilde M \to M$ をつけたものを M の z_0 における**ブローアップ**という。写像 $\tilde\sigma$ 自体は**ブローダウン**と呼ばれる。M は $\tilde M$ のブローダウンであるという。τ_{n-1} の零切断に対応する $\tilde M$ の部分多様体を $\tilde\sigma$ の**例外集合**という。これは一点における改変操作 (*modification*) の例であるが、複素部分多様体に沿うブローアップも同様の仕方で定義される。

$\mathcal{O}_M(E)$ の連結成分が M 上の E **値正則領域**に他ならない。通常の正則領域は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ の連結成分である。任意の擬凸多様体上の E 値正則領域が擬凸かどうかは知られていない[41]。

M の開集合 D に対し、$H^{p,q}(D,E)$ で D の (p,q) 型 $E|_D$[42]値 $\bar\partial$ コホモロジー群を表し、$H^{p,q}_c(D,E)$ でコンパクト台の同様のコホモロジー群を表す。

M 内のコンパクト集合 K を走らせて $H^{p,q}(M\setminus K,E)$ の帰納的極限をとったものを $\lim_K H^{p,q}(M \setminus K, E)$ で表す。すると入射と制限写像から誘導される長完全列

$$\cdots \to H^{p,q}_c(M,E) \to H^{p,q}(M,E) \to \lim_K H^{p,q}(M \setminus K, E) \to H^{p,q+1}_c(M,E) \to \cdots \tag{10}$$

[39] Dolbeault 同型により $H^{p,q}(M,E) \cong H^q(M,\Omega^p(E))$ かつ $H^{p,q}_c(M,E) \cong H^q_c(M,\Omega^p(E))$ である。ただし、一般に位相空間 X 上の Abel 群の層 $\mathscr{F} \to X$ に対し、$H^q(X,\mathscr{F})$ で $\mathscr{F}$ 係数の X の q 次コホモロジー群を表し、コンパクト台のものを $H^q_c(X,\mathscr{F})$ で表す。この事実は重要だが、以下で述べる理論は本質的にこれに依存するものではない。

[40] T_M は可微分多様体としての M の接ベクトル束であるが、これを M の複素構造を使って $T_M \otimes \mathbb{C}$ の正則部分 $T^{1,0}_M$ と同一視している。

[41] これに関連する結果が [Np-R] にある。

[42] $E|_D$ でベクトル束 $\pi|_D : \pi^{-1}(D) \to D$ を表す。

ができるので、次の二つは同値である。

a) $H^{p,q}(M,E) \to \lim_K H^{p,q}(M \setminus K, E)$ は全射である。

b) $H_c^{p,q+1}(M,E) \to H^{p,q+1}(M,E)$ は単射である。

これは以下の議論を短く書き直したものに過ぎない。

$a) \Rightarrow b)$: $w \in C_c^{p,q+1}(M,E) \cap \mathrm{Ker}\bar\partial$ に対し、もし $v \in C^{p,q}(M,E)$ で $\bar\partial v = w$ をみたすものが存在すれば、$M \setminus \mathrm{supp} w$ 上では $\bar\partial v = 0$ だから、a) よりコンパクト集合 K' と $\tilde v \in C^{p,q}(M,E) \cap \mathrm{Ker}\bar\partial$ および $u \in C^{p,q-1}(M \setminus K', E)$ が存在して、$M \setminus K'$ 上で $\tilde v = v + \bar\partial u$ が成り立つ。必要なら K' を大きく取り直して $u \in C^{p,q-1}(M,E)$ としておけば、$v - \tilde v + \bar\partial u \in C_c^{p,q}(M,E)$ かつ $\bar\partial(v - \tilde v + \bar\partial u) = w$ である。

$b) \Rightarrow a)$: $u \in \mathrm{Ker}\bar\partial \cap C^{p,q}(M \setminus K)$ に対し、K はコンパクトだから台がコンパクトな C^∞ 級関数 $\chi : M \to [0,1]$ で $\mathrm{supp}\chi \cap K = \emptyset$ かつ $M \setminus \chi^{-1}(1)$ がコンパクトであるものを取り

$$\hat u(z) = \begin{cases} u(z) & (z \in \chi^{-1}(1)) \\ \chi(z)u(z) & (z \in M \setminus \chi^{-1}(1)) \end{cases}$$

とおくと、$\hat u \in C^{p,q}(M,E)$ であり、$\bar\partial u = 0$ より $\mathrm{supp}\bar\partial\hat u \cap \chi^{-1}(1) = \emptyset$ となる。従って b) より $v \in C_c^{p,q}(M,E)$ が存在して $\bar\partial v = \bar\partial \hat u$ となるので $\hat u - v \in \mathrm{Ker}\bar\partial \cap C^{p,q}(M,E)$ であり、$(M \setminus \mathrm{supp} v) \cap \chi^{-1}(1)$ 上では $u = \hat u - v$ となる。

特に $H_c^{p,q+1}(M,E) = 0$[43]ならば $H^{p,q}(M,E) \to \lim_K H^{p,q}(M \setminus K, E)$ は全射である。

一致の定理により $H^{p,0}(M,E) \to \lim_K H^{p,0}(M \setminus K, E)$ は単射なので、$M \setminus K$ が連結であるようなコンパクト集合 K に対し、$H^{p,0}(M,E) \to H^{p,0}(M \setminus K, E)$ が全射であることと $H_c^{p,1}(M,E) \to H^{p,1}(M,E)$ が単射であることは同値である。

$H^{p,0}(M,E) \to H^{p,0}(M \setminus K, E)$ の全射性は $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ 上の正則領域の重要な性質である。擬凸多様体上では一般にはこうならないが、上の議論により「全射にならなさ加減」は $\dim \mathrm{Ker}(H_c^{p,1}(M,E) \to H^{p,1}(M,E))$ で測れ、この値が有限になりかつ解析可能な M のクラスは小さくない。そして結果が特異点の理論等に応用できる (後述)。このように、解析接続を $\bar\partial$ コホモロジーによって複素多様体上へと接続することによって、問題に新たな妙味が生じうるのである。いずれにせよ、最初はもっとも基本的な $H_c^{p,1}(M,E) = 0$ となる場合について述べよう。

3.3 Stein 多様体の $\bar\partial$ コホモロジー

$\bar\partial$ コホモロジー群は複素多様体の重要な不変量であるが、$H_c^{p,q}(M,E) \to H^{p,q}(M,E)$ の単射性条件や $H_c^{p,q}(M,E)$ の消滅条件は、上で述べた理由から解析接続の観点からはとくに興味深い問題である。入門的な話でよく紹介される Bochner-Hartogs の拡張定理は、$D \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ のときコンパクト集合 $K \subset D$ が $\mathbb{C}^n$ 内で連結な補集合を持てば $D \setminus K$ 上のすべての正則関数は D まで解析接続されるというものであるが、これは正則領域の擬凸性に基づく初等的な議論によっても示せ

[43] 右辺は正しくは $\{0\}$ だが簡単のためこう書く。

るが (cf. [M-P])、$H_c^{0,1}(\mathbb{C}^n)=0\ \ (n\ge 2)$[44]の帰結としても理解できる。実際、$f\in\mathcal{O}(D\setminus K)$ に対してコンパクト集合 $K'\supset K$ と $\hat{f}\in C^\infty(D,\mathbb{C})$ で $\hat{f}|_{D\setminus K'}=f|_{D\setminus K'}$ をみたすものをとったとき、$\bar{\partial}u=\hat{f}$ をみたすコンパクト台の C^∞ 級関数 u があれば $\hat{f}-u\in\mathcal{O}(D)$ であり $D\setminus K$ の連結性と一致の定理により $\hat{f}-u|_{D\setminus K}=f$ となる。

ところで $\mathbb{C}^n$ のこの性質は

$$H^{p,q}(\mathbb{C}^n)=0\quad(q\ge 1)\quad \text{かつ}\quad H_c^{p,q}(\mathbb{C}^n)=0\quad(q\le n-1) \tag{11}$$

および

$$\begin{gathered}\text{制限写像}\quad H^{p,0}(\mathbb{C}^n)\to H^{p,0}(R\mathbb{B}^n)\quad (R>0)\ \text{の像は (局所一様収束の位相に}\\ \text{関して) 稠密であり、入射準同型}\quad H_c^{p,n}(R\mathbb{B}^n)\to H_c^{p,n}(\mathbb{C}^n)\quad\text{は単射である。}\end{gathered} \tag{12}$$

というひとまとまりの結果の一部で、しかもこれらは擬凸多様体上で次のように一般化される。

定理 3.2. (M,φ) を n 次元擬凸多様体とする。もし $\varphi\in SPSH(M)$ ならば M 上の任意の正則ベクトル束 E に対して

$$H^{p,q}(M,E)=0\quad(q\ge 1)\ \text{かつ}\ H_c^{p,q}(M,E)=0\quad(q\le n-1) \tag{13}$$

であり、

$$\begin{gathered}\text{制限写像}\ H^{p,0}(M,E)\to H^{p,0}(\{z\in M;\varphi(z)<R\},E)\quad(R\in\mathbb{R})\ \text{の像は稠密で、}\\ \text{入射準同型}\ H_c^{p,n}(\{z\in M;\varphi(z)<R\},E)\to H_c^{p,n}(M,E)\ \text{は単射である。}\end{gathered} \tag{14}$$

定義 11. 強多重劣調和皆既関数を持つ複素多様体を**1-完備多様体**という。

定理 3.2 の証明は準備を要するので次節に回し、ここではその帰結をいくつか見ておこう。

以下では皆既関数 $\varphi: M\to\mathbb{R}$ が与えられたとき $\{z\in M;\varphi(z)<R\}$ を簡単に M_R と書く。M が 1-完備なら M_R はすべて 1-完備になる。従って定理 3.2 より、前節と同様の議論で $H^{p,q}(M,E)\to H^{p,q}(M\setminus\overline{M_R},E)$ は $q\le n-2$ のとき全射であることが直ちにわかる。またこのとき Sard の定理より ∂M_R が C^∞ 級の超曲面でないような R 全体は $\mathbb{R}$ の測度 0 の部分集合なので、M は強擬凸領域の増大列 $M_1,M_2,\dots,M_\mu,\dots$ の和集合であるとしても一般性を失わない。

次の基本的な命題を定理 3.2 から簡単な議論で導くことができる。

定理 3.3. 1-完備多様体は正則凸である。

証明 (定理 3.2 を認めた上で). 1-完備多様体 M の正則凸性を示すためには強擬凸領域 M_μ がすべて正則凸であることを示せば十分である。なぜなら K を M のコンパクト集合としたとき、$K\subset M_\mu$ となる μ が存在し、$\mathcal{O}(M_\mu)$ に関する K の正則包がコンパクトであれば制限写像 $H^{0,0}(M)\to H^{0,0}(M_\mu)$ の像の稠密性より $\hat{K}$ もコンパクトでなければならないからである。M_μ の

[44] Pompeiu の公式

$$u(z)=\frac{-1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{u_{\bar{\zeta}}}{\zeta-z}d\lambda_\zeta\quad(u\ \text{は}\ C^1\text{級で}\ \mathrm{supp}u\ \text{はコンパクト})$$

を用いる直接的な証明があるが、割愛する。

正則凸性を示すには、各点 $z_0 \in \partial M_\mu$ に対して近傍 $V \ni z_0$ および $f, g \in \mathcal{O}(V), h \in \mathcal{O}(M_\mu)$ が存在して、$f^{-1}(0) \cap \overline{D} = \{z_0\}$ かつ $V \cap D$ 上で $h - \frac{1}{f} = g$ となることを言えば十分である。f の存在は命題 2.1 の系を $D = M_\mu$ として適用すればよく、g, h の存在は以下のようにして導く。

z_0 の近傍 U と $f \in \mathcal{O}(U)$ を $f^{-1}(0) \cap \overline{D} = \{z_0\}$ のようにとって固定する。C^∞ 級関数 $\chi : M \to [0,1]$ を $\mathrm{supp}\chi \subset U$ かつ z_0 のある近傍 V 上で $\chi \equiv 1$ となるようにとる。$\bar\partial(\frac{\chi}{f})$ を $\mathrm{supp}\bar\partial\chi$ の外で 0 として拡張したものを v とおくと、ある $\epsilon > 0$ があって $v \in C^{0,1}(M_{\mu+\epsilon}) \cap \mathrm{Ker}\bar\partial$ となる。定理 3.2 より $\bar\partial u = v$ をみたす $u \in C^{0,0}(M_{\mu+\epsilon})$ が存在する。よって $h = \frac{\chi}{f} - u$, $g = h - \frac{1}{f}$ とおけばある近傍 $V \ni z_0$ に対してこれらは条件をみたす。 □

上の証明で用いた関数 χ を (U, V) **カットオフ**または z_0 **における** U **カットオフ**と呼ぶことにする。次も定理 3.2 の応用である。

定理 3.4. 1 -完備多様体は Stein 多様体であり、逆もまた真である。

証明. (M, φ) を 1-完備多様体、$z_0 \in M$ とし、z_0 の近傍 U から $\mathbb{B}^n$ への正則同型写像 w で $w(z_0) = 0$ をみたすものをとる。χ を z_0 における U カットオフとし、$C > 0$ に対して関数 $\varphi_{z_0,C}$ を

$$\varphi_{z_0,C}(z) = \begin{cases} C\varphi(z) + \chi(z)\log\left(\|w(z)\|^2 + C^{-2}\right) & (z \in U) \\ C\varphi(z) & (z \in M \setminus U) \end{cases}$$

によって定義する。C_0 を十分大きくとって $C \geq C_0$ ならば $\varphi_{z_0,C} \in SPSH(M)$ であるようにし、そののちに $R \geq C_0$ を十分大きくとって $\{z; \varphi_{z_0,R}(z) \leq -R\}$ が U に含まれるようにすれば、定理 3.2 よりこの上で w を十分よく近似するような $\mathcal{O}(M, \mathbb{C}^n)$ の元が存在し、z_0 のある近傍上で M の局所座標になる。よって 1-完備多様体は Stein である。逆は定義から明らかである。 □

定理 3.2 と 1-完備性による Stein 性の特徴づけは Grauert[G-2] によるが、「1-完備」という言い方は Andreotti と Grauert の共著論文 [A-G] で [G-2] を一般化する文脈で用いられた。かつて Stein が導入した R-konvexe Gebiete(R 凸領域) は Stein 多様体となり、Grauert によって「1-完備」化されたわけである。

定義 12. 複素多様体 M が ***k*-完備**であるとは、C^2 級皆既関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}$ で Levi 形式 $\partial\bar\partial\varphi$ がいたるところ k 個未満の非正固有値を持つものが存在することをいう。

定理 3.5. (cf. [G-W][45]) n 次元の非コンパクト複素多様体は n-完備である。

系. (cf. [B-St]) 開 Riemann 面は Stein 多様体である。

(13), (14) の k-完備多様体への一般化は次の通り。

定理 3.6. (cf. [A-G]) k-完備な n 次元複素多様体 (M, φ) 上の正則ベクトル束 E に対して

$$H^{p,q}(M, E) = 0 \quad (q \geq k) \ \text{かつ}\ H_c^{p,q}(M, E) = 0 \quad (q \leq n-k) \tag{15}$$

であり、

$$\text{制限写像 } H^{p,k-1}(M,E) \to H^{p,k-1}(M_R, E) \quad (R \in \mathbb{R}) \text{ の像は稠密で、}$$

$$\text{入射準同型 } H_c^{p,n-k+1}(M_R, E) \to H_c^{p,n-k+1}(M, E) \text{ は単射である。} \tag{16}$$

[45]調和関数による $\mathbb{R}^N$ への埋め込みを用いる。初等的な別証が [Oh-10],[Dm-2] にある。

定理 3.2 および定理 3.6 をさらに一般化した定理がある。

定義 13. 複素多様体 M が ***k*-凸**であるとは、あるコンパクト集合 $K \subset M$ に対して C^2 級皆既関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}$ で $\partial\bar{\partial}\varphi$ が $M \setminus K$ 上いたるところ k 個未満の非正固有値を持つものが存在することをいう。K を **φ-例外集合**と呼ぶ。

定理 3.7. (cf. [A-G]) k-凸な n 次元複素多様体 (M, φ) 上の正則ベクトル束 E に対して

$$\dim H^{p,q}(M,E) < \infty \quad (q \geq k) \ \text{かつ} \ \dim H_c^{p,q}(M,E) < \infty \quad (q \leq n-k) \tag{17}$$

であり、K を φ-例外集合とすれば $M_R \supset K$ のとき、制限写像 $H^{p,q}(M,E) \to H^{p,q}(M_R,E)$ $(q \geq k)$ および 入射準同型 $H_c^{p,n-q}(M_R,E) \to H_c^{p,n-q}(M,E)$ $(q \leq n-k)$ は同型写像であり、制限写像 $H^{p,k-1}(M,E) \to H^{p,k-1}(M_R,E)$ $(R \in \mathbb{R})$ の像は稠密で、入射準同型 $H_c^{p,n-k+1}(M_R,E) \to H_c^{p,n-k+1}(M,E)$ は単射である。

定理 3.2、定理 3.6 および定理 3.7 におけるいくつかの主張はダブっている。それは次の Serre の双対性定理 (cf.[Sr]) が成り立つことによる。

定理 3.8. (Serre の双対性定理[46]) n 次元複素多様体 M とその上の正則ベクトル束 E に対し、$H^{p,q+1}(M,E)$ が Hausdorff 空間であれば $H_c^{n-p,n-q}(M,E^*)$ は $H^{p,q}(M,E)$ の位相的双対空間と同型である。ただし E^* で E の双対ベクトル束を表す。

従って、これ以後は $H_c^{p,q}(M,E)$ に関する主張は省けるときは省くことにする。

3.4 $\bar{\partial}$ コホモロジーと Cousin の問題

定理 3.2 の主張の中で解析接続と直接関係したのは $H_c^{p,1}(M,E) = 0$ だったが、歴史的には $H^{0,1}(M,E) = 0$ が先で、これは Cousin の加法的問題が解けることに対応している。初学者のためにその事情にふれておきたい。

M 上で局所的に与えられた主要部を持つ有理型関数を作る問題は次のように定式化できる。

M の開被覆 $\{U_j\}$ と U_j 上の有理型関数 f_j で $f_j - f_k \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$ をみたすものが与えられたとき、U_j 上の正則関数 h_j で $U_j \cap U_k$ 上で $f_j - f_k = h_j - h_k$ をみたすものを求めよ。

これが解 $\{h_j\}$ を持てば、求める有理型関数は $f_j - h_j$ であるということになる。

この問題は次のようにして $H^{0,1}(M,E) = 0$ の形の命題に帰着できる。

まず $\{U_j\}$ に付随する 1 の分解 ρ_j を固定し、$\widehat{f}_j = \sum_k \rho_k(f_j - f_k)$ によって U_j 上の C^∞ 級関数 $\widehat{f}_j$ を定める。すると $U_j \cap U_k$ 上では $f_{jk} = \widehat{f}_j - \widehat{f}_k$ となるから、$\bar{\partial}\widehat{f}_j \in C^{0,1}(M) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ となる。

従って、もし $H^{0,1}(M) = 0$ ならある C^∞ 級関数 u に対して U_j 上で $\bar{\partial}\widehat{f}_j = \bar{\partial}u$ が成り立つことになり、$h_j = \widehat{f}_j - u \in \mathcal{O}(U_j)$ かつ $f_{jk} = h_j - h_k$ となる。

Cousin の乗法的問題は与えられた零点の分布を持つ正則関数を作る問題を上と同様に定式化したものである。$H^2(M,\mathbb{Z}) = 0$ ならばこれは対数をとることで加法的問題に帰着できる。

[46]証明は [Sr] または [Oh-22,pp.39-40] を見られたい。

`Coffee Break`　定理 3.2 におけるコホモロジーの消滅は、Cartan[C-3] が Stein 多様体上で定式化したものの一部である。Cartan の理論は岡が [O-3] で展開した不定域イデアルの理論を Leray[L] が導入した層の概念を用いて一般化したもので、岡理論はこの形で岡・Cartan 理論として引用されることが多い。Grauert も [C-2,4] などで岡理論に触れたらしく、こんな話が残っている。1960 年、岡潔が文化勲章を受章した年だが、インドの Tata 研究所で国際研究集会があり、当時の先端的な話題であった複素解析空間について Cartan や Grauert らが研究成果を発表した。日本からは京都大学の河合良一郎が出席し、$\mathbb{C}^n$ 上の分岐領域について講演した。河合は Grauert と毎日ホテルで朝食をともにしたが、筆者が河合先生から直接伺ったところでは、その時 Grauert は「私が今日あるのは岡先生のおかげです。」と語ったそうである。2013 年、ドイツの Göttingen 大学で Grauert の追悼研究集会があり、夕食会で筆者は Chicago 大学の R.Narasimhan 氏と同席した。Narasimhan は Grauert の長年の友人の一人で、岡の論文集を英訳して Cartan のコメントを付けて出版したことでも知られている。そのときの会話の中で、河合先生から聞いた話として氏に上の Grauert の言葉を紹介したところ、「Grauert から少なくとも二度、岡の論文は一つも読んだことがないと聞かされた。」と言われて驚いた。しかし上に述べた理由でこの二つの話は矛盾しないのである。

4　$\bar{\partial}$ コホモロジーの L^2 理論

非ユークリッド幾何の発見以来、空間には三つの基本的な類型があり、それらは曲率の正負によって分類される。その事情は単連結な Riemann 面が $\mathbb{D}, \mathbb{C}, \widehat{\mathbb{C}}$ の三種類に限ることに対応している。E の曲率がベクトル空間 $H^{p,q}(M,E)$ の構造に及ぼす影響を記述したのが小平の消滅定理とその一族である。その仕組みは M がコンパクトな場合に限って調和形式の理論を使って解説されることが多いが (例えば [Kb])、ここでは定理 3.2 をカバーする必要上、Andreotti-Vesentini [A-V-1,2] や Hörmander [Hm-1,2]、および Grauert-Riemenschneider[G-R-1,2] にならい、完備な計量を持つ多様体上の L^2 $\bar{\partial}$ コホモロジー論の枠組みで論じよう。

4.1　擬凸と曲率

擬凸性は幾何学的な凸性に似た性質であり、領域 D の境界の曲がり方の条件でもあった。D が複素多様体 M のコンパクトな複素部分多様体 S の近傍の場合、D の擬凸性は S の M における曲がり方、すなわち**法ベクトル束** $N_{S/M}$ の曲率に一定の制約を課す。ただし $N_{S/M}$ は次の短完全列で定義される。

$$0 \to T_S \to T_M|_S \to N_{S/M} \to 0.$$

$N_{S/M}$ は S の近傍の線形近似である。つまり、局所的には S はベクトル値の正則関数の零点集合なので、S の余次元を m とすれば M の座標近傍 U_α ($\alpha = 1, 2, \ldots N$) と局所座標 $z_\alpha = (w_\alpha, s_\alpha)$ $s_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha, \mathbb{C}^m)$ を選んで $S \cap U_\alpha = s_\alpha^{-1}(0)$, $\bigwedge_{j=1}^m ds_{\alpha,j} \neq 0$ かつ $\bigcup_{\alpha=1}^N U_\alpha \supset S$ となるようにできるが、このとき変換関数系

$$\left(\frac{\partial s_{\alpha,j}}{\partial s_{\beta,k}}\right)_{j,k} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta, (\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)$$

で定まる S 上のベクトル束が $N_{S/M}$ である。従って、$N_{S/M}$ の零切断 ($\cong S$) が強擬凸な近傍を持てば S は M 内で強擬凸な近傍系を持つ。このときさらに $m = 1$ であれば $N_{S/M}$ は直線束で、零切断の近傍で $\{z_\alpha; |s_\alpha|^2 < a_\alpha(w_\alpha)\}, \alpha = 1, 2, \ldots, N$ の形のものに対する強擬凸性の条件は $\partial\bar{\partial} \log a_\alpha < 0$ と書ける。正値関数系 a_α は直線束 $N_{S/M}^*$ のファイバー計量になっていて、その曲率形式 (定義は

後述) は $-\partial\bar{\partial}\log a_\alpha$ なので、この意味で $N_{S/M}$ は負直線束である。ブローアップの例外集合は負の法直線束をもつ。逆に $S \cong \mathbb{CP}^n$ かつ $N_{S/M} \cong \mathcal{O}(-1)$ であれば、M は S を例外集合とするブローアップである[47]。

4.2 消滅定理における曲率条件

擬凸多様体の中で、コンパクト複素多様体と Stein 多様体を含む重要なクラスとして [G-2] で導入されたのが強擬凸多様体である。これは前節で述べた 1-凸多様体に他ならないが、念のため定義をもう一度述べておく。

定義 14. 多重劣調和な C^∞ 級皆既関数 φ を持つ複素多様体を擬凸多様体といい、その皆既関数があるコンパクト集合の補集合上で強多重劣調和になっているものを**強擬凸多様体**という。

[G-2] では強擬凸多様体 M 上の任意の解析的連接層 $\mathcal{F} \to M$ に対して $\dim H^q(M,\mathcal{F}) < \infty$ $(q \geq 1)$ であることが示され、これを用いて M の正則凸性が前節の定理 3.3 の証明と同様の方法で示された。[G-3] では解析空間の孤立特異点芽の非特異モデルとして現れる強擬凸多様体が詳しく解析され、その過程でコンパクト多様体上の直線束に対する正値性と豊富性の一致 (小平の埋め込み定理) が強擬凸領域上のコホモロジー有限性定理から従うことが判明した。

これをふまえて強擬凸多様体上で $\bar{\partial}$ コホモロジーを [K-1] に近い方法でより詳しく解析し、次の消滅定理を確立したのが [G-R-1,2] である。

定理 4.1. (Grauert-Riemenschneider の消滅定理) 非コンパクトな強擬凸多様体 M とその上の正則ベクトル束 E に対し、E が中野半正ならば $H^{n,q}(M,E)=0$ $(q \geq 1)$ である。

これと Serre の双対性定理により次を得る。

系 1. 上の条件下で $H_c^{0,q}(M,E^*)=0$ $(q \leq n-1)$。 とくに $H_c^{0,q}(M)=0$ $(q \leq n-1)$。

系 2. 2 次元以上の強擬凸領域の境界は連結である。

ただし E が**中野半正**であるとは次の条件をみたすファイバー計量 h を持つことをいう。

任意の点 $x \in M$ に対し、x の周りの M の局所座標 $z=(z_1,\dots,z_n)$ と E の局所枠を選んで、h の行列表現が次をみたすようにできる。

(1) $h(x)$ は単位行列であり

(2) $dh(x)=0$ であり

(3) $\left(-\frac{\partial^2 h}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right)(x)$ は nr 次 Hermite 行列として半正定値である。

(3) の「半」を取って**中野正**が定義される。

[47] $n=1$ の場合の発見者にちなんで Castelnuovo の判定法と呼ばれる。証明は初等的にできる。

[G-R-1,2] における定理 4.1 の証明は C^∞ 級の相対コンパクトな強擬凸領域 D に対し $\overline{D}$ 上で C^∞ 級の微分形式に対して $\bar{\partial}$ 方程式を解いた Kohn の仕事 [Kn] を応用するもので、コンパクト台のコホモロジーの消滅から Serre の双対定理を経由して上の結論を導いている。つまり Grauert と Riemenschneider は系 1 を先に証明した。しかしこの議論は双対性定理の条件をよく読めばわかるように、$H^{p,q}(M,E)$ $(q \geq 2)$ の Hausdorff 性 (実際には有限次元性) を前提としたものであり、ここでも M の強擬凸性が用いられているのである[48]。ともあれ、E に一定の曲率条件があれば E^* に対して Stein 多様体におけると同様の解析接続定理が成り立つというのが定理 4.1. 系 1 の意味である。

正則ベクトル束に対する曲率の概念は Chern[Ch] により導入された。正直線束は、コンパクトな複素多様体上の直線束に対してコホモロジー消滅定理を確立した小平 [K-1] による。「中野正」は小平の定理の次の一般化に現れた。

定理 4.2. (cf. [N-1]) M をコンパクトな n 次元複素多様体とし、E を M 上の中野正なベクトル束とすれば $H^{n,q}(M,E) = 0$ $(q \geq 1)$.

以後、直線束については「中野正」から「中野」を省く。定理 4.2 で E のランクが 1 の場合が小平の消滅定理である。小平の消滅定理の最も有名な応用は次の埋め込み定理である。

定理 4.3. コンパクトな複素多様体 M 上に正直線束 E があれば、十分高次のテンソルべき E^m に対して $x \mapsto \{s \in H^{0,0}(M,E^m); s(x) = 0\}$ は M から射影空間 $(H^{0,0}(M,E^m)^* \setminus \{0\})/\sim$ $(f \sim g \iff \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ s.t. $f = \alpha g)$ への臨界点を持たない単射正則写像になる。

言い方を変えれば、コンパクトな複素多様体 M 上に正直線束 $E \to M$ があれば、E^m $(m \gg 0)$ の切断 $s_0, \ldots, s_N$ を適当に選ぶと M は写像 $z \mapsto (s_0(z) : \cdots : s_N(z))$ によって $\mathbb{CP}^N$ に正則に埋め込める。小平はこのような切断 s_j $(0 \leq j \leq N)$ を作るのに、M をブローアップした多様体上で消滅定理を用い、実質的には $K_M \otimes E^m$(の切断) で埋め込み写像を作っている。$M = \mathbb{CP}^n$ の場合にはこの写像が $m = n+2$ で作れる[49]ことから、小平の埋め込み定理は次のように精密化されると予想されている。

藤田予想 (cf.[FT]).　コンパクトな n 次元の複素多様体 M 上の正直線束 E に対し、$K_M \otimes E^{n+1}$ の切断全体の共通零点はなく、M は $K_M \otimes E^{n+2}$ で埋め込める[50]。

定理 4.1 と相補的な消滅定理が擬凸多様体 (M,φ) 上で中野正な正則ベクトル束に対して成立する。それを定理 3.2 の一般化の形で M_R 上で述べたものが [N-2] で、風間がそれを学位論文 [Kz-1] で次のように一般化した。

定理 4.4. n 次元擬凸多様体 M 上の正則ベクトル束 E が中野正ならば $H^{n,q}(M,E) = 0$ $(q \geq 1)$ であり、制限写像 $H^{n,0}(M,E) \to H^{n,0}(M_R,E)$ $(R \in \mathbb{R})$ の像は稠密である。

Stein 多様体上の正則ベクトル束がすべて中野正であることは定義から容易にわかるが、強擬凸多様体は次元が正のコンパクト解析集合を含み得、その場合には自明束は正ではない。

ちなみに、[N-2,3], [Kz-1] では擬凸多様体は**弱 1 完備多様体**と呼ばれた。中野 [N-4] はさらに次を示した。

[48] コンパクト台のコホモロジーの消滅を経由しない直接的な証明を竹腰 [Tg-1] が与えている。

[49] M が複素トーラス $\mathbb{C}^n/\Lambda$ $(\Lambda = \sum_{j=1}^{2n} \mathbb{Z}\mathbf{v}_j,\ \mathbb{C}^n = \sum \mathbb{R}\mathbf{v}_j)$ なら E^3 で埋め込める (Lefschetz)。

[50] $n = 2$ のときは Reider[Rd] が解決。前半部に関しては $n = 3$ のときは Ein と Lazarsfeld[E-L]、$n \leq 4$ のときは川又 [Km]、$n = 5$ のときは Ye と Zhu[Y-Z] が解いた。この他にも [A-Siu] から [S-Y] に到るまで部分的な解を含む多数の研究がある。

定理 4.5. n 次元擬凸多様体 M 上の正直線束 E に対し $H^{p,q}(M,E)=0\ (p+q>n)$。

M がコンパクトのとき、これは**秋月・中野の消滅定理**として知られる[51]。

定理 4.4 と定理 4.5 に共通する点は、証明が定理 4.1 や定理 4.2 と同様に小平理論の自然な延長上にあり、複素 Laplace 作用素がみたす公式から導かれる評価式に基礎づけられている点である。次にそれについて述べよう。

4.3 中野の等式と L^2 評価式

コホモロジーの消滅は $\bar\partial$ 作用素の線形写像としての性質で、一定の曲率条件の下では $\bar\partial : C^{p,q-1}(M,E)\to \mathrm{Ker}\bar\partial\cap C^{p,q}(M,E)$ が全射になるという主張だが、一般に全射性は単射性の双対であり、単射性はノルム空間上では不等式で表現できる。中野の等式は、ベクトル束 E に対してそのような不等式が存在するかどうかを判定するための試金石のようなものである。

中野の等式を書くための記号を用意する。M は n 次元複素多様体であり、Hermite 計量 $g=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\overline{\beta}}dz_\alpha d\overline{z}_\beta$ を持つとする。Hermite 計量付きの複素多様体を **Hermite 多様体**と呼ぶ。$\omega(=\omega_g)$ で g の基本形式 $\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum g_{\alpha,\overline{\beta}}dz_\alpha\wedge d\overline{z}_\beta$ を表し、$dV(=dV_g)=\frac{1}{n!}\omega^n$ とおく。E を M 上の正則ベクトル束とし、h を E の C^∞ 級ファイバー計量とする。以後、C^∞ 級のファイバー計量付きの正則ベクトル束を簡単に **Hermite 束**と呼ぶことにする。g,h によりベクトル束 $\bigwedge^{p} T_M{}^*\otimes\bigwedge^{q}\overline{T_M}^*\otimes E$ のファイバー計量が定まるので、$C^{p,q}(M,E)$ の元 u,v に対し、M の各点ごとに g,h に関する内積が定まる。それを $\langle u,v\rangle(=\langle u,v\rangle_{g,h}(z),\ z\in M)$ で表す。u の各点ごとのノルムを $|u|=\langle u,u\rangle^{1/2}$ で定める。$C^{s,t}(M)$ または $C^{s,t}(M,E\otimes E^*)$ の元 θ に対し、$u\mapsto\theta\wedge u$ によって定まる $C^{p,q}(M,E)$ から $C^{p+s,q+t}(M,E)$ への線形写像を ($e(\theta)$ などと書くべきところであろうが) 簡単のため同じ記号 θ で表す。線形写像 $\Lambda : C^{p+1,q+1}(M,E)\to C^{p,q}(M,E)$ を

$$\langle\omega\wedge u,v\rangle=\langle u,\Lambda v\rangle\ \ (u\in C^{p,q}(M,E),\ \ v\in C^{p+1,q+1}(M,E))$$

で定義する。$\mathrm{supp}u\cap\mathrm{supp}v$ がコンパクトであるとき

$$\int_M\langle u,v\rangle dV$$

を $(u,v)\ (=(u,v)_{g,h})$ で表す。内積 $(\ ,\ )_{g,h}$ に関するノルムを $\|\ \|\ (=\|\ \|_{g,h})$ で表し、pre-Hilbert 空間 $C_c^{p,q}(M,E)$ の完備化を $L^{p,q}_{(2)}(M,E)(=L^{p,q}_{(2)}(M,E)_{g,h})$ と書く。$\bar\partial$ 作用素の**形式的共役** $\vartheta_h\ (=\vartheta_{g,h}) : C^{p,q}(M,E)\to C^{p,q-1}(M,E)$ を

$$\forall w\in C_c^{p,q-1}(M,E)\ \text{に対して}\int_M\langle u,\bar\partial w\rangle dV=\int_M\langle\vartheta_h u,w\rangle dV \tag{18}$$

により定義する。ファイバー計量 h を $C^{0,0}(M,\overline{E}^*\otimes E^*)$ の元とみなすことにより $C^{p,q}(M,E)$ から $C^{p,q}(M,\overline{E}^*)$ への線形写像が定まる。これを同じ記号 h で表し、微分作用素 $h^{-1}\circ\partial\circ h$ を簡単に ∂_h と書く。ファイバー計量 h は局所的に Hermite 行列表示 $(h_{\mu\bar\nu})$ を持つが、これを用いて ∂_h を書けば、一点の近傍 U 上のベクトル値 (p,q) 形式 $u=(u^1,\ldots,u^r)\ \ (u^\mu\in C^{p,q}(U))$ に対して

$$(\partial_h u)^\mu=\partial u^\mu-\sum_{\kappa,\nu}h^{\bar\nu\mu}u^\kappa\partial h_{\kappa\bar\nu}\quad\bigl((h^{\bar\nu\mu})=h^{-1}\bigr)$$

[51] 小平・中野の消滅定理と呼ばれることも多い。

となる。$\partial_h+\bar{\partial}$ を **Chern 接続**と呼び D_h で表す。$\bar{\partial}\bar{\partial}=\partial\partial=\bar{\partial}\partial+\partial\bar{\partial}=0$ より、D_h^2 は $C^{1,1}(M,E\otimes E^*)$ のある元 Θ_h を左から掛ける作用になる。この Θ_h を h の**曲率形式**と呼ぶ。Θ_h が中野正であるとは E が h に関して中野正であるときをいう。$\bar{\partial}$ に対する ϑ_h と同様に、∂_h についてもその形式的共役 $\overline{\vartheta}$ が (18) と同様の式で定まる[52]。複素 Laplace 作用素 $\square_h(=\square_{g,h})$ およびその複素共役 $\overline{\square}_h$ $(=\overline{\square}_{g,h})$ をそれぞれ

$$\square_h=\bar{\partial}\vartheta_h+\vartheta_h\bar{\partial}$$

$$\overline{\square}_h=\partial_h\overline{\vartheta}+\overline{\vartheta}\partial_h$$

によって定める。$d\omega=0$ すなわち g が **Kähler 計量**のとき

$$\square_h-\overline{\square}_h=\sqrt{-1}(\Theta_h\Lambda-\Lambda\Theta_h)$$

が成り立つ[53]。これを**中野の等式**と呼ぶ。

部分積分法または Stokes の公式により、$v\in C_c^{p,q}(M,E)$ ならば

$$(\square_h v,v)=\|\bar{\partial}v\|^2+\|\vartheta_h v\|^2,\quad (\overline{\square}_h v,v)=\|\partial_h v\|^2+\|\overline{\vartheta}v\|^2$$

である。従って g が Kähler 計量であれば

$$\|\bar{\partial}v\|^2+\|\vartheta_h v\|^2\geq(\sqrt{-1}(\Theta_h\Lambda-\Lambda\Theta_h)v,v)\quad \forall v\in C_c^{p,q}(M,E). \tag{19}$$

(E,h) が中野正であれば、$\Theta_h=(\sum_{\alpha,\beta=1}^n\Theta^{\nu}_{\alpha\overline{\beta}\mu}dz_\alpha\wedge d\overline{z}_\beta)_{\mu.\nu}$ に付随する二次形式

$$\sum_{\alpha,\beta,\mu,\kappa}\sum_{\nu}\Theta^{\nu}_{\alpha\overline{\beta}\mu}h_{\nu\overline{\kappa}}\xi^{\alpha\mu}\overline{\xi^{\beta\kappa}} \tag{20}$$

は正定値であるので、その固有値の各点ごとの最小値として定まる連続関数 $c:M\to(0,\infty)$ があって、$u\in C^{n,q}(M,E)$ $(q\geq 1)$ に対して $\langle\sqrt{-1}(\Theta_h\Lambda-\Lambda\Theta_h)v,v\rangle=\langle\sqrt{-1}\Theta_h\Lambda v,v\rangle\geq\langle cv,v\rangle$ が成り立つ。すなわち $\sqrt{-1}\Theta_h\Lambda$ は $C^{n,q}(M,E)$ 上の作用素として M の各点で正である。従ってこのとき $\Theta_h\Lambda$ は逆写像 $(\Theta_h\Lambda)^{-1}:C^{n,q}(M,E)\to C^{n,q}(M,E)$ を持つ。同様に、(E,h) が**中野負**、すなわち (20) が M 上で負定値ならば、$q\leq n-1$ のとき $(\Lambda\Theta_h)^{-1}:C^{0,q}(M,E)\to C^{0,q}(M,E)$ が存在する。

曲率条件を用いて (19) から得られる評価式が、Hilbert 空間 $L^{p,q}_{(2)}(M,E)$ 上では $\mathrm{Ker}\bar{\partial}=\mathrm{Im}\bar{\partial}$ を意味しうることを見ていこう。

4.4 完備 Kähler 多様体上の L^2 理論

Kähler 多様体 M と M 上の Hermite 束 E に対し、(19) が $L^{p,q}_{(2)}(M,E)$ 上の $\bar{\partial}$ 作用素に対してどんな評価式を導くかについて述べ、その結果を用いて完備な[54]Kähler 計量をもつ多様体上の $\bar{\partial}$ 方程式の可解性に関する基本的な定理を証明しよう。

定義 15. $L^{p,q}_{(2)}(M,E)$ への $\bar{\partial}$ の**閉拡張**とは $L^{p,q}_{(2)}(M,E)$ の線形部分空間

$$\left\{u\in L^{p,q}_{(2)}(M,E);\exists v\in L^{p,q+1}_{(2)}(M,E)\ \text{s.t.}\ \int_M\langle u,\vartheta_h w\rangle dV=\int_M\langle v,w\rangle dV\ \ \forall w\in C_c^{p,q+1}(M,E)\right\}$$

を定義域とする線形写像 $u\mapsto v$ をいう。

[52] $\overline{\vartheta}$ は h を含まない。
[53] 証明は [Kb] や [Oh-22] 等を参照されたい。
[54] 完備: $\Longleftrightarrow$ 計量が定める距離位相に関して完備 $\Longleftrightarrow$ 測地球体がすべて相対コンパクト (Hopf-Rinow の定理)

一般に Hilbert 空間 H_1, H_2 に対し、H_1 から H_2 への**閉作用素**とは H_1 の稠密な線形部分空間 $\mathcal{D}$ から H_2 への線形写像 T で、そのグラフ $G_T := \{(u, Tu); u \in \mathcal{D}\}$ が $H_1 \oplus H_2$ の閉集合になっているものをいう。T の定義域 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D}_T$ で表し、値域 $T(\mathcal{D})$ を $\mathcal{R}_T$ と書く。$\overline{G_T} = G_T$ だからといって $\overline{\mathcal{R}_T} = \mathcal{R}_T$ とならないことは当然であるが、$\mathrm{dim} H_2/\mathcal{R}_T < \infty$ のときには T の値域 $\mathcal{R}_T$ は閉集合になる[55]。$\mathcal{D}_T$ は T のグラフノルム $\|u\|_{H_1} + \|Tu\|_{H_2}$ に関して完備であり、$\mathcal{D}_T$ から G_T への写像 $u \mapsto (u, Tu)$ は位相ベクトル空間の同型写像である。$\bar{\partial}$ の閉拡張はこの意味で $L^{p,q}_{(2)}(M, E)$ から $L^{p,q+1}_{(2)}(M, E)$ への閉作用素である。簡単のためこれを同じ記号 $\bar{\partial}$ で表し、その定義域を $\mathcal{D}_{\bar{\partial}}$ $(= \mathcal{D}^{p,q}_{\bar{\partial}})$ と書く。閉作用素 $T : H_1 \to H_2$[56]に対し、H_2 から H_1 への閉作用素 T^* を

$$v \in \mathcal{D}_{T^*} \iff \exists u \in H_1 \ \text{ s.t. } \forall w \in \mathcal{D}_T \quad (u, w)_{H_1} = (v, Tw)_{H_2}, \quad T^* v = u$$

によって定義する。ただし $(\ ,\ )_{H_j}$ で H_j の内積を表す。H_j のノルムは $\|\ \|_{H_j}$ で表す。言い方を変えれば

$$(v, w) \in G_{T^*} \iff (w, -v) \perp G_T.$$

これより明らかに $(T^*)^* = T$ が成り立つ。　T^* を T の**共役作用素**と呼ぶ。

消滅定理を導く関数解析の原理は次の補題に集約される。

補題 4.1. $v \in H_2$, $C > 0$ に対して

$$\exists u \in \mathcal{D}_T \text{ s.t. } Tu = v \text{ かつ } \|u\|_{H_1} \le C \iff \forall w \in \mathcal{D}_{T^*} \text{ に対して } |(v, w)_{H_2}| \le C\|T^* w\|_{H_1}.$$

証明. $\Longrightarrow$: $Tu = v \Rightarrow |(v, w)_{H_2}| = |(Tu, w)_{H_2}| = |(u, T^* w)_{H_1}| \le \|u\|_{H_1} \|T^* w\|_{H_1} \le C\|T^* w\|_{H_1}$.
$\Longleftarrow$: Hahn-Banach の拡張定理および Riesz の表現定理より $\exists u \in H_1$ s.t. "$\|u\|_{H_1} \le C$ かつ $\forall w \in \mathcal{D}_{T^*}$ に対して $(u, T^* w)_{H_1} = (v, w)_{H_2}$." 従って $u \in \mathcal{D}_{(T^*)^*}$ かつ $(T^*)^* u (= Tu) = v$. □

$H_1 = \overline{\mathcal{R}_{T^*}} \oplus \mathrm{Ker} T$ であるので補題 4.1 および Banach の開写像定理より特に $\exists C > 0$ s.t. $\|u\| \le C\|Tu\|$ $(\forall u \in \mathcal{D}_T \perp \mathrm{Ker} T) \iff \overline{\mathcal{R}_{T^*}} = \mathcal{R}_{T^*}$ だが、

$$\overline{\mathcal{R}_{T^*}} = \mathcal{R}_{T^*} \iff \exists C' \text{ s.t. } \|v\| \le C'\|T^* v\| \ (\forall v \in \mathcal{D}_{T^*} \perp \mathrm{Ker} T^*) \iff \overline{\mathcal{R}_T} = \mathcal{R}_T \ \text{(後半は補題4.1より)}$$

であり、しかも

$$|(v, Tu)_{H_2}| = |(T^* v, u)_{H_1}| \le \|T^* v\|_{H_1} \|u\|_{H_1} \le C\|T^* v\|_{H_1} \|Tu\|_{H_2} \ (v \in \mathcal{D}_{T^*}, u \in \mathcal{D}_T,\ u \perp \mathrm{Ker} T)$$

より、さらに $v \perp \mathrm{Ker} T^*$ であれば $|(v, w)_{H_2}| \le C\|T^* v\|_{H_1} \|w\|_{H_2}$ $(w \in H_2)$. よって結局次の結果が成立する。

定理 4.6. (cf. [Hm-1, Theorem 1.1.1]) 閉作用素 $T : H_1 \to H_2$ と $C > 0$ に対し以下の条件は互いに同値である。

a) $\overline{\mathcal{R}_T} = \mathcal{R}_T$.

b) $\|u\|_{H_1} \le C\|Tu\|_{H_2}$, $u \in \mathcal{D}_T \cap \overline{\mathcal{R}_{T^*}}$.

c) $\overline{\mathcal{R}_{T^*}} = \mathcal{R}_{T^*}$.

d) $\|v\|_{H_2} \le C\|T^* v\|_{H_2}$, $v \in \mathcal{D}_{T^*} \cap \overline{\mathcal{R}_T}$.

---

[55]好適な演習問題であろう。

[56]略式な書き方であり、こう書いたからと言って $\mathcal{D} = H_1$ だというわけではない。

これも後で使う場面がある。

補題 4.1 により、問題は $T = \bar{\partial} : L^{p,q}_{(2)}(M,E) \to L^{p,q+1}_{(2)}(M,E) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ の場合に $|(u,w)| \leq \|\bar{\partial}^* w\| \ \ \forall w \in \mathcal{D}_{\bar{\partial}^*} \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ が成り立つための条件ということになる。それを導くため、(M,g) が一般の完備 Hermite 多様体の場合に成り立つ次の命題が有用である。

命題 4.1. (cf.[Ga]) 完備 Hermite 多様体 M 上の Hermite 束 E に対し、閉作用素 $\bar{\partial}+\bar{\partial}^* : L^{p,q}_{(2)}(M,E) \to L^{p,q+1}_{(2)}(M,E) \oplus L^{p,q-1}_{(2)}(M,E)$ の定義域 $\mathcal{D}_{\bar{\partial}+\bar{\partial}^*}$ 内で $C^{p,q}_c(M,E)$ はノルム $\|u\| + \|\bar{\partial}u\| + \|\bar{\partial}^* u\|$ に関して稠密である。

証明. 　二点 $z,w \in M$ に対し、M 上の完備 Hermite 計量 g に関する z から w への距離を $d(z,w)$ とする。C^∞ 関数 $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ を $\chi|_{(-\infty,1)} \equiv 1$ かつ $\chi|_{(2,\infty)} \equiv 0$ をみたすように取り、一点 $z_0 \in M$ を固定して $\chi_R(z) = \chi\left(\frac{d(z_0,z)}{R}\right)$ $(R>0)$ とおく。$d(z_0,z)$ は Lipschitz 連続なので $d(z_0,z)$ はほとんどいたるところ微分可能で $|\bar{\partial} d(z_0,z)|$ は有界である。従って

$$\bar{\partial}\chi_R = \frac{1}{R}\chi'\left(\frac{d(z_0,z)}{R}\right)\bar{\partial} d(z_0,z) \to 0 \ \ (R \to \infty)$$

であるので

$$u \in \mathcal{D}_{\bar{\partial}+\bar{\partial}^*} \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\left(\|u-\chi_R u\| + \|\bar{\partial}u - \bar{\partial}(\chi_R u)\| + \|\bar{\partial}^* u - \bar{\partial}^*(\chi_R u)\|\right) = 0.$$

よって最初から u の台はコンパクトであるとして構わないが、そのときは座標近傍上での標準的な軟化子による近似列を 1 の分解で貼り合わせればよい。 □

補題 4.1 と命題 4.1 より、(19) から次が従う。

定理 4.7. *n 次元完備 Kähler 多様体 M 上の中野正な Hermite 束 (E,h) に対し、$v \in L^{n,q}_{(2)}(M,E) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ $(q \geq 1)$ かつ $|((\Theta_h\Lambda)^{-1}v,v)| < \infty$ ならば、$\bar{\partial}u = v$ かつ $\|u\|^2 \leq |((\Theta_h\Lambda)^{-1}v,v)|$ をみたす $u \in L^{n,q-1}_{(2)}(M,E)$ が存在する。(E,h) が中野負で $v \in L^{0,q}_{(2)}(M,E) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ $(q \leq n-1)$ かつ $|((\Lambda\Theta_h)^{-1}v,v)| < \infty$ ならば $\bar{\partial}u = v$ かつ $\|u\|^2 \leq |((\Lambda\Theta_h)^{-1}v,v)|$ をみたす $u \in L^{n,q-1}_{(2)}(M,E)$ が存在する*[57]。

証明. $v \in L^{n,q}_{(2)}(M,E) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ $(q \geq 1)$, $w \in L^{n,q}_{(2)}(M,E) \cap \mathcal{D}_{\bar{\partial}^*}$ に対し、$w = w_1 + w_2$, $w_1 \in \mathrm{Ker}\bar{\partial}, w_2 \perp \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ とすると $(v,w) = (v,w_1)$ が成立する。$\mathrm{Ker}\bar{\partial} = \{u; u \perp \mathcal{R}_{\bar{\partial}^*}\}$, $\bar{\partial}^*\bar{\partial}^* = 0$ より $\bar{\partial}^* w_2 = 0$ であるので $w_1 \in \mathcal{D}_{\bar{\partial}^*}$ であり、従って命題 4.1 と (19) から、Θ_h が中野正なら

$$(\sqrt{-1}\Theta_h\Lambda w_1, w_1) \leq \|\bar{\partial}w_1\|^2 + \|\bar{\partial}^* w_1\|^2 = \|\bar{\partial}^* w_1\|^2 = \|\bar{\partial}^* w\|^2. \tag{21}$$

さらにこのとき Cauchy-Schwarz の不等式より

$$|(v,w)|^2 = |(v,w_1)|^2 \leq \left((\sqrt{-1}\Theta_h\Lambda)^{-1}v, v\right)\left(\sqrt{-1}\Theta_h\Lambda w_1, w_1\right). \tag{22}$$

よって (21) と (22) より $|(v,w)|^2 \leq \left((\sqrt{-1}\Theta_h\Lambda)^{-1}v,v\right)\|\bar{\partial}^* w\|^2$ となるから、補題 4.1 を用いて求める結論が得られる。後半部の証明も同様である。 □

定理 4.7 は Andreotti と Vesentini の論文 [A-V-1] で正直線束に対して示された結果を中野正 Hermite 束に対して一般化したものである。応用上は $(p,q) = (n,1)$ で E が直線束の場合が最も重要であるが、このときは定理の条件を次のように弱めておくと都合が好い。

[57] 便宜上 $L^{p,-1}_{(2)}(M,E) = 0$, $\bar{\partial}|_{L^{p,-1}_{(2)}(M,E)} = 0$ とおく。

定理 4.8. (L^2 **消滅定理**) M は n 次元複素多様体で完備な Kähler 計量を持つとし、(E,h) は M 上の正直線束であるとする。このとき、計量 (対)$(2\Theta_h,h)$ に関して、$L^{n,q}_{(2)}(M,E)\cap\mathrm{Ker}\bar\partial$ $(q\geq 1)$ の元 v に対し、$L^{n,q-1}_{(2)}(M,E)$ の元 u で $\bar\partial u=v$ かつ $q\|u\|^2\leq\|v\|^2$ をみたすものが存在する。

証明のスケッチ：M の完備 Kähler 計量を g とすれば、v は $(\epsilon g+2\Theta_h,h)$ $(\epsilon>0)$ に関する $L^{n,q}_{(2)}(M,E)$ に属し、ノルムは $\epsilon\searrow 0$ のとき増大列になる。よって各 ϵ に対して定理 4.7 を適用して得られるノルム評価付きの解の族 u_ϵ から Alaoglu-Bourbaki の定理より $\epsilon\searrow 0$ に対する弱収束部分列を取り出し、その極限を u とすればよい。 □

定理 4.8 ははじめ特殊な場合に [Oh-2] で得られたが、のちに [Dm-1] および [Oh-7] で (独立に) 一般の場合に示された。

4.5 擬凸多様体の $\bar\partial$ コホモロジー

定理 4.7 と定理 3.2 を結ぶものは Grauert[G-1] が発見した次の命題である。

命題 4.2. 1-完備多様体 (M,φ) 上には完備 Kähler 計量 $\partial\bar\partial e^\varphi$ が存在する。

証明. $\partial\bar\partial e^\varphi$ の Kähler 性は定義より明白。C^1 級の曲線 $\gamma:[0,1]\to M$ に対し、$\partial\bar\partial e^\varphi$ で測った γ の長さ ℓ は

$$\ell=\int_0^1\sqrt{\gamma^*(\partial\bar\partial e^\varphi)}$$

で定義されるから、$|d\varphi|^2=|\partial\varphi|^2+|\bar\partial\varphi|^2$ より

$$\sqrt{2}\ell\geq\int_0^1 e^{\varphi(\gamma(t))}\left|\frac{d\varphi(\gamma(t))}{dt}\right|dt\geq e^{\varphi(\gamma(1))}-e^{\varphi(\gamma(0))}.$$

$\varphi(\gamma(1))\to\infty$ のとき $\ell\to\infty$ だから、φ の皆既性より $\partial\bar\partial e^\varphi$ は完備になる。 □

定理 3.2 の証明

(13), $H^{p,q}(M,E)=0$ $(q\geq 1)$: 1 完備多様体 (M,φ) 上の Kähler 計量 g M 上の Hermite 束 (E,h), および $v\in C^{p,q}(M,E)\cap\mathrm{Ker}\bar\partial$ $(q\geq 1)$ を固定する。C^∞ 級の凸関数 $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(\lambda'>0,\ \lambda''>0)$ を h と v に応じて十分急激に増大するように選ぶことにより、v は g および E のファイバー計量 $h_\lambda:=he^{-\lambda\circ\varphi}$ に関して $L^{p,q}_{(2)}(M,E)$ の元であり、g と $h_{-\lambda}$ によって定まる $\bigwedge^n T_M\otimes\bigwedge^p T^*_M\otimes E$ のファイバー計量の曲率形式 Θ が中野正であり、同時に

$$\left((\sqrt{-1}\Theta\Lambda)^{-1}v,v\right)<\infty$$

が成り立つようにできる。従って

$$L^{p,q}_{(2)}(M,E)=L^{n,q}_{(2)}(M,\bigwedge^n T_M\otimes\bigwedge^p T^*_M\otimes E)$$

に注意すれば、命題 4.2 と定理 4.7 により方程式 $\bar\partial u=v$ は (g,h_λ) に関して $u\in L^{p,q-1}_{(2)}(M,E)$ となる解 u を持つ。この u として特に $u\perp\mathrm{Ker}\bar\partial$ をみたすものをとれば、$\bar\partial^*u=0$ より $\square_{h_\lambda}u=\vartheta_{h_\lambda}\bar\partial v\in C^{p,q}(M,E)$ であるが、$\square_{h_\lambda}$ は強楕円型だから u は C^∞ 級である。従って $H^{p,q}(M,E)=0$

である。 $\square$

(13), $H_c^{p,q}(M,E)=0\ \ (q\le n-1)$: Serre の双対性定理によらない直接証明を与える。

$v\in C_c^{p,q}(M,E)\cap \mathrm{Ker}\bar\partial\ \ (q\le n-1)$ のとき、上の λ として g と $he^{\lambda\circ\varphi}$ で定まる $\bigwedge^p T_m^*\otimes E$ の曲率形式が中野負であるようにとる。C^∞ 級の関数 $\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で $\tau'\ge 0,\tau''\ge 0,\tau|_{[-\infty,0]}\equiv 0,$ $\tau'|_{(1,\infty)}>0$ をみたすものを選び、$R=\sup_{\mathrm{supp}v}\varphi$, $h_{-\lambda,\mu}=he^{\lambda\circ\varphi+\mu\tau\circ(\varphi-R-1)}\quad(\mu>0)$ とおく。すると定理 4.7 により、$\mu=1,2,\dots$ に対して $(g,h_{-\lambda,\mu})$ に関する $L_{(2)}^{p,q-1}(M,E)$ の元 u_μ で $\bar\partial u_\mu=v$, $u_\mu\perp\mathrm{Ker}\bar\partial$ をみたし、かつ $\|u_\mu\|$ が μ によらない定数を越えないものが存在する。したがって u_μ の弱収束部分列がとれる。その極限 u が $u\in C_c^{p,q-1}(M,E)$, $\bar\partial u=v$ をみたすことは作り方より明白。

$\square$

(14), $H^{p,0}(M,E)\to H^{p,0}(M_R,E)$ の像の稠密性: $u\in H^{p,0}(M_R,E)$ および $R'<R$ に対し、χ を $(M_R,M_{R'})$ カットオフとすると $v=\bar\partial(\chi u)\in C_c^{p,1}(M,E)$。$\lambda,\tau$ を上の通りとし、$h_{\lambda,-\mu}=he^{-\lambda\circ\varphi-\mu\tau(\varphi-R')}$ とおく。すると定理 4.7 より $\mu=1,2,\dots$ に対して $(g,h_{\lambda,-\mu})$ に関する $L_{(2)}^{p,0}(M,E)$ の元 u_μ で $\bar\partial u_\mu=0,\|u_\mu\|_\mu\le C\|v\|_\mu$ をみたすものが存在する。ただし $\|\ \|_\mu$ は $(g,h_{\lambda,-\mu})$ に関するノルムで C は μ によらない定数。$\chi u-u_\mu\in L_{(2)}^{n,0}(M,E)\cap\mathrm{Ker}\bar\partial$ であるが、$\|v\|_\mu\to 0\ \ (\mu\to\infty)$ だから $\|u_\mu\|_\mu\to 0$ となり、したがって

$$\int_{M_{R'}}|u-u_\mu|^2dV\to 0\ \ (\mu\to\infty)$$

である。よって Cahuchy の評価式より結論が得られる。 $\square$

(14), $H_c^{p,n}(M_R,E)\to H_c^{p,n}(M,E)$ の単射性: $v\in C_c^{p,n}(M_R,E)\cap\mathrm{Ker}\bar\partial$ に対し、$C_c^{p,n-1}(M,E)$ の元 u で $\bar\partial u=v$ をみたすものがあるとする。このとき $R'=\sup_{\mathrm{supp}v}\varphi$ とし、λ, τ を上の通りとすれば、計量 $(g,he^{\lambda\circ\varphi+\mu\tau(\varphi-R')})$ に関する $L_{(2)}^{p,n}(M,E)$ の元として v を見たとき、そのノルム $\|v\|_\mu$, $\mu=1,2,\dots$ はある定数を越えない。よって定理 4.6 と定理 4.7 より、定数 C と $u_\mu\in L_{(2)}^{p,n-1}(M,E)$ が存在して

$$\bar\partial u_\mu=v,\ \ \|u_\mu\|_\mu\le C,\ \ \mu=1,2,\dots.$$

よって弱極限をとって求める結論が得られる。 $\square$

定理 3.2 は 3.3 で述べたような Stein 多様体の特徴づけを導くという意味では最終定理ともいうべき重要な結果であるが、そこでは「1-完備性」「$\bar\partial$ コホモロジーの消滅」「近似定理」の三つが美しく組み合わさっていることと、この調和が岡潔の第一論文 [O-1] の冒頭で次のようにはっきりと示唆されていることに注意しておきたい。

Malgré le progrès récént de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, diverses choses importantes restent plus ou moins obscures, notamment: le type de domaines dans lesquels le théorèmes de Runge ou ceux de M. P. Cousin subsistent, la relation entre la convexité de M. F. Hartogs et celle de MM. H. Cartan et P. Thullen (voir l'Ouvrage de MM. H. Behnke et P. Thullen: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen,* spécialement aux pages 54, 68, 79. [footnote]); parmi eux il y a des relations intimes. C'est à traiter ces problèmes que le présent mémoire et ceux qui suivront, sont destinés.

念のため、和訳 (www.nara-wu.ac.jp aic gdb nwugdb oka) も掲げておく。

複素多変数解析函数論の近年の進展にもかかわらず、いくつかの重要な事柄が大なり小なり解明されないまま残されている。特に、Runge の定理や P. Cousin の定理が成り立つ領域のタイプ、F. Hartogs の凸性と H. Cartan と P. Thullen の凸性の関係 ([脚注] H. Behnke と P. Thullen の著書 *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen,* 特に 54, 68, 79 ページを見よ。); しかもそれらの間には深い関係がある。この論文およびこれに続く論文で予定されているのはこれらの問題の研究である。

定理 3.2 において条件 $\partial\bar{\partial}\varphi > 0$ を $\Theta_h > 0$ で置き換えたものが定理 4.4 である。定理 4.4 は岡・Cartan 理論と小平理論を統合している。擬凸多様体 (M, φ) が Kähler 計量 g を持てば完備な Kähler 計量 $g+\partial\bar{\partial}e^{\varphi}$ を持つことから、その証明にも定理 4.7 を用いた同様の議論が適用できる。こういう一般化は解析空間の改変の理論における必要からでもあったが (cf. [N-2], [F-N], [F])、小平の消滅定理の相対版としての意味もある。たとえば複素多様体 M から $\mathbb{B}^m$ 上へのプロパーな正則写像 $\varpi : M \to \mathbb{B}^m$ があれば M は $(1 - \|\varpi(z)\|^2)^{-1}$ に関して擬凸になり、このとき定理 4.4 は定理 4.2 を多様体の解析族に拡張した形になる。一方、このような状況では $\dim \varpi^{-1}(0) > \dim \varpi^{-1}(t)$ $(t \in \mathbb{B}^m \setminus \{0\})$ となる場合がしばしば起こる (例えばブローアップ)。よって定理 4.4 の次の一般化にも意味がある。

定理 4.9. (コホモロジー有限性定理. cf. [N-R], [Abd]) n 次元擬凸多様体 (M, φ) と正則ベクトル束 $\pi : E \to M$ に対し、ある $R_0 \in \mathbb{R}$ に対して $E|_{M\setminus\overline{M}_{R_0}}$ が中野正であれば

a) $\dim H^{n,q}(M, E) < \infty,\ \ q \geq 1$ であり、

b) $R > R_0$ のとき制限準同型

$$H^{n,q}(M, E) \to H^{n,q}(M_R, E)\ \ (q \geq 1)$$

は同型写像であり、

c) 制限写像 $H^{n,0}(M, E) \to H^{n,0}(M_R, E)$ の像は稠密である。

系. 強擬凸多様体は正則凸である。

竹腰 [Tg-1,2][58]による定理 4.1 の一般化によれば、定理 4.9 において E がさらに M 全体で中野半正ならば *a*) はより強く $H^{n,q}(M, E) = 0,\ \ q \geq 1$ となる。よってこの場合にも E^* に対する接続定理がある。これに似た方向であるが、[Oh-17] では L^2 評価の方法で次を示した。

定理 4.10. M が Kähler 計量を持ち、D が相対コンパクトな Levi 擬凸領域であり、かつ ∂D の Levi 形式が恒等的に 0 でなければ $H_c^{0,1}(D) = 0$ である。

系. 上の状況で ∂D は連結である。

$\mathbb{C}^n$ の有界領域上の解析接続に関する最近の結果がある。

[58][Tg-2] には Hartogs 型の拡張定理への応用がある (cf. [Cl-Rp])。

定理 4.11. (cf. [Ti-1,Theorem 1]) $n \geq 4$ とし、D は $\mathbb{C}^n$ 内の有界な領域であり、関数 $\varphi : D \to (-\infty, 0)$ は多重劣調和で C^∞ 級であり、かつ $z \to \partial D$ のとき $\varphi(z) \to 0$ であるとする。このとき D の部分領域 V で $\mathrm{supp}(\partial\bar{\partial}\varphi)^{n-3}$ を含むものに対し、制限写像 $\mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(V)$ は全射である。

[L-N] では上の条件 $n \geq 4$ が定理 4.10 の証明で用いられた双対性の議論によって $n \geq 3$ に緩められ、さらに $\mathrm{supp}(\partial\bar{\partial}\varphi)^{n-3}$ は $\mathrm{supp}(\partial\bar{\partial}\varphi)^{n-2}$ でよいことが示された。また、∂D が滑らかな場合に次が得られた。

定理 4.12. $n \geq 3$ とし、D は $\mathbb{C}^n$ 内の滑らかな境界を持つ有界擬凸領域で、閉包 $\overline{D}$ の近傍上で定義された多重劣調和な C^∞ 級の定義関数 φ を持つとする。このとき領域 $V \subset \mathbb{C}^n$ に対し、φ の Levi 形式のランクが $n-2$ 以上である点全体の集合が V 内で相対コンパクトならば $\mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(V \cap D)$ は全射である。

ちなみに定理 4.12 は $n \leq 2$ でも自明な意味で成り立つ。

擬凸多様体 M 上で E と E^* が同時にコホモロジー有限性定理の仮定である「コンパクト集合の外で中野正」という条件をみたすことは、M が強擬凸の場合を除けばありえない。よって E について接続定理が成立するが E の切断は 0 だけという状況がままあり、解析接続の立場からは甚だ物足りない。そこで一旦は強擬凸の場合に戻り、$H^{n,q}(M)$ に対する結果がどこまで $H^{p,q}(M)$ に対して拡がるかと考えた。より正確には、[G-R-1] を読み、Grauert と Riemenschneider はそういうことを目ざしたのではないかと忖度した。その結果、Lieberman-Rossi[L-R] の拡張を示唆した藤木明氏のアイディアに刺激を受けて生まれたのが [Oh-5,12] である。その要点を以下にまとめておきたい。

4.6 Hodge 理論と解析接続

n 次元の擬凸多様体 (M, φ) に対し、[Oh-5] では M の $\bar{\partial}$ コホモロジー群 $H^{p,q}(M)$, $H_c^{p,q}(M)$ および de Rham コホモロジー群 $H^r(M, \mathbb{C})$, $H_c^r(M, \mathbb{C})$ について次を示した。

定理 4.13. M が Kähler 計量を持ち、かつ φ の Levi 形式のランクがあるコンパクト集合の外で k 以上であれば、入射準同型 $H_c^{p,q}(M) \to H^{p,q}(M)$ $(p+q \leq k-1)$ および $H_c^r(M, \mathbb{C}) \to H^r(M, \mathbb{C})$ $(r \leq k-1)$ は単射である。

証明には完備な Kähler 多様体上の L^2 調和形式に対する Hodge 理論 (特に Lefschetz 同型) を M_R 上で用いた。より具体的には、M_R の境界近くで $\partial\bar{\partial}\log(\frac{1}{R-\varphi})$ と同様の挙動を持つ計量に対して $\bar{\partial}$ 作用素に対する L^2 調和形式の空間を考えたが、これが次数が $k+1$ 以上の範囲で通常の $\bar{\partial}$ コホモロジーの空間に同型であることを示す必要があり、そのために新しい議論を必要とした。ポイントは $\bar{\partial}$ 作用素の値域の閉性で、そこで計量の境界挙動についての情報をフルに使う必要があったが、この部分は後に Demailly[Dm-2] がもっと簡単な議論で示した。([Oh-T-2] でも別証を与えた。)

M の de Rham コホモロジーについても L^2 調和形式で表現可能であるという事情は同じで、その結果、コンパクト Kähler 多様体上の Hodge 理論を引き写した同型

$$H^{p,q}(M) \cong \overline{H^{q,p}(M)} \quad \text{(Hodge 対称性)}$$

および

$$H^r(M, \mathbb{C}) \cong \oplus_{p+q=r} H^{p,q}(M) \quad \text{(Hodge 分解)}$$

が $2n-k+1$ 次以上で成立することが得られ、これを踏まえて Kähler 形式 ω の外積による Lefschetz 同型

$$\omega^s : H_c^{p,q}(M) \to H^{p+s,q+s}(M) \ \ (p+q=n-s)$$
$$(\text{resp. } \omega^s : H_c^r(M,\mathbb{C}) \to H^{r+2s}(M,\mathbb{C}) \ \ (r=n-s))$$

が $n-s \le k-1$ の範囲で得られるのである。これより入射準同型 $H_c^{p,q}(M) \to H^{p,q}(M)$ $(p+q \ge 2n-k+1)$ (resp. $H_c^r(M,\mathbb{C}) \to H^r(M,\mathbb{C})$ $(r \ge 2n-k+1)$) が全射であることがただちに従い、Serre 双対性およびポアンカレ双対性により所期の結果が得られる。

強擬凸多様体は適当にブローアップすれば強擬凸 Kähler 多様体になり $\dim H_c^{0,q}(M)$ はブローアップで不変なので、E が自明束の場合には定理 4. 1 は定理 4.13 に含まれる。同様の理由で次の系が得られる。

系. M が強擬凸ならば制限準同型

$$H^{p,q}(M) \to \lim_K H^{p,q}(M \setminus K) \ \ (p+q \le n-2)$$

および

$$H^r(M,\mathbb{C}) \to \lim_K H^r(M \setminus K,\mathbb{C}) \ \ (r \le n-2)$$

は全射である。

これは定理 4.1 の系 1 の一般化としてはほぼ満足すべき結果であろう。

4.7 L^2 消滅定理の応用

M のコンパクト集合の補集合上で定義された E の切断を M 上に解析接続する問題にとって L^2 理論は有効だが、拡張された切断の評価は Cauchy の評価式より自動的なので自明である。これに対し、部分多様体上の正則関数を全体に拡張する問題においては、拡張された関数の増大度の評価が重要な場合がある。定理 4.7, 定理 4.8 がその目的のためにも有用であることを示す例をあげよう。そのために、定理 4.8 を特別な場合に書き直しておく。

定理 4.14. (cf. [Oh-2, Theorem 1.5 and Corollary 1.6]) M は n 次元の完備 Kähler 多様体とし、$\Phi \in SPSH(M)$ とする。このとき計量 $\partial\bar\partial\Phi$ とウェイト Φ に関するノルム

$$\|u\|_\Phi := \left(\int_M e^{-\Phi}|u|^2 dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

についての $L^{n,1}_{(2)}(M) \cap \mathrm{Ker}\bar\partial$ の元 f に対して M 上の $(n,0)$ 形式 h で $\bar\partial h = f$ かつ

$$i^{n^2}\int_M e^{-\Phi} h \wedge \overline{h} \le \int_M e^{-\Phi}|f|^2 dV$$

をみたすものが存在する。

この結果の一般的な使用法を述べよう。一点 $x \in M$ および x のまわりの局所座標 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ を選んで x の近傍 U が $\mathbb{D}^n$ 上に写像されるようにする。 $\chi : M \to [0,1]$ を C^∞ 関数で $\mathrm{supp}\chi \subset U$ かつ x の近傍上で $\chi \equiv 1$ をみたすものとし、α は M 上の C^∞ 級の $(n,0)$ 形式で U 上で $\alpha =$

$\chi dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ をみたすものとする。 Ψ を $M \setminus \{x\}$ 上の C^∞ 級関数で $\mathrm{supp}\Psi \subset U$ かつ $U \setminus \{x\}$ 上で $\Psi = 2n\chi \log \|z\|$ をみたすものとする。 すると $\Psi + m\Phi \in SPSH(M \setminus \{x\})$ $(m \gg 0)$ である。M は完備な Kähler 計量 $\partial\bar{\partial}(-\log(1-\Psi) + m\Phi)$ を持つから、このような m に対して、定理 4.13 により $M \setminus \{x\}$ 上の $(n,0)$ 形式 u で $\bar{\partial}u = \bar{\partial}\alpha$ かつ

$$i^{n^2} \int_M e^{-\Psi - m\Phi} u \wedge \overline{u} < \infty.$$

をみたすものが存在する。すると $\alpha - u$ は M 上の正則 n 形式 $\tilde{\alpha}$ へと拡張され、 $\tilde{\alpha}(x) \neq 0$ である。同様に相異なる 2 点 $x, y \in M$ に対して M 上の正則 n 形式 β で $\beta(x) = 0$ かつ $\beta(y) \neq 0$ をみたすものが存在する。

x, y で値を与えて M 上の切断を作るために [K-2] では M のブローアップ上の消滅定理が用いられたが、上の方法では $M \setminus \{x, y\}$ 上で L^2 消滅定理を用いるのである。ちなみに、$\alpha - u$ を $\tilde{\alpha}$ に拡張できる理由は一般的には次の命題に含まれる。

命題 4.3. [59] $\mathcal{O}(M, \mathbb{C}^m) \setminus \{0\}$ $(m \in \mathbb{N})$ に対し、制限写像 $L^{n,0}_{(2)}(M) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial} \to L^{n,0}_{(2)}(M \setminus f^{-1}(0)) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ は全単射である。

M の閉集合 A が局所的にいくつかの正則関数の共通零点集合として書けるとき、A は **(複素) 解析的部分集合**であるという。命題 4.3 は解析的真部分集合が L^2 正則関数に関して除去可能な特異点集合であることを言っている。

上の Φ が皆既関数であればやはり同様な方法で、集積点を持たない無限集合 $\Gamma \subset M$ に対して制限写像 $\mathcal{O}(M) \to \mathbb{C}^\Gamma$ が全射であることが導ける。これが 1-完備多様体の正則凸性の証明としては一番の早道かもしれない。この議論は幾何学的な凸性と関数論的な凸性を補間問題を解くことにより結びつけている。

注意. 上の議論および定理 4.7 の証明をよく読めば明らかなように、条件 $\Phi \in SPSH(M)$ は「$\Phi \in PSH(M)$ かつ Φ は x の近傍で強多重劣調和」としても使える。以下では適宜、定理 4.14 をそのように読み直して用いる。

定義 16. (**L^2 $\bar{\partial}$ コホモロジー群**) Hermite 多様体 M 上の Hermite 束 E に対し、閉作用素 $\bar{\partial}$: $L^{p,q}_{(2)}(M, E) \to L^{p,q+1}_{(2)}(M, E)$ の核を $\mathcal{N}^{p,q}_{\bar{\partial}}$、値域を $\mathcal{R}^{p,q+1}_{\bar{\partial}}$ としたとき、$\mathcal{N}^{p,q}_{\bar{\partial}}/\mathcal{R}^{p,q}_{\bar{\partial}}$ を M の E 係数の (p,q) 型 L^2 $\bar{\partial}$ コホモロジー群と呼び、$H^{p,q}_{(2)}(M, E)$ で表す。

定理 4.8 を L^2 コホモロジーを使って簡単に言うと次のようになる。

定理 4.15. n 次元完備 Kähler 多様体 M 上に正直線束 (E, h) があれば、計量 (Θ_h, h) に関して $H^{n,q}_{(2)}(M, E) = 0$ $(q \geq 1)$ である。

系. 複素多様体 M が完備な Kähler 計量と正直線束を持てば、M の相対コンパクトな領域は射影的である。

M 全体の射影性を結論付ける結果としては次がある。

定理 4.16. (cf. [Ty]) 擬凸多様体が正直線束を持てば射影的である。

定理 4.14 の最近の応用を紹介しよう。それは正則写像 $\pi : M \to N$ に関するもので、西野 [Nn-2] によるつぎの結果の別証明である。

[59] 証明は割愛するが何通りかあり、容易である (例えば [Oh-17, Proposition 1.14])。

定理 4.17. M が 2 次元の Stein 多様体であり、$N \cong \mathbb{D}$, $d\pi \neq 0$, $\pi^{-1}(t) \cong \mathbb{C}$ $(\forall t \in \mathbb{D})$ であれば $M \cong \mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

証明 (cf. [Oh-24]). $M \cong \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ をいうには次を示せば十分である。

$$\forall t_0 \in \mathbb{D}\, \exists \text{ 近傍 } U \ni t_0 \text{ s.t. } \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{C}.$$

実際、M がこのように局所的に直積になっていれば、$\mathrm{Aut}\mathbb{C} = \{az+b; a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$ であることから、$\mathbb{D}$ の開被覆 $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ および $a_{jk} \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k, \mathbb{C}^*)$, $b_{jk} \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$ が存在して

$$M = (\coprod_{j\in\mathbb{N}} U_j \times \mathbb{C})/\sim: \quad (t, z_j) \sim (t, z_k) \iff t \in U_j \cap U_k \text{ かつ } z_j = a_{jk}(t) z_k + b_{jk}(t)$$

ただし $U_j \cap U_k \cap U_\ell$ 上で $a_{jk}a_{k\ell}a_{\ell j} = 1$ かつ $a_{jk}b_{k\ell} + b_{jk} - b_{j\ell} = 0$. よって $\mathbb{D}$ が単連結な Stein 多様体であることから

$$\exists a_j \in \mathcal{O}(U_j, \mathbb{C}^*),\ \exists b_j \in \mathcal{O}(U_j) \text{ s.t. } a_{jk} = a_k/a_j \text{ かつ } a_j b_{jk} = b_k - b_j.$$

従って $(t, z_j) \mapsto (t, a_k(t)z_k + b_k(t))$ が同型 $M \cong \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ を与える。

よって最初から $\mathcal{O}(\mathbb{D}, M)$ の元 s で $\pi \circ s = id_{\mathbb{D}}$ をみたすものがあると仮定しても構わないし、さらに $s(0)$ のまわりの局所座標 (t, z) で $\pi(t, z) = t$ をみたし、かつ $z|_{\pi^{-1}(0)}$ は $\pi^{-1}(0)$ から $\mathbb{C}$ への双正則写像であり、(t, z) により $s(0)$ の近傍 U が $\mathbb{D}^2$ に双正則に写像されるとしてよい。

L^2 消滅定理を応用するため、次の補題を用意する。

補題 4.2. U を上の通りとすると、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\pi^{-1}(0)$ 内の点 $q \neq s(0)$ および $\varphi \in PSH(\pi^{-1}(\mathbb{D}) \setminus s(\mathbb{D}))$ が存在して、$\sup_U (\varphi + (2+\epsilon)\log|z|) < \infty$、$\varphi \in SPSH(U \setminus \{q\})$、かつ $e^{-\varphi}$ は q の任意の近傍上で非可積分となる。

証明は初学者向けの演習問題のレベルなので省略する。

定理 4.17 の証明の続き: M の部分集合 A 上で定義された実関数 ψ に対して、$\psi^+ : M \to \mathbb{R}$ を A 上では $\psi^+ = \max\{\psi, 0\}$、$M \setminus A$ 上では $\psi^+ = 0$ と定める。L^2 消滅定理と上の補題により、任意の $\epsilon > 0$ とそれに応じた $q \notin s(\mathbb{D})$ に対し

$$\exists \alpha \in H^{2,0}(M \setminus s(\mathbb{D})) \text{ s.t. } \alpha(q) \neq 0 \text{ かつ } \int_{M\setminus s(\mathbb{D})} e^{-(2+\epsilon)\log^+ 1/|z|} \alpha \wedge \overline{\alpha} < \infty.$$

従ってさらに $\epsilon < 2$ のときには近傍 $W \ni 0$ を、$\alpha/\pi^* dt$ が $\pi^{-1}(W) \setminus s(W)$ 上では π のファイバーごとに単葉な原始関数 F を持つようにとることができる。(t, F) は $\pi^{-1}(W)$ から $W \times \widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像になり、Riemann の写像定理と仮定 $\pi^{-1}(t) \cong \mathbb{C}$ によれば、各 $t \in W$ に対し $F|_{\pi^{-1}(t)}$ の像の補集合の Mächtigkeit は 1 である。従って、写像 (t, F) の像の補集合は連続関数のグラフであるので定理 2.2 より複素部分多様体である。よって $\pi^{-1}(W) \cong W \times \mathbb{C}$ でなければならない。 □

[Oh-24] では定理 4.17 を同様の方法で次の定理へと一般化した。

定理 4.18. 完備 Kähler 多様体 M と全射正則写像 $\pi : M \to \mathbb{D}^m$ で $d\pi \neq 0$ をみたすものに対し、$\pi^{-1}(t) \cong \mathbb{C}$ $(t \in \mathbb{D})$ ならば $M \cong \mathbb{D}^m \times \mathbb{C}$ である。

ただし証明には定理 2.2 を次のように一般化して用いる。

定理 4.19. 連続関数 $\mathbb{D}^m \to \mathbb{C}$ が正則であるための必要十分条件は、グラフの補集合が完備な Kähler 計量を持つことである。

ちなみに、複素構造の変形理論の出発点はコンパクトな複素多様体の可微分族 $\{M_t\}$ $(t \in (-1,1))$ に関するもので、$H^{0,1}(M_0, T_M) = 0 \Rightarrow \forall M_t \cong M_0$ であった (cf. [K-6])。可微分族が自明であるようなコンパクトな複素多様体は**剛 (rigid)** であるというが、射影多様体に限ればそのようなものの同型類は高々可算個であることが志村 [Sm] により指摘された。L^2 消滅定理によりこの結果はある種の開多様体へと拡張される (cf. [Mk-Zh], [Oh-11], [Mk])。

L^2 評価の方法による複素幾何の展開はこれにとどまらないが、ここで一旦 [O-1] の序文に戻ると、第一論文の内容に関わる記述が次のように続く。

ところで、私に次の考えが浮かんだ。すなわち、考えている空間の次元を適当に上げることによって、これらの問題の困難さがときとして緩和されるのではないか。この論文では、この一般的なアイデアを特別な場合に実現するために、表題の領域 (有理函数に関する凸状域 [筆者注]) をより高い次元の筒状域[60]に帰着させるという一つの原理を示そうと思う。(具体的な形は 1 節の問題 1 を見よ。)

このアイデアがいわゆる**岡の上空移行原理**である。問題 1 とは領域 D の部分集合上の関数を D 上の正則関数に拡張する問題で、[O-1] では次の形で述べられている。

$X_j \subset \mathbb{C}$ $(1 \le j \le n)$ および $Y_k \subset \mathbb{C}$ $(1 \le k \le \nu)$ を有界な領域、$R_k(z)$ $(1 \le k \le \nu)$ を有理関数とし、開集合 $\Delta \subset \prod_{j=1}^n X_j$ を $\Delta = \{z; R_k(z) \in Y_k, 1 \le k \le \nu\}$ によって定めるとき、Δ 上の正則関数 $f(z)$ を $D := \prod_{j=1}^n X_j \times \prod_{k=1}^{\nu} Y_k$ の部分集合 $\Sigma := \{(z, R_1(z), \ldots, R_\nu(z)); z \in \Delta\}$ 上の関数とみなしたものを D 上の正則関数として拡張せよ。

[O-1] ではこれが解かれて Théorème II になっている。そしてこの拡張定理を通じて有理式凸な領域上で Cousin の問題と Runge 型の近似問題の「深い関係」が解き明かされたのであった。岡・Cartan 理論により Théorème II は一般化され、「Stein 多様体 M 上では任意の連接イデアル層 $\mathscr{I}$ に対して $H^1(M, \mathscr{I}) = 0$」という形で理解されるに至った。この消滅定理から、層 $\mathcal{O}/\mathscr{I}$ の台上の正則関数 (局所的に正則関数の制限として書けるもの) が M 全体に正則に延びることが従う。一方、このような拡張問題にも L^2 評価式の方法が有効であることは定理 3.2 とその証明からも推して知るべしであろう。実際、[Oh-T-1] では L^2 理論を用いて関数の増大度に条件をつけた拡張定理の一つの最良型を示すことに成功した。それがいわゆる「大沢・竹腰の定理」として知られる L^2 拡張定理だが、次節ではこれとその二三の応用について述べよう。

`Coffee Break` 定理 4.7 の原型は [Oh-2, Proposition 1.4] である。小平の消滅定理の開多様体への一般化として定理 4.7 は [A-V-1,2] や [Hm-1,2] を越えるものではないが、このように (再) 定式化したのには理由がある。動機は [G-1] で示された、$\mathbb{C}^n$ 内の C^ω 級の領域に関しては擬凸性と完備 Kähler 計量の存在が同値であるという命題であった。定理 4.7 を用いて C^ω の仮定を C^1 に弱めることができ、修論の次の論文 [Oh-2] が書けた。そこでは自明束に対する L^2 評価しか書かなかったが、それはベクトル束について無知だったからではなく、当面の応用にはそれで十分だったからである。[G-1] を見たきっかけは、当時 Siu と Yau の共著論文 [Siu-Y-1,2] を中野セミナーで読んでいたことだった。[Siu-Y-1,2] の主結果は $\mathbb{C}^n$ の微分幾何的特徴づけで、非正曲率の完備 Kähler 多様体が $\mathbb{C}^n$ に双正則同値であるためには、単連結でありかつ定点からの

[60]平面領域の直積集合。

距離が R の点におけるすべての断面曲率が常に $-CR^{-2-\epsilon}$ 以上 ($C>0,\ \epsilon>0$) であればよいという定理であった。単連結で完備な非正曲率の m 次元 Riemann 多様体が $\mathbb{R}^m$ に微分同相であるという有名な定理があり (Cartan-Hadamard の定理)、その類似が各方面で話題になった時期であった。PL(=piecewise linear) 多様体のバージョンもあり、口の悪い人は「ピエール・カルダン[61]の定理」と駄洒落を言っていた。

5 L^2 拡張定理とその応用

この節では [Oh-T-1] で示された次の定理の証明と、その一般化、精密化、および応用をめぐる動きについて述べる。

定理 5.1. Ω を $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域とし、$\psi \in PSH(\Omega)$, $H = z_n^{-1}(0)$ とおく。このとき Ω の直径のみによるある定数 C に対して次が成り立つ。

$f \in \mathcal{O}(\Omega \cap H)$ かつ

$$\int_{\Omega\cap H} e^{-\psi}|f|^2 d\lambda_{z'} < \infty$$

であれば、$F \in \mathcal{O}(\Omega)$ があって $F|_{\Omega\cap H} = f$ かつ

$$\int_{\Omega} e^{-\psi}|F|^2 d\lambda_z \le C\int_{\Omega\cap H} e^{-\psi}|f|^2 d\lambda_{z'} \tag{23}$$

となる。

5.1 証明の原型と Bergman 核

定理 5.1 は [Oh-T-1] では次の定理の系として導かれた。

定理 5.2. M を n 次元 Stein 多様体、 S を M の $n-1$ 次元解析的部分集合とし、 $\varphi \in PSH(M)$、$s \in \mathcal{O}(M)$ かつ $s^{-1}(0) \supset S$ とする。このとき S の正則点の集合 S_{reg} 上で定義された正則 $n-1$ 形式 f が

$$\left|\int_{S_{reg}} e^{-\varphi} f \wedge \overline{f}\right| < \infty$$

をみたせば、M 上の正則 n 形式 F が存在して、S_{reg} の各点で $F = f \wedge ds$ をみたし、かつ

$$\left|\int_M e^{-\varphi}(1+|s|^2)^{-2} F \wedge \overline{F}\right| \le 1620\pi \left|\int_{S_{reg}} e^{-\varphi} f \wedge \overline{f}\right|$$

となる。

ただし M の解析的部分集合 S に対し、$z \in S$ がその**正則点**であるとは z のまわりで S が M の複素部分多様体になっていることをいう。S の**次元**とは S_{reg} の次元をいう。

ここでは定理 5.1 を直接証明する。命題 4.3 に注意すれば定理 5.2 の証明への読み替えは容易である (後述)。

(23) の左辺と右辺をそれぞれ $\|F\|_\psi^2$, $C\|f\|_\psi^2$ と書く。左辺のノルム $\|\ \|_\psi$ は可測な $(n,0)$ 形式 u に対しては

$$\|u\|_\psi^2 = \sqrt{-1}^{n^2}\int_\Omega e^{-\psi} u \wedge \overline{u}$$

[61] Pierre Cardin(1922-, フランスのファッションデザイナー)。

で定義される。このノルムに関する $L^{n,0}_{(2)}(\Omega)$ を $L^{n,0}_{(2),\psi}(\Omega)$ で表す。

定理 5.1 の証明: 2.2 で述べた多重劣調和関数の性質 5 により、ψ は Ω^ϵ 上で C^∞ 級の多重劣調和関数の減少列 ψ_μ $\mu = 1, 2\dots$ で近似できる。したがって、与えられた f に対し、Ω^ϵ と C^∞ 級の ψ に対して定理 5.1 が成立することが言えさえすれば、各 ψ_μ に対して Ω^ϵ 上への f の評価式付きの拡張 $F_{\epsilon,\mu}$ が得られるから $\epsilon \searrow 0$ としたときの弱収束部分列の極限として、Ω への ψ_μ に関する評価式付きの拡張 F_μ が得られ、$\mu \to \infty$ としてこれらの弱収束部分列の極限をとれば ψ に対する求める拡張 F が得られる。Ω は $\mathbb{C}^n$ 内で擬凸だから, 各 Ω^ϵ に対し $\Omega^\epsilon \subset D \subset \Omega$ をみたす C^∞ 級の強擬凸領域 D がとれる。よって最初から ψ は $\overline{\Omega}$ の近傍で C^∞ 級かつ強多重劣調和であり、f は $\overline{\Omega \cap H}$ の近傍 U 上に正則に拡張されていると仮定しても構わない。簡単のため、f のこの拡張を同じ記号 f で表す。

$\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ を $\chi|_{[0,1]} \equiv 1,\ \ \chi|_{[2,3]} \equiv 0$ をみたす C^∞ 級関数とし、

$$v_\epsilon = \frac{\bar\partial\left(\chi\left(\frac{|z_n|}{\epsilon}\right) f\right) \wedge dz}{z_n}, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \qquad dz := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

とおく。

定数 C と方程式 $\bar\partial u = v_\epsilon$ の解 u_ϵ で $u_\epsilon \in L^{n,0}_{(2),\psi}(\Omega)$ かつ

$$\|z_n u_\epsilon\|_\psi \le C\|f\|_\psi \tag{24}$$

をみたすものが存在することが言えれば、$\epsilon \to 0$ として $\chi\left(\frac{|z_n|}{\epsilon}\right) f - z_n u_\epsilon$ の部分列の極限をとって求める F が得られる。

そのために、u_ϵ のノルムではなく $z_n u_\epsilon$ のノルムが評価されるべきことに注意して、$\bar\partial$ 作用素ではなく正値 C^∞ 級関数 $c_1,\ c_2$ に対する $\|u\|^2_\psi \le C'(\|c_1\bar\partial u\|^2_\psi + \|c_2\bar\partial^* u\|^2_\psi)$ の形の不等式を用いる。この不等式を中野の等式から導く手順を示そう。

n 次元完備 Kähler 多様体 (M, g)、M 上の Hermite 束 (E, h)、および C^∞ 級関数 $\eta : M \to [1, \infty)$ に対し、

$$\begin{aligned} &\bar\partial \circ \eta \circ \vartheta_h + \vartheta_h \circ \eta \circ \bar\partial - \partial_h \circ \eta \circ \overline{\vartheta} - \overline{\vartheta} \circ \eta \circ \partial_h \\ &= \eta(\Box_h - \overline{\Box}_h) + \bar\partial\eta \circ \vartheta_h - \bar\partial\eta^* \circ \bar\partial - \partial\eta \circ \overline{\vartheta} + \partial\eta^* \circ \partial_h. \end{aligned} \tag{25}$$

ただし $\partial\eta$ や $\bar\partial\eta$ はこれらを左から外積する作用素で、$*$ を付けたものは内積に関するそれらの点ごとの共役を表す。計量 g の Kähler 性により、中野の等式を導くのと同様の計算で

$$\begin{aligned} &\bar\partial\eta^* \circ \bar\partial + \bar\partial \circ \bar\partial\eta^* + \partial\eta \circ \overline{\vartheta} + \overline{\vartheta} \circ \partial\eta \\ &= \sqrt{-1}(\partial\bar\partial\eta \circ \Lambda - \Lambda \circ \partial\bar\partial\eta) \end{aligned} \tag{26}$$

がわかるので、これと (25) および中野の等式より

$$\begin{aligned} &\bar\partial \circ \eta \circ \vartheta_h + \vartheta_h \circ \eta \circ \bar\partial - \partial_h \circ \eta \circ \overline{\vartheta} - \overline{\vartheta} \circ \eta \circ \partial_h \\ &= \sqrt{-1}((\eta\Theta_h - \partial\bar\partial\eta)\Lambda - \Lambda(\eta\Theta_h - \partial\bar\partial\eta)) + \vartheta_h \circ \bar\partial\eta - \bar\partial\eta^* \circ \bar\partial - \overline{\vartheta} \circ \partial\eta + \partial\eta^* \circ \partial_h. \text{[62]} \end{aligned} \tag{27}$$

よって特に $v \in C^{n,q}_c(M, E)$ $(q \ge 1)$ ならば部分積分により

$$\|\sqrt{\eta}\vartheta_h v\|^2 + \|\sqrt{\eta}\bar\partial v\|^2 \ge (\sqrt{-1}(\eta\Theta_h - \partial\bar\partial\eta)\Lambda v, v) + 2\mathrm{Re}(\bar\partial\eta \wedge v, \bar\partial v). \tag{28}$$

[62] Θ_h や $\partial\bar\partial\eta$ は作用素と見ている。

右辺第二項を Cauchy-Schwarz の不等式で分けて

$$\|\sqrt{\eta}\vartheta_h v\|^2 + \|2\sqrt{\eta}\bar{\partial}v\|^2 \geq (\sqrt{-1}(\eta\Theta_h - \partial\bar{\partial}\eta)\Lambda v, v) - \|\frac{\bar{\partial}\eta}{\sqrt{\eta}} \wedge v\|^2.$$

従って、作用素 $v \mapsto (\sqrt{-1}(\eta\Theta_h - \partial\bar{\partial}\eta)\Lambda - \frac{|\bar{\partial}\eta|^2}{\eta})v$ が正であれば、定理 4.7 と同様の理由で

$$\left((\sqrt{-1}(\eta\Theta_h - \partial\bar{\partial}\eta)\Lambda - \frac{|\bar{\partial}\eta|^2}{\eta})^{-1}v, v\right) < \infty$$

をみたす $v \in L^{n,q}_{(2)}(M,E) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ に対して $\bar{\partial}(\sqrt{\eta}u) = v$ かつ $\|u\|^2 \leq \left((\sqrt{-1}(\eta\Theta_h - \partial\bar{\partial}\eta)\Lambda - \frac{|\bar{\partial}\eta|^2}{\eta})^{-1}v, v\right)$ をみたす $u \in L^{n,q-1}_{(2)}(M,E)$ が存在する。

これを $M = \Omega,\ E = \Omega \times \mathbb{C}$ に対して、$\sup_\Omega |z_n| < 1$ という無害な仮定をしてあてはめるのだが、Ω 上の完備 Kähler 計量 g_Ω に対し、($|\partial\eta|$ を押さえる都合上) $g = g_\Omega + \partial\bar{\partial}(-\log(-\log(|z_n|^2 + \epsilon^2)))$ $(0 < \epsilon \ll 1)$, $h = e^{-\psi + \log(-\log(|z_n|^2+\epsilon^2))}$, $\eta = -\log(|z_n|^2 + \epsilon^2)$ とおけば上の v_ϵ に対して求める評価付きの u_ϵ が得られる。 □

上の証明を定理 5.2 の証明へと読み替えるには、まず $h \in \mathcal{O}(M)$ を $h^{-1}(0)$ が S_{reg} のどの連結成分も含まないように選び、M の代わりに $M \setminus h^{-1}(0)$ に対して主張が示せれば十分であることに注意する。これは、f の「拡張」である F が $M \setminus h^{-1}(0)$ 上で評価式付きで求まれば、命題 4.3 により保証される F の M への解析接続が求める拡張になるからである。よって最初から $S_{reg} = S$ であるとしてよく、さらに同様の理由により S 上で $ds \neq 0$ であるとしてもよい。すると上の議論で z_n の代わりに s を用い、仮定 $\sup_\Omega |z_n| < 1$ をして関数 $-\log(-\log(|z_n|^2 + \epsilon^2))$ を用いて $h = e^{-\psi+\log(-\log(|z_n|^2+\epsilon^2))}$, $\eta = -\log(|z_n|^2+\epsilon^2)$ とおく代わりに、直接

$$h = e^{-\psi + \log(|s|^2+\epsilon^2) - \log(1+|s|^2)}, \quad \eta = -\log\frac{|s|^2+\epsilon^2}{1+|s|^2} \quad (0 < \epsilon < 1)$$

とおけば同様の議論が進行し、所望の F が得られる。

[Oh-T-1] で L^2 拡張定理をまず定理 5.1 の形で提示したわけは、次の応用を書きたかったからである。

定理 5.1 の系. $\mathbb{C}^n$ 内の C^2 級有界擬凸領域 D の Bergman 核 $K_D(z,w)$ に対し、

$$\liminf_{z \to \partial D} K_D(z,z)\delta_D(z)^2 > 0. \tag{29}$$

ただし D の Bergman 核 $K_D(z,w)$ は $L^{n,0}_{(2)}(D) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ の完全正規直交系 $\{f_\mu\}_{\mu=1}^\infty$ に対して

$$2^{-n}K_D(z,w)dz d\overline{w} = \sum_{\mu=1}^{\infty} f_\mu \overline{f_\mu}$$

で定義される[63]。

例 5.1. $K_{\mathbb{D}}(z,w) = \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}$.

Bergman 核の基本的性質:

[63] 2^{-n} は Euclid 計量に関して $|dz|^2 = 2$ なので付いている。

1) $\qquad K_D(w,z) = \overline{K_D(z,w)}.$

2) $\qquad$ 双正則写像 $f : D_1 \to D_2$ に対し

$$\frac{\bigwedge_{k=1}^n df_k(z)}{\bigwedge_{k=1}^n dz_k} K_{D_2}(f(z), f(w)) \overline{\frac{\bigwedge_{k=1}^n df_k(w)}{\bigwedge_{k=1}^n dw_k}} = K_{D_1}(z,w). \quad (\text{変換公式})$$

3) $\qquad f \in \mathcal{O}(D)$ かつ $\displaystyle\int_D |f(z)|^2 d\lambda_z < \infty \Rightarrow f(z) = \int_D f(\zeta) K_D(z,\zeta) d\lambda_\zeta.$ $\qquad$ (再生性)[64]

4) $\qquad K_D(z,w)$ は 1) と 3) で特徴づけられる。

(28) は Bergman が $n=2$ の場合に述べた予想の一部を一般次元の場合も含めて肯定的に解決したことになっている (cf. [B-T])。L^2 拡張定理を目ざした直接的な動機は Hörmander が L^2 理論の応用例として [Hm-1] の最後で次の結果を示していたことだった。

定理 5.3. $D \subset \mathbb{C}^n$ が擬凸で $z_0 \in \partial D$ のまわりで強擬凸であれば、

$$\lim_{z \to z_0} K_D(z,z) \delta_D^{n+1}(z) = \frac{n!}{\pi^n} L(z_0)$$

である。ただし $L(z_0)$ で $-\partial\bar{\partial}\delta_D(z)|_{\mathrm{Ker}\partial\delta_D}$ の z_0 における固有値の積[65]を表す。

これは Bergman の予想の主要部を一般次元で解決したものである。他方、D が C^2 級ならば ∂D が z_0 で強擬凸でなくても上からの評価 $\limsup_{z \to z_0} K_D(z,z)\delta_D(z)^{n+1} < \infty$ は Cauchy の評価式より明白だが、Bergman は 2 次元の Levi 擬凸な有界領域に対し、下からの評価 $\liminf_{z \to \partial D} K_D(z,z)\delta_D(z)^2 > 0$ も成り立つことを予想していた。

D が C^ω 級の領域であれば L は ∂D 上の非負 C^ω 級関数になるから、定理 5.3 が示された後ではその零点の位数の分 $K_D(z,z)$ の発散の位数が減少するであろうことは十分に予測できるので、Bergman の残りの予想もこのために一層興味深い問題となったのである。定理 5.3 は C^∞ 級の強擬凸領域に対して Fefferman[Ff-2] により精密化され、$\mathbb{B}^n$ を Bergman 核の漸近挙動で特徴づける理論へと展開している (cf.[Hr], [C-E])。定理 5.1 の系を精密化する方向の研究も多い (例えば [Cb-K-Oh])。

5.2 Demailly の近似定理

L^2 拡張定理は Bergman 予想への応用のためだけなら $\psi = 0$ の場合だけでも十分であるが、同じ証明でウェイトつきの L^2 ノルムに関する結果が示せるのでその形で述べた。ところが定数 C が ψ の取り方によらないことが次の応用においては重要である。

定理 5.4. (cf. [Dm-3]) Ω を $\mathbb{C}^n$ の擬凸領域とし、$\varphi \in PSH(\Omega)$ かつ $L^{n,0}_{(2),\varphi}(\Omega) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial} \neq \{0\}$ とする。このとき $L^{n,0}_{(2),m\varphi}(\Omega) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ $(m \in \mathbb{N})$ の完全正規直交系 $\{f_\mu \sqrt{2}^{-n} dz\}$ に対して $\varphi_m = \frac{1}{m} \log \sum_\mu |f_\mu|^2$ とおけば、m に無関係な定数 C_1, C_2 で次の $a)$, $b)$ をみたすものが存在する。

$$a) \quad \varphi(z) - \frac{C_1}{m} \le \varphi_m(z) \le \sup_{\|\zeta - z\| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}, \quad z \in \Omega,\ r < \delta_\Omega(z).$$

$$b) \quad \nu(\varphi, z) - \frac{n}{m} \le \nu(\varphi_m, z) \le \nu(\varphi, z), \quad z \in \Omega.$$

[64] cf. [Ah,p.174] も見よ。

[65] $n=1$ のときは $L(z_0) = \frac{1}{4}$ とおく。

証明. $\{f_\mu \sqrt{2}^{-n} dz\}$ は $\mathcal{O}_{m\varphi} := L^{n,0}_{(2),m\varphi}(\Omega) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ $(m \in \mathbb{N})$ の完全正規直交系だから、$\mathcal{O}_{m\varphi}$ 上の線形汎関数 $f \mapsto f(z)$ のノルムの二乗が $\sum_\mu |f_\mu(z)|^2$ である。これと Cauchy の評価式より、$\sum |f_\mu|^2$ が Ω 上局所一様収束して Ω 上 C^ω 級であることと

$$\varphi_m(z) = \sup\left\{\frac{1}{m}\log|f(z)|^2; f\sqrt{2}^{-n}dz \in \mathcal{O}_{m\varphi},\ \int_\Omega |f|^2 e^{-m\varphi} d\lambda = 1\right\} \tag{30}$$

であることが従う。よって $f \in \mathcal{O}_{m\varphi}$ に対する不等式

$$\begin{aligned}|f(z)|^2 &\leq \frac{n!}{\pi^n \epsilon^{2n}} \int_{\|\zeta - z\| < \epsilon} |f(\zeta)|^2 d\lambda_\zeta \\ &\leq \frac{n!}{\pi^n \epsilon^{2n}} \exp\left(m \sup_{\|\zeta - z\| < \epsilon} \varphi(\zeta)\right) \int_\Omega |f|^2 e^{-m\varphi} d\lambda\end{aligned}$$

より $a)$ の第二の不等式にあたる

$$\varphi_m(z) \leq \sup_{\|\zeta - z\| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m}\log\frac{n!}{\pi^n \epsilon^{2n}} \tag{31}$$

が得られる。

次に定理 5.1 を次元を上げながら n 回適用すれば、任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が存在して

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-m\varphi} d\lambda \leq C^n |a|^2 e^{-m\varphi(z)}$$

となる。この右辺が 1 となるように a を選ぶと (28) より $\varphi_m(z) \geq \frac{1}{m}\log|a|^2$ となり、これより $a)$ の最初の不等式が得られる。これと Lelong 数の定義から $b)$ の二番目の不等式 $\nu(\varphi_m, z) \leq \nu(\varphi, z)$ が従う。

(31) より、定数 C' があって

$$\sup_{\|\xi - z\| < \epsilon} \varphi_m(\xi) \leq \sup_{\|\zeta - z\| < 2\epsilon} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m}\log\frac{C'}{\epsilon^n}.$$

両辺を $\log\epsilon$ で割って $\epsilon \to 0$ とすれば求める不等式が得られる。 □

級数 $\sum_\mu f_\mu(z)\overline{f_\mu(w)}$ は $\Omega \times \Omega$ 上で広義一様収束する。この関数を $K_{\Omega,m\varphi}(z,w)$ で表す。特に $K_{\Omega,0}(z,w) = K_\Omega(z,w)$ である。Hilbert 空間 $L^{n,0}_{(2),\varphi}(\Omega) \cap \mathrm{Ker}\bar{\partial} (= \mathcal{O}_\varphi)$ をウェイト φ の **Bergman 空間**と呼ぶ。これは対応 $\sqrt{2}^{-n} f dz \mapsto f$ によって空間 $\{f \in \mathcal{O}(\Omega); \int_\Omega e^{-\varphi}|f|^2 d\lambda < \infty\}$ と同型である。状況によってはこれらを区別せずに用いる。$K_{\Omega,\varphi}(z,w)$ や $K_{\Omega,\varphi}(z) := K_{\Omega,\varphi}(z,z)$ も Bergman 核と呼ばれる。L^2 理論が Bergman 核の境界挙動だけでなく、ウェイトの高次化 $\varphi \to m\varphi$ $(m \to \infty)$ における漸近挙動の解析を可能にしたという意味で、Demailly の近似定理は Hörmander 理論の最初の到達点を越えたと言えよう。

Bergman 核がらみの進展はこの後も続くが、それらについては §6 で紹介することにし、以下では定理 5.1 の一般化で代数幾何への応用に適するものについて述べたい。

5.3 擬凸多様体上の L^2 拡張定理

すでに述べたように、定理 5.1 の証明を一般化して、Stein 多様体上で定理 5.2 の形の L^2 拡張定理を導くことは容易であった。

[Oh-16] では Bergman 核以外への応用も念頭に置いて次の拡張定理を示したが、基本的には同様の方法によっている。

定理 5.5. (cf. [Oh-16, Theorem 4]) M を n 次元 Stein 多様体、$\varphi \in PSH(M)$、W は M の開集合、$s \in \mathcal{O}(W)$、W 上で $ds \neq 0$ とし、$N = s^{-1}(0)$ とおく。連続関数 $G : M \to [-\infty, 0)$ があり、$N = G^{-1}(-\infty)$ かつ $\varphi + G \in PSH(M)$ で $G - \log |s|^2$ は $W \setminus N$ 上有界であるとする。このとき N 上の正則 $(n-1)$ 形式 ω が

$$\left| \int_N e^{-\varphi} \omega \wedge \overline{\omega} \right| < \infty,$$

をみたせば任意の $\delta > 0$ に対して M 上の正則 n 形式 $\tilde{\omega}$ で

$$\left| \int_M e^{-(1+\delta)\varphi} \tilde{\omega} \wedge \overline{\tilde{\omega}} \right| < \infty$$

であり N 上で $\tilde{\omega} = \omega \wedge ds$ をみたすものが存在する。

命題 4.3 より、定理 5.5 は M が稠密な Stein 開集合 Ω で $M \setminus \Omega$ が複素解析的であるようなものを含む場合、M 上の中野半正なベクトル束を係数とする拡張定理へと一般化される (cf. [Oh-15])。特に L^2 拡張定理は射影的な擬凸多様体に対して適用可能で、この形で Siu[Siu-2] により代数多様体の多重種数[66]の変形不変性の証明に応用された。この証明は Păun[Pn] により簡単化され、Berndtsson と Păun[B-P-2] はより多くの不変量の変形不変性を L^2 拡張定理を一般化することにより導いた。同様の理由で、L^2 拡張定理は Moishezon 多様体[67]やある種の Hopf 多様体に対しても適用可能である。Popovici[Pv] は代数幾何への応用を見込んで定理 5.5 を N の「有限次の近傍」(cf. 7.3) 上の正則切断に対する L^2 拡張定理へと一般化し、Demailly[Dm-4] はより一般に被約とは限らない解析的部分空間からの L^2 拡張を論じ、Cao-Demailly-Matsumura[C-Dm-M] はさらにそれを拡げてコホモロジー類の拡張定理を得た。これらの結果はごく最近、Zhou-Zhu[Z-Z-1,2] および Hosono[Hs-1,2] によりそれぞれ Guan-Zhou[G-Z-1] および Berndtsson-Lempert[B-L] の方法で精密化された。一方、この方向の応用を拡げるにあたって注意すべき事実も発見された (cf. [G-L][68])。

`Coffee Break` 定理 5.1 の証明の核心は L^2 評価式 (28) であるが、これを見つけるためには実に多くの試行錯誤を重ねた。在来型の道具を使うだけではできないので新しいタイプの評価式を用いる研究は何でも参考にした。Donnely と Fefferman の有名な論文 [D-Ff] は大いに参考になったがそれだけでは足りなかった。中野の等式はファイバー計量によって通常の Laplace 作用素を変形した結果を記述しているので、ゲージ変換による Laplace 作用素の変形をうまく用いた Witten の論文 [W] も読んだりした。当時はインターネットはなかったが、もしあったら L^2 estimate とかでググったりしていたであろう。そこで最近試しにこれでググってみたところ、トップに出てきたのは Bo-Yong Chen（陳伯勇）氏の講演スライド "Hörmander's L^2-estimate and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem" であった。これは 2013 年 7 月に名古屋大学で開かれた研究集会で話されたもので、筆者も聴いていた。Chen 氏は新しい工夫により定理 5.1 を、Hörmander が [Hm-1] で示した L^2 消滅定理 (定理 4.8 の原型にあたるもの) を用いるだけで証明したのだった。ちなみにこの講演の元になった論文 [Cb] は arXiv に載ってはいるが専門誌には掲載されなかった。しかし初学者にはこの証明の方が読みやすいようで、評判の良い論文である。長さも文献を入れて 2 ページ半である。聞くところによると、査読者は米国の有名な教授で、掲載不支持の意見は 3 ページ以上にわたるものだったそうである。[69]

---

[66] $p_\mu := \dim H^{0,0}(M, K_M^\mu)$ を M の**多重種数**という。

[67] コンパクトな複素多様体で有理型関数体の $\mathbb{C}$ 上の超越次数が多様体の次元に等しいものを **Moishezon 多様体**という。

[68] 定理 5.1 において H を Ω 内に特異点を持つ解析的部分集合でおきかえたものは成立しない。

[69] 2013 年に出版された安達謙三氏の論文 [AD] にも同様の趣旨の別証明がある。[Cb] と [AD] は 2011 年の同時期に独立に書かれたようである。

6 Bergman 核の話題から

L^2 理論は Bergman 核の漸近挙動の解析に役立ったが、Bergman 核に関する一つの微妙な問題が L^2理論 の面目をさらに一新させた。すなわち Błocki[Bł-4] による吹田予想の解決と、Bergman 核の変分を中心とするその後の展開である。以下ではこの話題の要点を紹介したい。

6.1 多様体上の Bergman 核と吹田予想

複素多様体 M 上の Bergman 核を $H^{n,0}_{(2)}(M)$ の完全正規直交系 $\{f_\mu dz\}_\mu$ を使って $\mathscr{K}_M = \mathscr{K}_M(z,w) = \sum_\mu f_\mu(z)\overline{f_\mu(w)}dzd\overline{w}$ によって定義する。$\mathscr{K}_M = K_M(z,w)dzd\overline{w},\ K_M(z) = K_M(z,z)$ とおく。M が Riemann 面のとき、Bergman 核と等角写像は密接に関係する。次の定理は Riemann の写像定理と Bergman 核の変換公式から直ちに従うが、この関係をよく表している。

定理 6.1. 単連結な Riemann 面 R に対し $K_R(z) \not\equiv 0$ ならば、任意の点 $z_0 \in R$ および z_0 のまわりの局所座標 w に対して

$$z \mapsto \sqrt{\pi}\int_{z_0}^{z} \frac{K_R(\zeta,w)|_{w=0}d\zeta}{\sqrt{K_R(w)|_{w=0}}}$$

は R を $\mathbb{D}$ 上に双正則に写像する。

この公式は Riemann 写像を近似的に求めるアルゴリズムの存在を示唆している。Gram-Schmidt の直交化法により Bergman 核が近似できるからである[70]。

しかし Bergman 核と Green 関数の関係は一層興味深いものである。

定義 17. Riemann 面 R に対し、R の Green 関数とは関数 $g_R : R\times R \to [-\infty, 0)$ で

$$g_R(z,w) = \sup\{u(z);\ u \in PSH(R),\ u<0 \text{ かつ } \limsup_{z\to w}(u(z)-\log|z-w|)<\infty\}$$

(ただし $|z-w|$ は一つの座標近傍内で考える。)

Green 関数の基本的性質 (cf. [Su-2, pp. 35∼ 37])

1) $g_R(z,w) \in [-\infty, 0)$.

2) $g_R(z,w) = g_R(w,z)$.

3) $g_R(\cdot,w) \in PH(R\setminus\{w\})$.

$K_\mathbb{D}(z,w) = \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}$ なので、$\mathbb{D}$ 上では Bergman 核と Green 関数 $g_\mathbb{D}(z,w) = \log|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}|$ の間には

$$\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 g_\mathbb{D}}{\partial z\partial\overline{w}} = K_\mathbb{D}(z,w)$$

という関係式が成り立つ。Schiffer[Sf] は $g_R \not\equiv -\infty$ でありさえすれば

$$\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 g_R(z,w)}{\partial z\partial\overline{w}} = K_R(z,w)$$

が成立することを発見した[71]。

[70]実際には Riemann 写像の実装可能な近似アルゴリズムが、Schwarz-Christoffel の公式や円充填法 (circle packing) を用いて作られているようである。

[71]証明は左辺の再生性を確かめるだけのことであるが Schiffer にとっても驚きだったらしく、"a remarkable formula" と呼んでいる。

定義 18. R 上の一次微分 $c_{\beta,R}(z)|dz|$ を

$$c_{\beta,R}(z) = e^{\gamma_R(z)},\ \ \gamma_R(z) = \lim_{w\to z}\left(g_R(z,w) - \log|z-w|\right)$$

で定義し、**対数容量**と呼ぶ[72]。$g_R \equiv -\infty$ のときは $c_{\beta,R} \equiv 0$ とおく。

R が $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の領域で $\infty \in R$ の場合

$$c_{\beta,R}(\infty) = \inf \int_{\mathbb{C}\setminus R}\int_{\mathbb{C}\setminus R} \log\frac{1}{|z-w|}d\mu_z d\mu_w$$

である。ただし μ は $\mathbb{C}\setminus R$ 上に台を持つ確率測度を動く。右辺を $E = \mathbb{C}\setminus R$ の**対数容量**とも呼び、$\mathrm{cap}E$ で表す。$\mathrm{cap}E$ には**超越直径** (transfinite diameter) という幾何学的な言い換えがある (cf. [Ca], [Sc-2])。

吹田の公式　$g_R \not\equiv -\infty$ ならば $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\partial^2\gamma_R(z)}{\partial z\partial\overline{z}} = K_R(z).$

例 6.1. $\gamma_{\mathbb{D}}(z) = -\log(1-|z|^2)$, $c_{\beta,\mathbb{D}}(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$.

よって $\pi K_{\mathbb{D}}(z) = c_{\beta,\mathbb{D}}(z)^2$ であるが、一般には $\pi K_R(z) \neq c_{\beta,R}(z)^2$ であることが [Su-1] で $R = \mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}$ $(0 \le r < 1)$ の場合の計算結果[73]から示された。この場合には

$$\pi K_R(z) = c_{\beta,R}(z)^2 \iff r = 0, \quad r > 0 \Rightarrow \pi K_R(z) > c_{\beta,R}(z)^2 \ \ (\forall z \in R)$$

となり、一般に次が成り立つことが予想された。

吹田予想　$\pi K_R(z) \ge c_{\beta,R}(z)^2$ であり、

$$\exists z_0 \in R \ \text{ s.t. }\ \pi K_R(z_0) = c_{\beta,R}(z_0)^2 \iff \exists\varphi \in PSH(\mathbb{D})\ \text{s.t.} E \subset \varphi^{-1}(-\infty) \text{ かつ } R \cong \mathbb{D}\setminus E.$$

吹田予想の等号条件の部分が解析接続に関連するので、その話を次節でまとめておこう。

6.2 L^2 正則関数の除去可能特異集合

すでに命題 4.3 で述べたように、L^2 正則関数に関しては解析的真部分集合は除去可能特異集合であるが、平面領域上の関数の場合、Siciak [Sc-1] によればこのような除去可能性は酒井良 (まこと) 氏と M.Skwarczyński [Sw] によって次のように特徴づけられた。

定理 6.2. 有界領域 $D \subset \mathbb{C}$ と閉集合 $E \subset D$ に対して

$$H^{1,0}_{(2)}(D) \to H^{1,0}_{(2)}(D\setminus E) \text{ は全射} \iff \exists\varphi \in PSH(D)\setminus\{-\infty\}\ \text{ s.t. }\ E \subset \varphi^{-1}(-\infty). \tag{32}$$

証明には次の Carleson[Ca] の結果と L^2 消滅定理を組み合わせればよい。

定理 6.3. 閉集合 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$H^{1,0}_{(2)}(\widehat{\mathbb{C}}\setminus E) = \{0\} \iff \exists\varphi \in PSH(D)\setminus\{-\infty\}\ \text{ s.t. }\ E \subset \varphi^{-1}(-\infty). \tag{33}$$

[72] $\gamma_R(z)$ は **Robin 関数**と呼ばれる。
[73] $\wp$ 関数を用いる興味深い計算である。

(32) と (33) の右辺の性質を持つ E は**極状 (きょくじょう, polar)** であるという[74]。これと対数容量の間には次の関係がある (cf. [Ca])。

$$c_{\beta,\widehat{\mathbb{C}}\setminus E} \equiv 0 \iff E \text{ は極状}.$$

一般の Riemann 面に対しては [Sc-1] では定理 6.2 が次の形に拡張された。

定理 6.4. 有界領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ と閉集合 E に対して

$$\exists\varphi \in PSH(D) \setminus \{-\infty\} \quad \text{s.t.}\ \ E \subset \varphi^{-1}(-\infty) \Rightarrow \quad H^{n,0}_{(2)}(D) \to H^{n,0}_{(2)}(D \setminus E) \text{ は全射}.$$

$D \setminus E$ が擬凸でなければ L^2 条件がなくても正則関数は正則に広がりうるわけだから、L^2 条件付きの除去可能性の問題は $D \setminus E$ が擬凸の場合に論ずるのが適当であると思われる。この場合には定理 5.1 が使えるので次が一つの答えになる。

定理 6.5. 有界擬凸領域 D と擬凹閉集合 $E \subset D$ に対し、

$$H^{n,0}_{(2)}(D) \to H^{n,0}_{(2)}(D \setminus E) \text{ は全射} \iff \exists z_0 \in \mathbb{C}^n\ \exists\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ s.t.}$$

$$\{z \in \mathbb{C}^n; (z+E) \cap (z_0 + \mathbb{C}\zeta) \text{ は } z_0 + \mathbb{C}\zeta \text{ 内で極状ではない}\} \text{ の Lebesgue 測度は } 0.$$

命題 4.3 はこれの系となる。特に多重極状集合は L^2 正則関数に関して除去可能である。この性質は多重劣調和関数をウェイトに持つ Bergman 空間の元に対しても同様であることが、第 2 節で述べた多重劣調和関数の性質 5 と L^2 消滅定理から示すことができる。

多重極集合の幾何学的性質については、定理 2.2 の一般化で定理 4.18 とやや相補的な位置にあるものが存在する。

定理 6.6. (cf. [Scb]) 連続関数 $\mathbb{D}^m \to \mathbb{C}$ が正則であるためには、そのグラフが多重極状であることが必要かつ十分である。

ちなみに、ベクトル値関数に対する定理 2.2 の一般化を T.Pawlaschyk 氏が学位論文 [Pw] で証明した。

定理 6.7. (cf. [Pw, Theorem 4.7.9]) 連続関数 $\mathbb{D}^m \to \mathbb{C}^n$ が正則であるためには、そのグラフの補集合が n-完備であることが必要かつ十分である[75]。

6.3 吹田予想の解決とその後の進展

L^2 拡張定理と吹田予想の関連を筆者が強く意識するようになったのは、$\mathbb{D}$ 上の Bergman 空間で補間問題を解いた K.Seip 氏の論文 [Sp] を見てからである。その結果 [Oh-14] で $750\pi K_R \geq c^2_{\beta,R}$ が得られ、[Bł-1,2] や [G-Z-Z-1,2] などを経て吹田予想は Błocki [Bł-3] と Guan-Zhou[G-Z-1] によって完全に解決された。次の定理は平面領域 D に対する不等式 $\pi K_D \geq c^2_{\beta,D}$ を含むとともに、定理 5.1 の定数 C が $\sup_\Omega |z_n| \leq 1$ の場合には π でよいことを意味している。

定理 6.8. (cf. [Bł-3]) D は $\mathbb{C}$ 内の領域で 0 を含むとし、Ω は $\mathbb{C}^{n-1} \times D$ に含まれる擬凸領域で、$\Omega' = \Omega \cap \{z_n = 0\}$ とおく。このとき $\varphi \in PSH(\Omega)$ および $f \in \mathcal{O}(\Omega')$ に対し、f の Ω への正則な拡張 F で

$$\int_\Omega e^{-\varphi}|F|^2 d\lambda_n \leq \frac{\pi}{(c_{\beta,D}(0))^2} \int_{\Omega'} e^{-\varphi}|f|^2 d\lambda_{n-1}$$

をみたすものが存在する。

[74] 多重極状の定義も同様。
[75] 定理の原型はこれよりも一般的である。

[G-Z-1] では等号条件の部分が解決されるとともに、定理 5.2 の精密化に関して [Oh-13] と [G-Z-Z-1,2] の路線に沿い次の結果が示された。

定理 6.9. M を n 次元 Stein 多様体、$\varphi, \psi \in PSH(M)$ とし、$w \in \mathcal{O}(M)$ は $\sup_M(\psi + 2\log|w|) \le 0$ をみたし、かつ dw は $w^{-1}(0)$ のどの既約成分上でも恒等的には 0 でないとする。$H = w^{-1}(0), H_0 = \{x \in H; dw(x) \ne 0\}$ とおくとき、H_0 上の $(n-1)$ 形式 f が条件

$$\left|\int_{H_0} e^{-\varphi-\psi} f \wedge \overline{f}\right| < \infty$$

をみたせば、H_0 上で $F = f \wedge dw$ をみたす M 上の正則 n 形式 F で

$$\left|\int_M e^{-\varphi} F \wedge \overline{F}\right| \le 2\pi \left|\int_{H_0} e^{-\varphi-\psi} f \wedge \overline{f}\right|$$

となるものが存在する。

証明のポイントは φ と ψ 以外に補助的なウェイトで変形された L^2 ノルムを考え、L^2 評価の最良化を実現するところである。この条件は連立常微分方程式になるが、それがたまたまきれいに解けたので定理 6.8 や定理 6.9 が得られた。ところが「これにて一件落着」とはいかず、ここからの展開が慌ただしく進行中である。一般的に言って、どんな難問でも一旦解かれてしまえば様々な別解を許すようになるものだが、吹田予想も例外ではなかった。Błocki は [Bł-4] で上空移行を思わせる別解を得、Lempert の別解は全文が [Bł-5] の序文で紹介されてしまうほど短かった。こちらは、Riemann 面の Stein 族 $\mathcal{R} \to \mathbb{D}$ ($\mathcal{R} = \coprod_{t\in\mathbb{D}} R_t$) に対して $\log K_{R_t} \in PSH(\mathcal{R})$ であるという米谷・山口 [M-Y] の結果の応用であったが、[M-Y] を高次元化して Stein 族 $\pi : M \to \mathbb{D}$ の相対標準束 $K_M \otimes \pi^* K_{\mathbb{D}}^{-1}$ の順像の半正値性を示した Berndtsson の結果 [B-1,2] からは、さらに定理 6.8 と定理 6.9 を含む L^2 拡張定理が導けることが判明した (cf. [B-L], [L])。この新しい視点からジェットに対する精密な L^2 拡張理論が展開し始めている (cf. [Hs-1,2])。米谷・山口理論が $\bar\partial$ 方程式の L^2 理論とはやや離れた地点で成立したことを思うと、これらはまことに想定外の出来事であった。そこでこの機会に [M-Y] の来歴をざっと概観しておこう。

6.4 西野理論の展開

Stein 族、つまり Stein 多様体 M から複素多様体 T への全射正則写像 $\pi : M \to T$ で臨界点を持たないものの本格的な研究は、2 変数整関数についての西野理論 [Nn-1∼5] を嚆矢とする[76]。Ahlfors-Bers の Teichmüller 空間論でも Stein 族が現れるが、これらは Beltrami 微分の正則族に付随するもの (平坦な Stein 族) で、特殊である。

西野理論の意図するところは、2 変数整関数 f が $f^{-1}(t)$ の等角構造たちによってどのように縛られるかの記述[77] にあり、その基礎として [Nn-2] で確立されたのが定理 4.16 であった。念のため少し一般化された形で再掲する (証明は同様)。

定理 6.10. (西野の剛性定理) Stein 多様体 T 上の Stein 族 $\pi : M \to T$ のファイバー $\pi^{-1}(t)$ がすべて $\mathbb{C}$ に等角同値であり、かつ $H^2(T, \mathbb{Z}) = 0$ であれば、双正則同型 $\alpha : M \to \mathbb{C} \times T$ があって $p_T \circ \alpha = \pi$ となる。ただし p_T は T への射影を表す。

[76] [Hj] のように単発的なものが発掘されることはある。
[77] [Nn-2] : $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ かつ $\mathrm{cap}\{t; \mathbb{C} \subset f^{-1}(t)\} > 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \circ \mathrm{Aut}\mathbb{C}^2$. [N-5]: $\{f^{-1}(t)$ の既約成分 $\} \subset \{\Sigma \setminus \Gamma; \Sigma$ はコンパクトで Γ は有限集合 $\} \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \circ \mathbb{C}[z,w] \circ \mathrm{Aut}\mathbb{C}^2$。

この種の剛性は、コンパクト複素多様体の解析族に対しては小平・Spencer 理論 [K-S] をふまえて Fischer-Grauert[F-G] で示されていたが、「正則域は擬凸状であることの影響[78]」として定理 6.10 が見出されたことは面白い。これが $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ に対して意味するところは、$f^{-1}(t)$ の既約成分がみなコンパクト化可能なときの、それに応じた $\mathbb{C}^2$ のコンパクト化の存在である。$\mathbb{C}^2$ のコンパクト化については、[Nn-1∼5] に並行して小平 [K-5] が有理性を示し、Morrow[Mr] が分類を完成させていた[79]。このように、西野理論とアファイン複素幾何には関連性があり、鈴木 [Sz-1,2] や上田 [U-1] はその影響を受けている[80]。アファイン複素幾何では $\mathbb{C}^n$ 内の代数的集合 (=ベクトル値多項式の零点集合) が対象となるが、西野理論の射程には有限位数の整関数の零点集合の幾何も入っているようである (cf. [Nm], [F-Oh])。

定理 6.10 の証明は既に述べたように T が Stein なので局所的に示せば十分で、従って最初から正則切断 $\sigma : T \to M$ および $\sigma(T)$ を含む近傍上の局所座標 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ で $z_n^{-1}(0) = \sigma(T)$ となるものが取れるとして構わない。この z に応じて正則同型 $f_t : \pi^{-1}(t) \to \mathbb{C}$ $(t \in T)$ を $f_t(0, \ldots, 0) = 0$, $\frac{\partial f_t}{\partial z_n}(0, \ldots, 0) = 1$ となるように定める (一意的)。すると Koebe の歪曲定理 (cf. [Ah-2, p. 72]) から、$x \mapsto (\pi(x), f_{\pi(x)}(x))$ が M から $T \times \mathbb{C}$ への同相写像であることが従う。ここまでは地道というか自然な議論だが、こうして作った写像が正則であることの [Nn-2] における証明は、工夫に工夫を重ねた技巧的なものである。この部分を簡単化したのが [Y-1][81]で、一般の Riemann 面の Stein 族に対する対数容量の変動の解析がここから始まった。[Y-1] を Abel 微分の変動の解析に拡げたのが [M] だが、これは平坦な Stein 族に限る話としてであったため、一般の Stein 族における Bergman 核の変動を解析し、$\log K_{M_t} \in PSH(M)$ を確立したのが [M-Y] であった。これの高次元化にあたって Berndtsson [B-1,2] が二通りの証明を与え、[G-Z] では定理 6.9 を応用して新しい証明が与えられていることからも、[M-Y] がいかにすばらしい breakthrough であったかが認められよう。Berndtsson と Păun[B-P-1] は [M-Y] をさらに代数幾何の文脈で一般化している。この展開がある意味で [O-5] の延長上にあり、高次元化とは別に、[Y-1] と対をなす現象が実 3 次元領域上の静磁場理論で発見されたり、[M-Y] が他の等角不変量の変動の解析へと広げられていることも興味深い (cf. [Y-2], [Hn])。

既に述べたように、[G-Z-1] では定理 6.9 の Stein 族 $\pi : M \to \mathbb{D}$ $(M_t := \pi^{-1}(t))$ への応用として $\log K_{M_t}(z, z) \in PSH(M)$ が示された。Cao[C] はこれを Kähler 族へと拡張した。ところが最近現れた [D-W-Z-Z] によると、これらの結果はみな定理 5.1(最良でない L^2 拡張定理) の帰結であり、その理由は定理 5.4 と同様だという。確かに定理 5.4 を

$$\varphi \in PSH \iff \text{一つの } C_0 \text{がすべての } m\varphi \ (m \in \mathbb{N}) \text{ に対して拡張定理の定数として通用する}$$

と読めば、「L^2 拡張あるところに正値性あり」という主張は正鵠を得ているように思える。この話が今後どこまで広がるか予断を許さないが、あるいは複素解析の枠を超えた新しい変分原理のようなものを示唆しているのかもしれない。

`Coffee Break` Stefan Bergman prize(ベルグマン賞) というものがあり、毎年一名ないし二名に授与される。実または複素解析における核関数の理論およびその応用において、または Bergman の作用素論的方法に結びついた楕円型偏微分方程式における関数論的方法において貢献度の高かった者が選ばれるとされ、

[78]cf. [Nn-6]。

[79][Mr] の初等的証明が [F-N-O] にある。

[80][Sz-1] では $\mathbb{C}$ の $\mathbb{C}^2$ への多項式埋め込みが $\mathrm{Aut}\mathbb{C}^2$ で線形化できることが示された。また、[Sz-1] とは独立に Abhyankar-Moh[A-B] が同じ結果に達した。これは Severi が不完全な証明とともに発表した命題であったそうである。[U-1] では $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)$ のコンパクト化の有理性が示されるとともに $(\mathbb{C}^*)^2$ のコンパクト化が 3 種類に分けられ、[Sz-2] では $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ と $(\mathbb{C}^*)^2$ の極小コンパクト化が分類された。

[81][Y-1] とは違う方法で Chirka[Chk] も定理 6.10 の別証を与えた。

Bergman 夫人の遺言により遺産を管理する銀行の依頼でアメリカ数学会の選考委員会によって受賞者が選ばれる。1989 年の David Catlin 以来、2019 年 9 月現在 37 名がこれを受賞している。2015 年 1 月、筆者の元に航空便で賞金の小切手とともに受賞通知が届いた。そこに書かれていた受賞理由は次のとおりである。

Takeo Ohsawa is recognized for his deep contributions to the theory of the $\bar{\partial}$-equation leading to precise L^2-estimates for the extensions of holomorphic functions from submanifolds of a complex manifold. His work has led to important advances in a wide variety of areas, including local structure of plurisubharmonic functions, invariance of plurigenera, multiplier ideal sheaves, and estimates for the Bergman kernel.

最初の文章で分かる通り、これは定理 5.1 から定理 6.9 に到る L^2 拡張理論が評価された結果で、竹腰見昭氏の協力をはじめ、Zbigniew Błocki、Guan Qi'an(関啓安)、Zhou Xiangyu(周向宇) などの方々の大活躍があったおかげでいただけた賞である。応用としてあげられたもののうち "multiplier ideal sheaves(乗数イデアル層)" については本稿では触れなかったが、 Demailly-Ein-Lazarsfeld[Dm-E-L] による劣加法性定理[82]の発見や Guan と Zhou[G-Z-2] による Demailly-Kollár 予想[83]の解決を指すと思われる。少し遅れてアメリカ数学会の広報誌 (Notices of AMS) に出すからとメールで個人情報の問い合わせがあり、その中に "Christmas present" の文字があった。たしかに記憶に残る素敵な贈り物ではあった。クリスマス・プレゼントと言えば個人的には家庭内のことしかなかったが、話としてなら O.Henry の「賢者の贈り物」が思い出される。ちなみに賞金は約 150 万円で使い道を報告せよとのことだったので、気を付けなければと大学で科学研究費と同じ扱いで使えるようにしてもらい、南範彦氏 (名古屋工業大学教授) の協力で研究集会を一つ開いた。親友だった 故 大川哲介氏 (1951-2014, 専門はトポロジー) の追悼研究集会で、Bergman 核に全く関係のない講演ばかりだったが、報告集には定理 6.10 を中心とするサーベイ [Oh-25] を出させてもらった。

7　幾何構造の接続

境界上ないし境界の近傍上で定義された解析的な対象が領域内部に拡張する現象を、いくつかの場合にやや広げて論じてみよう。最初に強擬凸領域の境界上のある種の不変量について、内部に接続できるという理由からその値が実は 0 に限るという結果を紹介し、次に強擬凸領域でない強擬凸多様体のコンパクト化における境界の退化の様相について述べる。最後に、与えられた同型が形式的べき級数の範囲で拡張されれば実際に正則写像としても拡張できるかという形式化可能性の問題を紹介し、最近 Jun-Muk Hwang 氏によって得られた結果にふれたい。

7.1　解析接続と CR 幾何

強擬凸多様体 (M, φ) において M_R が φ-例外集合を含み、かつ ∂M_R が滑らかな実超曲面であれば $\lim\limits_{K} H^{p,q}(M_R \setminus K)$ は ∂M_R の接触幾何的不変量であり、$\lim\limits_{K} H^r(M_R \setminus K, \mathbb{C}) \cong H^r(\partial M_R)$ である。ここで ∂M_R の接触構造として考えるのは、$\theta := \sqrt{-1}(\partial\Phi - \bar{\partial}\Phi)$ を ∂M_R の正則接空間 $T'_{\partial M_R} := T^{1,0}_M|_{\partial M_R} \cap (T_{\partial M_R} \otimes \mathbb{C})$ とその複素共役を零化する 1 形式と見たもので、強擬凸性より $d\theta$ は非退化 2 次形式になっている。強擬凸領域の境界上のこの構造を一般の奇数次元の多様体に拡げて、強擬凸な CR(Cauchy-Riemann) 構造が定義される。

[82] $\varphi, \psi \in PSH(\mathbb{B}^n) \Rightarrow \lim_{r \searrow 0} \mathcal{O}_{\varphi+\psi}(r\mathbb{B}^n) \subset \lim_{r \searrow 0} \mathcal{O}_{\varphi}(r\mathbb{B}^n) \cdot \lim_{r \searrow 0} \mathcal{O}_{\psi}(r\mathbb{B}^n)$。

[83] $\varphi \in PSH(\mathbb{B}^n), f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}^n), \int_{\mathbb{B}^n} |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda < \infty \Rightarrow \exists \epsilon > 0$ s.t. $\int_{\frac{1}{2}\mathbb{B}^n} |f|^2 e^{-(1+\epsilon)\varphi} d\lambda$。

定義 19. 連結な $2n-1$ 次元の C^∞ 級多様体 X に対し、X の接ベクトル束 T_X の複素化 $T_X \otimes \mathbb{C}$ の複素部分束 T'_X および T_X の部分直線束 F があって

$$T_X \otimes \mathbb{C} = T'_X \oplus \overline{T'_X} \oplus \mathbb{C}F$$

が成り立つとき、T'_X を X 上の**概 CR 構造**という。概 CR 構造で Lie bracket 積に関して閉じているものを **CR 構造**という。このとき X は **CR 多様体**であるという。さらに T'_X の局所枠 $e_1, \dots, e_{n-1}$ に対する Lie brackets $\sqrt{-1}[e_i, \overline{e_j}]$ の F 成分のなす $(n-1)$ 次 Hermite 行列が正定値または負定値であるとき、T'_X を X 上の**強 CR 構造**といい X を**強擬凸 CR 多様体**と呼ぶ。

∂M_R 上には $T'_{\partial M_R}$ という標準的な CR 構造があり、∂M_R 上の C^∞ 関数で M_R の内部に正則に延びるものは $\overline{T'_{\partial M_R}}$ により零化される。これに応じて CR 多様体 X 上の関数で $\overline{T'_X}$ で零化されるものを考え、**CR 関数**と呼ぶ。CR 多様体から複素多様体または CR 多様体への **CR 写像**も同様に定義され、**CR 同型**の概念が定まる。

Boutet de Monvel[B] は次の基本的結果を示した。

定理 7.1. $n \geq 3$ のとき、コンパクトな $(2n-1)$ 次元強擬凸 CR 多様体は CR 写像で $\mathbb{C}^{2n+1}$ に埋め込める。

$(2n-1)$ 次元の強擬凸 CR 多様体 X から $\mathbb{C}^N$ への CR 埋め込みがあれば、これに一般の方向への射影を合成することにより、X は局所的には $\mathbb{C}^n$ 内の実超曲面に標準的な CR 構造を与えたものと同型であることがいえる。よって $n \geq 2$ の時には隣接する局所 CR 埋め込みどうしを超曲面の片側に解析接続することにより X を境界に持つ開複素多様体が作れる。この観察と定理 7.1 を合わせると次が得られる。

定理 7.2. (cf. [Oh-8,9]) 5 次元以上のコンパクトな強擬凸 CR 多様体は複素多様体内の実超曲面と CR 同型である。

定理 7.2 と解析集合の Hartogs 型接続および広中の特異点解消定理を合わせると、5 次元以上のコンパクトな強擬凸 CR 多様体は ∂M_R の形のものに限ることがわかる。

よって定理 4.13 で示したような $H^r(M,\mathbb{C}) \to \varinjlim_K H^r(M \setminus K, \mathbb{C}) \quad (r \leq n-2)$ の全射性と $H^r_c(M,\mathbb{C}) \to H^r(M,\mathbb{C})$ $(r \geq n+1)$ の全射性を合わせれば、[Bu] や [PP] でも指摘されたようにカップ積

$$H^{r_1}(X,\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes H^{r_m}(X,\mathbb{C}) \to H^r(X,\mathbb{C}) \ \ (r = r_1 + \cdots + r_m)$$

は $r_1, \dots, r_m \leq n-2$ かつ $r \geq n+1$ のときは 0 になる。補足であるが、[Oh-5] ではこの理由により 5 次元以上の実トーラス上には強擬凸 CR 構造が入らないことや、$X = \partial M_R$ が解析集合の孤立特異点のリンクのときには $H^n_0(M_R,\mathbb{C}) \to H^n(M_R,\mathbb{C})$ が同型になることなどを指摘し、後者については [Oh-12] で詳しい証明を与えた[84]。

最近、この見方を進めて竹内 [Ta] は次を示した。

定理 7.3. 5 次元以上のコンパクトな強擬凸 CR 多様体 X の k 次 Chern 類 c_k について、カップ積 $c_{k_1} \cdots c_{k_m}$ は $2(k_1 + \cdots + k_m) \geq n+1$ のとき $H^{2(k_1+\cdots+k_m)}(X,\mathbb{C})$ 内で 0 である。

証明. $X = \partial M_R$ とすると、c_k は複素ベクトル束 T'_X の k 次 Chern 類 $c_k(T'_X)$ であるが、T'_X と自明束の直和が M の正則接ベクトル束 $T'_M (= T^{1,0}_M)$ の X への制限に等しいことから $c_k = c_k(T'_M)|_X$

[84] [PP] はもっと詳しい。

である。よって $2(k_1+\cdots+k_m)\geq n+1$ ならば上と同様の理由で $c_{k_1}\cdots c_{k_m}=0$ となる。 $\square$

この証明と上の補足から、X が孤立特異点のリンクであるときには $2(k_1+\cdots+k_m)=n$ のときにも $c_{k_1}\cdots c_{k_m}=0$ となる。

また、千葉 [Ti-2] は次を示した。

定理 7.4. M を n 次元 Stein 多様体とし、$n\geq 3$、$\varphi\in PSH(M)$ かつ e^{φ} は連続で皆既的であるとする。 このとき M 上の正則ベクトル束 E に対し $H^{0,0}(M,E)\to \varinjlim_{\mathrm{supp}\partial\bar\partial\varphi\subset \mathrm{V}} H^{0,0}(V,E)$ は同型写像であり、 $0<q<n-2$ のとき $\varinjlim_{\mathrm{supp}\partial\bar\partial\varphi\subset \mathrm{V}} H^{0,q}(V,E)=0$ となる。

系. 定理 7.4 の状況で、$H^k(M,\mathbb{C})\to \varinjlim_{\mathrm{supp}\partial\bar\partial\varphi\subset \mathrm{V}} H^k(V,\mathbb{C})$ は $k<n-2$ のとき同型で $k=n-2$ のとき単射である。

これらは解析接続の定理が多様体の位相幾何に役立った例であるが、やや意外性がある。定理 7.3 などは、定理 7.2 や解析接続を使わずに証明できてもおかしくないような気がする。もちろんその反対に、こういった議論を境界付き多様体の内部構造と境界構造の対応の一般論へと拡張することにも意味があろう。

7.2 退化型境界について

強擬凸多様体 (M,φ) に対し、どんな場合に M が強擬凸領域と双正則同値となるかは自然な問題であり、[N-Oh] や [Bl] でそのための φ の条件が与えられた。これは強擬凸 CR 多様体を付けてコンパクト化できる場合であり、$\mathbb{B}^n$ に $\partial\mathbb{B}^n$ を付けるという自明な例の延長である。その一方で、強擬凸領域に同型でない強擬凸多様体も多く、その中には然るべき幾何構造を持つ境界をつけてコンパクト化できるものもある。これらの境界は ∂M_R の極限であるので、対象としては強擬凸 CR 多様体が退化したものと考えられる。

例 7.1. $(M,\varphi)=(\mathbb{D}^n,\sum_{j=1}^n(1-|z_j|^2)^{-1})$, $n\geq 2$. このとき $\partial\mathbb{D}^n$ は $\partial\mathbb{B}^n$ と同相だが可微分同相ではない。$\partial\mathbb{D}^n$ の点で座標成分の絶対値が一つを除いてすべて 1 未満であるものの近傍では $\partial\mathbb{D}^n$ は C^{ω} 級で、Levi 形式は退化する。有界等質領域は $\mathbb{B}^n$ を除きすべてこのタイプである。

倉西正武氏はこのような例の一般化について、[Kr-2] でつぎのように述べておられる。

有界対称空間の場合, 複素ユークリッド空間の単位球とはちがって, その境界は滑らか (smooth) ではない. 境界は滑層化 (stratify) されていて, その一番小さい滑層 (strata) は滑らかであり領域 X_K のシロフ (Sylov) 境界 S_K になっている. S_K の近傍の正則函数はすべて X_K の正則函数に拡張出来るので, X_K の多変数函数論は余次元の高いシロフ境界 S_K の多変数函数論でおきかえることが出来る. 有界対称空間のリーマン化は, 複素領域 X でそのシロフ境界 S の各点の近傍は上の S_K の開集合の小さい変形になっているものを対象とすることになる. 複素ユークリッド空間の単位球の場合には強擬凸な境界と云う条件で十分であった. 有界対称空間の場合, 上の条件に相当するものを導入することから出発することになると思う. このとき 2 節にのべるカルタン (Cartan[85]) の考えが役にたつと思う. [9](=[Kr-1]) である程度の準備がされている.

岡理論の一般化は今日盛んに研究されているが, 強擬凸を適当な弱擬凸に一般化することがその中心になっている. 上のような形での一般化も大変面白いと思う.

[85]Elie Cartan。

Stein 多様体内の領域 D が二つの複素多様体の直積であれば、∂D は滑らかではありえない (cf. [Hk-Om])。その一方で [Oh-6] では次の例が見出された。これは筆者などが弱擬凸に注目する一つの理由である。

例 7.2. $\widehat{\mathbb{C}}\times(\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\sqrt{-1}\mathbb{Z}))=\{(\zeta,[z]=z+\mathbb{Z}+\sqrt{-1}\mathbb{Z});\zeta\in\widehat{\mathbb{C}},z\in\mathbb{C}\}$ の領域 $\{(\zeta,[z]);\mathrm{Im}(\zeta e^{2\pi\sqrt{-1}z})>0\}$ は滑らかな境界を持つが直積 $\mathbb{C}^*\times\{w;e^{-\pi}<|w|<1\}$ と同型である。

この例の一般化としてコンパクト Kähler 多様体上の $\mathbb{D}$ 束の擬凸性が [Di-Oh-2] で示された。特に閉 Riemann 面のうち Aut$\mathbb{D}$ の離散群 Γ の作用により $\mathbb{D}/\Gamma$ の形で書けるものに対し、Γ の $\mathbb{D}^2$ への対角線作用

$$(z,w)\mapsto(\gamma(z),\gamma(w)),\ \ \gamma\in\Gamma$$

による $\mathbb{D}$ 束 $\mathbb{D}^2/\Gamma\to\mathbb{D}/\Gamma$ は強擬凸になる。この上の Bergman 空間についての詳しい結果が足立正訓氏 [Ad] によって得られた。

定義 20. 複素多様体 M 内の C^∞ 級の実超曲面 X が **Levi 平坦**であるとは、X の任意の C^∞ 級局所定義関数 $\rho:U\to\mathbb{R}$ ($U\subset M,\ \ d\rho\neq0,\ \ X\cap U=\{x\in U;\rho(x)=0\}$) に対し、$\rho$ の Levi 形式 $\partial\bar\partial\rho$ が $T'_{X\cap U}$ 上いたるところ 0 であることをいう。このとき X を M 内の **Levi 平坦面**と呼ぶ。

Levi 平坦面は擬凹である。擬凹な集合で、その各点の M における近傍を二つの連結成分に分けるものを **Levi 平坦集合**と呼ぶ。C^2 級の実超曲面に対しては、Levi 平坦集合であることは定義関数を用いた上の条件と同等である。

強擬凸 CR 多様体の場合と同様に Levi 平坦面を抽象化したものが **Levi 平坦 CR 多様体**である。すなわち CR 多様体 (X,T'_X,F) において、T'_X の局所枠 $e_1,\ldots,e_{n-1}$ に対する Lie brackets $\sqrt{-1}[e_i,\overline{e_j}]$ の F 成分のなす $(n-1)$ 次 Hermite 行列が恒等的に 0 であるとき、T'_X を X 上の **Levi 平坦構造**といい X を **Levi 平坦 CR 多様体**と呼ぶ。$2n-1$ 次元の Levi 平坦 CR 多様体は、Frobenius の定理より T'_X が積分可能なので余次元が 1 の葉層構造を伴い、したがって局所的には $\mathbb{B}^{n-1}\times(-1,1)$ と CR 同型である。この葉層構造を **Levi 葉層**と呼ぶ。このように Levi 平坦 CR 構造は局所的には自明であるから、複素多様体論の場合と同様、Levi 平坦 CR 多様体に関しても大域的な理論が興味の対象となる。ここでもコンパクトな場合と Stein 多様体に対応する場合があるわけだが、Levi 葉層における複素方向と実方向の相関は力学系の問題を含み、なかなか一筋縄ではいかない。

多変数複素解析において、Levi 平坦面は Grauert の論文 [G-4] において複素多様体上の Levi 問題の反例として登場した。つまり Levi 平坦な境界を持つ擬凸領域を用いて、ほとんどすべての境界点で強擬凸であっても正則凸でない Levi 擬凸な領域が作れる。[G-4] で示された Levi 平坦面は次の通り。

例 7.3. M を 1 次元以上のコンパクトな複素多様体、 $E\to M$ を正則ベクトル束で変換関数系がユニタリ行列を値に持つものから成るとする。このとき E は曲率形式が恒等的に 0 であるようなファイバー計量を持ち、零切断の近傍で長さが定数 R (>0) 未満のベクトルから成るもの U_R はすべて擬凸である。これらは Stein 多様体ではなく、境界 ∂U_R は E が直線束のとき Levi 平坦である。 このとき ∂U_R の Levi 葉層が稠密な葉から成るための必要十分条件は、 E^k $(k\in\mathbb{Z})$ が $k\neq0$ のときすべて非自明なことである[86]。このとき最大値の原理より $\mathcal{O}(U_R)=\mathbb{C}$ である。

例 7.4. (Hopf 多様体内の Levi 平坦面, I. cf. [Oh-19,p.551, Remark (2)]) $\mathscr{H}^{(n)}=(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})/\Gamma^{(n)}$ $(n\geq2)$ とおく。ただし $\Gamma^{(n)}$ は $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})$ の部分群で変換 $z\to2z_1+z_n,\ldots,2z_{n-1}+z_n,2z_n)$ で生

[86]言い換えれば E は M の Picard 多様体の元として無限位数であることだが、さらに E^k が $k\to\infty$ のとき自明束に近づきうる度合いが次節で述べる Arnol'd-上田理論で重要な役割を果たす。

成されるものとする。$D_n=\{z\Gamma^{(n)}; z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}, \mathrm{Im}z_n>0\}\subset\mathscr{H}^{(n)}$ とおく。すると ∂D_n が Levi 平坦であることは明白。D_n は対応

$$z\mapsto(e^{4\pi iz_1/z_n},\ldots,e^{4\pi iz_{n-1}/z_n},z_n2^{-2z_1/z_n}) \tag{34}$$

により $\mathbb{C}^n$ 上の不分岐局所擬凸領域として実現できるから Stein 多様体である。

この型の Levi 平坦面は、例 7.2 の拡張として Nemirovski 氏により [Nm] で示されたものである。次の命題は山口博史氏と Levenberg 氏による [L-Y] にヒントを得たものである。

命題 7.1. (Hopf 多様体内の Levi 平坦面, II. cf. [Oh-19,p.551, Remark (1)]) $\mathscr{H}^n=(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})/\Gamma_a$, $\Gamma_a=\{a^k; k\in\mathbb{Z}\}$, $|a|>1$, $z\mapsto a^kz$, $\pi:\mathscr{H}^n\to\mathbb{CP}^n$ は自然な射影とする。C^ω 級の Levi 平坦面 $X\subset\mathscr{H}^n$ の補集合が $(n-1)$ 完備であれば、X は $\mathbb{CP}^{n-1}$ 内の Stein 領域の境界の π による逆像である。

ちなみに [L-Y] は高次元の領域で一般化された Robin 関数を解析した [K-L-Y] の続きであり、従って前節で述べたように L^2 拡張定理ともつながっているわけである。

$\mathbb{CP}^n$ 上の不分岐領域 $\mathscr{D}$ が局所擬凸なら、$\mathscr{D}\cong\mathbb{CP}^n$ であるかまたは $\mathscr{D}$ は Stein である (cf. [FR], [T-1,2], [Oh-15], [Oh-S])。従って $\mathbb{CP}^n$ 内に Levi 平坦面があるとすれば、その補集合は ($\mathbb{CP}^n$ が単連結なので) 正則領域になるが、このことから解析接続を経由してもろもろの不都合な真実が生じる。その結果、$n\geq 3$ のとき、LinsNeto[LN] は $\mathbb{CP}^n$ が C^ω 級の Levi 平坦面を含まないことを示し、Cao と Shaw[C-S] は $\mathbb{CP}^n$ が Lipschitz 級の Levi 平坦集合を含まないことを示した。しかし次の難問が残っている。

問題. $\mathbb{CP}^2$ は Levi 平坦面を含むか。

退化した境界を持つ強擬凸多様体としては、この他に解析的集合を付けて複素多様体としてコンパクト化できる族がある。この一族も端倪すべからざる多様性を持っている。最も標準的な例は超平面断面によりコンパクト化できる場合であろう。

例 7.5. $(M,\varphi)=(\mathbb{C}^n,\|z\|^2)$. このときはコンパクト化として $\mathbb{CP}^n$ がとれ、境界としては $\mathbb{CP}^{n-1}$ がとれる。このような対 $\mathbb{CP}^n\supset\mathbb{CP}^{n-1}$ の一般型は、閉部分多様体 $S\subset\mathbb{CP}^N$ と超平面断面 $S\cap\mathbb{CP}^{N-1}$ である。

$\mathbb{C}^n$ のコンパクト化を分類する問題が Hirzebruch[Hz] により提出され、すでにふれたように $\mathbb{C}^2$ のコンパクト化は Morrow[Mr] により分類された。$\mathbb{C}^3$ のコンパクト化で Kähler 計量を持つものは $\mathbb{CP}^3$ に限るという結果（cf. [Br-Mr]) がある一方、Kähler でないものの例が数多く知られている (cf. [Fr-1∼4])。$\mathbb{C}^n$ のコンパクト化はすべて Moishezon 多様体であろうと予想されているが、線形群の作用が伸びる場合にしか解かれていない (cf. [Gl])。小平は [K-7] で $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ のコンパクト化を分類する問題を提出し、$\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ と $(\mathbb{C}^*)^2$ のコンパクト化は上田 [U-1] と鈴木 [Sz-2] により分類された。

$\mathbb{C}^2$ および $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ のコンパクト化は有理曲面であり、$\mathbb{CP}^2$ から何回か適当にブローアップとブローダウンを繰り返して得られる (双有理同型) が、$(\mathbb{C}^*)^2$ の場合は全く性質の違うコンパクト化が 3 種類現れる。その一つは $(\widehat{\mathbb{C}})^2$ で $\mathbb{CP}^2$ と同様有理的であるが、他の二つはそうでない。

例 7.6. (Serre の例)

$$(\mathbb{C}^*)^2\cong\mathbb{C}^2/\sim,\ \ (z,w)\sim(z',w')\iff\exists a,\ b\in\mathbb{Z}\ \text{ s.t. }\ z'=z+a+\sqrt{-1}b,\ \ w'=w+a.$$

よって楕円曲線上の $\widehat{\mathbb{C}}$ 束の構造を持つ $(\mathbb{C}^*)^2$ のコンパクト化が存在する。この場合、境界は法ベクトル束が自明であるような楕円曲線である。

この例で $\{\mathrm{Im}\, w = 0\}$ は Levi 平坦面であり、$\mathbb{C}^*$ と円環領域の直積の境界になっている。これは例 7.2 と同種のものである。Hwang と Varolin[Hw-V] は Serre の例を 2 次元トーラス上の $\mathbb{C}^2$ 束に対して一般化して $(\mathbb{C}^*)^4$ のコンパクト化を作っている。

$(\mathbb{C}^*)^2$ のあと一つのコンパクト化は Hopf 曲面である。

例 7.7. 対応 (34) は $\mathscr{H}^{(n)} \setminus \{z_n = 0\}$ を局所擬凸に $\mathbb{C}^n$ 上の不分岐領域として実現している。実際には　$\mathscr{H}^{(n)} \setminus \{z_n = 0\} \cong \mathbb{C}^{n-2} \times (\mathbb{C}^*)^2$ であるので $\mathscr{H}^{(2)}$ は $(\mathbb{C}^*)^2$ のコンパクト化である。

7.3 形式同型と本義同型

Grauert の論文の中でも傑作中の傑作である [G-3] の中で、強擬凸多様体上の関数論が古典的な代数関数論の延長上にある問題と結ばれた。一般にコンパクトな複素多様体 A、複素多様体 M、および正則な埋め込み $\iota : A \hookrightarrow M$ に対し、A のイデアル層 $\mathcal{I}_A$ のべきによる M の構造層 $\mathcal{O}_M$ の剰余層 $\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_A^\mu$ を考え、環つき空間 $(A/M)_\mu := (A, (\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_A^{\mu+1})|_A)$ を A の M における μ **次の近傍**と呼ぶ。また、$(A/M)_{\mathcal{O}} := (A, \mathcal{O}_M|_A)$、$(A/M)_\infty := (A, \lim_{\mu\to\infty} (\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_A^\mu)|_A)$ とおく。 この (A, M, ι) と同様の三つ組 $(\tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{\iota})$ に対する任意の同型 $\psi : (A/M)_\infty \to (\tilde{A}/\tilde{M})_\infty$ および任意の μ に対し、ある同型 $\Psi : (A/M)_{\mathcal{O}} \to (\tilde{A}/\tilde{M})_{\mathcal{O}}$ が存在して $\Psi|_{(A/M)_\mu} = \psi|_{(A/M)_\mu}$ となるとき、(A, M, ι) は**形式化可能**であるという[87]。便宜上、以下では A と $\iota(A)$ を同一視し、略して (A, M) は形式化可能という言い方をする。(A, M) がいつ形式化可能かという問題に対し、[G-3] では次の答が与えられた。

定理 7.5. 　A が M 内で強擬凸な近傍を持てば (A, M) は形式化可能である。

実際にはより詳しく、このとき (A, M, ι) に応じた μ があり、$(A/M)_\mu \cong (\tilde{A}/\tilde{M})_\mu$ ならば $(A/M)_{\mathcal{O}} \cong (\tilde{A}/\tilde{M})_{\mathcal{O}}$ であることが鮮やかな幾何学的議論により示されている[88]。

A の M における法ベクトル束 $N_{A/M}$ について、そのランクが 1 なら負 (=$N_{A/M}^*$ が正) であることと零切断が強擬凸な近傍を持つことは同値である。このとき A は M 内で強擬凸な近傍を持つ[89]。一般に、零切断が強擬凸な近傍を持つベクトル束は **Grauert 負**であるという。$N_{A/M}$ が Grauert 負なら A は M 内で強擬凸な近傍を持つ。

定理 7.5 の系. $N_{A/M}$ が Grauert 負であれば (A, M) は形式化可能である。

歴史的には $N_{A/M}$ が正の場合が先に調べられた。それには Poincaré[P-2,3] や Severi[S-1,2] の仕事を背景に、この問題が小平消滅定理との関連性から [K-3,4] や [K-S] などで浮かび上がった経緯が絡んでいる。詳細は割愛するが、[N-S] を受けた Griffiths[Gf] は、$N_{A/X}$ の曲率が一定の正値性を持つ場合に解析接続の問題としてこの問題を解いている。(A, M) が形式化不能な例は A が楕円曲線で $N_{A/M}$ が平坦束の場合に Arnol'd[A] によってはじめて与えられ、一般の閉 Riemann 面の場合、上田 [U-2] で詳しく調べられた。$A \cong \mathbb{CP}^n$ のときは $N_{A/M}$ の如何に関わらず常に形式化可能

[87] 英語では“formal principle holds” という表現であるが意訳した。

[88] 定理 7.5 は、[H-Rs] で A や M が特異点を持つ解析空間の場合にも、A が強擬凸な近傍系を持てば正しいことが示された。

[89] この逆には簡単な反例がある (cf.[G-3,§3.8])。

であろうと予想されるが、$n=1$ の場合にさえ未解決である。ここに切り込んできたのが Hwang 氏の論文 [Hw] であり、特に次が示された。

定理 7.6. $A \cong \mathbb{CP}^1$ であり、$N_{A/M}$ の切断全体の共通零点はないとする。このとき M の Douady 空間[90]内の点 $\{A\}$ の近傍内の稠密な開集合 U があって、$\{A'\} \in U$ ならば (A', M) は形式化可能である。

証明は、局所幾何構造の形式的同型の収束性に関する森本理論 [Mm] と閉複素部分多様体の族がなす Douady 空間の一般論を、次の条件下で組み合わせて行う。

定義 21. 複素多様体 $\mathcal{B}$,$\mathcal{U}, \mathcal{X}$ が正則写像 $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{B}, \sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ で結ばれているとする。$(\mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{X}, \rho, \sigma)$ は以下の条件をすべて満たすとき**順分離族** (nicely separating family) であるという。

(1) ρ はプロパーで臨界点を持たない全射である。

(2) σ は臨界点を持たない全射で、ρ の各ファイバーを $\mathcal{X}$ の部分多様体として埋め込む。

(3) $p = \mathrm{dim}\mathcal{U} - \mathrm{dim}\mathcal{X}$ とし、$\rho' : \mathcal{U} \to \mathrm{Gr}(p, T^{1,0}\mathcal{B})$ を ρ が誘導する Grassmann 束への写像とすれば、ρ' は単射である。

形式化可能性が U 内の点に限るということは森本理論を使う以上避けられないが、順分離性がみたされる自然な状況は多く、[Hw] においては A.Hirschowitz 氏が [Hi] で挙げた予想が定理 7.6 と同様の意味で「一般の点において」正しいことも示されている。

ちなみに、Arnol'd[A] が与えた形式化可能性条件の応用として K3 曲面の新たな構成法が小池貴之氏と上原崇人氏の共同研究 [Ko-Uh] によって見出され、Arnol'd-上田理論のさらなる一般化が [Ko-1] や [Ko-2] などにより進行中である。

`Epilogue`(あとがきに代えて)　　集中講義のために短いレジュメを書くつもりで始めた原稿が意外に長くなってしまった。稿が進むにつれ書きたいのに書けないことばかりが増えていく感じであり、筆をおくにあたり、あれも書けなかったこれも書けなかったと長嘆息することしきりである。その一方で、高木貞治先生の名著「解析概論」の序文にあるような、「数学の解説法において、講義式は数学上の概念発生の源をたずね、理論進展の跡を追う方法であるが、その短所は冗長、一般に粗雑、細目においてはほとんど常に未完成なところにある」という形容がぴったり当てはまる講義録 (のようなもの) が出来上がった。「念のため」と言いながら同じことを繰り返し述べた個所がいくつもある反面、重要な命題の証明を文献の参照だけで済ませた個所も多かった。未解決問題をいくつか提示したが、これは細目において未完成なことの証明のようなものである。講義式の長所として挙げられた「数学を活き物として、その成長の一つのフェイズを捕えようとするところに若干の新鮮味があり得るであろう」については、当然筆者においても理想はこうだったが、書く分量が増えるにつれてどこに何を書いたかさえ記憶するのが難しくなるありさまで、この点がどれだけ実現できているかは甚だ心もとない。とはいえ解析接続に現れた諸問題をたどるうち、実はこれがすべての数学に通じる道ではないかと思えたことは一つの収穫だった。次は「解析接続に現れる代数の問題」にも挑戦してみようかと思う (冗談です)。

参考文献

[Ab] Abdelkader, O., *Généralisation d'un théorème de finitude,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **293** (1981), no. 14, 629-632.

[90] M のコンパクト複素部分多様体の集合に複素解析空間の構造を入れたもの (cf. [D])。

[A-M] Abhyankar, S. S. and Moh, T.- T., *Embeddings of the line in the plane,* J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 148-166.

[AD] Adachi, K., *An elementary proof of the Ohsawa-Takegoshi extension theorem,* Math. J. Ibaraki Univ. **45** (2013), 33-51.

[Ad] Adachi, M., *Weighted Bergman spaces of domains with Levi-flat boundary: geodesic segments on compact Riemann surfaces,* arXiv: 1703.08165v1[math.CV]

[Ah-1] Ahlfors, L. V., *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable,* Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. xi+331 pp. (複素解析 笠原乾吉訳 現代数学社 1982)

[Ah-2] ——, *Conformal invariants. Topics in geometric function theory,* Reprint of the 1973 original. With a foreword by Peter Duren, F. W. Gehring and Brad Osgood. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. xii+162 pp.

[Ah-B] Ahlfors, L. V. and Bers, L., *Riemann's mapping theorem for variable metrics,* Ann. of Math. (2) **72** (1960), 385-404.

[A-G] Andreotti, A. and Grauert, H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,* Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193-259.

[A-V-1] Andreotti, A. and Vesentini, E., *Sopra un teorema di Kodaira*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 283-309.

[A-V-2] ——, *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25** (1965), 81-130.

[A-Siu] Angehrn, U. and Siu, Y.-T., *Effective freeness and point separation for adjoint bundles,* Invent. Math. **122** (1995), no. 2, 291-308.

[A] Arnol'd, V. I., *Bifurcations of invariant manifolds of differential equations, and normal forms of neighborhoods of elliptic curves,* (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. **10** (1976), no. 4, 1-12.

[A-S] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., *The index of elliptic operators. I,* Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484-530.

[B-St] Behnke, H. and Stein, K., *Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen,* Math. Ann. **120** (1949), 430-461.

[B-T] Behnke, H. and Thullen, P., *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band **51**. Zweite, erweiterte Auflage. Herausgegeben von R. Remmert. Unter Mitarbeit von W. Barth, O. Forster, H. Holmann, W. Kaup, H. Kerner, H.-J. Reiffen, G. Scheja und K. Spallek. Springer-Verlag, Berlin-New York 1970 xvi+225 pp.

[B-1] Berndtsson, B., *Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **56** (2006), 1633-1662.

[B-2] ——, *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations,* Ann. of Math. **169** (2009), 531-560.

[B-L] Berndtsson, B. and Lempert, L., *A proof of the Ohsawa-Takegoshi theorem with sharp estimates,* J. Math. Soc. Japan **68**, no. 4 (2016), 1461-1472.

[B-P-1] Berndtsson, B. and Păun, M., *Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles*, Duke Math. J. **145** (2008), 341-378.

[B-P-2] ——, *Quantitative extensions of pluricanonical forms and closed positive currents,* Nagoya Math. J. **205** (2012), 25-65.

[Bl] Bland, J. S., *On the existence of bounded holomorphic functions on complete Kähler manifolds,* Invent. Math. **81** (1985), no. 3, 555-566.

[Bł-1] Błocki, Z., *Singular sets of separately analytic functions,* Ann. Polon. Math. **56** (1992), no. 2, 219-225.

[Bł-2] ——, *The Bergman kernel and pluripotential theory,* Potential theory in Matsue, 1-9, Adv. Stud. Pure Math., **44**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006 pp. 1-9.

[Bł-3] ——, *Bergman kernel and metric in terms of logarithmic capacity,* Nagoya Math. J. **185** (2007), 143-150.

[Bł-4] ——, *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, Invent. Math. **193** (2013), 149-158.

[Bł-5] ——, *A lower bound for the Bergman kernel and the Bourgain-Milman inequality,* Geometric Aspects of Functional Analysis, Israel Seminar (GAFA) 2011-2013, eds. B. Klartag, E. Milman, LNM **2116**, Springer, 2014, pp. 53-63.

[Bł-6] ——, *Bergman kernel and pluripotential theory,* Analysis, complex geometry, and mathematical physics: in honor of Duong H. Phong, 1-10, Contemp. Math., **644**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[BM] Boutet de Monvel, L., *Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles,* Lions-Schwartz 1974-1975; Équations aux derivées partielles linéaires et non linéaires, pp. Exp. No. **9**, 14 pp. Centre Math., cole Polytech., Paris, 1975.

[Br-Mr] Brenton, L. and Morrow, J., *Compactifications of* $\mathbb{C}^n$*,* Trans. Amer. Math. Soc. **246** (1978), 139-153.

[Bu] Bungart, L., *Vanishing cup products on pseudoconvex CR manifolds,* The Madison Symposium on Complex Analysis (Madison, WI, 1991), vol. **137** of Contemp. Math. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1992, pp. 105-111.

[C] Cao, J.-Y., , *Ohsawa-Takegoshi extension theorem for compact Kähler manifolds and applications,* Complex and symplectic geometry, 19-38, Springer INdAM Ser., **21**, Springer, Cham, 2017.

[C-Dm-M] Cao, J.-Y., Demailly, J.-P. and Matsumura, S., *A general extension theorem for chomology classes on non reduced analytic spaces,* Sci.China Math. **60** (2017), n. 6, 949-962.

[C-S] Cao, J. and Shaw, M.-C., *The* $\bar{\partial}$*-Cauchy problem and nonexistence of Lipschitz Levi flat hypersurfaces in* $\mathbb{CP}^n$ *with* $n \geq 3$*,* Math. Z. **256** (2007), 175-192.

[Ca] Carleson, L., *Selected problems on exceptional sets,* Van Nostrand Mathematical Studies, No. **13** D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London 1967 v+151 pp.

[C-1] Cartan, H., *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes,* J. Math. Pure et appl. **19** (1940), 1-26.

[C-2] ——, *Séminaire E.N.S.,* 1951-1952, École Normale Supérieur, Paris.

[C-3] ——, *Variétés analytiques complexes et cohomologie,* Coll. sur les fonct. de plus. var., Bruxelles, 1953, pp. 41-55.

[C-4] ——, *Séminare E.N.S.* 1953-54, École Normale Supérieur, Paris.

[C-T] Cartan, H. and Thullen, P., *Zur Theorie des Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen,* Math. Ann. **106** (1932), 617-647.

[Cb] Chen, B.-Y., *A simple proof of the Ohsawa-Takegoshi extension theorem,* arXiv:1105.2430v1 [math.CV]

[Cb-K-Oh] Chen, B.-Y., Kamimoto, J. and Ohsawa, T., *Behavior of the Bergman kernel at infinity,* Math. Z. **248** (2004), no. 4, 695-708.

[Ch] Chern, S. S. , *Characteristic classes of Hermitian Manifolds,* Annals of Math. **47** (1946), 85-121.

[Chk] Chirka, E. M., *Holomorphic motions and the uniformization of holomorphic families of Riemann surfaces,* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **67** (2012), no. 6(408), 125-202; translation in Russian Math. Surveys **67** (2012), no. 6, 1091-1165.

[Cl-Rp] Colţoiu, M. and Ruppenthal, J., *On Hartogs' extension theorem on (n-1)-complete complex spaces,* J. Reine Angew. Math. **637** (2009), 41-47.

[Cs] Cousin, P., *Sur les fonctions de n variables complexes,* Acta Math. **19** (1895), 1-62.

[C-E] Curry, S. N. and Ebenfelt, P., *Bounded strictly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^2$ *with obstruction flat boundary II.,* Adv. Math. **352** (2019), 611-631.

[Dm-1] Demailly, J.-P., *Estimations* L^2 *pour l'opérateur* $\bar{\partial}$ *d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète,* Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 3, 457-511.

[Dm-2] ——, *Cohomology of q-convex spaces in top degrees*, Math. Z. **204** (1990), 283-295.

[Dm-3] ——, *Regularization of closed positive currents and intersection theory,* J. Algebraic Geom. **1** (1992), 361-409.

[Dm-4] ——, *Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties,* The Legacy of Bernhard Riemann after one hundred and fifty years, Vol. 1, Adv. Lect. in Math. (ALM) **35.1** Int. Press, Sommerville, MA, 2016, 191- 222.

[Dm-E-L] Demailly, J.-P. Ein, L. and Lazarsfeld, R., *A subadditivity property of multiplier ideals,* Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday. Michigan Math. J. **48** (2000), 137-156.

[Dm-K] Demailly, J.-P. and Kollár, J., Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 4, 525-556.

[D-W-Z-Z] Deng, F.-S., Wang, Z.-W., Zhang, L.-Y. and Zhou, X.-Y., *New characterizations of plurisubharmonic functions and positivity of direct image sheaves,* arXiv:1809.10371 [math.CV]

[Di-Fn] Diederich, K. and Fornaess, J.- E., *A smooth pseudoconvex domain without pseudoconvex exhaustion,* Manuscripta Math. **39** (1982), no. 1, 119-123.

[Di-Oh-1] Diederich, K. and Ohsawa, T., *A Levi problem on two-dimensional complex manifolds,* Math. Ann. **261** (1982), no. 2, 255-261.

[Di-Oh-2] ——, *Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), no. 4, 819-833.

[D-Ff] Donnelly, H. and Fefferman, C., L^2*-cohomology and index theorem for the Bergman metric,* Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 3, 593-618.

[D] Douady, A., *Le problème de modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **16** (1966), 1-95.

[E-L] Ein,L. and Lazarsfeld, R., , *Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds,*, J. Amer. Math. Soc., **6** (1993), 875-903.

[E-G] Eliashberg, Y. and Gromov, M., *Embeddings of Stein manifolds of dimension n into the affine space of dimension* $3n/2 + 1$*,* . Ann. of Math. (2) **136** (1992), no. 1, 123-135.

[Ff-1] Fefferman, C., *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains,* Invent. Math. 26 (1974), 1-65.

[Ff-2] ——, *Parabolic invariant theory in complex analysis,* Adv. in Math. **31** (1979), no. 2, 131-262.

[F-G] Fischer, W. and Grauert, H. *Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten,* Nachr. Akad. Wiss. Gttingen Math.-Phys. Kl. II (1965), 89-94.

[Fn] Fornaess, J.- E., *A counterexample for the Levi problem for branched Riemann domains over* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 234 (1978), no. 3, 275-277.

[F-Oh] Forster, O. and Ohsawa, T., *Complete intersections with growth conditions,* Algebraic geometry, Sendai, **1985**, 91-104,

[F] Fujiki, A., *On the blowing down of analytic spaces,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974/75), 473-507.

[F-N] Fujiki, A. and Nakano, S., *Supplement to "On the inverse of monoidal transformation",* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **7** (1971/72), 637-644.

[FR] Fujita, R., *Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe*, J. Math. Soc. Japan **15** (1963), 443-473.

[FT] Fujita, T., *Contribution to Birational Geometry of Algebraic Varieties: Open Problems;* the 23rd International Symposium, Division of Mathematics, the Taniguchi Foundation; August 22-27, 1988, Katata. 1988.

[Fr-1] Furushima, M., *Non-projective compactifications of* $\mathbb{C}^3$*. I,* Kyushu J. Math. **50** (1996), no. 1, 221-239.

[Fr-2] ——, *Non-projective compactifications of* $\mathbb{C}^3$*. II. New examples,* Kyushu J. Math. **52** (1998), no. 1, 149-162.

[Fr-3] ——, *Non-projective compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *. III, A remark on indices,* Hiroshima Math. J. **29** (1999), no. 2, 295-298.

[Fr-4] ——, *Non-projective compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *. IV,* Kyushu J. Math. **61** (2007), no. 1, 259-273.

[F-N-O] Furushima, M., Nobe, M. and Ohshima, Y., *A note on minimal normal compactifications of* $\mathbb{C}^2$*,* Kumamoto J. Math. **27** (2014), 5-21.

[Ga] Gaffney, M. P., *A special Stokes's theorem for complete Riemannian manifolds,* Ann. of Math. (2) **60** (1954), 140-145.

[Gl] Gellhaus, C., *Äquivariante Kompaktifizierungen des* $\mathbb{C}^n$*,* Math. Z. **206** (1991), no. 2, 211-217.

[G-1] Grauert, H., *Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik*, Math. Ann. **131** (1956), 38-75.

[G-2] ——, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds,* Ann. of Math. **68** (1958), 460-472.

[G-3] ——, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen,* Math. Ann. **146** (1962), 331-368.

[G-4] ——, *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten*, Math. Z. **81** (1963), 377-391.

[G-R-1] Grauert, H. and Riemenschneider, O., *Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper-q konvexem Rand,* Problems in analysis (Lectures Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), pp. 61-79.

[G-R-2] ——, *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen*, Invent. Math. **11** (1970), 263-292.

[G-W] Greene, R. E.and Wu, H., *Embedding of open Riemannian manifolds by harmonic functions,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25** (1975), no. 1, vii, 215-235.

[Gf] Griffiths, P.- A., *The extension problem in complex analysis. II. Embeddings with positive normal bundle,* Amer. J. Math. **88** (1966), 366-446.

[G-L] Guan, Q.-A. and Li, Z.-Q., *A characterization of regular points by Ohsawa-Takegoshi extension theorem,* J. Math. Soc. Japan **70** (2018), no. 1, 403-408.

[G-Z-1] Guan, Q.-A. and Zhou, X.-Y., *A solution of an* L^2 *extension problem with optimal estimate and applications*, Ann. of Math. **181** (2015), 1139-1208.

[G-Z-2] ——, *A proof of Demailly's strong openness conjecture,* Ann. of Math. (2) **182** (2015), no. 2, 605-616.

[G-Z-Z-1] Guan, Q.-A., Zhou, X.-Y. and Zhu, L-F., *On the Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem and the twisted Bochner-Kodaira identity,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 13-14, 797-800.

[G-Z-Z-2] ——, *On the Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem and the Bochner-Kodaira identity with non-smooth twist factor,* J. Math. Pures Appl. (9) **97** (2012), no. 6, 579-601.

[Gn-Rs] Gunning, R. C. and Rossi, H., *Analytic functions of several complex variables,* Reprint of the 1965 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. xiv+318 pp.

[Hn] Hamano, S., *Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans,* Math. Z. **284** (2016), no. 1-2, 491-505.

[H-1] Hartogs, F., *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten*, Math. Ann. **62** (1906), 1-88.

[H-2] —, *Über die aus den singulären Stellen einer analytishcen Funktion mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebilde,* Acta Math. **32** (1909), 57-79.

[H-3] ——, *Über das Problem der Wohlordnung,* Math. Ann. **76** (4) (1915), 438-443.

[Hr] Hirachi, K., *Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel,* Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 151-191.

[H-Rs] Hironaka, H. and Rossi, H., *On the equivalence of imbeddings of exceptional complex spaces,* Math. Ann. **156** (1964), 313-333.

[H-U] Hironaka, H. and Urabe, T., *Kaiseki kukan nyumon.* [Introduction to analytic spaces] , Second edition. Suri Kagaku Raiburari [Mathematical Science Library], 1. Asakura Publishing Co. Ltd., Tokyo, 1983. vi+158 pp. (解析空間入門　数理科学ライブラリー　朝倉書店　2011)

[Hi] Hirschowitz, A. *On the convergence of formal equivalence between embeddings,* Ann. of Math. **113** (1981) 501-514.

[Hz] Hirzebruch, F., *Some problems on differentiable and complex manifolds,* Ann. of Math. **60** (1954), 213-236.

[Hm-1] Hörmander, L., *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[Hm-2] ——, *An introduction to complex analysis in several variables,* Third edition. North-Holland Mathematical Library, **7**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. xii+254 pp.

[Hj] Hössjer, G., *Über die konforme Abbildung eines Veränderlichen Bereiches,* Transactions of Chalmers university of technology Gothenburg, Sweden **10** (1942), 2-15.

[Hs-1] Hosono, G., *The optimal jet L^2 extension of Ohsawa-Takegoshi type,* arXiv:1706.08725[math.CV]

[Hs-2] ——, *A simplified proof of optimal L^2-extension theorem and extensions from non-reduced subvarieties,* arXiv:1910.05782[math.CV]

[Hk-Om] Huckleberry, A. T.and Ormsby, E., *Nonexistence of proper holomorphic maps between certain complex manifolds,* Manuscripta Math. **26** (1978/79), no. 4, 371-379.

[Hw] Hwang, J.-M., *An application of Cartan's equivalence method to Hirschowitz's conjecture on the formal principle,* Ann. of Math. (2) **189** (2019), no. 3, 979-1000.

[Hw-V] Hwang, J.-M. and Varolin, D., *A compactification of $(\mathbb{C}^*)^4$ with no non-constant meromorphic functions,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 1, 245-253.

[Kw] Kawai, R., *On the construction of a holomorphic function in the neighbourhood of a critical point of a ramified domain,* 1960 Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960) pp. 115-132 Tata Institute of Fundamental Research, Bombay

[Km] Kawamata, Y., *On Fujita's freeness conjecture for 3 -folds and 4 -folds,* Math. Ann. **308** (1997), no. 3, 491-505.

[Kz-1] Kazama, H., *Approximation theorem and application to Nakano's vanishing theorem for weakly 1-complete manifolds*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **27** (1973), 221-240.

[Kz-2] ——, *On pseudoconvexity of complex Lie groups*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **27** (1973), 241-247.

[K-L-Y] Kim, K.-T., Levenberg, N. and Yamaguchi, H., *Robin functions for complex manifolds and applications,* Mem. Amer. Math. Soc. **209** (2011), no. 984, viii+111 pp.

[Kb] Kobayashi, S., 複素幾何 岩波書店 2005.

[K-1] Kodaira, K. *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **39**, (1953). 1268-1273.

[K-2] ——, *On Kähler varieties of restricted type,* Ann. Math. **60** (1954), 28-48.

[K-3] ——, *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties,* Ann. of Math. **59** (1954), 86-134.

[K-4] ——, *Characteristic linear systems of complete continuous systems,* Amer. J. Math. **78** (1956), 716-744.

[K-5] ——, *Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds,* J. Differential Geometry **6** (1971/72), 33-46.

[K-6] ——, *Complex manifolds and deformation of complex structures,* Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao. Reprint of the 1986 English edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. x+465 pp. (複素多様体論 (新装版) 岩波書店 2015)

[K-7] ——, *Nevanlinna theory,* Translated from the Japanese by Takeo Ohsawa. Springer Briefs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. xi+86 pp. (Nevanlinna 理論 東大セミナリーノート 1974)

[K-S] Kodaira, K. and Spencer, D. C., *On deformations of complex analytic structures, I-II,* Ann. of Math. **67** (1958), 328-466.

[Kn] Kohn, J. J., *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I and II,* Ann. of Math. **78** (1963), 112-148; **79** (1964), 450-472.

[Ko-1] Koike,T., *Ueda theory for compact curves with nodes,* Indiana U. Math. J. **66**, no. 3 (2017), 845-876, arXiv:1507.00109.

[Ko-2] ——, *Arnol'd's type theorem on a neighborhood of a cycle of rational curves,* arXiv:1805.05326.

[Ko-Uh] Koike,T. and Uehara, T, *A gluing construction of K3 surfaces,* arXiv:1903.01444.

[Kr-1] Kuranishi, M., *CR structures and bounded symmetric domains,* Aspects of Math., University of Hongkon (2001),117-141.

[Kr-2] ——, *On the geometry of Klein, Riemann and Cartan,* (in Japanese) Mathematics in the 21st century, unscaled peaks of geometry, ed. R. Miyaoka and M. Kotani, Nippon Hyoron sha co.,Ltd.2004, pp. 244-266.

[L-N] Lee, S. and Nagata, Y., *An extension theorem of holomorphic functions on hyperconvex domains,* Proc. AMS https://doi.org/10.1090/proc/14704. Article electronically published on July 9, 2019. (arXiv:1811.06438v1).

[L] Lempert, L., *Extrapolation, a technique to estimate,* Functional analysis, harmonic analysis, and image processing: a collection of papers in honor of Björn Jawerth, 271-281, Contemp. Math., **693**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[L] Leray, J., *L'anneau d'homologie d'une représentation,* C. R. Acad. Sci. Paris **222** (1946), 1366-1368.

[L-Y] Levenberg, N. and Yamaguchi, H., *Pseudoconvex domains in the Hopf surface,* J. Math. Soc. Japan **67** (2015), no. 1, 231-273.

[L-Rs] Lieberman, D.and Rossi, H. *Deformations of strongly pseudo-complex manifolds,* Rencontre sur l'analyse complexe plusieurs variables et les systmes surdtermins (Textes Conf., Univ. Montral, Montreal, Que., 1974), pp. 119-165. Presses Univ. Montral, Montreal, Que., 1975.

[LN] Lins Neto, A., *A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 1369-1385.

[M] Maitani, F., *Variations of meromorphic differentials under quasiconformal deformations,* J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 49-66.

[M-Y] Maitani, F. and Yamaguchi, H., *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. **330** (2004), 477-489.

[M-P] Merker, J. and Porten, E., *A Morse-theoretical proof of the Hartogs extension theorem,* J. Geom. Anal. **17** (2007), no. 3, 513-546.

[Mk-Zh] Mok, N. and Zhong, J.- Q., *Compactifying complete Khler-Einstein manifolds of finite topological type and bounded curvature,* Ann. of Math. (2) **129** (1989), no. 3, 427-470.

[Mk] Mok, N., *Aspects of Kähler geometry on arithmetic varieties,* Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989), 335-396, Proc. Sympos. Pure Math., **52**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[Mm] Morimoto, T. *Sur le problème d'équivalence des structures géométriques,* Japan. J. Math. **9** (1983) 293-372.

[Mr] Morrow, J., *Minimal normal compactifications of* $\mathbb{C}^2$*,* Complex analysis, 1972 (Proc. Conf., Rice Univ., Houston, Tex., 1972), Vol. I: Geometry of singularities. Rice Univ. Studies **59** (1973), no. 1, 97-112.

[N-1] Nakano, S., *On complex analytic vector bundles*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955), 1-12.

[N-2] ——, *On the inverse of monoidal transformation,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **6** (1970/71), 483-502.

[N-3] ——,*Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds,* Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp.169-179.

[N-4] ——, *Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds, II,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1974), 101-110.

[N-Oh] Nakano, S. and Ohsawa, T., *Strongly pseudoconvex manifolds and strongly pseudoconvex domains,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 4, 705-715.

[N-R] Nakano, S. and Rhai, T.-S., *Vector bundle version of Ohsawa's finiteness theorems*, Math. Japon. **24** (1979/80), 657-664.

[Np-R] Napier, T. and Ramachandran, M., *Weakly special filtered ends of complete Kähler manifolds, proper holomorphic mappings to Riemann surfaces, and the Bochner-Hartogs dichotomy,* Houston J. Math. **45** (2019), no. 1, 129-173

[Nm] Nemirovski, S., *Stein domains with Levi-plane boundaries on compact complex surfaces*, Mat. Zametki **66** (1999), 632-635; translation in Math. Notes **66** (1999), no. 3-4 (2000), 522-525.

[N-S] Nirenberg, L. and Spencer, D. C., *On rigidity of holomorphic imbeddings,* 1960 Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960) pp. 133-137, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay

[Nm] Nishimura, Y., *Problème d'extension dans la théorie des fonctions entières d'ordre fini,* J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), no. 4, 635-650.

[Nn-1] Nishino, T., *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. I,* J. Math. Kyoto Univ. **8** (1968), 49-100.

[Nn-2] ——, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. II. Fonctions entières qui se réduisent à celles d'une variable,* J. Math. Kyoto Univ. **9** (1969), 221-274.

[Nn-3] ——, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusiers variables complexes. III. Sur quelques propriétés topologiques des surfaces premières,* J. Math. Kyoto Univ. **10** (1970), 245-271.

[Nn-4] ——, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. IV. Types de surfaces premières,* J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 217-272.

[Nn-5] ——, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. V. Fonctions qui se réduisent aux polynômes,* J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), no. 3, 527-553.

[Nn-6] ——, 2変数解析関数の値分布　数学　第 41 巻　第 2 号 1979　pp. 230-246.

[Oh-1] Ohsawa, T., *Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979), 853-870.

[Oh-2] ——, *On complete Kähler domains with C^1 -boundary,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **16** (1980), no. 3, 929-940.

[Oh-3] ——, *Analyticity of complements of complete Kähler domains,* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **56** (1980), no. 10, 484-487.

[Oh-4] ——, *On $H^{p,q}(X,B)$ of weakly 1-complete manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17** (1981), 113-126.

[Oh-5] ——, *A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q-convex Kähler manifolds*, Invent. Math. **63** (1981), 335-354. *Addendum'* Invent. Math. **66** (1982), 391-393.

[Oh-6] ——, *A Stein domain with smooth boundary which has a product structure,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), no. 3, 1185-1186.

[Oh-7] —, *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 1, 21-38.

[Oh-8] ——, *Global realization of strongly pseudoconvex CR manifolds,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 3, 599-605.

[Oh-9] ——,*Holomorphic embedding of compact s.p.c. manifolds into complex manifolds as real hypersurfaces,* Differential geometry of submanifolds (Kyoto, 1984), 64-76, Lecture Notes in Math., **1090**, Springer, Berlin, 1984.

[Oh-10] ——, *Completeness of noncompact analytic spaces,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 3, 683-692.

[Oh-11] ——, *On the rigidity of noncompact quotients of bounded symmetric domains,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), no. 5, 881-894.

[Oh-12] ——, 交叉 *cohomology* – L^2 理論と混合 *Hodge* 理論の交叉点*,* 数理解析研究所講究録 693 1989 pp.23-40.

[Oh-13] ——, *On the extension of L^2 holomorphic functions. III. Negligible weights,* Math. Z. **219** (1995), 215-225.

[Oh-14] ——, *Addendum to: "On the Bergman kernel of hyperconvex domains"* [Nagoya Math. J. **129** (1993), 43-52; MR1210002]. Nagoya Math. J. **137** (1995), 145-148.

[Oh-15] ——, *Pseudoconvex domains in $\mathbb{P}^n$: a question on the 1-convex boundary points* Analysis and geometry in several complex variables (Katata, 1997), 239-252, Trends Math., Birkhuser Boston, Boston, MA, 1999.

[Oh-16] ——, *On the extension of L^2 holomorphic functions V. Effect of generalization*, Nagoya Math J. **161** (2001), 1-21., Erratum: Nagoya Math. J. **163** (2001), 229.

[Oh-17] ——, *Analysis of several complex variables,* Translated from the Japanese by Shu Gilbert Nakamura. Translations of Mathematical Monographs, **211**. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xviii+121 pp.

[Oh-18] ——, *Hartogs type extension theorems on some domains in Kähler manifolds*, Ann. Polon. Math. **106** (2012), 243-254.

[Oh-19] ——, *Classification of real analytic Levi flat hypersurfaces of 1-concave type in Hopf surfaces,* Kyoto J. Math. **54** (2014), no. 3, 547-553.

[Oh-20] ——, L^2 上空移行の最近の様相 — 吹田予想の解決がもたらしたもの—, 数学 第 70 巻 第 2 号 2018 pp.184-203.

[Oh-21] ——, 多変数複素解析 増補版 現代数学の展開 岩波書店 2018.

[Oh-22] ——, L^2 *approaches in several complex variables. Towards the Oka-Cartan theory with precise bounds,* Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Tokyo, 2018. xi+258 pp.

[Oh-23] ——, L^2 *proof of Nishino's rigidity theorem,* to appear in Kyoto J. Math.

[Oh-24] ——, *Generalizations of theorems of Nishino and Hartogs by the* L^2 *method,* preprint.

[Oh-25] ——, *A role of the* L^2 *method in the study of analytic families,* to appear in Bousfield Classes and Ohkawa's Theorem — Nagoya, Japan, August 28-30, 2015, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer Japan.

[Oh-S] Ohsawa, T. and Sibony, N., *Bounded p.s.h. functions and pseudoconvexity in Kähler manifold,* Nagoya Math. J. **149** (1998), 1-8.

[Oh-T-1] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., *On the extension of* L^2 *holomorphic functions,* Math. Z. **195** (1987), no. 2, 197-204.

[Oh-T-2] ——, *Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains*, Math. Z. **197** (1988), 1-12.

[O-1] Oka, K., *Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles,* J. Sci. Hiroshima Univ. **6** (1936), 245-255.

[O-2] ——, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VI. Domaines pseudoconvexes*, Tôhoku Math. J. **49** (1942), 15-52.

[O-3] ——, *Sur quelques notions arithmétiques* Bull. Soc. Math. France **78**, (1950). 1-27.

[O-4] ——, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables IX. Domaines finis sans point critique intérieur*, Jap. J. Math. **23** (1953), 97-155.

[O-5] ——, *Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes,* Japanese J. of Math. **32** (1962), 1-12.

[Pn] Păun, M., *Siu's invariance of plurigenera: a one-tower proof,* J. Differential Geom. **76** (2007), no. 3, 485-493.

[Pw] Pawlaschyk, T. P., *On some classes of q-plurisubharmonic functions and q-pseudoconcave sets,* Thesis, Bergische Universität Wuppertal, 2015.

[P-1] Poincaré, H., *La valeur de la science,* 1905 (科学の価値 吉田洋一訳 岩波文庫 1977)

[P-2] ——, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques,* Annales École Normale Supérieur, III s., vol. **27** (1910), 55-108.

[P-3] ——, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques,* Situngsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft, vol. **10** (1911), 28-55.

[PP] Popescu-Pampu, P., *On the cohomology rings of holomorphically fillable manifolds,* Singularities II, 169-188, Contemp. Math., **475**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[Pv] Popovici, D., *L^2 extension for jets of holomorphic sections of a Hermitian line bundle,* Nagoya Math. J. **180** (2005), 1-34.

[Rd] Reider, I., *Vector bundles of rank* 2 *and linear systems on algebraic surfaces,* Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 2, 309316.

[SR] Saint-Raymond, J., *Fonctions séparément analytiques,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), no. 1, 79-101.

[Sa] Sakai, E., **Levi の問題** 数学 第 **11** 巻 **3** 号 日本数学会 (1959/60), 157-162.

[Sp] Seip, K., *Beurling type density theorems in the unit disk,* Invent. Math. **113** (1993), no. 1, 21-39.

[Sch] Schürmann, J. *Embeddings of Stein spaces into affine spaces of minimal dimension,* Math. Ann. **307** (1997), no. 3, 381-399.

[Sr] Serre, J.-P., *Un théorème de dualité,* Comment. Math. Helv. **29**, (1955), 9-26.

[S-1] Severi, F., *Sulla teoria degl'integrali semplici di* 1^a *specie appartenenti ad una superficie algebrica,* Rendiconti della Reale Academi Nazionale dei Lincei, s. V, vol. **XXX** (1921), seven notes: i) pp. 163-167; ii) pp. 204-208; iii) pp. 231-235; iv) pp. 276-280; v) 296-301; vi) pp. 328-332; vII) pp. 365-367.

[S-2] ——, *Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve,* Annali di Matematica, s. IV, vol. XXIII (1944), 149-181.

[Scb] Shcherbina, N., *Pluripolar graphs are holomorphic,* Acta Math. **194** (2005), no. 2, 203-216.

[Sm] Shimura, G., *Algebraic varieties without deformation and the Chow variety,* J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 336-341.

[Sc-1] Siciak, J., *On removability of L^2 holomorphic functions of several complex variables,* Prace matematyczno-fizyezne Wyzsza Szkota Inzynierska w Radomiu, 1982. pp-73-81.

[Sc-2] ——, *Extremal plurisubharmonic functions and capacities,* Sophia Kokyuroku in Math. **14** , Dept. Math. Sophia Univ. Tokyo 1982.

[Sc-3] ——, *Singular sets of separately analytic functions,* Complex analysis (Wuppertal, 1991), 278-286, Aspects Math., E**17**, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1991.

[Siu-1] Siu, Y.-T., *Pseudoconvexity and the problem of Levi,* Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 4, 481-512.

[Siu-2] ——, *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type,* Complex geometry (Gttingen, 2000), 223-277, Springer, Berlin, 2002.

[Siu-Y-1] Siu, Y.-T. and Yau, S.-T., *Complete Khler manifolds with nonpositive curvature of faster than quadratic decay,* Ann. of Math. (2) **105** (1977), no. 2, 225-264.

[Siu-Y-2] *Errata to the paper: "Complete Kähler manifolds with nonpositive curvature of faster than quadratic decay"* [Ann. of Math. (2)**105** (1977), no. 2, 225-264; MR 55 #10719]. Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 3, 621-623.

[Sw] Skwarczyński, M., A characterization of compact subsets of $\mathbb{C}$ with zero logarithmic capacity (in Polish) Typescript, 1979.

[St] Stein, K., *Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem,* Math. Ann. **123** (1951), 201-222.

[S-Y] Su, X.-Y. and Yang, X.-K., *Global generation and very ampleness for adjoint linear series,* arXiv:1606.02046v3 [math.AG]

[Su-1] Suita, N., *Capacities and kernels on Riemann surfaces,* Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 212-217.

[Su-2] ——, 近代関数論 **II,** 森北出版 **(POD 版)** 2011.

[Sz-1] Suzuki, M., *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace* $\mathbb{C}^2$*,* J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 241-257.

[Sz-2] ——, *Compactifications of* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ *and* $(\mathbb{C}^*)^2$, Tôhoku Math. J. **31** (1979), 453-468.

[Ty] Takayama, S., *Adjoint linear series on weakly 1-complete Kähler manifolds. I. Global projective embedding*, Math. Ann. **311** (1998), 501-531.

[Tg-1] Takegoshi, K., *A generalization of vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17** (1981), 311-330.

[Tg-2] ——, *Relative vanishing theorems in analytic spaces*, Duke Math. J. **52** (1985), 273-279.

[T-1] Takeuchi, A., *Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif*, J. Math. Soc. Japan **16**(1964), 159-181.

[T-2] ——, *Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 323-357.

[Ta] Takeuchi, Y., *A constraint on Chern classes of strictly pseudoconvex CR manifolds,* arXiv:1808.02209v1

[Ti-1] Tiba, Y., *The extension of holomorphic functions on a non-pluriharmonic locus,* arXiv:1706.01441v2

[Ti-2] ——, *Cohomology of vector bundles and non-pluriharmonic loci,* arXiv:1904.04437 [math.CV]

[U-1] Ueda, T., *Compactifications of* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ *and* $(\mathbb{C}^*)^2$*,* Tôhoku Math. J. **31** (1979), 81-90.

[U-2] ——, *On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle,* J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982/83), 583-607.

[V] Vesentini, E., *Osservazioni sulle strutture fibrate analitiche sopra una varietà kähleriana compatta. I, II,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)**23** (1957), 232-241. ; Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **24** (1958), 505-512.

[W] Witten E., *Supersymmetry and Morse theory,* J. Diff. Geom. **17** (1982), 661-692.

[Y-1] Yamaguchi, H., *Parabolicité d'une fonction entière,* J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 71-92.

[Y-2] ——, 複素およびベクトルポテンシャル論　数学　第 50 巻　第 3 号　pp. 225-247.

[Ym] Yamamori, A., *Yet another proof of Poincaré's theorem,* The American Mathematical Monthly, n.10 **122** (2015), 1003-1004.

[Y-Z] Ye, F. and Zhu, Z.-X., *On Fujita's freeness conjecture in dimension* 5*,* arXiv:1511.09154v1 [math.AG]

[Z-Z-1] Zhou, X.-Y. and Zhu, Z.-X., *Optimal* L^2 *extension of sections from subvarieties on weakly pseudoconvex manifolds,* arXiv. 1909.08820v1.

[Z-Z-2] ——, *Extension of cohomology classes and holomorphic sections defined on subvarieties,* arXiv. 1909.08822v1.