Lusternik-Schnirelmann カテゴリ数と A_∞ 構造

岩瀬　則夫

土器の制作に使われる粘土は、これて固められた塊からあるいは延ばされあるいはすぼめられて、制作者の思い通りの形に仕上げられる。　しかし取手はどうであろうか？　これは別の小さな粘土の塊を「くっつける」という操作を行わねばならない。あるいは注ぎ口はどうであろうか？　これは「穴を開ける」か、注ぎ口の下部を作った後にその上部にやはり別の粘土を「くっつける」といった操作を行わねばならない。

このように土器の制作は「延ばし」たり「すぼめ」たりといった連続的な変形を基に、取手や注ぎ口を付けるなどの形態的な変化が別の粘土の塊を「くっつける」という手術によって与えられると見なして良いようである。　では、作り上げたい造形物に対して、製作者は始めに粘土の塊を最少でいくつ用意すれば良いのであろうか？

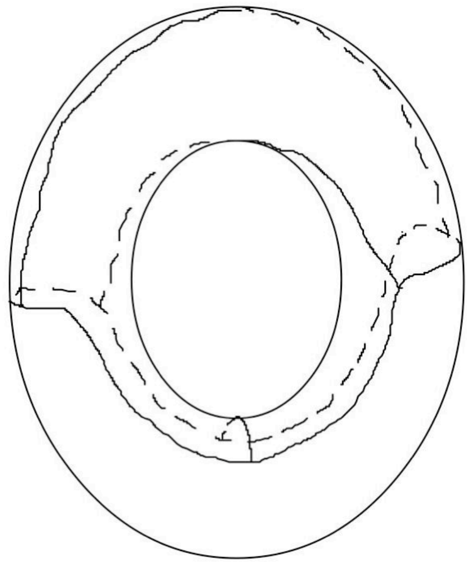

図１

すぐに分かるのは、最少数の上限が ⟨ホモトピー論的な次元⟩ ＋１で与えられることである。実際、厚みのついたトーラスを粘土で作るには三つの塊が必要である。　誤解を恐れずに言えば、⟨粘土の塊の最少数⟩ −１に対応する数学的な量が本講義の主題であるL-Sカテゴリ数であり、1997 年以降、これを評価する不変量に対して、非安定ホモトピー論、一般コホモロジー論、あるいは A_∞-構造に付随したスペクトル系列を用いた研究が進んでいる。

以下、第０章において、圏論・位相空間論からの用語を準備し、第１章でホモトピー論の基礎から幾つかのトピックを概説し、第２章において、ＬＳの猫たちやそれらの計算の話題に入り、第３章において空間の A_∞ 構造について概説し、また第４章において近年のＬＳ理論の発展のホトモピー論的な背景を解説したい。

第 0 章　　準備

0　圏論から

0.1　圏と双対圏

二つのクラス $\mathcal{O}$ と $\mathcal{M}$ の組 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ が圏であるとは次の四条件が成立することであり、クラス $\mathcal{O}$ の要素は圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の対象と呼ばれ $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}$ と、クラス $\mathcal{M}$ の要素は圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の射と呼ばれ $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}$ と表される：

(A1) 一意な対応 $I : \mathcal{O} \to \mathcal{M}$ が存在する。　-- 対象の恒等射

(A2) 二つの一意な対応 $S, T : \mathcal{M} \to \mathcal{O}$ が存在する。　-- 射の定義域と値域

(A3) 新たなクラス $\mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の二つの射 g, f の順序対 (g, f) で $S(g) = T(f)$ を満たすもの全体のなすクラスとするとき、一意な対応 $C : \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ が存在する。　-- 合成射

(A4)　(1) $SI(X) = TI(X) = X$ -- 対象 X の恒等射の定義域と値域は X 自身

(2) $SC(g, f) = S(f), TC(g, f) = T(g)$ -- $g \circ f$ の定義域は f の定義域で、値域は g の値域

(3) $C(f, IS(f)) = C(IT(f), f) = f$ -- 恒等射と合成射を作っても変わらない

(4) $C(h, C(g, f)) = C(C(h, g), f)$ -- 三つの射の合成射は、合成射の作り方によらない

(A5) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ のいかなる二つの対象 X, Y に対しても、対象 X を定義域とし対象 Y を値域とする射全体のなすクラス $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y)$ は集合である。　-- 局所小

注 0.1 圏 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}, \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}})$ に対して、$I_{\underline{\mathcal{C}}} = I, S_{\underline{\mathcal{C}}} = S, T_{\underline{\mathcal{C}}} = T, C_{\underline{\mathcal{C}}} = C$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の構造と呼ぶ。

与えられた圏 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}}), \mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}}))$ に対して、その構造 $I_{\underline{\mathcal{C}}}, S_{\underline{\mathcal{C}}}, T_{\underline{\mathcal{C}}}, C_{\underline{\mathcal{C}}}$ をとる。　そこで $\mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}}^o) = \mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}})$、$\mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}}^o) = \mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}})$ とし、その構造を $I_{\underline{\mathcal{C}}^o} = I_{\underline{\mathcal{C}}}, S_{\underline{\mathcal{C}}^o} = T_{\underline{\mathcal{C}}}, T_{\underline{\mathcal{C}}^o} = S_{\underline{\mathcal{C}}}, C_{\underline{\mathcal{C}}^o} = C_{\underline{\mathcal{C}}} \circ t$ とする。　ただし、$t : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}$ は $t(f, g) = (g, f)$ により与えられる対応である。

問題 0.2 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ に対して、$\underline{\mathcal{C}}^o$ も圏となることを示せ。　この圏 $\underline{\mathcal{C}}^o$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の双対圏という。

例えば $\mathcal{O}$ を集合全体のクラス、$\mathcal{M}$ を写像全体のクラスをとれば、それらの組は圏をなす。ここではこれを集合の圏と呼び記号 $\underline{\mathcal{S}}$ で表し、弱 Hausdorff 空間と連続写像のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{T}}$ で表し、また群と準同型のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{G}}$ で、さらにアーベル群と準同型のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{A}}$ で表す。

問題 0.3 圏 $\underline{\mathcal{S}}, \underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{A}}$ が実際に圏をなすことを示せ。

0.2　おはなし (集合とクラス)

［ラッセルの逆理］　例えば自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の要素は自然数だけであり、当然

$$0.5 \notin \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{N}, \quad \pi \notin \mathbb{N}, \quad 1 \in \mathbb{N}, \quad 2 \in \mathbb{N}, \quad 3 \in \mathbb{N}, \quad \cdots$$

が成立する。　さて、Cantor により「自然数」と同等の実在性を持つという「集合」の一つである $\mathbb{N}$ に対しても同様に考えれば、自然数の「集合」はもちろん「自然数」という「数」ではないから

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$$

である (これも当然)。　そこで、このように自分自身を要素に持たない集合を『良い集合』と呼ぶことにする。　さらに『良い集合』全体の集合を $\mathbf{U}$ とすると、上のことから

$$\mathbb{N} \in \mathbf{U}$$

となる。　さてこの集合 $\mathbf{U}$ は『良い集合』であろうか？

(1)　集合 $\mathbf{U}$ が『良い集合』であるとすると、$\mathbf{U}$ は『良い集合』全体の中の一つの要素である。
これを式で表すと

$$\mathbf{U} \in \mathbf{U}$$

である。　しかしこの式は $\mathbf{U}$ が『良い集合』でないことを意味する。　$\cdots$　矛盾

(2)　集合 $\mathbf{U}$ が『良い集合』でないとすると、$\mathbf{U}$ は『良い集合』全体の中の要素ではない。
これを式で表すと

$$\mathbf{U} \notin \mathbf{U}$$

である。　しかしこの式は $\mathbf{U}$ が『良い集合』であることを意味する。　$\cdots$　矛盾

ベルナイスとゲーデルは『集まり』の中に、宇宙のようにすべてを包含して、その外側を考えることができないほど巨大な存在 − 数学的にはいかなる『集まり』の要素にもなりえないほど巨大な存在 − がある事を認め、(なんらかの『集まり』の要素となりえる)「集合」とあわせて「クラス」と呼び、集合より広い概念とした：　例えば上記のラッセルの逆理に現れる『集まり』U は実はすべての集合の集まりになるが、そのように巨大な集まりはベルナイス・ゲーデルの意味での「クラス」にはなるが、「集合」にはならない。

従って上記の逆理は、クラスを集合のように取り扱った為におきたと考えられる。

注 0.4 対象の全体と射の全体の集まりがともに集合であるような圏を「小圏」ということがある。

0.3　関手と自然変換

二つの圏 $\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{D}}$ に対して、 二つの対応 $F_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{D}}}, F_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}$ の組 $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}}) : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ が共変関手であるとは、 次の三条件が成立することである：

(B1) $F_{\mathcal{M}}(I_{\underline{\mathcal{C}}}(X)) = I_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X))$ -- 対象 X の恒等射の像は恒等射

(B2)　(1) $F_{\mathcal{O}}(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = S_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ -- 射 f の定義域の像は射 f の像の定義域

(2) $F_{\mathcal{O}}(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = T_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ -- 射 f の値域の像は射 f の像の値域

(B3) $F_{\mathcal{M}}(g \circ f) = F_{\mathcal{M}}(g) \circ F_{\mathcal{M}}(f)$ -- 射 g, f の合成射の像は射 g, f の像の合成射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \quad => \quad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, "F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)"] & \\ F(Y) \arrow[r, "F(g)"'] & F(Z) \end{tikzcd}$$

同様に次の三条件が成立するとき、 $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}}) : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ を反変関手と呼ぶ：

(B1^o) $F_{\mathcal{M}}(I_{\underline{\mathcal{C}}}(X)) = I_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X))$ -- 対象 X の恒等射の像は恒等射

(B2^o)　(1) $F_{\mathcal{O}}(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = T_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ -- 射 f の定義域の像は射 f の像の値域

(2) $F_{\mathcal{O}}(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = S_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ -- 射 f の値域の像は射 f の像の定義域

(B3^o) $F_{\mathcal{M}}(g \circ f) = F_{\mathcal{M}}(f) \circ F_{\mathcal{M}}(g)$ -- 射 g, f の合成射の像は射 f, g の像の合成射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \quad => \quad \begin{tikzcd} F(X) & \\ F(Y) \arrow[u, "F(f)"] & F(Z) \arrow[l, "F(g)"] \arrow[ul, "F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)"'] \end{tikzcd}$$

例えばホモロジー群は圏 $\underline{\mathcal{T}}$ から圏 $\underline{\mathcal{A}}$ への共変関手であり、 コホモロジー群は反変関手である。また自然な忘却関手 $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{S}}} = 1_{\underline{\mathcal{S}}} : \underline{\mathcal{S}} \to \underline{\mathcal{S}}, \mathcal{E}^{\underline{\mathcal{T}}} : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathcal{S}}, \mathcal{E}^{\underline{\mathcal{G}}} : \underline{\mathcal{G}} \to \underline{\mathcal{S}}, \mathcal{E}^{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{S}}$ は共変関手である。

定義 0.5 特に $F_{\mathcal{O}}$ が単射であるとき、 関手 F を忠実 (faithful) と呼ぶ。

問題 0.6 反変関手 $F : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ は自然に双対圏 $\underline{\mathcal{C}}^o$ から圏 $\underline{\mathcal{D}}$ への共変関手と見なせることを示せ。

問題 0.7 対象$X, Y \in \underline{\mathcal{C}}$ に対して集合 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y)$ を対応させ、 関手 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} : \underline{\mathcal{C}}^o \times \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{S}}$ を定義せよ。

関手 $F, G : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ に対し、自然変換 $\Phi : F \to G$ とは次を満たす対応 $\Phi : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}$ である：

(C1) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の対象 X に対して、$S(\Phi(X)) = F(X)$ かつ$T(\Phi(X)) = G(X)$ が成立する。

(C2) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の射 f に対して、$C_{\underline{\mathcal{D}}}(\Phi(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f)), F(f)) = C_{\underline{\mathcal{D}}}(G(f), \Phi(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f))$ が成立する。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "=>"] & F(X) \arrow[r, "\Phi(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
Y & {} & F(Y) \arrow[r, "\Phi(Y)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

注 0.8 関手 F, G は、自然変換 $\Phi : F \to G$ で $\Phi(X)$ が常に同型となるものが存在するとき自然同値であると呼ばれる。　またこのような Φ が自然同値と呼ばれることもある。

定義 0.9 関手 $F : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ が関手 $G : \underline{\mathcal{D}} \to \underline{\mathcal{C}}$ の右随伴関手とは $\underline{\mathcal{D}}^o \times \underline{\mathcal{C}}$ から $\underline{\mathcal{S}}$ への関手 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(G(X), Y)$ と $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(X, F(Y))$ が自然同値であることである。　また関手 G は関手 F の左随伴関手と呼ばれる。

0.4 豊穣圏・強化された圏 (enriched category)

合成射をつくる写像 $C_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y, Z) : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y, Z) \times \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y) \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Z)$ は、対応 $C_{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}$ と同一視できる。　直積を持つ圏 $\underline{\mathcal{R}}$ と直積を保つ共変関手 $\mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ に対して、圏$\underline{\mathcal{C}}$ が$\mathcal{E}^{\mathcal{R}}$ で $\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏 (豊穣圏) であるとは次の条件が成立することである：

(A5) 対応 $\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{R}}}$ と対応 $C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次を満たす。

(1) $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} = \mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}} \circ \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}, C_{\underline{\mathcal{C}}} = \mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}} \circ C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ かつ $C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y, Z) : \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y, Z) \times \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y) \to \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Z)$

(2) $C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y, Z)(h, C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Z, W)(g, f)) = C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y, W)(C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y, Z, W)(h, g), f)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{R}}} \arrow[d, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}"] \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \arrow[ur, "\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}"] \arrow[r, "\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}"'] & \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{S}}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}} \arrow[d, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}"] \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \arrow[ur, "C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}"] \arrow[r, "C_{\underline{\mathcal{C}}}"'] & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}
\end{tikzcd}
$$

ここで、$\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏は、$\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ や $C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ を忘れると通常の圏と見なせることを注意する。

注 0.10 忘却関手 $\mathcal{E}^{\mathcal{T}} : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で位相空間の圏 $\underline{\mathcal{T}}$ まで強化された圏は、位相圏と呼ばれる。

問題 0.11 アーベル群の圏 $\underline{\mathcal{A}}$ は$\mathcal{E}^{\mathcal{A}} : \underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{A}}$ まで強化された圏であることを示せ。

ところで、位相空間の圏 $\underline{\mathcal{T}}$ は自明なもの以上に強化はできないのであろうか？

次に圏 $\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{D}}$ が $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏のとき、その間の関手には、いかなる条件が付随すべきであろうか？　まず $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}})$ が通常の意味で圏 $\underline{\mathcal{C}}$ から圏 $\underline{\mathcal{D}}$ への共変関手であったとする。　このとき、圏 $\underline{\mathcal{C}}$ のいかなる二つの対象 X, Y に対しても、$F_{\mathcal{M}}$ は写像 $F_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y))$ を誘導し、対応 $F_{\mathcal{M}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}$ を与える。さて F が、$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で強化された構造を保つ共変関手であるとは、次の条件を満たすこととする：

(B4) 対応 $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次が成立する。

(1) $F_{\mathcal{M}} = \mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}} \circ F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}$ かつ $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y))$

(2) $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Z)(C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z)(g,f)) = C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(Z))(F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(Y,Z)(g), F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y)(f)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[r, "F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y)"] \arrow[d, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"'] & \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y)) \arrow[d, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"] & \text{in } \underline{\mathcal{R}} \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \ni (X,Y) \arrow[ur, dotted, "F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, dotted, "F_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}} & & \\
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[r, "F_{\mathcal{M}}(X,Y)"'] & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y)) & \text{in } \underline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}
$$

同様に $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}})$ が通常の意味で圏 $\underline{\mathcal{C}}$ から圏 $\underline{\mathcal{D}}$ への反変関手であったとする。　このとき、圏 $\underline{\mathcal{C}}$ のいかなる二つの対象 X, Y に対しても、$F_{\mathcal{M}}$ は写像 $F_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(X))$ を誘導し、対応 $F_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}} \circ (F_{\mathcal{O}} \times F_{\mathcal{O}}) \circ \tau$ を与える。　ただし、$\tau(X,Y) = (Y,X)$ である。さて F が、$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で強化された構造を保つ反変関手であるとは、次の条件を満たすこととする：

(B4^o) 対応 $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次が成立する。

(1) $F_{\mathcal{M}} = \mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}} \circ F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}$ かつ $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(X))$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[r, "F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y)"] \arrow[d, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"'] & \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(X)) \arrow[d, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"] & \text{in } \underline{\mathcal{R}} \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \ni (X,Y) \arrow[ur, dotted, "F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, dotted, "F_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}} & & \\
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[r, "F_{\mathcal{M}}(X,Y)"'] & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(X)) & \text{in } \underline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}
$$

特に強化された構造を保つ反変関手は、双対圏からの強化された構造を保つ共変関手とみなせる。

問題 0.12 強化された構造を保つ関手の間の強化された構造を保つ自然変換の定義を与えよ。

0.5 番外・強 n–圏 (strict n–category)

高次に強化された圏として、いわゆる『n–圏』を捉えることができる。　まず言葉の準備をする：

定義 0.13 小論では$\mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で強化された小圏全体のなす圏を $\underline{\mathit{Cat}(\mathcal{E}^{\mathcal{R}})}$ で表すことにする。

例えば、小圏全体のなす圏は $\underline{\mathit{Cat}} = \underline{\mathit{Cat}(1_{\mathcal{S}})}$ である。　さて、次の二つの補題を用意する：

補題 0.14 直積を保つ関手 $\mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で強化された二つの小圏 $\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{D}}$ をとり、それらの強化された構造を各々 $\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}, \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{D}}}$ とする。　このとき、$\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}\times\underline{\mathcal{D}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{D}}} \to \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{R}}}$ を $\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}\times\underline{\mathcal{D}}}((X,Y),(X',Y')) = \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,X')\times\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{D}}}(Y,Y')$ によって定めると、直積圏 $\underline{\mathcal{C}}\times\underline{\mathcal{D}}$ は $\mathcal{E}^{\mathcal{R}}$ で強化された圏となる。　従って、$\underline{\mathit{Cat}(\mathcal{E}^{\mathcal{R}})}$ は圏論的な意味での直積を持つ圏となり、$\underline{\mathit{Cat}}$ への忘却関手は直積を保つ関手となる。

問題 0.15 上の補題に証明を与えよ。

補題 0.16 直積を保つ二つの関手 $\mathcal{E}(\underline{\mathcal{S}'}) : \underline{\mathcal{S}'} \to \underline{\mathcal{R}}, \mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$に対して、$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{S}'}} = \mathcal{E}^{\mathcal{R}}\circ\mathcal{E}(\underline{\mathcal{S}'})$ で強化された圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の強化された構造を $\mathcal{M}^{\mathcal{S}'}_{\underline{\mathcal{C}}}$ とする。　このとき、$\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}} = \mathcal{E}(\underline{\mathcal{S}'})_{\mathcal{O}}\circ\mathcal{M}^{\mathcal{S}'}_{\underline{\mathcal{C}}}$ は、$\underline{\mathcal{C}}$ の $\mathcal{E}^{\mathcal{R}}$ で強化された構造を与え、$\mathcal{E}(\underline{\mathcal{R}'})$ は関手 $\mathcal{E}(\underline{\mathcal{R}'})_{\#} : \underline{\mathit{Cat}(\mathcal{E}^{\mathcal{R}'})} \to \underline{\mathit{Cat}(\mathcal{E}^{\mathcal{R}})}$ を誘導する。

問題 0.17 上の補題に証明を与えよ。

さて普遍強 n–圏 $\underline{\mathit{Cat}(n)}$ と忘却関手 $\mathcal{E}(n) : \underline{\mathit{Cat}(n)} \to \underline{\mathit{Cat}(n{-}1)}$ を次のように帰納的に与える：

(S1) 普遍強 0–圏 $\underline{\mathit{Cat}(0)}$ とは、集合の圏 $\underline{\mathcal{S}}$ のことであり、$\mathcal{E}(0) = 1_{\underline{\mathcal{S}}} : \underline{\mathit{Cat}(0)} \to \underline{\mathcal{S}}$ とする。

(S2) 普遍強 n–圏 $\underline{\mathit{Cat}(n)}$ と忘却関手 $\mathcal{E}(n) : \underline{\mathit{Cat}(n)} \to \underline{\mathit{Cat}(n{-}1)}$ が与えられているとき

(1) 集合の圏への忘却関手を $\mathcal{E}^{\underline{\mathit{Cat}(n)}} = \mathcal{E}(0)\circ\cdots\circ\mathcal{E}(n) : \underline{\mathit{Cat}(n)} \to \underline{\mathcal{S}}$ で定義する。

(2) 普遍強 $n{+}1$–圏を、$\underline{\mathit{Cat}(n{+}1)} = \underline{\mathit{Cat}(\mathcal{E}^{\mathit{Cat}(n)})}$ で定義する。

(3) 普遍強 n–圏 $\underline{\mathit{Cat}(n)}$ への忘却関手を、$\mathcal{E}(n{+}1) = \mathcal{E}(n)_{\#}$ で定義する。

定義 0.18 集合の圏への忘却関手 $\mathcal{E}^{\underline{\mathit{Cat}(n-1)}} : \underline{\mathit{Cat}(n{-}1)} \to \underline{\mathcal{S}}$ で強化された圏を強 n–圏と呼ぶ。

さらにこれらの無限系列を考えることもできる：

(S4) 強 ∞–小圏（強 ω–小圏）とは、強化された小圏の系列 $\{\underline{\mathcal{C}}_n \in \underline{\mathit{Cat}(n)}; n \geq 1\}$ であって、$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(n)(\underline{\mathcal{C}}_n) = \underline{\mathcal{C}}_n$ を満たすものである。　ただし、$\mathcal{E}(n) = (\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(n), \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(n))$ は忘却関手である。

(S5) 普遍強 ∞-圏 (普遍強 ω-圏) $\underline{Cat(\omega)}$ とは、強 ∞-小圏 (強 ω-小圏) 全体のなす圏である。

1　位相空間論から

1.1　位相空間の基礎

集合 X に対し、次の公理系を満たす部分集合族 $Top(X)$ (開集合族) が与えられているとき、組 $(X, Top(X))$ を単に X で表し、位相空間と呼ぶ。

(T1) $\emptyset \in Top(X)$ かつ $X \in Top(X)$ である。

(T2) $Top(X)$ の任意の有限部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in Top(X)$ である。

(T3) $Top(X)$ の任意の部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in Top(X)$ である。

位相空間 X に対して、次の条件を満たす部分集合族 $\mathcal{U}$ を X の「準開基」と呼ぶ。

(準開基) 任意の点 $x \in X$ と任意の開集合 $O \subseteq X$ に対して $x \in O$ ならば、$\mathcal{U}$ の有限部分族 $\{U_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ が存在して $x \in \bigcap_\lambda U_\lambda \subseteq O$ を満たす。

また部分集合と (同値関係 $\sim$ による) 商集合の位相は次のように与えられる。

(相対位相) $A \overset{i}{\hookrightarrow} i(A) \subseteq X$ のとき、位相 $Top(A) = \{i^{-1}(O)\,|\,O \in Top(X)\}$ を A に導入する。

(等化位相) $Y \overset{p}{\twoheadrightarrow} Y/\sim = B$ のとき、位相 $Top(B) = \{O\,|\,p^{-1}(O) \in Top(Y)\}$ を B に導入する。

また $K \subseteq X$ がコンパクトとは、次の性質が満たされることである：

(コンパクト) $Top(X)$ の任意の部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し、$K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ ならば Λ の有限部分集合 $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ で $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}$ を満たすものが取れる。

さて、位相空間には様々な分離公理が考えられるが、ここでは次の弱 Hausdorff 性を採用する：

(弱 Hausdorff) 任意のコンパクト部分集合は (閉かつ) 相対位相に関して Hausdorff である。

さらに、空間 X から Y への連続写像の全体 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{T}}}(X,Y)$ に位相を導入し、$\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{T}}}^{\mathcal{T}}(X,Y)$ で表す：

(CO) 部分集合族 $\mathcal{U} = \{W(C,O) \subseteq \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{T}}}(X,Y)\,;\,C$ は X のコンパクト集合で O は Y の開集合$\}$ を $W(C,O) = \{f : X \to Y\,;\,f(C) \subseteq U\}$ により定め、$\mathcal{U}$ を準開基とする位相を導入する。

問題 1.1 $X \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし、$Y = \mathbb{R}^m$ とするとき、上の compact-open 位相が sup ノルムによる位相に一致することを示せ。

問題 1.2 コンパクトな位相空間から弱 Hausdorff 空間への全単射は同相写像であることを示せ。

1.2 コンパクト生成空間

すべての弱 Hausdorff 空間は、コンパクト生成位相を持つものにコンパクト集合族を変更せずに取り換えることができ、従って、この変更でホモトピー群や(コ)ホモロジー群は不変に保たれる。

定義 1.3 弱 Hausdorff 空間 X がコンパクト生成であるとは、次の条件が満たされることである。

(CG) 位相空間 X の部分集合 A が閉集合である為には、任意のコンパクト集合 C に対して $A \cap C$ がコンパクトであることが必要十分である。

コンパクト生成空間は k-space とも呼ばれ、よく知られているように、任意のコンパクト集合が閉集合となる。 ここでは (弱 Hausdorff) コンパクト生成空間と連続写像のなす圏を $\underline{\mathcal{K}}$ で表す。

問題 1.4 (1) 局所コンパクトな弱 Hausdorff 空間がコンパクト生成空間であることを示せ。

(2) 第一加算公理を満たす Hausdorff 空間はコンパクト生成空間であることを示せ。 特に距離空間はコンパクト生成空間である。

さて、前節の compact-open 位相により写像空間はめでたく位相空間 $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X,Y)$ となり、圏 $\underline{\mathcal{T}}$ は $\mathcal{E}^{\mathcal{T}} : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{T}}$ まで強化されたのだが、残念ながらこのままでは圏論的には良い構造とは言えない: 例えば $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X, \mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(Y,Z))$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X \times_{\underline{\mathcal{T}}} Y, Z)$ は同相になるとは限らない。 ただし、$X \times_{\underline{\mathcal{T}}} Y$ は直積集合 $X \times Y$ に通常の直積位相により位相空間の構造を入れたものである。 つまり、写像空間を作る関手と直積をとる関手が随伴関手にならないという致命的な欠陥を持つ。

定義 1.5 共変関手 $c : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathcal{K}}$ を次で定める:

(1) $X = (X, Top(X))$ に対して $c(X) = (X, \widehat{Top(X)})$ とする。 ただし

(2) $O \in \widehat{Top(X)} \iff$ 任意のコンパクト集合 C に対して $(X \smallsetminus O) \cap C$ はまたコンパクトである。

このとき、$f : \underline{\mathcal{K}} \to \underline{\mathcal{T}}$ を忘却関手、$k = f \circ c$ として次の命題 (証明しない) が成立する。

命題 1.6 (1) 弱 Hausdorff 空間 X がコンパクト生成なら、$k(X) = X$ である。

(2) 任意の弱 Hausdorff 空間 X に対して、 $k(X)$ はコンパクト生成空間である。

(3) コンパクト生成空間 X, Y に対して $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y) = c(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(f(X), f(Y)))$ とおくと、 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ は忘却関手 $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{K}}} : \underline{\mathcal{K}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{K}}$ まで強化された圏となる。

(4) 任意のコンパクト生成空間 X と弱 Hausdorff 空間 Y に対して、$\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, c(Y))$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(f(X), Y)$ は自然に同相となる。　従って、 関手 c は関手 f の右随伴関手である。

次に、 直積は $X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y = c(f(X) \times_{\underline{\mathcal{T}}} f(Y))$ と $g \times_{\underline{\mathcal{K}}} h = c(f(g) \times_{\underline{\mathcal{T}}} f(h))$ により定義され次を満たす。

命題 1.7　(1) 直積空間 $X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y$ は、 圏論的な意味での圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での 「直積」 を与える。

(2) 自然な同相により、 直積空間 $X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y$ は可換かつ結合的と見なせる。

(3) 任意の局所コンパクトな Hausdorff 空間と任意のコンパクト生成空間に対して、 $X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y$ は通常の直積空間 $X \times_{\underline{\mathcal{T}}} Y$ に一致する。

圏 $\underline{\mathcal{K}}$ において、 $i : A \to X$ が 「中への同相」 とは、 「i が単射かつ X から定まる A の相対位相がコンパクト生成空間 A の位相と一致」 することである。　また $p : Y \twoheadrightarrow B$ が 「商写像」 とは、 「p が全射かつ Y から定まる B の等化位相がコンパクト生成空間 B の位相と一致」 することである。

命題 1.8　(1) コンパクト生成空間の閉集合や正則開集合の包含写像は、 中への同相である。

(2) コンパクト生成空間 Y からの全射 $p : Y \to B$ が任意のコンパクト集合 $C \subseteq Y$ に対して $p^{-1}(p(C))$ を Y の閉集合とすれば、 p は商写像となる。

(3) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での中への同相 $i : A \to X, i' : A' \to X'$に対し、 $i \times_{\underline{\mathcal{K}}} i' : A \times_{\underline{\mathcal{K}}} A' \to X \times_{\underline{\mathcal{K}}} X'$ もそうなる。

(4) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での商写像 $p : Y \twoheadrightarrow B, p' : Y' \twoheadrightarrow B'$ に対し、 $p \times_{\underline{\mathcal{K}}} p' : Y \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y' \twoheadrightarrow B \times_{\underline{\mathcal{K}}} B'$ もそうなる。

最後に、 写像空間と直積の関係 ・ 指数法則に話を戻す。

命題 1.9　(1) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中では、 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, Y \times_{\underline{\mathcal{K}}} Z)$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y) \times_{\underline{\mathcal{K}}} \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Z)$ は自然に同相である。

(2) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中では、 代入写像 $e : \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y) \times_{\underline{\mathcal{K}}} X \to Y$ $(e(f,x) = f(x))$ は常に連続である。

(3) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中では、 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y, Z)$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(Y,Z))$ は自然に同相である。

系 1.9.1 関手 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(Y, \ \ )$ は関手 $(\ \ ) \times Y$ の右随伴関手である。

コンパクト生成空間の系統的な解説と上記の各命題の証明は、MacLane [94], Whitehead [146], Hirashima [57] 等を参照されたい。　ただし、[94], [146] は弱 Hausdorff ではなく、Hausdorff の枠組みを用いているが、その証明はそのままで、弱 Hausdorff のみを仮定したものに置き換えられる。

これ以後特に断らない限り、コンパクト生成空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の枠組みの下で講義を進め、紛れの恐れの無い場合には $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}}^{\underline{\mathcal{K}}}$ を $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}}$ あるいは $\mathcal{M}$ と、また $\times_{\underline{\mathcal{K}}}$ を $\times$ と略記することがある。

1.3　連続写像の構成

分かりやすい場所で与えられた連続写像から新たな連続写像を構成することを考える。

閉部分集合有限個の和集合で表される場合：$X=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$ で、F_i が X の閉集合であったとする。対応 $f: X\to Y$ が有限個の写像の族 $f_i: F_i\to Y$ を用いて $f|_{F_i}=f_i$ により定義されるとき、f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の i,j に対して「$f_i|_{F_i\cap F_j}=f_j|_{F_i\cap F_j}$」が成立し、$f$ は一意となる。

(2) 任意の i に対して、写像 f_i は連続である。

開部分集合の和集合で表される場合：対応 $f: X\to Y$ が写像の族 $f_\lambda: U_\lambda\to Y$ を用いて $f|_{U_\lambda}=f_\lambda$ により定義されるとき、f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の λ,μ に対して「$f_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu}=f_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}$」が成立し、$f$ は一意となる。

(2) 任意の λ に対して、写像 f_λ は連続である。

商空間である場合：商写像 $p:\widetilde{X}\twoheadrightarrow X$ に対し、対応 $f: X\to Y$ が写像 $\widetilde{f}:\widetilde{X}\to Y$ を用いて $f\circ p=\widetilde{f}$ により定義されるとき、対応 f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の $a,b\in\widetilde{X}$ に対して「$p(a)=p(b)\implies\widetilde{f}(a)=\widetilde{f}(b)$」が成立し、$f$ は一意となる。

(2) 合成写像 $f\circ p:\widetilde{X}\to Y$ は連続である。

1.4　直積と対角線写像

二つの空間 X,Y の直積 $X\times Y$ は次の性質を持つ。

命題 1.10　(1) 自然な同相 $X\times\{*\}\approx X\approx\{*\}\times X$ が存在する。　ただし、記号 $\approx$ は同相を表す。

(2) 自然な同相 $(X\times Y)\times Z\approx X\times(Y\times Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X\times Y\approx Y\times X$ が存在する。

そこで、例えば $X_1,...,X_n$ の直積は括弧の付け方を区別せず $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ あるいは $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}X_i$ などと表す。 特に$X_1=\cdots=X_n=X$のとき、$\displaystyle\prod_{i=1}^{n}X_i$ を $\displaystyle\prod^{n}X$ などと表すことがある。

定義 1.11 次で与えられる連続写像を空間 X の対角線写像と呼ぶ。

(対角線写像) 式 $\Delta^X(x)=(x,x)$ で写像 $\Delta=\Delta^X:X\to X\times X$ を定義する。

(多重対角線写像) 写像 $\Delta_n=\Delta^X_n:X\to\displaystyle\prod^{n}X$ を次式で帰納的に定義する。

(1) $\Delta^X_2=\Delta^X$　　(2) $\Delta^X_{i+1}=(\Delta^X_i\times 1_X)\circ\Delta^X:X\to X\times X\to(\displaystyle\prod^{i}X)\times X=\prod^{i+1}X$

また無限個の空間族 $\{X_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ に対し $\mathcal{F}(\Lambda)=\{\Lambda_0|\Lambda_0$ は Λ の有限部分集合$\}$ とし、次で無限直積を定める：

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\operatorname*{proj\,lim}_{\Lambda_0\in\mathcal{F}(\Lambda)}\prod_{\lambda\in\Lambda_0}X_\lambda$$

ここで、無限集合 Λ に対する逆極限 $X=\operatorname{inj\,lim}_{\Lambda_0\in\mathcal{F}(\Lambda)}\prod_{\lambda\in\Lambda_0}X_\lambda$ とは、集合としての逆極限に弱位相をいれたものとする。 すなわち、全ての $\alpha\in\Lambda$ に対して自然な射影 $\pi_\alpha:X\to X_\alpha$ が商写像になる最も弱い位相を入れる。

1.5 位相和と折重ね写像

この E の中では X,Y が共通部分を持つ可能性があるが、これを分離し共通部分が無い状態での和集合 (位相和) を定義する。 これは直積の双対的な概念を与えるものである。

定義 1.12 空間 X,Y に対して、$X\amalg Y=X\times\{0\}\cup Y\times\{1\}\subseteq W\times\{0,1\}$ という形の部分空間 $X\amalg Y$ を位相和と呼ぶ。 ただし、集合 $\{0,1\}$ は離散位相によりコンパクト生成空間とみなす。

このとき、直積と同様に次の性質が導かれる。

命題 1.13　(1) 自然な同相 $X\amalg\emptyset\approx X\approx\emptyset\amalg X$ が存在する。

(2) 自然な同相 $(X\amalg Y)\amalg Z\approx X\amalg(Y\amalg Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X\amalg Y\approx Y\amalg X$ が存在する。

そこで、例えば $X_1, X_2, ..., X_n$ の位相和は括弧の付け方を区別せず $X_1 \amalg X_2 \amalg \cdots \amalg X_n$ あるいは $\coprod_{i=1}^{n} X_i$ などと表す。 特に $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ のとき、$\coprod_{i=1}^{n} X_i$ を $\coprod^{n} X$ などと表すことがある。

定義 1.14 次で与えられる連続写像を空間 X の折重ね写像と呼ぶ。

（折重ね写像） 式 $\nabla^X(x,t) = x$ で写像 $\nabla = \nabla^X : X \amalg X = X \times \{1,2\} \to X$ を定義する。

（多重折重ね写像） 写像 $\nabla_n = \nabla_n^X : \coprod^{n} X \to X$ を次式で帰納的に定義する。

(1) $\nabla_2^X = \nabla^X$ (2) $\nabla_{i+1}^X = \nabla^X \circ (\nabla_i^X \amalg 1_X) : \coprod^{i+1} X = (\coprod^{i} X) \amalg X \to X \amalg X \to X$

また無限個の空間族 $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対し $\mathcal{F}(\Lambda) = \{\Lambda_0 | \Lambda_0$ は Λ の有限部分集合$\}$ とし、次で無限位相和を定める：

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \operatorname*{inj\,lim}_{\Lambda_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)} \coprod_{\lambda \in \Lambda_0} X_\lambda$$

1.6 空間の結 (join)

さて、ユークリッド空間内の空でない二つの図形 $X_0 \subseteq E_0, X_1 \subseteq E_1$ を $E = E_0 \times \mathbb{R} \times E_1$に次のように埋め込むことで、$X_0, X_1$ を E の中の (一般の位置にある) 図形と考えることができる：

$$X_0 \subseteq E_0 \approx E_0 \times \{0\} \times \{0\} \subseteq E_0 \times \mathbb{R} \times E_1 = E,$$

$$X_1 \subseteq E_1 \approx \{0\} \times \{1\} \times E_1 \subseteq E_0 \times \mathbb{R} \times E_1 = E.$$

このとき、次の様に定義されるユークリッド空間 E 内の図形 $X_0 * X_1$ を X_0, X_1 の「結」と呼ぶ。

$$X_0 * X_1 = \{tx + (1-t)y \in E \mid x \in X_0, y \in X_1, 0 \leq t \leq 1\}$$

ここで、標準 n–単体と呼ばれるコンパクトな凸集合 $\mathbf{\Delta}^n$ の定義を思い出してみよう。

定義 1.15 $\mathbf{\Delta}^n = \left\{ (t_0, \cdots, t_n) \in [0,1]^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$

問題 1.16 $\mathbf{\Delta}^n$ は $\mathbf{\Delta}^{n-1}$ と一点との結に同相であることを示せ。

一般の空間 X_0, X_1 に対して、次の様に定義される空間 $X_0 * X_1$ を X_0, X_1 の「結」と呼ぶ。

$$X_0 * X_1 = (X_0 \amalg \mathbf{\Delta}^1 \times X_0 \times X_1 \amalg X_1) / \sim_{join}, \tag{1.1}$$

ただし、 $\sim_{join}$ は次の関係で生成される同値関係である：

$$X_0 \ni x_0 \sim_{join} (1,0;x_0,x_1) \in \mathbf{\Delta}^1 \times X_0 \times X_1, \qquad X_1 \ni x_1 \sim_{join} (0,1;x_0,x_1) \in \mathbf{\Delta}^1 \times X_0 \times X_1.$$

問題 1.17 ユークリッド空間内の空でない二つの図形 $X_0 \subseteq E_0, X_1 \subseteq E_1$ に対して、 上の二種類の結の定義が同相な空間を定めることを確かめよ。

さて、 $n+1$ 個の空間 $X_0,...,X_n$ に対し次の空間 $X_0 * \cdots * X_n = \mathop{*}_{i=0}^{n} X_i$ を$X_0,...,X_n$の 「結」 と呼ぶ：

$$X_0 * \cdots * X_n = (\mathbf{\Delta}^n \times X_0 \times \cdots \times X_n \amalg \coprod_{i=0}^{n} E_i)/ \sim_{mjoin}, \quad E_i = X_0 * \cdots * X_{i-1} * X_{i+1} * \cdots * X_n.$$

ただし、 $\sim_{mjoin}$ は次の $n+1$ 個の関係で生成される同値関係である：

$$(t_0,...,t_{i-1},0,t_{i+1},...,t_n;x_0,...,x_n) \sim_{mjoin} [t_0,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_n;x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n] \in E_i.$$

ただし、 i は $0 \leq i \leq n$ の範囲を動く。　このとき、 空間の結 $X_0 * X_1$ は次の性質を持つ。

命題 1.18　(1) 自然な同相 $\emptyset * X \approx X \approx X * \emptyset$ が存在する。

(2) X_0, X_1, X_2 が全て空でないとき、 自然な同相 $(X_0 * X_1) * X_2 \approx X_0 * (X_1 * X_2)$ が存在する。

(3) X_0, X_1 が共に空でないとき、 自然な同相 $X_0 * X_1 \approx X_1 * X_0$ が存在する。

問題 1.19 $X_0,...,X_n$ が全て空でないとき、 自然な同相 $X_0 * \cdots * X_n \approx (X_0 * \cdots * X_{n-1}) * X_n$ が存在することを示しなさい。

2　コンマ圏

2.1　写像に対する基点付き空間の圏

定義 2.1 写像 $\phi : A \to B$ に対して、次のように圏を定める：　次で与えられる圏を $\underline{K}^{\phi}$ で表し、ϕ 基点付き空間と ϕ 基点付き写像の圏と呼ぶ。

(ϕ 基点付き空間) 写像 $\rho^X : X \to B$ と $\sigma^X : A \to X$ が存在して $\rho^X \circ \sigma^X = \phi$ を満たすとき、 組 (ρ^X, σ^X) を ϕ 基点付き空間と呼び、 単に X などと表すことがある。

(ϕ 基点付き写像) 写像 $f : X \to Y$ が ϕ 基点付き空間 X から Y への ϕ 基点付き写像であるとは、 条件 $\rho^Y \circ f = \rho^X$ および $f \circ \sigma^X = \sigma^Y$ が成立することである。

圏 $\underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ においては、$(\phi, 1_A)$ は始対象であり、$(1_B, \phi)$ は終対象である。

定義 2.2 次の記法を準備する：

(1) $B = *$ のとき、圏 $\underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ を $\underline{\mathcal{K}}^{A}$ で表し、A の下の空間と A の下の写像の圏と呼ぶ。

(2) $A = \emptyset$ のとき、圏 $\underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ を $\underline{\mathcal{K}}_{B}$ で表し、B 上の空間と B 上の写像の圏と呼ぶ。

(3) $B \subseteq A$ のとき、包含写像 $\phi\colon A \hookrightarrow B$ に対する圏 $\underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ を $\underline{\mathcal{K}}_{B}^{A}$ で表し、B 上の A-基点付き空間と B 上の A-基点付き写像の圏と呼ぶ。

(4) $B = A$ のとき、恒等写像 $\phi = 1_B : B \to B$ に対する圏 $\underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ を $\underline{\mathcal{K}}_{B}^{B}$ で表し、B 上の基点付き空間と B 上の基点付き写像の圏と呼ぶ。

注 2.3　(1) $B = *$ かつ $A = \emptyset$ のとき、圏 $\underline{\mathcal{K}}_{*}^{\emptyset}$ は自然に $\underline{\mathcal{K}}$ それ自体と同一視される。

(2) 圏 $\underline{\mathcal{K}}_{*}^{*}$ はいわゆる基点付き空間と基点付き写像の圏であり、$\underline{\mathcal{K}}_{*}$ で表されることがある。

ϕ 基点付き空間の写像 $i : K \hookrightarrow X$ が ϕ 基点付きの構造を忘れた時に空間 X の中への同相であるとき、(X, K) などと表して (ϕ 基点付き) 空間対と呼び、(X, A) は X と同一視する。　また ϕ 基点付き空間の包含関係 $M \subseteq K, L \subseteq X$ を三系 $(X; K, L)$ で、あるいは ϕ 基点付き空間対の包含関係 $(Y, M) \subseteq (X, K)$ で表す。

さらに (ϕ 基点付き) 空間対 $(X, K), (X', K')$ に対し、(ϕ 基点付き) 写像 $f : X \to X'$ が (ϕ 基点付き) 対写像とは、$f(K) \subseteq K'$ が成立することであり、$f : (X, K) \to (X', K')$ で表す。ϕ 基点付き空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ での空間対と対写像のなす圏を $\underline{\mathcal{K}}_{2}^{\phi}$ で表す。　このとき、圏 $\underline{\mathcal{K}}_{2}^{\phi}$ での対写像 $g : (X, K) \to (X', K')$ と $(Y, L) \subseteq (X, K)$ に対して、g の $\underline{\mathcal{K}}_{2}^{\phi}$での$(Y, L)$ への制限を $g|_{(Y,L)} : (Y, L) \to (X', K')$ などと表す。　特に $g|_X$ で $\underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ での写像 $g : X \to X'$ を、$g|_K$ で $\underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ での写像 $g|_K : K \to K'$ を表す。　また $g|_{X \smallsetminus K}$ で $\underline{\mathcal{K}}$ での写像 $g|_{X \smallsetminus K} : X \smallsetminus K \to X' \smallsetminus K'$ を表す。

2.2　相対空間と被覆空間

さて、空間 A を固定しよう。　例えば、$A = \emptyset$ や $A = \{*\}$ などの場合が典型的である。

定義 2.4 次の A 相対空間のなす圏 $\underline{\mathcal{K}}^{A\hookrightarrow}$ を $\underline{\mathcal{K}}^{A}$ の充満部分圏として定義する。

(A 相対空間) 空間 X と中への同相写像 $\iota^X : A \hookrightarrow X$ の組 $(X; \iota^X)$ を単に $X = (X; A)$ と書き A 相対空間と呼び、$A \overset{=}{\hookrightarrow} A$ を A 自身と同一視する。　このとき、A は始対象である。

（相対同相） $g|_{X\setminus K}: X\setminus K \to X'\setminus K'$が 同相写像であるとき、 g を相対同相と呼ぶ。

次に、 双対的に空間 B を固定しよう。

定義 2.5 次の B 被覆空間のなす圏 $\underline{\mathcal{K}}_{\twoheadrightarrow B}$ を $\underline{\mathcal{K}}_B$ の充満部分圏として定義する。

（B 被覆空間） 空間 X と商写像 $\rho^X: X \twoheadrightarrow B$ の組 $(X;\rho^X)$ を単に $X=(X:B)$ と書き B 被覆空間と呼び、 $B \overset{=}{\twoheadrightarrow} B$ を B 自身と同一視する。 このとき、 B は終対象である。

基点付きの空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}_*$ における指数法則について、 ここで補足しておく。

直積空間 $X{\times}Y$ の部分空間 $X{\vee}Y = X\times *_Y \cup *_X \times Y$ を一点に潰してできる空間を $X{\wedge}Y$ で表すと、 $(\ ){\wedge}Y$ は圏 $\underline{\mathcal{K}}_*$上の共変関手となる。 また、 空間 X から Y への基点を保つ写像の全体$\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}_*}(X,Y)$ は $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y)$ の部分集合であり、 これは位相空間 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y)$ に強化することができるので、 その部分空間としての位相を導入しコンパクト生成空間としたものを $\mathcal{M}^{\mathcal{K}_*}_{\underline{\mathcal{K}}_*}(X,Y)$で表す。 これにより、 圏 $\underline{\mathcal{K}}_*$ も圏 $\mathcal{K}_*$ まで強化された圏としての構造を持つことになる。

このとき次の形で圏 $\underline{\mathcal{K}}_*$ での指数定理が成立する。

定理 2.6 関手 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}_*}_{\underline{\mathcal{K}}_*}(Y,\ \ )$ は関手 $(\ ){\wedge}Y$ の右随伴関手である。

また、 $(\ )_+ : \underline{\mathcal{K}} \to \underline{\mathcal{K}}_*$ を基点となる一点を位相和するという関手とし、 $I : \underline{\mathcal{K}}_* \to \underline{\mathcal{K}}$ を基点を忘れる忘却関手とすると、 I は $(\ )_+$ の右随伴関手となる：

定理 2.7 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}_*}_{\underline{\mathcal{K}}_*}(X_+,Y) \approx \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,I(Y))$.

これ以後、 特にことわらない限り、 この基点付き空間の圏$\underline{\mathcal{K}}_*$の枠組みで考える。

2.3 一点和と折畳み写像

基点付きの空間 X,Y に対して、 位相和をとると基点が二つになってしまう。 そこで、 基点付きの空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}_*$ では X,Y の圏論的な和集合として、 次のような 「一点和」 を採用する。

定義 2.8 空間 X,Y に対し $X\vee Y = (X \amalg Y)/\sim_{sum} (*_X \sim_{sum} *_Y)$ により一点和 $X\vee Y$ を定める。このとき、 位相和と同様に次の性質が導かれる。

命題 2.9 （1）自然な同相 $X{\vee}{*} \approx X \approx {*}{\vee}X$ が存在する。

（2）自然な同相 $(X{\vee}Y){\vee}Z \approx X{\vee}(Y{\vee}Z)$ が存在する。

（3）自然な同相 $X{\vee}Y \approx Y{\vee}X$ が存在する。

そこで、例えば $X_1, X_2, ..., X_n$ の一点和は括弧の付け方を区別せず $X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_n$ あるいは $\bigvee_{i=1}^{n} X_i$ などと表す。　特に $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ のとき、$\bigvee_{i=1}^{n} X_i$ を $\bigvee^{n} X$ などと表すことがある。

定義 2.10 次で与えられる連続写像を空間 X の折畳み写像と呼ぶ。

（折畳み写像）写像 $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}^X : X \vee X \to X$ を、商写像 $X \amalg X \to (X \amalg X)/\sim_{base} = X \vee X$ により $\nabla^X : X \amalg X \xrightarrow{\nabla} X$ が $X \vee X$ の上に誘導する写像とする。

（多重折畳み写像）写像 $\bar{\nabla}_n = \bar{\nabla}_n^X : \bigvee^{n} X \to X$ を次式で帰納的に定義する。

(1) $\bar{\nabla}_2^X = \bar{\nabla}^X$　　(2) $\bar{\nabla}_{i+1}^X = \bar{\nabla}^X \circ (\bar{\nabla}_i^X \vee 1_X) : \bigvee^{i+1} X = (\bigvee^{i} X) \vee X \to X \vee X \to X$

また無限個の空間族 $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対し $\mathcal{F}(\Lambda) = \{\Lambda_0 | \Lambda_0$ は Λ の有限部分集合$\}$ とし、次で無限一点和を定める：

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \operatorname*{inj\,lim}_{\Lambda_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)} \bigvee_{\lambda \in \Lambda_0} X_\lambda$$

ここで、無限集合 Λ に対する順極限 $X = \operatorname{inj\,lim}_{\Lambda_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)} \bigvee_{\lambda \in \Lambda_0} X_\lambda$ とは、集合としての順極限に弱位相をいれたものとする。　すなわち、全ての $\alpha \in \Lambda$ に対して自然な包含写像 $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$ が中への同相写像になる最も弱い位相を入れる。

問題 2.11 各 $X_\lambda \in \underline{\mathcal{K}}_* \, (\lambda \in \Lambda)$ のとき、次を示せ：　$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda)_+ = (\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)_+.$

2.4　スマッシュ積と簡約対角線写像

二つの空間 X, Y に対し、空間 $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$（スマッシュ積）は次の性質を持つ。

命題 2.12　(1) 自然な同相 $X \wedge S^0 \approx X \approx S^0 \wedge X$ が存在する。

(2) 自然な同相 $(X \wedge Y) \wedge Z \approx X \wedge (Y \wedge Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X \wedge Y \approx Y \wedge X$ が存在する。

そこで例えば $X_1, X_2, ..., X_n$ のスマッシュ積は括弧の付け方を区別せず、$X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n$ あるいは $\bigwedge_{i=1}^{n} X_i$ などと表す。　特に $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ のとき $\bigwedge_{i=1}^{n} X_i$ を $\bigwedge^{n} X$ と表すことがある。

定義 2.13 次で与えられる連続写像を空間 X の簡約対角線写像と呼ぶ。

（簡約対角線写像）式 $\Delta^X(x) = [(x, x)]$ で写像 $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}^X : X \to X \times X \to X \wedge X$ を定義する。

（簡約多重対角線写像） 写像 $\bar{\Delta}_n = \bar{\Delta}_n^X : X \to \bigwedge^{n} X$ を次式で帰納的に定義する。

$$(1)\ \bar{\Delta}_2^X = \bar{\Delta}^X \qquad (2)\ \bar{\Delta}_{i+1}^X = (\bar{\Delta}_i^X \wedge 1_X)\circ\bar{\Delta}^X : X \to X\wedge X \to (\bigwedge^{i} X)\wedge X = \bigwedge^{i+1} X$$

基点付き空間 X の直積 $\prod^m X$ には、次の様な特別な部分空間を定義することができる。

定義 2.14 $\prod_{m-1}^m X = \{(x_1,\cdots,x_m) \in \prod^m X \mid$ どれか一つの x_i は基点に等しい$\}$ (fat wedge)

問題 2.15 各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_*$ のとき、次を示せ： $\bigwedge^m X \approx \prod^m X/\prod_{m-1}^m X,$（スマッシュ積）

問題 2.16 有限個の空間 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_*$ $(1 \le i \le n)$ に対して次を示せ： $\bigwedge_{i=1}^{n}(X_i)_+ \approx (\prod_{i=1}^{n} X_i)_+.$

2.5 空間の約結 (reduced join)

$n+1$ 個の空間 $X_0,...,X_n \in \underline{\mathcal{K}}_*$ に対して次の $X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_n = \mathop{\bar{*}}_{i=0}^{n} X_i$ を $X_0,...,X_n$ の「約結」と呼ぶ：

$$X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_n = (\mathbf{\Delta}^n\times X_0\times\cdots\times X_n \amalg \coprod_{i=0}^{n} \bar{E}_i)/\sim_{mjoin}, \quad \bar{E}_i = X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_{i-1}\bar{*}X_{i+1}\bar{*}\cdots\bar{*}X_n.$$

ただし、$\sim_{rjoin}$ は次の $n+1$ 個の関係で生成される同値関係である：

$$(t_0,...,t_i{=}0,...,t_n;x_0,...,x_n) \sim_{rjoin} [t_0,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_n;x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n] \in \bar{E}_i,\ n{\ge}i{\ge}0,$$

$$(t_0,...,t_n;x_0,...,x_i{=}*,...,x_n) \sim_{rjoin} [t_0,...,t_{i-1}{+}t_i,t_{i+1},...,t_n;x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n] \in \bar{E}_i,\ i{>}0,$$

$$(t_0,...,t_n;x_0{=}*,...,x_n) \sim_{rjoin} [t_1,...,t_{n-1},t_n+t_0;x_1,...,x_{n-1},x_n] \in \bar{E}_0.$$

このとき、空間の約結 $X_0\bar{*}X_1$ は次の性質を持つ。

命題 2.17 (1) X_0, X_1, X_2 に対し、自然な同相 $(X_0\bar{*}X_1)\bar{*}X_2 \approx X_0\bar{*}(X_1\bar{*}X_2)$ が存在する。

(2) $X_0,...,X_n$ に対し、自然な同相 $X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_n \approx (X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_{n-1})\bar{*}X_n$ が存在する。

問題 2.18 各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_*$ のとき、次を示せ： $\mathop{\bar{*}}_{i=0}^{n} X_i \approx \Sigma^n(\bigwedge_{i=0}^{n} X_i)$ （同相）.

問題 2.19 各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_*$ のとき、次を示せ： $I(\mathop{\bar{*}}_{i=0}^{n} X_i) \simeq \mathop{*}_{i=0}^{n} I(X_i)$ （ホモトピー同値）.

第１章　　ホモトピー論

3　ホモトピー論の基礎

3.1　写像のホモトピーと空間のホモトピー同値

A 相対空間対の圏 $\underline{\mathcal{K}}_2^A$ の対写像 $f, f_0, f_1 : (X,K) = (X,K;A) \to (Y,L;A) = (Y,L)$ を考える。

（相対ホモトピック） $f \sim_{\mathrm{rel}A} g : (X,K;A) \to (Y,L;A) \iff \exists_{\text{連続写像}F:X\times[0,1]\to Y}$ s.t. $F(k,t) \in L$, $(k,t) \in K\times[0,1]$ & $F(x,0) = f(x), x \in X$ & $F(x,1) = g(x), x \in X$ & $F(a,t) = f(a) = g(a)$, $(a,t) \in i^X(A)\times[0,1]$. 特に A について明示する必要が無いときには、 $\sim$ でホモトピーを表す。

（相対レトラクト） fがレトラクト写像 $\iff \exists_{g:(Y,L;A)\to(X,K;A)}$ s.t. $f\circ g \sim_{\mathrm{rel}A} 1_{(Y,L;A)}$.

（相対ホモトピー同値） f がホモトピー同値写像 $\iff \exists_{g:(Y,L;A)\to(X,K;A)}$ s.t. $f\circ g \sim_{\mathrm{rel}A} 1_{(Y,L;A)}$ & $g\circ f \sim 1_{(X,K;A)}$. また、このとき g を f のホモトピー逆写像という。

空間対 (X,K) から空間対 (Y,L) へのレトラクト写像が存在するとき、 (X,K) は (Y,L)を支配すると言う。　また空間 (X,K) から空間 (Y,L) へのホモトピー同値写像が存在するとき、 (X,K) と (Y,L) はホモトピー同値であると呼ばれ、記号で $(X,K) \simeq_{\mathrm{rel}A} (Y,L)$ などと表される。

（可縮） X が可縮 $\iff X \simeq *$

問題 3.1 (相対) ホモトピー同値であるという関係は同値関係であることを示せ。

3.2　接着空間とその双対

圏 $\underline{\mathcal{K}}^A$ において、中への同相 $i : K \hookrightarrow X$ と写像 $f : K \to Y$ に対し、対 (Z,Y) を次で定める：

$$Z = (X \amalg Y)/\sim_{attach}, \qquad A \ni a \sim_{attach} f(a) \in Y.$$

この商集合 Z に $X \amalg Y$ からの商位相を入れてできた空間を f による接着空間と呼び、記号 $X \cup_f Y$ で表す。　このとき、自然な包含写像 $j : Y \hookrightarrow X \cup_f Y$ は (閉部分空間に像を持つ) 中への同相写像となり、対 $(X \cup_f Y, Y)$ を定める。　さらに、対 (X,K)は自然に対 $(X \amalg Y, K \amalg Y)$ に埋め込まれ、商写像との合成を取ることで、写像 $f' : (X,A) \to (X \cup_f Y, Y)$ が誘導され $f'|_X\circ i = j\circ f$ を満たす。

問題 3.2 写像 $f' : (X,K) \to (X \cup_f Y, Y)$ が相対同相であることを示せ。

（柱－cylinder） 空間 X に対して、$I(X) = ([0,1]{\times}X \amalg \{*\})/\sim_{syl}$ とする。 ただし、$\sim_{syl}$ は $(t, *_X) \sim_{syl} *$ により生成される同値関係である。 このとき、自然な包含写像 $i_t : X \approx \{t\}{\times}X \subseteq [0,1]{\times}X \to I(X)$ $(0 \leq t \leq 1)$ は中への同相を与え、従って $X{\vee}X \xrightarrow{i_0 \vee i_1} i_0(X){\cup}i_1(X) \subseteq I(X)$ も中への同相である。 I は明らかに共変関手である。

（写像柱－mapping cylinder） 写像 $f : X \to Y$ に対して、対 $(I(X), i_1(X))$ と写像 $f : i_1(X) = X \to Y$ をとれば、対 $(I(X) \cup_f Y, Y)$ が得られ $(I(X), i_1(X))$ と相対同相となる。 このとき $I_f = I(X) \cup_f Y$ とおくと、中への同相写像 $i : X \xrightarrow{i_0} I(X) \to I_f$ と $j : Y \hookrightarrow I(X) \cup_f Y = I_f$ が付随する。 特に $f = 1_X$ のとき $I_f = I(X)$ である。

（二重写像柱－double mapping cylinder） 写像 $f : X \to Y$ と $g : X \to Z$ に対して、対 $(I(X), X{\vee}X)$ と写像 $F = f{\vee}g : X{\vee}X \to Y{\vee}Z$ をとれば、対 $(I(X) \cup_F (Y{\vee}Z), Y{\vee}Z)$ が得られ $(I(X), X{\vee}X)$ と相対同相となる。 このとき $I(f,g) = I(X) \cup_F (Y{\vee}Z)$ とおくと、中への同相写像 $j : Y{\vee}Z \hookrightarrow I(X) \cup_F (Y{\vee}Z) = I(f,g)$ と商写像 $q : I(X) \twoheadrightarrow I(f,g)$ が付随する。 また $I(f,g){\approx}I(g,f)$ であり、特に $f = 1_X$ のとき $I(f,g) = I(g)$ である。

（錐－cone） 空間 X に対して、自明な写像 $* : X \to *$ から対 $(I_{(*:X\to*)}, X)$ を得る。 このとき $C(X) = I_{(*:X\to*)}$ とおくと、対 $(C(X), X)$ を得る。 C は明らかに共変関手である。

（写像錐－mapping cone） 写像 $f : X \to Y$ に対して対 $(C(X), X)$ と写像 $f : X \to Y$ から対 $(C(X) \cup_f Y, Y)$ を得る。 このとき $C_f = C(X) \cup_f Y$ とおくと、対 (C_f, Y) を得る。

（懸垂－suspension） 空間 X に対して、自明な写像 $* : X \to *$ から対 $(C_{(*:X\to*)}, *)$ を得る。 このとき $\Sigma(X) = C_{(*:X\to*)}$ とおくと、対 $(\Sigma(X), *)$ を得る。 Σ は明らかに共変関手である。

補題 3.3 (HPO) 写像 $f : X \to Y, g : X \to Z, h : Y \to W, k : Z \to W$ に対し、次が成立する。

$$\left[\begin{array}{l} {}^{\exists}H : I(X) \to W \\ \text{s.t. } h{\circ}f \sim_H k{\circ}g \end{array}\right] \underset{(J\circ q = H)}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} {}^{\exists}J : I(f,g) \to W \\ \text{s.t. } J{\circ}j_0 = h, J{\circ}j_1 = k \end{array} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "j_0"] \arrow[ddr, "h"] & \\ Z \arrow[r, "j_1"] \arrow[drr, "k"'] & I(f,g) \arrow[dr, "J"] & \\ & & W \end{tikzcd}\right]$$

双対的に商写像 $p:Y\twoheadrightarrow L$ と写像 $f:X\to L$ に対し、商写像 $q:Z\twoheadrightarrow X$ を次で与える。

$$Z=\{(x,y)\in X\times Y\mid f(x)=p(y)\}\subseteq X\times Y,\qquad q(x,y)=x.$$

この部分集合 $Z\subseteq X\times Y$ からの相対位相を入れてできた空間を f による fibre 積と呼び、記号 $X\times_f Y$ で表す。 さらに、$X\times_f Y$ から Y への自然な射影 $\hat{f}:X\times_f Y\to Y$ により、商写像の間の可換図式 $p\circ\hat{f}=f\circ q$ が誘導される。 以下の５種類の構成では、X が弧状連結である (X の任意の２点を始点と終点とする道が存在する) ことを仮定する。

(余柱 – track) 空間 X に対して、$T(X)=\{f:[0,1]\to X\}$ とする。 このとき、代入写像 $p_t:T(X)\to X$ ($p_t(f)=f(t),0\le t\le 1$) は商写像であり、従って $\hat{p}:T(X)\twoheadrightarrow X{\times}X$ ($\hat{p}(f)=(f(0),f(1))$) も商写像である。 T は明らかに共変関手である。

(写像余柱 – mapping track) 写像 $f:Y\to X$ に対して、商写像 $p_1:T(X)\twoheadrightarrow X$ と写像 $f:Y\to X$ をとれば、商写像 $Y\times_f T(X)\twoheadrightarrow Y$ が得られる。 このとき $T_f=Y\times_f T(X)$ とおくと、商写像 $p:T_f\subseteq T(X)\overset{p_0}{\twoheadrightarrow}X$ と $q:T_f\twoheadrightarrow Y$ が付随する。 特に $f=1_X$ のとき $T_f=T(X)$ である。

(二重写像余柱 – double mapping track) 写像 $f:Y\to X$ と $g:Z\to X$ に対して、商写像 $\hat{p}:T(X)\twoheadrightarrow X{\times}X$ と写像 $f{\times}g:Y{\times}Z\to X{\times}X$ をとれば、商写像 $(Y{\times}Z){\times}_{f\times g}T(X)\twoheadrightarrow Y{\times}Z$ が得られる。 このとき $T(f,g)=(Y{\times}Z){\times}_{f\times g}T(X)$ とおくと、商写像 $q:T(f,g)=(Y{\times}Z){\times}_{f\times g}T(X)\twoheadrightarrow Y{\times}Z$ と中への同相写像 $j:T(f,g)\hookrightarrow I(X)$ が付随する。 また $T(f,g){\approx}T(g,f)$ であり、特に $f=1_X$ のとき $T(f,g)=T(g)$ である。

(余錐 – path) 空間 X に対して自明な写像 $*:*\to X$ から商写像 $T_{(*:*\to X)}\twoheadrightarrow X$ を得る。 このとき $P(X)=T_{(*:*\to X)}$ とおくと、商写像 $P(X)\twoheadrightarrow X$ を得る。 P は明らかに共変関手である。

(写像余錐 – mapping path/homotopy fibre) 写像 $f:Y\to X$ に対して商写像 $P(X)\twoheadrightarrow X$ と写像 $f:Y\to X$ から商写像 $Y\times_f P(X)\twoheadrightarrow Y$ を得る。 このとき、$P_f=Y\times_f P(X)$ とおくと、商写像 $P_f\twoheadrightarrow Y$ を得る。

(ループ – loop) 空間 X に対して自明な写像 $*:*\to X$ から商写像 $P_{(*:*\to X)}\twoheadrightarrow *$ を得る。 このとき $\Omega(X)=P_{(*:*\to X)}$ とおくと、商写像 $\Omega(X)\twoheadrightarrow *$ を得る。 Ω は明らかに共変関手である。

補題 3.4 (HPB) 写像 $f : Y \to X, g : Z \to X, h : W \to Y, k : W \to Z$ に対し、次が成立する。

$$\left[\begin{array}{l}{}^{\exists}H : W \to T(X)\\ \text{s.t. } f\circ h \sim_H g\circ k\end{array}\right] \underset{(j\circ J=H)}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l}{}^{\exists}J : W \to T(f,g)\\ \text{s.t. } q_0\circ J = h, q_1\circ J = k\end{array} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[dr, "J"] \arrow[drr, "k"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & T(f,g) \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "q_1"] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}\right]$$

3.3 Puppe 系列

まず、懸垂とループの各関手について、次の補題を用意する。

補題 3.5 (1) 写像 $f : X \to Y$ の写像錐を $j : Y \hookrightarrow C_f$ とするとき、$\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ の写像錐はホモトピー同値を除けば $\Sigma j : \Sigma Y \to \Sigma C_f (\simeq C_{\Sigma f})$ に一致する。

(2) 写像 $f : Y \to X$ の写像余錐を $q : P_f \to Y$ とするとき、$\Omega f : \Omega Y \to \Omega X$ の写像余錐はホモトピー同値を除けば $\Omega q : \Omega P_f (\simeq P_{\Omega f}) \to \Omega Y$ に一致する。

写像 $f : X \to Y$ に対して、写像錐 $j : Y \hookrightarrow C_f$ を f の (homotopy) cofibre と呼ぶことがある。同様に写像 $f : Y \to X$ に対して、写像余錐 $q : P_f \to Y$ を写像 f の (homotopy) fibre と呼ぶ。

それでは j の cofibre、あるいは q の fibre はさらに訳の分からないものとなるのであろうか?

定理 3.6 (**Puppe**) (1) j の cofibre はホモトピー同値を除いて $j_1 : C_f \to C_f/Y = \Sigma X$ に一致し、さらに、j_1 の cofibre はホモトピー同値を除いて $-\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ に一致する。 ただし、$-\Sigma f$ は $(-\Sigma f)(t, x) = (1 - t, f(x))$ により与えられる。

(2) q の fibre はホモトピー同値を除いて $q_1 : \Omega X \hookrightarrow P_f$ に一致し、さらにq_1 の fibre はホモトピー同値を除いて $-\Omega f : \Omega Y \to \Omega X$ に一致する。 ただし、$-\Omega f$ は $(-\Omega f)(u)(t) = f\circ u(1 - t)$ により与えられる。

従って $\delta = j_1, \partial = q_1$ とおいて、次の長い (co)fibre 列を得る:

(cofibre 列) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{\delta} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma j} \Sigma C_f \xrightarrow{-\Sigma\delta} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \xrightarrow{\Sigma^2 j} \Sigma^2 C_f \to \cdots,$

(fibre 列) $\cdots \to \Omega^2 P_f \xrightarrow{\Omega^2 q} \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 X \xrightarrow{-\Omega\partial} \Omega P_f \xrightarrow{-\Omega q} \Omega Y \xrightarrow{-\Omega f} \Omega X \xrightarrow{\partial} P_f \xrightarrow{q} Y \xrightarrow{f} X.$

3.4 fibration と co-fibration

ファイバー束を特徴づける性質として局所自明性があるが、その一つの帰結として、与えられた束準同型の底空間での変形が束準同型自体の変形に持ち上がるという事実がある。 この事実が「Homotopy Lifting Property」として知られ、これを抽象化して次の fibration が定義される。

(Fibration) 商写像 $p : Y \twoheadrightarrow B$ が fibration とは、次の条件が成立することである。

写像 $f : X \to Y$ と $G : I(X) \to B$ が等式 $G \circ i_0 = p \circ f$ を満たすなら、写像 $K : I(X) \to Y$ で等式 $p \circ K = G, K \circ i_0 = f$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & I(X) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, dotted, "K"] \\ Y \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

この双対となる性質が次にあげる cofibration のもつ「Homotopy Extension Property」である。

(Cofibration) 中への同相 $i : A \hookrightarrow X$ が cofibration とは、次の条件が成立することである。

写像 $f : X \to Y$ と $H : I(A) \to Y$ が等式 $p_0 \circ \mathrm{ad}(H) = f \circ i$ を満たすなら、写像 $K : I(X) \to Y$ で等式 $\mathrm{ad}(K) \circ i = \mathrm{ad}(H), p_0 \circ \mathrm{ad}(K) = f$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\mathrm{ad}(H)"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\mathrm{ad}(K)"] \\ T(Y) \arrow[r, "p_0"'] & Y \end{tikzcd} \quad \left(\begin{tikzcd} X \cup_i I(A) \arrow[r, hook, "i_0 \cup I(i)"] \arrow[d, "f \cup H"'] & I(X) \arrow[dl, dotted, "K"] \\ Y & \end{tikzcd} \right)$$

ただし、$\mathrm{ad} : \mathcal{M}(I(X), Y) \xrightarrow{\approx} \mathcal{M}(X, T(Y))$ は随伴写像を対応させる同相写像である。

これらを組み合わせることで次の定理が得られる：

定理 3.7 与えられた fibration $p : Y \to B$ と cofibration $i : A \hookrightarrow X$ に対して、次が成立する。

(HLEP/HELP) 写像 $f : X \to Y$ と $H : I(A) \to Y$ と $G : I(X) \to B$ が等式 $G \circ i_0 = p \circ f, p_0 \circ \mathrm{ad}(H) = f \circ i$ および $G \circ I(i) = p \circ H$ を満たすなら、写像 $K : I(X) \to Y$ で等式 $\mathrm{ad}(K) \circ i = \mathrm{ad}(H)$, $p_0 \circ \mathrm{ad}(K) = f, p \circ K = G$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\mathrm{ad}(H)"'] & X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\mathrm{ad}(K)"] & I(X) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, dotted, "K"] & I(A) \arrow[l, hook', "I(i)"'] \arrow[d, "H"] \\ T(Y) \arrow[r, "p_0"'] & Y \arrow[r, "p"'] & B & Y \arrow[l, "p"] \end{tikzcd} \quad \left(\begin{tikzcd} X \cup_i I(A) \arrow[r, hook, "i_0 \cup I(i)"] \arrow[d, "f \cup H"'] & I(X) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, dotted, "K"] \\ Y \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd} \right)$$

3.5 相対 CW 複体と胞体近似定理

位相空間の対 (X, A) に対する胞体構造を考える。

定義 3.8 ϕ 相対空間 $(X; A)$ が相対 CW 複体であるとは、次の条件を満たす X の閉部分空間族 X_i (i–骨格と呼ばれる) $i \geq -1$ が存在することである。

(1) $X_{-1} = A,\ X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ (弱位相を持つ)

(2) $X_i = C(B_i) \cup_{f_i} X_{i-1},\ f_i : B_i = \bigvee_\lambda S^{i-1}_\lambda \to X_{i-1}$ (連続写像), $\quad i \geq 0.$

(注1) $X_0 = A \amalg$ (discrete set)

(注2) $X_i \setminus X_{i-1} = \coprod_\lambda E^i$ の各連結成分 $E^i \approx \mathbb{R}^i$ を X の i–胞体と呼び、e^i などと表すことがある。

(注3) 特に $A = \emptyset$ のとき、X を CW 複体と呼び、$A = *$ のとき、X を基点付き CW 複体と呼ぶ。

このような胞体構造を保つ写像を考える。

定義 3.9 対写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ が相対胞体写像であるとは、(X, A) の i–骨格を X_i とし (Y, B) の i–骨格をY_i とするとき、$f(X_i) \subseteq Y_i, \quad i \geq 0$ を満たすことである。

例 3.10 (1) $S^n = C(S^{n-1}) \cup \{*\}$ より S^n は CW 複体であり、$S^n = e^0 \cup e^n$ となる。

(2) $\mathbb{R}P^i = C(S^{i-1}) \cup \mathbb{R}P^{i-1}$ より $\mathbb{R}P^n$ は CW 複体であり、$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$ となる。

(3) $\mathbb{C}P^i = C(S^{2i-1}) \cup \mathbb{C}P^{i-1}$ より $\mathbb{C}P^n$ は CW 複体であり、$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$ となる。

(4) $\mathbb{H}P^i = C(S^{2i-1}) \cup \mathbb{H}P^{i-1}$ より $\mathbb{H}P^n$ は CW 複体であり、$\mathbb{H}P^n = e^0 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{4n}$ となる。

しかし、胞体写像であるという条件はきつく、CW 複体と胞体写像の圏を考えることは却って取り扱いが困難になる。 次の胞体近似定理がホモトピー的にその難点を取り除くことを可能にする。

定理 3.11 (相対胞体近似定理) 相対 CW 複体の間の対写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ に対して、胞体写像 $g : (X, A) \to (Y, B)$ で $g \sim_{\mathrm{rel} A} f$ をみたすものが存在する。

系 3.11.1 (胞体近似定理) CW 複体の間の写像 $f : X \to Y$ に対して、胞体写像 $g : X \to Y$ で $g \sim f$ をみたすものが存在する。

CW 複体にホモトピー同値な空間対とその間の対写像のなす圏を $\underline{\mathcal{CW}}_2$ で表し、基点付き CW 複体にホモトピー同値な基点付き空間とその間の写像のなす圏を $\underline{\mathcal{CW}}_*$ などと表す。

4 ホモトピー論から

4.1 簡約 (コ) ホモロジー論

単位元 1 を持つ環 Λ に対して、アーベル群 M が次の条件を満たす Λ の M への作用 $\Lambda \times M \ni (a,m) \mapsto a{\cdot}m \in M$ を持つとき、M を Λ–加群 (Λ を作用域とする加群) と呼ぶ。

(1) $1{\cdot}m = m, \quad m \in M,$

(2) $a{\cdot}(b{\cdot}m) = (ab){\cdot}m, \quad a, b \in \Lambda, m \in M,$

(3) $(a+b){\cdot}m = a{\cdot}m + b{\cdot}m, \quad a, b \in \Lambda, m \in M,$

(4) $a{\cdot}(m+n) = a{\cdot}m + a{\cdot}n, \quad a \in \Lambda, m, n \in M.$

また、Λ–加群 M から N への加群としての準同型 ϕ が条件 $\phi(a{\cdot}m) = a{\cdot}\phi(m)$ を満たすとき、Λ–準同型と呼ぶ。

さて、d を 2 以上の自然数または無限大 ∞ とし、$\mathbb{Z}/d = \{i \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \le i < d\}$ とおく。 従って、例えば $\mathbb{Z}/\infty = \bar{\mathbb{N}}$ となる。 このとき、単位元 1 を持つ可換環 R に対して、圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ を次で定め、次数付き R–加群の圏と呼ぶ。 ここで R それ自体も、次数 0 に集中した次数付き R–加群とみなす。

(O) 圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ の対象は $\{M_i$ (R–加群) $|\, i \in \mathbb{Z}/d\}$ (これを $M_* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d} M_i$ で表す)

(M) 圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ の M_* から N_* への射は $\{\phi_i : M_i \to N_i$ (R–準同型) $|\, i \in \mathbb{Z}/d\}$ ($\phi_* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d} \phi_i$)

次の七つの定理は、常 (コ) ホモロジーの 7 つの公理系をCW複体と簡約 (コ) ホモロジーの言葉で言い換えたものである。

定理 4.1 (関手性) 単位元を持つ可換環 R に対し、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_*(\ ;R) = H_*(\ ,*;R)$ は圏 $\underline{\mathcal{CW}}_*$ から圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_\infty$ への共変関手である。

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^*(\ ;R) = H^*(\ ,*;R)$ は圏 $\underline{\mathcal{CW}}_*$ から圏${}_R\underline{\mathcal{GM}}_\infty$ への反変関手である。

定理 4.2 (ホモトピー不変性) 単位元を持つ可換環 R に対し、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $f \sim g$ ならば同じ準同型 $\tilde{H}_*(f;R) = \tilde{H}_*(g;R)$ を誘導する。

(簡約コホモロジー) $f \sim g$ ならば同じ準同型 $\tilde{H}^*(f;R) = \tilde{H}^*(g;R)$ を誘導する。

定理 4.3 (長完全性) 単位元を持つ可換環 R に対し、 次が成立する。

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_*(\ ;R)$ は定理 3.6 で得られたcofibre列から長完全列を誘導する。

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^*(\ ;R)$ は定理 3.6 で得られたcofibre列から長完全列を誘導する。

定理 4.4 (切除性) 単位元を持つ可換環 R と任意の相対 CW 複体 (X,A) に対して、 次が成立する。

(簡約ホモロジー) $H_*(X,A;R) = \tilde{H}_*(X_+/A_+;R)$ で、 特に $H_*(X;R) = \tilde{H}_*(X_+;R)$ となる。

(簡約コホモロジー) $H^*(X,A;R) = \tilde{H}^*(X_+/A_+;R)$ で、 特に $H^*(X;R) = \tilde{H}^*(X_+;R)$ となる。

定理 4.5 (懸垂同型) 単位元を持つ可換環 R と任意の CW 複体 X と整数 i に対して、 次が成立する。

(簡約ホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}_i(\Sigma X;R) \cong \tilde{H}_{i-1}(X;R)$ が成立する。

(簡約コホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}^i(\Sigma X;R) \cong \tilde{H}^{i-1}(X;R)$ が成立する。

定理 4.6 (加法性) 単位元を持つ可換環 R と任意のCW複体の族 $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$ に対して次が成立する。

(簡約ホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}_*(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda;R) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \tilde{H}_*(X_\lambda;R)$ が成立する。

(簡約コホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}^*(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda;R) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \tilde{H}^*(X_\lambda;R)$ が成立する。

定理 4.7 (次元性) 単位元を持つ可換環 R と整数 i に対し、 次が成立する。

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_0(S^0;R) = R$ かつ $\tilde{H}_i(S^0;R) = 0, (i \neq 0)$ である。

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^0(S^0;R) = R$ かつ $\tilde{H}^i(S^0;R) = 0, (i \neq 0)$ である。

4.2 (余) 積の構造

Λ が可換環 R のとき、 R-加群 M, N の R 上の tensor 積 $M\otimes_R N$ を次で定める。

(tensor積) $M\otimes_R N = \langle M\times N$ の要素で生成される自由R-加群$\rangle / \sim_{tensor}$,

ただし、 $\sim_{tensor}$ は $(a{\cdot}m + a'{\cdot}m', b{\cdot}n + b'{\cdot}n') \sim_{tensor} ab(m,n) + ab'(m,n') + a'b(m',n) + a'b'(m',n')$ で生成される同値関係である。 このとき、 (m,n) の同値類を $m\otimes n$ で表す。 この次数付き R-加群 M_*, N_* に対して、 その tensor 積 $M_*\otimes_R N_*$ を次の式で定める。

（次数付きtensor積） $(M_*\otimes_R N_*)_i = \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}/d\\ i=j+k \bmod d}} M_j\otimes_R N_k$ (有限直和)，$i\in\mathbb{Z}/d.$

さらに、準同型 $t=t_A : A\otimes_R A \to A\otimes_R A$ を $t(x\otimes y) = (-1)^{\deg(x)\deg(y)} y\otimes x$ で定義する。　また、$R\otimes_R A \cong A \cong A\otimes_R R$ は同一視する。　この次数付き tensor 積を用いて (余) 代数の構造を定義する：

（次数付き可換結合的 R–代数） 次数付き R–加群 A が次数付き可換結合的 R–代数とは、次の条件を満たす R–準同型 $\mu : A\otimes_R A \to A$ が存在することである。

(1) $\mu(x\otimes 1) = x = \mu(1\otimes x)$ を満たす $1\in A_0$ が存在する。（この 1 の存在は、$\mu\circ(1\otimes\eta) = 1 = \mu\circ(\eta\otimes 1)$ をみたす R–準同型 $\eta : R\to A$ の存在と同値である）

(2) $\mu(\mu(x\otimes y)\otimes z) = \mu(x\otimes\mu(y\otimes z))$ を満たす。

(3) $\mu(x\otimes y) = \mu\circ t(x\otimes y)$ を満たす。

（次数付き可換結合的 R–余代数） 次数付き R–加群 A が次数付き可換結合的 R–余代数とは、次の条件を満たす R–準同型 $\psi : A \to A\otimes_R A$ が存在することである。

(1) $(1\otimes\varepsilon)\circ\psi = 1 = (\varepsilon\otimes 1)\circ\psi$ を満たす R–準同型 $\varepsilon : A\to R$ が存在する。

(2) $(\psi\otimes 1)\circ\psi = (1\otimes\psi)\circ\psi$ を満たす。

(3) $\psi = t\circ\psi$ を満たす。

さて常 (コ) ホモロジーはさらに次の構造を持つことが知られている。

定理 4.8 (外部積) 単位元を持つ可換環 R に対し、次が成立する。

（簡約ホモロジー） 自然な鎖準同型 $\rho : \tilde{C}_*(X\wedge Y;R) \to \tilde{C}_*(X;R)\otimes_R \tilde{C}_*(Y;R)$ （Alexander–Whitney の写像） が存在し、$\rho_* : \tilde{H}_*(X\wedge Y;R) \to \tilde{H}_*(X;R)\otimes_R \tilde{H}_*(Y;R)$ は次を満たす。

(1) ρ は $X=\{*\}_+$ または $Y=\{*\}_+$ のとき恒等写像を与える。

(2) $(\rho_*\otimes 1)\circ\rho_* = (1\otimes\rho_*)\circ\rho_* : \tilde{H}_*(X\wedge Y\wedge Z;R) \to \tilde{H}_*(X;R)\otimes_R\tilde{H}_*(Y;R)\otimes_R\tilde{H}_*(Z;R)$

(3) 交換写像 $T : X\wedge Y \to Y\wedge X$ は $\rho_*\circ T_* = t\circ\rho_*$ を満たす。

（簡約コホモロジー） 自然な準同型 $\rho^* : \tilde{H}^*(X;R)\otimes\tilde{H}^*(Y;R) \to \tilde{H}^*(X\wedge Y;R)$ が次を満たす。

(1) ρ^* は $X=\{*\}_+$ または $Y=\{*\}_+$ のとき恒等写像を与える。

(2) $\rho^*\circ(\rho^*\otimes 1) = \rho^*\circ(1\otimes\rho^*) : \tilde{H}^*(X;R)\otimes\tilde{H}^*(Y;R)\otimes\tilde{H}^*(Z;R) \to \tilde{H}^*(X\wedge Y\wedge Z;R)$

(3) 交換写像 $T : X\wedge Y \to Y\wedge X$ は $\rho^*\circ t = T_*\circ\rho^*$ を満たす。

系 4.8.1 (1) R-準同型 $\mu = \rho_*\circ\Delta_* : H_*(X;R) = \tilde{H}_*(X_+;R) \xrightarrow{\rho_*\circ\bar{\Delta}_*} \tilde{H}_*(X_+;R)\otimes_R\tilde{H}_*(X_+;R) = H_*(X;R)\otimes_R H_*(X;R)$ により、$H_*(X;R)$ は次数付き可換結合的 R-余代数となる。

(2) R-準同型 $\psi = \Delta^*\circ\rho^* : H^*(X;R)\otimes_R H^*(X;R) = \tilde{H}^*(X_+;R)\otimes_R\tilde{H}^*(X_+;R) \xrightarrow{\bar{\Delta}^*\circ\rho^*} \tilde{H}^*(X_+;R) = H^*(X;R)$ により、$H^*(X;R)$ は次数付き可換結合的 R-代数となる。

上の性質から $H^*(X;R) = \bar{H}^*(X_+;R)$ と $H^*(X\times X;R) = H^*(X\vee X;R) \oplus H^*(X\wedge X;R)$ が成立し、

$$H^*(X;R)\otimes_R H^*(X;R) = H^*(X\vee X;R) \oplus \bar{H}^*(X;R)\otimes_R\bar{H}^*(X;R)$$

より、準同型 Δ^* の $\bar{H}^*(X;R)\otimes_R\bar{H}^*(X;R)$ への制限は準同型 $\bar{\Delta}^*$ と同一視される。 同様に

$$H_*(X;R)\otimes_R H_*(X;R) = H_*(X\vee X;R) \oplus \bar{H}_*(X;R)\otimes_R\bar{H}_*(X;R)$$

より、準同型 Δ_* の像の $\bar{H}_*(X;R)\otimes_R\bar{H}_*(X;R)$ への射影は準同型 $\bar{\Delta}_*$ と同一視される。

定理 4.9 (Eilenberg–Zilber) R が体のとき、ρ は鎖ホモトピー同値を与え、ρ_* (ρ^*) は (コ) ホモロジー群の同型を誘導する。

4.3 一般 (コ) ホモロジー論とコホモロジー作用素

Λ を次数付き可換結合的 R-代数として、次数付きの意味での Λ の作用を受ける次数付き加群すなわち Λ-加群の圏を ${}_\Lambda\underline{\mathcal{GM}}_d$ とする。 このとき、h^* が係数 Λ のコホモロジー論であるとは、定理 4.1・定理 4.6 の簡約コホモロジーの性質が、R を Λ に、また、$\tilde{H}^*(\ ;R)$ を $h^*(\ )$ に置き換えて成立することである。 ここで、定理 4.4 は簡約でないコホモロジー論の定義とみなす。

注 4.10 定理 4.1・定理 4.7の簡約コホモロジーの性質が、R を Λ に、また、$\tilde{H}^*(\ ;R)$ を$h^*(\ )$ に置き換えて成立するなら、$h^*(\ ) = \tilde{H}^*(\ ;R)\otimes_R\Lambda$ であることが知られている。

さらに、h^* が係数 Λ の乗法的コホモロジー論であるとは、次の条件を満たす自然な準同型 κ が存在することである。

(1) κ は $X = \{*\}_+$ または $Y = \{*\}_+$ のとき恒等写像を与える。

(2) $\kappa\circ(\kappa\otimes 1) = \kappa\circ(1\otimes\kappa) : h^*(X)\otimes_R h^*(Y)\otimes_R h^*(Z) \to h^*(X\wedge Y\wedge Z)$

(3) 交換写像 $T : X\wedge Y \to Y\wedge X$ は $\kappa\circ t = T_*\circ\kappa$ を満たす。

このとき、 $h^*(X_+)$ は自然に次数付き可換結合的Λ–代数の構造を持つ。

定義 4.11 (非安定) コホモロジー作用素を定義する。

（コホモロジー作用素） k, n を整数とするとき、 $\theta(X) : h^k(X) \to h^{k+n}(X)$ という形の自然変換 $\theta : h^k \to h^{k+n}$ を次数 n のコホモロジー作用素とよぶ。

（安定コホモロジー作用素） n を整数と、 次数 n のコホモロジー作用素の列 $\theta_k : h^k \to h^{k+n}$ が $\theta_k(\Sigma X) = \theta_{k-1}(X)$ を満たすとき、 $\theta = \{\theta_k\}$ を次数 n の安定コホモロジー作用素という。

h^*h を安定コホモロジー作用素の全体とし、 次数 n の安定コホモロジー作用素全体を $(h^*h)_n$ とおく。

問題 4.12 h^* が係数 Λ の乗法的コホモロジー論のとき、 h^*h が次数付き Λ–代数となることを示せ。

4.4 基本群

空間 X 上の閉じた道全体の空間 $\Omega(X)$ の連結成分は X 上のloopのホモトピーによる同値類であると見なされる。 従って、 $\Omega(X)$ の連結成分の全体 $\pi_0(\Omega(X))$ は X の基本群 $\pi_1(X)$ と同一視される。

定理 4.13 群の圏 $\underline{\mathcal{G}}$ においては、 与えられた二つの準同型 $f_1 : G_0 \to G_1$ と $f_2 : G_0 \to G_2$ に対して、 次を満たす群 $G = G_1 *_{G_0} G_2$ (融合積) と準同型 $j_1 : G_1 \to G$ と $j_2 : G_2 \to G$ が存在する。

(1) 準同型 $g_1 : G_1 \to G'$ と $g_2 : G_2 \to G'$ が条件 $g_1\circ f_1 = g_2\circ f_2$ を満たすならば、 $g\circ j_1 = g_1$ かつ $g\circ j_2 = g_2$ を満たす準同型 $g : G \to G'$ が一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, dotted, "\forall g_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, dotted, "\forall g_2"'] & G \arrow[dr, dotted, "\exists g"] & \\
 & & G'
\end{tikzcd}
$$

例 4.14 $G_0 = 1$ で、 群 G_1, G_2 の表示が $G_i = \langle S_i \,|\, R_i \rangle$ $(i = 1, 2)$ と与えられているとき、 $G_1 * G_2 = G_1 *_{G_0} G_2$ の表示が $G_1 * G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \,|\, R_1, R_2 \rangle$ で与えられる。 本講では、 Van Kampen の定理として知られる定理の最も弱い形しか必要としないので、 融合積の構成については割愛する。

定理 4.15 (**Van Kampen**) $\underline{\mathcal{CW}}^A$ の三系 $(X;K,L)$ に対して、 $K, L, K\cap L$ が全て弧状連結ならば、同型 $\pi_1(K\cup L)\cong \pi_1(K) *_{\pi_1(K\cap L)} \pi_1(L)$ が存在する。 特に $\pi_1(X\vee Y)\cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ である。

系 4.15.1 $\underline{\mathcal{CW}}^A$ の三系 $(X;K,L)$ に対して、 K, L が単連結で $K\cap L$ が弧状連結ならば、 X は単連結である。

従って、 例えば S^1 の n 個の一点和の基本群は n 個の要素を生成元とする自由群である。

4.5 高次ホモトピー群と Hurewicz の定理

高次のホモトピー群 $\pi_n(X)$ は基本群を用いて次のように帰納的に与えられる。

(1) $\pi_0(X) = \langle X$ の連結成分の全体$\rangle$,

(2) $\pi_{i+1}(X) = \pi_i(\Omega(X)) \cong \pi_0(\Omega^{i+1}X)$.

空間 X の基本群の要素 $[u]$ を取れば、 u は連続写像 $u : S^1 \to X$ と見なせ、 1 次元ホモロジー群の間に準同型 $u_* : H_1(S^1) \to H_1(X)$ を誘導する。 そこで、 $\rho(u) = u_*([S^1])$ とおく。

定理 4.16 (**Hurewicz**) X が弧状連結のとき、 $\rho : \pi_1(X) \to H_1(X)$ は全射準同型であり、 その核は交換子群に一致する。 従って $\pi_1(X)_{ab} \cong H_1(X)$ である。

空間や写像に対する連結性を次のように定義する。

定義 4.17 (空間) 空間 X が d–連結であるとは、X にホモトピー同値な CW 複体 Y でその d–骨格が基点のみからなるものが存在することとする。

(写像) 写像 $f : X \to Y$ が d–連結であるとは、 homotopy fibre P_f が d–連結であることとする。

(空間対) 空間対 (X, K) が d–連結であるとは、 包含写像 $i : K \hookrightarrow X$ が d–連結であることとする。

例 4.18 例えば n 次元球面 S^n は $S^n = \{*\}\cup e^n$ という CW 分割を持つから、 $n-1$ 連結である。

空間 X の $\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n(X))$ の要素 $[u]$ を取れば、 u は連続写像 $u : S^n \to X$ と見なせ、 n 次元ホモロジー群の間に準同型 $u_* : H_n(S^n) \to H_n(X)$ を誘導する。 そこで、 $\rho_n(u) = u_*([S^n])$ とおく。 このとき、定理 4.16 を拡張した次の定理が成立する：

定理 4.19 (**Hurewicz**) n が 2 以上で X が $n-1$ 連結のとき、 $\rho_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ は同型であり、 $\rho_{n+1} : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ は全射である。

4.6 ホモトピー集合

空間対 $(X,K),(Y,L)$ に対して、 (X,K) から (Y,L) への対写像の全体をホモトピーで分類して得られる集合を $[X,K;Y,L]$ で表す。　特に $K=L=\emptyset$ の場合は集合 $[X,\emptyset;Y,\emptyset]$ を $[X,Y]_{free}$ で表し（自由）ホモトピー集合といい、 $K=L=$ (一点集合) の場合は集合 $[X,*;Y,*]$ を $[X,Y]$ で表し (基点付き) ホモトピー集合と呼ぶ。　ここでは基点付きの集合の圏を $\underline{\mathcal{S}}_*$ で表すことにする。

　空間 X の懸垂が $\Sigma X=X{\times}[0,1]/\sim_{susp}=X{\wedge}S^1$ という形で与えられ、 基点付きの指数定理を用いれば、 $[X{\wedge}S^1,Y]\cong[X,\Omega Y]$ となる。　従って次の命題を得る。

命題 4.20 基点付き空間 X,Y に対して、 $[\Sigma X,Y]$ と $[X,\Omega Y]$ は自然に同一視できる。

さらに $\Sigma X=X{\wedge}S^1=X{\wedge}\bigcirc$ より、 $S^1=\bigcirc$ の中央をピンチする写像 $\mu\colon\bigcirc\to 8=\bigcirc\vee\bigcirc$ は、 $1_X{\wedge}\mu\colon X{\wedge}\bigcirc\to X{\wedge}\bigcirc\vee X{\wedge}\bigcirc$ を誘導するから、 任意の写像 $f,g\colon X{\wedge}\bigcirc\to Y$ に対して $f+g=(f{\vee}g){\circ}(1_X{\wedge}\mu)$ により二項演算が $[\Sigma X,Y]$ に与えられ、 次が成立する：

命題 4.21 空間 X,Y に対して、 基点付き集合 $[\Sigma X,Y]\cong[X,\Omega X]$ は、 自然に群の構造を持ち、 $[\Sigma^2X,Y]\cong[\Sigma X,\Omega X]\cong[X,\Omega^2X]$ はアーベル群の構造を持つ。

ここで $\Sigma S^i=S^{i+1}$ であることに注意すれば、 任意の空間Xと整数 i に対して $\pi_i(X)\cong[S^0,\Omega^iX]$ が成立する。　ただし、 $\pi_i(X)\cong[S^i,X]$ (i-次元ホモトピー群) とする。

系 4.21.1 空間 X に対して $\pi_i(X)$ は、 $i=0$ のとき基点付き集合、 $i=1$ のとき群、 $i\geq 2$ のときアーベル群となる。

　基点付き空間 X を固定し、 $Y\in\underline{\mathcal{CW}}_*$ に対して集合 $[Y,X]$ を対応させる対応を $[\ ,X]$ で表す。

問題 4.22 $[\ ,X]$ は圏 $\underline{\mathcal{CW}}_*$ から圏 $\underline{\mathcal{S}}_*$ への反変関手を与えることを示せ。

基点付き空間 X を固定し、 $Y\in\underline{\mathcal{CW}}_*$ に対して集合 $[X,Y]$ を対応させる対応を $[X,\ ]$ で表す。

問題 4.23 $[X,\ ]$ は圏 $\underline{\mathcal{CW}}_*$ から圏 $\underline{\mathcal{S}}_*$ への共変関手を与えることを示せ。

さて、 基点付きの集合の列

$$\cdots\xrightarrow{f_{i-2}}A_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}A_i\xrightarrow{f_i}A_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}}\cdots,\qquad i\in\mathbb{Z}$$

が条件 $\operatorname{im}f_{i-1}=(f_i)^{-1}(*),i\in\mathbb{Z}$ を満たすとき、 ここではこの列を (長) 完全列と呼ぶ。

命題 4.24　(1) 関手 $[\ ,X]$ は、 Puppe の cofibre 列を長完全列にうつす。

(2) 関手 $[X,\ ]$ は、 Puppe の fibre 列を長完全列にうつす。

さて、$\underline{\mathcal{K}}_*$ における指数法則を用いれば Puppe の fibre 列より次を得る。

系 4.24.1 写像 $f : Y \to X$ に対して次は長完全列である。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(P_f) \longrightarrow \pi_i(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

特に f が中への同相のとき、この系列の $\pi_i(P_f)$ を $\pi_{i+1}(X, Y)$ などと表示する。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(X, Y) \longrightarrow \pi_i(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

定義 4.25 全ての次元でホモトピー群の同型を誘導する写像を弱 (ホモトピー) 同値写像と呼ぶ。

空間 X, Y が弱同値とは、ある空間 Z とそこからの弱同値写像 $\phi : Z \to X$ と $\psi : Z \to Y$ が存在することである。

写像 $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ が弱同値とは、ある写像 $f_0 : X_0 \to Y_0$ とそれらの弱同値写像 $\phi_i : X_0 \to X_i$ と $\psi_i : Y_0 \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ で $f_i \circ \phi_i \sim \phi_i \circ f_0$ $(i = 1, 2)$ を満たすものが存在することである。

弱同値な空間はホモトピー同値となるであろうか? 次の J. H. C. Whitehead の定理が (CW 複体の場合に) これに肯定的に答えるものである。

定理 4.26 (**J. H. C. Whitehead**) 弧状連結な CW 複体 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が全ての次元のホモトピー群の同型を誘導するならば、f はホモトピー同値である。

ただし、CW 複体でない場合には反例が存在する。

定義 4.27 特に fibration に弱同値な写像を弱 fibration (quasi-fibration) などと呼ぶことがある。

4.7 Blakers–Massey の定理

次の定理は Freudenthal の懸垂定理と呼ばれる。

定理 4.28 (**Freudenthal**) 懸垂の誘導する準同型 $\Sigma_* : \pi_{q-1}(S^{r-1}) \to \pi_q(S^r)$ は、$q < 2r-2$ で同型で $q = 2r-2$ で全射である。

さて、次の homotopy pullback を考える:

$$\begin{tikzcd} P(f,g) \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "q_1"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

系 4.28.1 このとき、 次の長完全列が従う。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y)\oplus\pi_{i+1}(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(P(f,g)) \longrightarrow \pi_i(Y)\oplus\pi_i(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

特に f, g が中への同相のとき、 この系列の $\pi_i(P(f,g))$ を $\pi_{i+1}(X;Y,Z)$ などと表示する。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y)\oplus\pi_{i+1}(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(X;Y,Z) \longrightarrow \pi_i(Y)\oplus\pi_i(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

Freudenthal の懸垂定理は、 次の Blakers-Massey のホモトピー切除定理の特別な場合である。

定理 4.29 (**Blakers-Massey**) 空間 A が連結で空間対 (Y,A) が n 連結かつ (Z,A) が m 連結 $(n,m \geq 1)$ のとき、 写像 $f : A \to Y$, $g : A \to Z$ に対し homotopy pushout $X = I(f,g)$ は、 Van Kampen の定理より単連結である。 そこで自然な包含写像 $h : Y \hookrightarrow X$ と $k : Z \hookrightarrow X$ の homotopy pullback $P(h,k)$ をとる。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "j"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& P(h,k) \arrow[r, "q_0"'] \arrow[d, "q_1"] & Y \arrow[d, hook, "h"] \\
& Z \arrow[r, hook, "k"'] & X
\end{tikzcd}$$

このとき、 自然な包含写像 $j : A \hookrightarrow P(h,k)$ に対して次が成立する。

$$j_* : \pi_i(A) \cong \pi_{i+1}(X;Y,Z), \text{ (同型)} \qquad \text{if } i < n+m-1,$$

$$j_* : \pi_{n+m-1}(A) \twoheadrightarrow \pi_{n+m}(X;Y,Z). \text{ (全射)} \qquad \text{if } i = n+m-1,$$

この定理から直ぐに導かれる、特に有用な次の二つの系を挙げておく。

系 4.29.1 CW 複体 K が $(r-2)$-連結のとき、 懸垂の誘導する準同型 $\Sigma_* : \pi_{q-1}(K) \to \pi_q(\Sigma K)$ は、 $q < 2r-2$ で同型で $q = 2r-2$ で全射である。 特に $K = S^{r-1}$ の場合が Freudenthal の定理である。

系 4.29.2 CW 複体 X が $(n-1)$-連結で次元が高々 $2n-1$ のとき、 次の様なCW複体 K が存在する。

(1) ホモトピー同値 $X \simeq \Sigma K$ がある。

(2) K は $(n-1)$ 連結でかつ $\langle K$ の次元$\rangle$ = $\langle X$ の次元$\rangle-1$ である。

第2章　L–S カテゴリ数

5　Lusternik と Schnirelmann の猫たち

5.1　幾何的な猫たち

問題 5.1 閉多様体 M 上の smooth function $f : M \to \mathbb{R}$ の critical points は、最小限、いったいいくつあるであろうか？

その最少数を $\mathrm{Crit}(M)$ で表すことにする。　もしさらにこの critical points に「非退化」という条件を付け加えた場合、上の問題は次のように変化する。

問題 5.2 閉多様体 M 上の Morse function $f : M \to \mathbb{R}$の critical points は、最小限、いったいいくつあるであろうか？

Morse function ならば critical points はハンドル分解に対応し、従ってそのホモトピー論的な下限としては M の胞体分解での胞体の個数が対応する。　しかし始めに述べたような critical points での Hessian の退化があり得る状況では、次が成立する。

定理 5.3 (**Takens 1968 [133]**) 閉多様体 M に対し $\mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M)+1$ が成立する。

この場合はむしろ embedded closed balls による被覆の枚数に対応するようである。　さて閉多様体 M は、いったい何枚の embedded closed balls で覆い尽くせるであろうか？　その最少数を $\mathrm{Ball}(M)$ で表すと、[133]の証明から次の不等式が得られる。

定理 5.4 (**Takens [133]**) 閉多様体 M に対し $\mathrm{Ball}(M) \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M)+1$ が成立する。

定義 5.5 位相空間 X の単体分割は、いったい何枚の可縮な閉集合で覆い尽くせるであろうか？その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{gCat}(X)$ で表す。　これも位相不変量であるがホモトピー不変ではない幾何的な猫の一種である。

Brittenham [19] によれば 1930 年代初め、J. H. C. Whitehead は S^3 にホモトピー同値な 3 次元閉多様体 M から一点を除いた残りが contractible open submanifold となり、これが open ball と同相であることを示すことで、Poincaré 予想の証明に至る計画を立てた。　現実にはこれは失敗し、contractible open manifold であって open ball と同相でないものが存在することが J. H. C. Whitehead 自身によって発見された。（一点ではなく embedded open disk を M から取り除けば、残りは 2 次元球面を境界にもつ 3 次元の可縮なコンパクト多様体となる。）よく似た問題として、次の問題があげられる。

問題 5.6 閉多様体 M 上の Morse function $f : M \to \mathbb{R}$ の critical values の個数 $\nu(f)$ は、最小限、いったいいくつあるであろうか？

その最少数を $\mathrm{CV}(M)$ で表すことにする。 これは同時に接着可能なハンドルの組が何組あるかという問題として捉え直すことができる。 このように考えた場合、猫と同様に次が成立することがわかる。

定理 5.7 閉多様体 M に対し $\mathrm{CV}(M) \le \mathrm{Dim}(M)+1$ が成立する。

5.2 古典的な猫たち

さて幾何的な猫 $\mathrm{gCat}(-)$ をホモトピー不変量としたものが Lusternik と Schnirelmann の猫たちである: まず次の言葉を用意する。 位相空間Xの部分集合 A は、その包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ が定置写像に homotopic であるとき categorical (猫的) と呼ばれる。 この概念を「可縮」のかわりに用いることで、次の不変量が得られる。

定義 5.8 (Lusternik–Schnirelmann [91]) 閉多様体 M は、いったい何枚の猫的な閉集合で覆い尽くせるであろうか？ その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{cat}(M)$ で表す。

R. Fox [43]によれば、閉多様体 M の Lusternik-Schnirelmann の猫 $\mathrm{cat}(M)$ の定義において、「閉集合」を「開集合」に置き換えても、値は変わらない。 さらに G. W. Whitehead [145, 146], Berstein-Ganea [13] によれば、多様体 M に対しては L-S の猫の定義において、「閉集合」を「包含写像が homotopy 拡張性質を持つ (= NDR) 閉集合」に置き換えても、値は変わらない。 ところが猫的な NDR 閉集合 A に対する包含写像 $i^A : A \hookrightarrow X$ の null-homotopy は、恒等写像 $1_X : X \to X$ を変形して、A を基点に潰す写像 $r^A : X \to X$, $r^A(A) = \{*\}$ にする homotopy に拡張される。 従って $m{+}1$ 枚の猫的な NDR 閉集合によって X が覆われるとき、上の拡張された homotopy を並べることで $m{+}1$ 重対角写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ を「fat wedge」と呼ばれる部分空間 $\prod_m^{m+1} X = \{(x_0, x_1, ..., x_m) \big| \exists i \text{ s.t. } x_i = *\} \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮する homotopy が得られる。 本稿ではホモトピー論で標準的な次の定義を L-S の猫の定義として採用する:

定義 5.9 (G. W. Whitehead [145, 146])

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \ge 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{The } m{+}1\text{-fold diagonal map } \Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \text{ is} \\ \text{compressible into } \prod_m^{m+1} X \subseteq \prod^{m+1} X. \end{array} \right\}$$

(この $\prod_m^{m+1}(X) = \{(x_0, x_1, ..., x_m) \big| \exists_i x_i = *\}$ は「fat wedge」などと呼ばれる)

定理 5.10 (**L-S [91], Takens [133], James [77], Whitehead [146]**) (1) 閉多様体 M に対して不等式「$\mathrm{cat}(M){+}1 \le \mathrm{gCat}(M){+}1 \le \mathrm{Ball}(M) \le \mathrm{Crit}(M) \le \mathrm{Dim}(M) + 1$」が成立する。

(2) CW 複体 X に対して不等式「$\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{gCat}(X)$」が成立する。

上の (2) に挙げた不等式を用いて、Ganea の「強い」猫が次のように与えられる：

定義 5.11 (Ganea [46]) 位相空間 X に対して、X とホモトピー同値な CW 複体 Y 全体を考え、$\mathrm{gCat}(Y)$ の最小値を $\mathrm{Cat}(X)$ で表すことにする。

Ganea は cone-length などと呼ばれる「強い」猫のもう一つの定義を与えている。

定義 5.12 連続写像 $A \xrightarrow{h} B$ に対する写像錐 C_h とは、位相和 $\{*\} \amalg A{\times}[0,1] \amalg B$ から $(a,1) \in A{\times}[0,1]$ と $h(a) \in B$ とを、また $(a,0) \in A{\times}[0,1]$ と $*$ とを、さらに $(*,t) \in A{\times}[0,1]$ と $*$ とを同一視して得られる商空間である。 また B は、包含写像 $B \hookrightarrow \{*\} \amalg A{\times}[0,1] \amalg B$ と等化写像 $\{*\} \amalg A{\times}[0,1] \amalg B \to C_h$ の合成写像にによりり C の閉部分空間とみなされる。

定義 5.13 (Ganea [46]) 位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : A_n \to Y_{n-1} \;\; m \geq n \geq 1\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_n = C_{h_{n-1}}$ $(m \geq n \geq 1)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？ その最少数を $\mathrm{Cone}(X)$ で表す。

定理 5.14 (**Ganea [46]**) 位相空間 X に対して常に $\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$ であり、等式 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}(Y)\,;\, Y \simeq X \vee Z \text{ for some } Z\}$ が成立し、従って $\mathrm{Cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$ である。

略証: (前半) $\mathrm{Cone}(X)$ の値による帰納法を用いて「$\mathrm{Cone}(X) \geq \mathrm{Cat}(X)$」が示される。 また逆向きの不等号は、$\mathrm{Cat}(X)$ の値による帰納法で示される。

(後半) $\mathrm{cat}(X) \leq m$ となる為には、$\mathrm{Cone}(Y) \leq m$ をみたす空間 Y で $Y \simeq X \vee Z$ となるものが存在することが必要十分であることが示される。 終り.

系 5.14.1 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}(Y)\,;\, Y \text{ dominates } X\}$

Cornea は $A_n = \Sigma^n B_n$ に限定して「強い」猫の新たな定義を与えた。

定義 5.15 (Cornea [23]) 位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : \Sigma^n B_n \to Y_n \;\; m \geq n \geq 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = C_{h_n}$ $(m{-}1 \geq n \geq 0)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。 各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？ その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{Cl}(X)$ で表すことにする。

定理 5.16 (**Cornea [25]**) 位相空間 X に対して「$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cat}(X)$」が成立する。

以上のように「強い猫」は本質的には unique であることが分かっている。

さらに $\Sigma^n B_n$ として球面の一点和をとることで有理ホモトピー論における cone-length $\mathrm{cl}(X)$ に類似した不変量 $\mathrm{Cat}_S(X)$ が得られ、これを用いて $\mathrm{cat}_S(X)$ が次のように定義される。

定義 5.17 $\mathrm{cat}_S(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}_S(Y)\,;\, Y \text{ dominates } X\}$.

定理 5.18 (**L-S [91], James [77], Takens [133, 134], Ganea [46]**) (1) 閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Cat}(M) \le \mathrm{cat}(M){+}1 \le \mathrm{Cat}(M){+}1 \le \mathrm{gCat}(M) + 1 \le \mathrm{Ball}(M) \le \mathrm{Crit}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1.$$

(2) CW 複体 X に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Cat}(X){-}1 \le \mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X) \le \mathrm{gCat}(X) \le \mathrm{Dim}(X).$$

定理 5.19 (1) 閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{cat}_S(M){+}1 \le \mathrm{Cat}_S(M){+}1 \le \mathrm{CV}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1.$$

(2) CW複体 X に対して、不等式「$\mathrm{cat}_S(X) \le \mathrm{Cat}_S(X) \le \mathrm{Dim}(X)$」が成立する。

$|\,\mathrm{Cat}_S(X) - \mathrm{cat}_S(X)|$ などについては不明な点が多く、これらについてこれ以上は立ち入らない。

5.3 古典的な弱い猫たち

L-S の猫や強い猫たちに比べてより弱い不変量ではあるが、より計算の可能性が高い猫たちが幾つか知られている。 そのうちの古典的なものを以下に述べる。

定義 5.20 (Whitehead [145, 146])

$$\mathrm{wcat}(X) = \mathrm{Min}\left\{m \ge 0 \,\middle|\, \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \to \bigwedge^{m+1} X \text{ is null-homotopic}\right\}$$

このとき $\bigwedge^{m+1} X = \dfrac{\prod^{m+1} X}{\prod^{m+1}_m X}$ に注意すれば位相空間 X に対して次が成立する。

定理 5.21 (**G. W. Whitehead [145, 146]**) (1) $\mathrm{wcat}(X) \le \mathrm{cat}(X)$.

(2) h^* を乗法的な一般コホモロジー論とする。 $\tilde{h}^*(X)$ のどれかの m 個の元の積が 0 でないならば、$\mathrm{wcat}(X) \ge m$ が成立する。

略証: まず (1) は、$\mathrm{cat}(X) = m$ とすると、$\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が $\prod^{m+1}_m X$ に compressible であることから、reduced diagonal $\bar{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1} X$ は零ホモトープであり、従って定義から $\mathrm{wcat}(X) \le m = \mathrm{cat}(X)$ が成立する。 次に (2) は対偶を示す: $\mathrm{wcat}(X) < m$ とすると、定義から $\bar{\Delta}^m : X \to \wedge^m X$ は零ホモトープである。 さらに $\bar{h}^*(X)$ の任意の m 個の元の積は

$$\bar{h}^*(X)\otimes_{h^*}\cdots\otimes_{h^*}\bar{h}^*(X) \longrightarrow \bar{h}^*(X\wedge\cdots\wedge X) \xrightarrow{\bar{\Delta}^{m*}} \bar{h}^*(X)$$

の像に入り、$\bar{\Delta}^{m*} = 0$ なのですべて 0 である。 終り.

定義 5.22 位相空間 X に対して cup-length を定める。 cup-length は有理ホモトピー論では c($-$) と表示されるが、 ここでは (total) Chern class との競合を避けて cup($-$) と表示する：

(1) h を乗法的コホモロジー論とするとき、

$$\mathrm{cup}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \forall_{\{u_0,\cdots,u_m\in\tilde{h}^*(X)\}}\ u_0{\cdot}u_1{\cdot}\cdots{\cdot}u_m = 0\right\}$$ と定める。

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{cup}(X;h)\,|h$ は乗法的コホモロジー論$\}$と定める。

定理 5.23 任意の乗法的コホモロジー論 $h^*(-)$ に対し次の不等式／等式が成立する：

(1) $\mathrm{cup}(X;h)\ \leq\ \mathrm{cup}(X)\ \leq\ \mathrm{wcat}(X)\ \leq\ \mathrm{cat}(X).$

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \tilde{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1}X \text{ は stably trivial}\right\}$

証明: (1) は定義より明らかである。 そこでここでは (2) を証明する： 始めに m = (右辺) とすれば、cup-length の定義より直ちに $\mathrm{cup}(X) \leq m$ を得る。 次に、逆向きの不等号を示す：まず、空間 X の懸垂 spectrum の多重スマッシュ積 $\bigwedge^i(X) = \bigwedge^i\Sigma^\infty X = \Sigma^\infty\bigwedge^i X$ $(i \geq 0)$ の無限 wedge 和で表される次のような乗法的 spectrum $\mathcal{E}_X$ をとり、$h_X(-) = \{(-), \mathcal{E}_X\}$ と定義する：

$$\mathcal{E}_X = (S^0) \vee (X) \vee \textstyle\bigwedge^2(X) \vee \cdots \vee \bigwedge^m(X) \vee \bigwedge^{m+1}(X) \vee \cdots .$$

そして $\iota \in \tilde{h}^*_X(X) = \{(X), \mathcal{E}_X\}$ を wedge 和について$\mathcal{E}_X$ の 2 番目の因子 (X) の $\mathcal{E}_X$ への包含写像で表される要素とすると、$\iota^m = \bar{\Delta}^{m*}(\iota\otimes\cdots\otimes\iota) \in \tilde{h}^*_X(X) = \{(X), \mathcal{E}_X\}$ は $\bar{\Delta}^m : X \to \bigwedge^m X$ で代表される$\mathcal{E}_X$ の m+1 番目の因子 $\bigwedge^m(X)$ の $\mathcal{E}_X$ への包含写像で表される要素なので、m の取り方から non-trivial である。従って $\mathrm{cup}(X) \geq \mathrm{cup}(X;h_X) \geq m$ を得る。 終り.

また位相空間が単連結の場合、これらの弱い猫たちと L-S の猫は全てを p-local で考えることにより、p-local version である $\mathrm{cup_p}(-), \mathrm{wcat}_p(-), \mathrm{cat_p}(-), \mathrm{Cat_p}(-)$ とその間の不等式を得る。

$$\mathrm{cup}(X) \ \le\ \mathrm{wcat}(X) \ \le\ \mathrm{cat}(X) \ \le\ \mathrm{Cat}(X),$$

$$\mathrm{cup_p}(X) \le \mathrm{cup}(X), \quad \mathrm{wcat}_p(X) \le \mathrm{wcat}(X), \quad \mathrm{cat_p}(X) \le \mathrm{cat}(X), \quad \mathrm{Cat_p}(X) \le \mathrm{Cat}(X),$$

$$\mathrm{cup_p}(X) \ \le\ \mathrm{wcat}_p(X) \ \le\ \mathrm{cat_p}(X) \ \le\ \mathrm{Cat_p}(X).$$

6 L–S の猫の相対化

6.1 Categorical sequence

Fox は [43] の中で、空間 X に対する `categorical sequence' という概念を定義した: $* \simeq F_0 \subset \cdots \subset F_i \subset \cdots \subset F_m = X$ を満たす X の部分空間の列で、各々の $i > 0$ について $F_i \smallsetminus F_{i-1}$ が X の中で可縮であるという条件を満たすものである。 Fox によればその最小値は $\mathrm{cat}(X)$ に等しい。

上のような categorical sequence の定義に対し、通常の L-S カテゴリ数の定義と同様な対角線写像を用いた定義への置き換えを与える為に、Fadell と Husseini [35] による相対 L-S カテゴリ数の定義に立ち返ってみよう: 相対空間 $(X;A)$ に対して、$m{+}1$ 枚の閉集合 U_j, $0 \le j \le m$ による X の被覆で $U_0 \supset A$ は X の中で A 相対ホモトピーで A に圧縮可能であり、$j \ge 1$ に対する U_j は X の中で可縮であるようなものがとれる最小の m を $\mathrm{cat^{FH}}(X;A)$ とする。 通常の L-S カテゴリ数の場合と同様に、相対空間 $(X;A)$ に対する上記の相対 L-S カテゴリ数の定義を対角線写像を用いて以下のように書き直す。

定義 6.1 相対空間 $(X;A)$ に対して、$m{+}1$ 重対角線写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が A 相対で $\mathrm{T}^{m+1}(X;A) = A\times \prod^m X \cup X\times \mathrm{T}^m X \subseteq \prod^{m+1} X$ (対 $(X;A)$ の `fat wedge') に圧縮可能となるような最小の m を $\mathrm{cat^{FH}}(X;A)$ と定義する。

Cornea は [27] の中で Harper のアイデアを用いて、相対 L-S カテゴリ数の定義を次のように緩めても変わらないことを示した:

定理 6.2 相対空間 $(X;A)$ に対して、$m{+}1$ 重対角線写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が写像 $s : X \to \mathrm{T}^{m+1}(X;A) \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮可能かつ $s|_A = \Delta^{m+1}|_A : A \to \prod^{m+1} A \subset \mathrm{T}^{m+1}(X;A)$ となるような最小の m が $\mathrm{cat^{FH}}(X;A)$ と一致する。

この定義を踏まえて categorical sequence の新しい定義を次のように与える:

定義 6.3 空間 X に対して、$* \simeq F_0 \subset \cdots \subset F_i \subset \cdots \subset F_m \simeq X$ を満たす空間列が categorical sequence とは、各々の $i > 0$ について対角線写像 $\Delta_i : F_i \xrightarrow{\Delta} F_i{\times}F_i \subset F_m{\times}F_m$ が F_{i-1} 相対で $F_{i-1}{\times}F_m \cup F_m{\times}*$ に圧縮可能となることとする。 そこで、X に対して存在する categorical sequence の最小の長さ m を $\mathrm{catlen}(X)$ と定義する。 ここで F_{i-1} とその対角線写像による $F_{i-1}{\times}F_{i-1} \subset F_{i-1}{\times}F_m \cup F_i{\times}*$ の中の像の全体を同一視する。

Fadell と Husseini による相対 L-S カテゴリ数と Fox による categorical sequence を併せて考えることにより、我々は、次のような意味で categorical sequence の相対化を与えることができる。

定義 6.4 相対空間 $(X;A)$ に対して、$(A;A) \simeq (F_0;A) \subset \cdots \subset (F_i;A) \subset \cdots \subset (F_m;A) \simeq (X;A)$ を満たす相対空間列が categorical sequence とは、各々の $i > 0$ について対角線写像 $\Delta_i : F_i \xrightarrow{\Delta} F_i{\times}F_i \subset F_m{\times}F_m$ が F_{i-1} 相対で $F_{i-1}{\times}F_m \cup F_m{\times}*$ に圧縮可能となることとする。 そこで、$(X;A)$ に対して存在する categorical sequence の最小の長さm を $\mathrm{catlen}(X;A)$ と定義する。

6.2 三系の L–S カテゴリ数

相対 L-S カテゴリには、Berstein と Ganea によって [13] の中で与えられたもう一つの (本質的に異なる) 定義が存在し、「写像の L-S カテゴリ」とも呼ばれる:

定義 6.5 (Berstein and Ganea) 空間対 (X,K) に対して、$m{+}1$ 重対角線写像 $\Delta^{m+1} : K \to \prod^{m+1} K \subset \prod^{m+1} X$ が $\mathrm{T}^{m+1} X \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮可能となる最小の m を $\mathrm{cat}^{\mathrm{BG}}(X,K)$ と定義する。

さらに近年これらの相対 L-S カテゴリ数と本質的に異なるカテゴリ数 $\mathrm{cat}^{\mathrm{AL}}(p)$ が写像 $p : X \to B$ に対し Arkowitz と Lupton により (正確な定義はここでは述べない) [3] で与えられた。 ここでは $\mathrm{cat}^{\mathrm{FH}}(X;A)$、$\mathrm{cat}^{\mathrm{BG}}(X,K)$ や $\mathrm{cat}^{\mathrm{AL}}(p)$ の関係に注目し、これらを特殊な場合とする新たな L-S カテゴリ数を導入する。

今から後は、ϕ 相対空間の圏 $\underline{K}^{\phi}$ の中で小論を進めることとする。

定義 6.6 ϕ 相対空間の三系 $(X;K,L;A) \in \underline{K}^{\phi}$ に対して、$m{+}1$ 重対角線写像 $\Delta^{m+1} : K \to \prod^{m+1} K \subseteq \prod^{m+1} X$ が ϕ 相対で $\mathrm{T}^{m+1}(X,L) = L{\times}\prod^m X \cup X{\times}\mathrm{T}^m X \subseteq \prod^{m+1} X$ (ϕ 相対空間対 (X,L) の `fat wedge') に圧縮可能となる最小の m を $\mathrm{cat}(X;K,L;A)$ と定義する。

系 6.6.1 ϕ 相対空間 $(X;A)$ に対して、$(A;A) \simeq (F_0;A) \subset \cdots \subset (F_i;A) \subset \cdots \subset (F_m;A) \simeq (X;A)$ を満たす ϕ 相対空間の列が categorical sequence となる為には、各々の $i > 0$ について $\mathrm{cat}(F_m;F_i,F_{i-1};F_{i-1}) \leq 1$ となることが必要十分である。

次の命題は定義から容易に得られる。

命題 6.7　(1) $X \supset K \supset L = A = *$ とすると、 $\mathrm{cat}(X; K, *; *) = \mathrm{cat}^{\mathrm{BG}}(X, K)$ が成立する。

(2) $X = K \supset L = A \supset *$ とすると、 $\mathrm{cat}(X; X, A; A) = \mathrm{cat}^{\mathrm{FH}}(X; A)$ が成立する。

(3) $p : X \to B$ をファイバー $L \subset X$ を持つファイバー空間とし、 $K = X \supset L \supset A = *$ とすると、 $\mathrm{cat}(X; X, L; *) = \mathrm{cat}^{\mathrm{AL}}(p)$ が成立する。

複雑化した L-S カテゴリ数の定義はこのように統一されるが、さらに重要なのは次が成立することである。

予想 1　$\mathrm{catlen}(X) = \mathrm{cat}(X)$.

7 L–S の猫の計算

7.1 L–S の猫の一般的性質

例 7.1 (1) $\mathrm{cat}(\{*\}) = 0$. より一般に可縮な空間 D に対し $\mathrm{cat}(D) = 0$ が成立する。

(2) $\mathrm{cat}(S^n) = 1$. より一般に懸垂空間 ΣV に対し $\mathrm{cat}(\Sigma V) \leq 1$ が成立する。

(3) 位相空間 X が位相空間 Y を支配すれば、 $\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。 特に、 位相空間 X が位相空間 Y とホモトピー同値ならば、 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

(4) (Varadarajan [142], Hardie [53]) F を fibre とする fibre 束 $p : E \to B$ は不等式 $\mathrm{cat}(E)+1 \leq (\mathrm{cat}(F)+1)\cdot(\mathrm{cat}(B)+1)$ をみたす。

(5) (Fox [43]) 位相空間 X, Y に対して、 $\mathrm{cat}(X{\times}Y) \leq \mathrm{cat}(X) + \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

定理 7.2 (**Ganea [46]**) $(d{-}1)$ 連結 $(d \geq 2)$ な位相空間 X は $\mathrm{Cat}(X) \leq \dfrac{\mathrm{Dim}(X)}{d}$ を満たす。

略証: X の $(d{-}1)$-skeleton は $\{*\}$ であるとしてよい。 まず $k \geq 0$ に対し X_k を X の $((k{+}1)d - 1)$-skeleton とする。 商空間 X_{k+1}/X_k の次元と連結性の関係から、これは何らかの空間 K_k の懸垂である: $X_0 = \{*\}$、$X_1 \simeq \Sigma K_1$ また $X_{k+1}/X_k \simeq \Sigma K_k$。 よって $X_1 \simeq X_0 \cup_{h_0} C(K_0),\ h_0 = * : K_0 \to \{*\}$ である。 さて $k \geq 1$ のとき Blakers-Massey の定理から商写像 $p : (X_{k+1}, X_k) \to (X_{k+1}/X_k, \{*\})$ は $q < (k{+}2)d{-}1$ で同型となり、$q = (k{+}2)d{-}1$ で全射となる準同形 $p_* : \pi_q(X_{k+1}, X_k) \to \pi_q(X_{k+1}/X_k)$ を誘導する。 従って $\Omega(p) : \Omega(X_{k+1}, X_k) \to \Omega(X_{k+1}/X_k)$ は $(k{+}2)d{-}2$ 連結である。 $\mathrm{Dim}(K_k) \leq (k{+}1)d - 2$ より、J. H. C. Whitehead の定理より

$$[C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k] = [K_k, \Omega(X_{k+1}, X_k)] \to [K_k, \Omega(X_{k+1}/X_k)] = [\Sigma K_k, \Sigma K_k]$$

は全射となる。 右辺の ΣK_k の恒等写像に対応する写像 $\chi_k \in [C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k]$ を左辺から選び、$h_k = \chi_k|_{K_k} : K_k \to X_k$ とおけば $X_{k+1} \simeq X_k \cup_{h_k} C(K_k),\ h_k : K_k \to X_k\ (k \geq 1)$ を得る。 これは $\mathrm{Cat}(X_m) \leq m\ (m \geq 0)$ を意味する。 そこで $\mathrm{Dim}(X) = nd + r,\ 0 \leq r < d$ とすると、$\mathrm{Dim}(X) \leq (n{+}1)d - 1$ より $\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Cat}(X_n) \leq n \leq \frac{\mathrm{Dim}(X)}{d}$ を得る。 終り.

懸垂空間 ΣA は co-group-like なコホップ空間であり、$i_t : \Sigma A \hookrightarrow \Sigma A \vee \Sigma A$ を第 t 成分への包含写像 $(t = 1, 2)$、$p_t : \Sigma A \vee \Sigma A \to \Sigma A$ を第 t 成分への射影 $(t = 1, 2)$ とすると、$p_{s*} i_t = \delta_{s,t} \cdot 1_{\Sigma A}$ ($\delta s, t$ は Kronecker の delta) が成立する。 また $\mathrm{ev}^X : \Sigma\Omega(X) \to X$ は代入写像とする。

定理 7.3 (Ganea [47]) 位相空間 A, B に対する次の群の系列は、短完全列である：

$$1 \to [\Sigma B, \Omega(\Sigma A) * \Omega(\Sigma A)] \xrightarrow{[e_1,e_2]_*} [\Sigma B, \Sigma A \vee \Sigma A] \xrightarrow{p_{1*} \times p_{2*}} [\Sigma B, \Sigma A] \times [\Sigma B, \Sigma A] \to 1.$$

(写像 $i_{1*} \times i_{2*}$ が $p_{1*} \times p_{2*}$ の右逆写像を与える)　ただし $[e_1, e_2]$ は $e_1 = i_1 \circ \mathrm{ev}^{\Sigma A}$ と $e_2 = i_2 \circ \mathrm{ev}^{\Sigma A}$ との一般 Whitehead 積である。 $\Sigma A \times \Sigma A$ 上にあるこの fibration を diagonal map $\Delta : \Sigma A \to \Sigma A \times \Sigma A$ によって ΣA 上に誘導してできる Ganea [47]の fibration $\Omega(\Sigma A) * \Omega(\Sigma A) \xrightarrow{p_1^{\Omega\Sigma A}} \Sigma\Omega\Sigma A \xrightarrow{e_1^{\Sigma A}} \Sigma A$ は、Hopf 空間 $\Omega\Sigma A$ に対する Sugawara の Hopf fibration に一致し、次の短完全列を導く：

$$1 \to [\Sigma B, \Omega(\Sigma A) * \Omega(\Sigma A)] \xrightarrow{{p_1^{\Omega\Sigma A}}_*} [\Sigma B, \Sigma\Omega\Sigma A] \xrightarrow{{e_1^{\Sigma A}}_*} [\Sigma B, \Sigma A] \to 1,$$

(写像 $\Sigma_* \,\mathrm{ad}_*$ と準同形 $\sigma(\Sigma A)_*$ とがともに ${e_1^{\Sigma A}}_*$ の右逆写像を与える) ただし $\sigma(\Sigma X)$は$\sigma(\Sigma X)(t, x) = (t, \ell_x)$, $\ell_x(u) = (u, x)$ により与えられる。 従っていかなる写像 $f : \Sigma B \to \Sigma A$ に対しても $e_1^{\Sigma A} \circ \sigma(\Sigma A) \circ f \simeq f \simeq e_1^{\Sigma A} \circ \Sigma \,\mathrm{ad}\, f = e_1^{\Sigma A} \circ \Sigma\Omega f \circ \sigma(\Sigma B)$, $\mathrm{ad}(f)(b) = f \circ \ell_b$ が成立する。

定義 7.4 (B-H [14]) 任意の写像 $f : \Sigma B \to \Sigma A$ に対し $p_1^{\Omega\Sigma A} \circ g \simeq \sigma(\Sigma A) \circ f - \Sigma\Omega f \circ \sigma(\Sigma B)$ をみたす $g : \Sigma B \to \Omega(\Sigma A) * \Omega(\Sigma A)$ が up to homotopy で一意的に存在する (Saito [114])。　この g を $H_1(f)$ で表し、Berstein-Hilton の (一次の) Hopf 不変量と言う。

注 7.5 Berstein-Hilton による本来の (高次) Hopf 不変量 H_m は Whitehead の criterion に従い、ホモトピー集合 $[C\Sigma B, \Sigma B; \prod^{m+1} X, \prod_m^{m+1} X]$ ($m{=}1 \& X{=}\Sigma A$ の場合は $[C\Sigma B, \Sigma B; \Sigma A \times \Sigma A, \Sigma A \vee \Sigma A]$) に値を持つ。　一方で定義 7.4 における H_1 の定義もループ空間の A_∞ 構造を用いて一般化され高次 Hopf 不変量のもう一つの定義を与える。　これら二つの定義が等価であることも I [69], Stanley [124]) により明らかにされたが、新しい定義にはいくらかの利点がある。　なぜなら我々は A_∞ 構造の強力な性質を使えるようになるからである。

定理 7.6 **(B-H [14])** 任意の写像 $f : S^q \to S^r$ に対して、接着空間 $Q = S^r \cup_f e^{q+1}$ の L-S の猫は「$\mathrm{cat}(Q) = 1$ iff $H_1(f) = 0$」かつ「$\mathrm{cat}(Q) = 2$ iff $H_1(f) \neq 0$」をみたす。

7.2 L-S の猫の計算と問題

例 7.7　(1) $\mathrm{cat}(S^{n_1} \times S^{n_2} \times \cdots \times S^{n_r}) = r$, $n_i \geq 1$, $(1 \leq i \leq r)$. 特に $\mathrm{cat}(T^r) = r$, $r \geq 1$.

(2) (Singhof [120, 121]) $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{cup}(U(n)) = \mathrm{cat}(U(n)) = \mathrm{Cat}(U(n)) \; (= n = \mathrm{cup}(U(n); \mathbb{Z}),$$

$$\mathrm{cup}(SU(n)) = \mathrm{cat}(SU(n)) = \mathrm{Cat}(SU(n)) \ (= n-1 = \mathrm{cup}(SU(n); \mathbb{Z}).$$

(3) (James-Singhof [79]) $2 \leq n \leq 8$ に対して

$$\mathrm{cup}(SO(n)) = \mathrm{cat}(SO(n)) = \mathrm{Cat}(SO(n)) \ (= \mathrm{cup}(SO(n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

(4) (I-Mimura [72], I-Mimura-Nishimoto [73]) $3 \leq n \leq 8$ に対して

$$\mathrm{cup}(Spin(n)) = \mathrm{cat}(Spin(n)) = \mathrm{Cat}(Spin(n)) \ (= \mathrm{cup}(Spin(n); KO)?)$$

(5) (Schweitzer [118], Fernándes Suárez-Gómez Tato-Tanré-Strom [40], I-M [72])

$$\mathrm{cup}(Sp(n)) = \mathrm{cat}(Sp(n)) = \mathrm{Cat}(Sp(n)) \ (= 2n-1), \ n \leq 3.$$

この章の最後に、古典的な問題とその問題に対する幾つかの解答を挙げる。

問題 7.8 2 次元 torus T^2 上に、 T^2 を覆う 3 枚の closed disks を図示せよ。

この解答は、小論の最初のページに載せてある。

次の問題の肯定的な解答は通常 Arnold 予想と呼ばれる。

問題 7.9 (**Arnold 196x (p.66 of [20])**) Symplectic 多様体 M 上の Symplecto-morphism $\phi : M \to M$ の固定点の個数 $\mathrm{Fix}(\phi)$ は常に $\mathrm{Crit}(M)$ 以上あるか？

また次の問題の肯定的な解答は通常 Ganea 予想と呼ばれる。

問題 7.10 (**Ganea 1971 [48]**) $\mathrm{cat}(X \times S^n)$ の値は $\mathrm{cat}(X) + 1$ となるか？

定理 7.11 (**Singhof 1979 [123], Rudyak 1997 [111]**) 閉多様体 M が次元 $\mathrm{Dim}(M) = d$ と L-S の猫 $\mathrm{cat}(M) = m$ に関する不等式 $m \geq \dfrac{d+1}{2}$ をみたすならば、 Ganea の予想は正しい。　つまりすべての $n \geq 1$ について $\mathrm{cat}(M \times S^n) = m+1$ が成立する。

定理 7.12 (**Hofer 1988 [58], Floer 1989 [41, 42]**) 任意の Symplectic 多様体 M に対して、 $\mathrm{Fix}(\phi) \geq \mathrm{cup}(M)+1$ が成立する。

定理 7.13 (**Hess 1991 [55]**) 有理ホモトピー論の世界では Ganea 予想は正しい。

そして '90 年代末以後、これらの問題は急展開を迎えた。

定理 7.14 (**Félix-Halperin-Lemaire 1998 [37]**) 有理ホモトピー論の世界では、 直積空間の猫は各々の空間の猫の和に一致する。

定理 7.15 (**Liu-Tian 1998 [90], Fukaya-Ono 1999 [45]**) M を Symplectic 多様体とする。 緩い条件の下で、固定点が非退化である場合に Arnold 予想が成立する。

定理 7.16 (**I 1998 [67]**) Ganea の予想を満たさない単連結な位相空間が存在する。

定理 7.17 (**Rudyak 1999 [113], Oprea-Rudyak 1999 [109]**) 任意の Symplectic 多様体 M に対し、$\pi_1(M)$ と $\pi_2(M)$ に関する弱い条件 ($\pi_2 = 0$ なら良い) の下で $\mathrm{cat}(M) = \mathrm{Crit}(M) - 1 = \mathrm{Dim}(M)$ が成立し、 Arnold 予想は (この場合) 正しい。

定理 7.18 (**I 2001 [69]**) Ganea の予想を満たさない単連結な閉多様体が存在する。

定理 7.19 (**I 2002 [69], Lambrechts-Stanley-Vandembroucq [92]**) 単連結閉多様体で、 その once-punctured 部分多様体と同じ L-S の猫の値を持つものが存在する。

定理 7.20 (**Oprea-Rudyak 2002 [110]**) 3 次元閉多様体は Ganea の予想を満たす。

定理 7.21 (**I 2003 [70]**) 球面上の球面束の構造を持つ閉多様体の猫は Hopf 不変量で完全に記述され、Ganea の予想が成立する場合と成立しない場合がともに現れる。

この講義ではこれらの発見に至った新たなホモトピー論的手法を導入し、前者が証明にいたり、後者が反例の発見にいたった過程の解説を試みたい。

第3章　ループ空間の A_∞ 構造

8　Ganea の空間

8.1　Ganea の fibre-cofibre 構成と homotopy pullback

CW 複体の間の写像 $f : K \to X$ に対して、fibre 空間 $P_f \xhookrightarrow{i_f} T_f \xrightarrow{q_f} X$ をとると、自明な包含写像 $K \hookrightarrow T_f$ はホモトピー同値を与え、$q_f : T_f \to X$ は $f : K \to X$ の拡張かつ $i_f : P_f \to T_f$ との合成写像は自明である:

$$q_f \circ i_f = * : P_f \hookrightarrow T_f \longrightarrow X, \quad q_f|_K = f, \quad K \overset{\simeq}{\hookrightarrow} T_f.$$

そこで $i_f : P_f \to T_f$ の homotopy cofibre $j_f : T_f \hookrightarrow C_{i_f} = T_f \cup C(P_f)$ を取り、$G(f) = C_{i_f}$ とおけば、$q_f : T_f \to X$ は $G(f) \supset T_f$ への自明な拡張 $e(f) : G(f) \to X$, $e(f)(C(P_f)) = *$ を持つ。 そこで、写像 $f : K \to X$ からその拡張 $e(f) : G(f) \to X$ を与える構成法を、Ganea の fibre-cofibre 構成と呼ぶ。

定義 8.1 CW 対 (X, A) に対してその包含写像を $f : A \hookrightarrow X$ とするとき、Ganea の fibre-cofibre 構成を f に対して m 回繰り返して得られる写像を $e_m^{(X,A)} : G_m(X, A) \to X$ で表す：

(1) $G_0(X, A) = A$ かつ $e_0^{(X,A)} = f$ である。

(2) $G_{m+1}(X, A) = G(e_m^{(X,A)})$ かつ $e_{m+1}^{(X,A)} = e(e_m^{(X,A)})$ である。

定理 8.2 (Ganea) 基点付き空間 X に対して、$\mathrm{cat}(X) \leq m$ となるには、$e_m^{(X,A)} : G_m(X) \to X$ にホモトピー右逆写像が存在することが必要十分である。　ただし、$G_m(X) = G_m(X, \emptyset)$ である。

注 8.3 与えられた写像 $f : K \to X$ に対する拡張 $f' : G(f) \to X$ は一意では無いことを注意する。

従って Ganea の fibre-cofibre 構成はその様な拡張の中に自然なものが存在することを示したものと考えることができるが、その構成はホモトピー圏の中での圏論的な構成とは言い難い。 実は $G_m(X)$ には、ホモトピー圏の中で圏論的にも自然な構成法 (cf. Iwase [67]) が存在する:

定義 8.4 CW 対 (X, A) に対して、包含写像 $k : \mathrm{T}^{m+1}(X, A) \hookrightarrow \prod^{m+1}(X, A)$ と対角線写像 $\Delta_{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ の homotopy pullback を $G_m(X, A)$ とし、誘導される X への自然な射影を $e_m^{(X,A)} : G_m(X, A) \to X$ とする。

この定義を採用すると、定理 8.2 は補題 3.4 から自明となる。

これ以後小論では、定義 8.4 による Ganea の空間の構成法を Ganea の fibre-cofibre 構成の繰り返しの代わりに採用する。 実は もう一つの標準的な構成が空間 X のループ空間の A_∞ 構造で与えられる:

定理 8.5 (Stasheff) CW 複体 X のループ空間に随伴する $\mathcal{A}_\infty$ 構造は、

(1) fibre 列 $E^{m+1}(\Omega(X)) \overset{p_m^{\Omega(X)}}{\to} P^m(\Omega(X)) \overset{e_m^X}{\to} X, (m \geq 0)$ と

(2) cofibre 列 $E^{m+1}(\Omega(X)) \overset{p_m^{\Omega(X)}}{\to} P^m(\Omega(X)) \hookrightarrow P^{m+1}(\Omega(X)), (m \geq 0)$ および

(3) $P^0(\Omega(X)) = *, E^1(\Omega(X)) = \Omega(X)$ を満たすものとして与えられる。

実はこの $\mathcal{A}_\infty$ 構造は、定義 8.4 の構成と本質的には一致することが分かる。

8.2 pushout–pullback 補題

CW 対 (X, A), (Y, B) をとり、$i : A \subset X$ と $j : B \subset Y$ を包含写像とする。 さらに与えられた写像 $f : Z \to X$ と $g : Z \to Y$ に対して写像余錐と(二重)写像余柱をとる:

$$
\begin{aligned}
P_i &= \{(a, \ell_X) \in A \times T(X) | * = \ell_X(0), i(a) = \ell_X(1)\} \simeq \{\ell_X \in T(X) | * = \ell_X(0), \ell_X(1) \in A\}, \\
P_j &= \{(b, \ell_Y) \in B \times T(Y) | * = \ell_Y(0), j(b) = \ell_Y(1)\} \simeq \{\ell_Y \in T(Y) | * = \ell_Y(0), \ell_Y(1) \in B\}, \\
T_{i,f} &= \{(z, \ell_X) \in Z \times T(X) | f(z) = \ell_X(0), \ell_X(1) \in A\}, \\
T_{j,g} &= \{(z, \ell_Y) \in Z \times T(Y) | g(z) = \ell_Y(0), \ell_Y(1) \in B\},
\end{aligned}
$$

同様に写像 $i{\times}j : A{\times}B \subset X{\times}Y$, $k : X{\times}B{\cup}A{\times}Y \subset X{\times}Y$ と $(f, g) = (f{\times}g)\Delta_Z : Z \to X{\times}Y$ に対して

$$
\begin{aligned}
P_{i\times j} &= \{(\ell_X, \ell_Y) \in T(X) \times T(Y) | * = \ell_X(0), * = \ell_Y(0), \ell_X(1) \in A, \ell_Y(1) \in B\} = P_i{\times}P_j, \\
P_k &= \{(\ell_X, \ell_Y) \in T(X) \times T(Y) | * = \ell_X(0), * = \ell_Y(0) \,\mathrm{and}\, (\ell_X(1), \ell_Y(1)) \in A{\times}Y{\cup}X{\times}B\}, \\
T_{i\times j,(f,g)} &= \{(z, \ell_X, \ell_Y) \in Z \times T(X) \times T(Y) | f(z) = \ell_X(0), g(z) = \ell_Y(0), (\ell_X, \ell_Y) \in P_{i\times j}\}, \\
T_{k,(f,g)} &= \{(z, \ell_X, \ell_Y) \in Z \times T(X) \times T(Y) | f(z) = \ell_X(0), g(z) = \ell_Y(0), (\ell_X, \ell_Y) \in P_k\}.
\end{aligned}
$$

をとり、自然な射影 $\phi : T_{i\times j,(f,g)} \to T_{i,f}$ と $\psi : T_{i\times j,(f,g)} \to T_{j,g}$ を次で与える:

$$
\phi(z, \ell_X, \ell_Y) = (z, \ell_X), \quad \psi(z, \ell_X, \ell_Y) = (z, \ell_Y).
$$

このとき、次の補題を得る。

補題 8.6 CW 対 (X, A), (Y, B) と CW 複体 Z、および写像 $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ に対して、写像 $(f, g) : Z \to X{\times}Y$ と $k : X{\times}B{\cup}A{\times}Y \subset X{\times}Y$ の homotopy pull-back $T_{k,(f,g)}$ は自然に

$\phi : T_{i\times j,(f,g)} \to T_{i,f}$ と $\psi : T_{i\times j,(f,g)} \to T_{j,g}$ の homotopy push-out のホモトピー型を持つ：

$$\begin{tikzcd}
T_{i\times j,(f,g)} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & T_{i,f} \arrow[d, hook] & \\
T_{j,g} \arrow[r, hook] & T_{k,(f,g)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X\times B \cup A\times Y \arrow[d, hook, "k"] \\
& Z \arrow[r, "(f,g)"] & X\times Y
\end{tikzcd}$$

略証: まず $E = T_{k,(f,g)}$ の部分空間 E_1, E_2 および E_0 を次のように定める:

$$E_1 = \{(z,\ell_X,\ell_Y) \in E | \ell_Y(1) \in B\} \supset \{(z,k(f(z)),\ell_Y) \in E | \ell_Y(0) = g(z), \ell_Y(1) \in B\} \simeq T_{j,g},$$

$$E_2 = \{(z,\ell_X,\ell_Y) \in E | \ell_X(1) \in A\} \supset \{(z,\ell_X,k(g(z))) \in E | \ell_X(0) = f(z), \ell_X(1) \in A\} \simeq T_{i,f},$$

$$E_0 = \{(z,\ell_X,\ell_Y) \in E | \ell_X(0) = f(z), \ell_Y(0) = g(z), \ell_X(1) \in A, \ell_Y(1) \in B\} = T_{i\times j,(f,g)},$$

ただし $k(w)$ は点 w での全く動かない道を表す。 このとき、$E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = E_0$ が直ちにえられ、さらに $T_{j,g}$ および $T_{i,f}$ が E_1 および E_2 の強変位レトラクトであることがわかる。 一方で E_0 の E_1 あるいは E_2 への包含写像は各々 ψ あるいは ϕ とホモトピックとなる。 従って E は (unreduced) homotopy push-out $\Omega_{j,g} \cup \{[0,1] \times \Omega_{i\times j,(f,g)}\} \cup \Omega_{i,f}$ のホモトピー型を持つことが分かる。 終り.

loop 空間 $\Omega(X)$ に対する Stasheff による A_∞-構造と元の空間 X の関係が次のように与えられる。

定理 8.7 連結な CW 複体 X に対し、 次が成立する。

(1) Ganea の空間 $\{G_m(X)\}$ は $\Omega(X)$ の A_∞ 構造を与える。

(2) 自然なホモトピー同値 $P^\infty(\Omega X) \simeq X$ が存在する。

略証: まず E^{m+1} を包含写像 $X^{[m+1]} \to X^{m+1}$ の homotopy fibre とし、P^m を次の homotopy pull-back で定義する:

$$\begin{tikzcd}
& X^{[m+1]} \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "\Delta_{m+1}"] & X^{m+1},
\end{tikzcd}$$

ただし $X^{[m+1]} = \mathrm{T}^{m+1}X = \{(x_0, ...x_m) \in X^{m+1} | x_t = * \text{ for some } t\}$ (fat wedge) であり、Δ_{m+1} は対角線写像である。

次に $Z=X$, $Y=X^m$, $f=1_X$, $g=\Delta_m$, $A=\{*\}$, $B=X^{[m]}$ とすれば、直ちに $\Omega_{k,(f,g)}=P^m$, $\Omega_{i,f}\simeq *$, $\Omega_{j,g}=P^{m-1}$ および、次の pull-back 図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
P_j \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{i\times j,(f,g)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PB"] & T_{i,f} \arrow[d] \\
P_j \arrow[r] & T_{j,g} \arrow[r] & Z.
\end{tikzcd}$$

ただし j は包含写像 $X^{[m]}\subset X^m$ であり、従って定義から $P_j=E^m$ である。

ここで $f=1_X$ かつ $A=\{*\}$ であるので、$T_{i,f}$ は可縮であり、$T_{i\times j,(f,g)}$ はこの場合、$T_{j,g}\to Z$ の fibre P_j にホモトピー同値である。 従ってこれらのデータに対して 補題 8.6 を用いれば、次のような pushout-pullback 図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}
E^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & P^{m-1} \arrow[d, hook] & \\
\{*\} \arrow[r, hook] & P^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X\times X^{[m]}\cup\{*\}\times X^m \arrow[d, hook, "k"] \\
& X \arrow[r, "\Delta_{m+1}"] & X\times X^m
\end{tikzcd}$$

ここで P^m, $m\geq 1$ は標準的な包含写像 $E^m\subset P^{m-1}$ の (unreduced) 写像錐のホモトピー型を持つことに注意すれば、同様に補題 8.6 を用いて、次の pushout-pullback 図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
\Omega X\times E^m \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & E^m \arrow[d, hook] & \\
\Omega X \arrow[r, hook] & E^{m+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X\times X^{[m]}\cup\{*\}\times X^m \arrow[d, hook, "k"] \\
& \{*\} \arrow[r, "*"] & X\times X^m
\end{tikzcd}$$

従って E^{m+1} は ΩX と E^m の (unreduced) 結のホモトピー型を持つ。 これはそのまま、$\{(E^{m+1},P^m);m\geq 0\}$ が Stasheff の意味での ΩX の A_∞-構造を与えることを意味する。 従って ∞-次の ΩX-射影空間 $P^\infty(\Omega X)$ は $\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, P^m\simeq X$ のホモトピー型を持つことがわかる。 終り.

Stasheff による、上の $\mathcal{A}_\infty$ 構造とともによく知られた $\mathcal{A}_\infty$ 形式とそれらの関係について、次節以降で圏論的な捉え方を用いた記述を試みよう。

9 $\mathcal{A}_\infty$ 構造を与える胞体

9.1 空間に対して $\mathcal{A}_\infty$ 構造を与える胞体

定義 9.1 空間の $\mathcal{A}_\infty$ 構造を与える Stasheff の胞体は次の凸集合で定義される ([125, 64, 100, 71])：

$$K(n) = \left\{(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \textstyle\sum_{i=1}^{j-1}(1-u_i) \geq u_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n-1}(1-u_i) = u_n \geq 1\right\},\ n{\geq}1.$$

注 9.2 $K(1) = \{(0)\}, K(2) = \{(0, 1)\}, K(3) = \{(0, t, 2-t)\,|\,0{\leq}t{\leq}1\} \approx [0, 1]$ である。

定義 9.3 $K(n)$ の境界作用素が次で定義される (通常は $1{<}t$ とする)：

$$\partial_j : K(t) \to \mathrm{Map}(K(r), K(n)),\quad 1{\leq}j{\leq}r,\ 2{\leq}r, t,\ r{+}t{=}n{+}1,$$

$$\partial_{j+1}(u_1, ..., u_t)(v_1, ..., v_r) = (v_1, ..., v_{j-1}, u_1, ..., u_{t-1}, u_t{+}v_j, v_{j+1}, ..., v_r).$$

このとき $L_j(r, t) = \partial_j(K(t))(K(r)) \subseteq K(n)$ $(1{\leq}j{\leq}r,\ 2{\leq}r, t,\ r{+}t{=}n{+}1)$ に対し次が成立する:

$$\partial K(n) = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq r,\ 2 \leq r, t,\\ r+t=n+1}} L_j(r, t).$$

命題 9.4 $\tau \in K(t), \sigma \in K(s)$ のとき、つぎが成立する：

$$\partial_k(\sigma){\circ}\partial_j(\tau) = \begin{cases} \partial_{j+s}(\tau){\circ}\partial_k(\sigma)), & k < j, \\ \partial_j(\partial_{k-j+1}(\sigma)(\tau)), & j \leq k < j{+}t, \\ \partial_j(\tau){\circ}\partial_{k-t+1}(\sigma)), & k \geq j{+}t. \end{cases}$$

逆に、上の関係式によっておのおのの面 $L_j(r, t)$ が境界を接することが分かる。

特に $K(n)$ の境界の一部に次の様に名前を付ける:

$$L(n) = \bigcup_{\substack{2 \leq r, t,\\ r+t=n+1}} L_1(r, t).$$

9.2 写像に対して $\mathcal{A}_\infty$ 構造を与える胞体

定義 9.5 写像の $\mathcal{A}_\infty$ 構造を与える胞体が次の凸集合で定義される ([64, 65, 100, 71])：

$$I^\varepsilon(n) = \left\{(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \textstyle\sum_{i=1}^{j-1}(1-v_i){+}\varepsilon \geq v_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n-1}(1-v_i){+}\varepsilon = v_n \geq 1\right\},\ (0{\leq}\varepsilon{\leq}1),\ n{\geq}1.$$

注 9.6 (1) $I^0(n)=K(n)$ であり、 $I^\varepsilon(n)\ni(u_1,...,u_n)$ を $(0,u_1,...,u_{n-1},u_n{+}1{-}\varepsilon)\in K(n{+}1)$ と同一視することで $I^\varepsilon(n)\subseteq K(n{+}1)$ とみなす。 従って、 $K(n{+}1)=I^1(n)$ とみなされる。

(2) $I^\varepsilon(1)=\{(\varepsilon)\}, I^\varepsilon(2)=\{(t,1{+}\varepsilon{-}t)\,|\,0{\le}t{\le}\varepsilon\}\approx[0,\varepsilon]$ である。

定義 9.7 $I^\varepsilon(n)$ の境界作用素が次で定義される (通常は $1{<}t$ とする):

$$\delta^\varepsilon_j:K(t)\to\mathrm{Map}(I^\varepsilon(r),I^\varepsilon(n)),\ 1{\le}j{\le}r,\ 2{\le}t,\ r{+}t{=}n{+}1,$$

$$\delta^\varepsilon_j(u_1,...,u_t)(v_1,...,v_r)=(v_1,...,v_{j-1},u_1,...,u_{t-1},u_t{+}v_j,v_{j+1},...,v_r),$$

$$\delta^\varepsilon:I^\varepsilon(n_1)\times\cdots\times I^\varepsilon(n_t)\to\mathrm{Map}(K(t),I^\varepsilon(n)),\ 1{\le}n_i\ (1{\le}i{\le}t),\ \textstyle\sum_{i=1}^t n_i{=}n,$$

$$\delta^\varepsilon(v^{(1)}_1,...,v^{(1)}_{n_1};\cdots;v^{(t)}_1,...,v^{(t)}_{n_t})(u_1,...,u_t)=(v^{(1)}_1,...,v^{(1)}_{n_1}{+}(1{-}\varepsilon)u_1;\cdots;v^{(t)}_1,...,v^{(t)}_{n_t}{+}(1{-}\varepsilon)u_t).$$

このとき $I^\varepsilon(n)$ の部分空間 $J^\varepsilon_j(r,t)=\delta^\varepsilon_j(K(t))(I(r))$ $(1{\le}j{\le}r,\ 2{\le}t,\ r{+}t{=}n{+}1)$ と$J^\varepsilon(n_1,...,n_t)=\delta^\varepsilon(K(t))(I^\varepsilon(n_1)\times\cdots\times I^\varepsilon(n_t))$ $(2{\le}t,\ 1{\le}n_i\ (1{\le}i{\le}t),\sum_{i=1}^t n_i{=}n)$ に対し次が成立する:

$$\partial I^\varepsilon(n)=\bigcup_{1\le j\le r,\ 2\le t,\ r+t=n+1}J^\varepsilon_j(r,t)\ \cup\bigcup_{\substack{2\le t,\ 1\le n_i\ (1\le i\le t)\\ \sum_{i=1}^t n_i=n}}J^\varepsilon(n_1,...,n_t).$$

命題 9.8 $\tau\in K(t),\sigma\in K(s)$ のとき、 つぎが成立する:

$$\delta^\varepsilon_k(\sigma)\circ\delta^\varepsilon_j(\tau)=\begin{cases}\delta^\varepsilon_{j+s}(\tau)\circ\delta^\varepsilon_k(\sigma)), & k<j,\\ \delta^\varepsilon_j(\partial_{k-j+1}(\sigma)(\tau)), & j\le k<j{+}t,\\ \delta^\varepsilon_j(\tau)\circ\delta^\varepsilon_{k-t+1}(\sigma)), & k\ge j{+}t.\end{cases}$$

$$\delta^\varepsilon_k(\sigma)\circ\delta^\varepsilon(\rho_1,...,\rho_t)=\delta^\varepsilon(\rho_1,...,\rho_{j-1},\delta^\varepsilon_{k'}(\sigma)(\rho_j),\rho_{j+1},...,\rho_t),\quad k=r_1{+}\cdots{+}r_{j-1}{+}k',1\le k'\le r_j.$$

$$\delta^\varepsilon(\rho_1,...,\rho_t)\circ\partial_j(\sigma)=\delta^\varepsilon(\rho_1,...,\rho_{j-1},\delta^\varepsilon(\rho_j,...,\rho_{j+s-1})(\sigma),\rho_{j+s},...,\rho_t).$$

逆に、 上の関係式によっておのおのの面 $J^\varepsilon_j(r,t),J^\varepsilon(n_1,...,n_t)$ が境界を接することが分かる。

さらに、$I^\varepsilon(n)$ の境界の一部をつぎのように定める。

定義 9.9 $J^\varepsilon(n)=\displaystyle\bigcup_{\substack{1\le t,\ 1\le n_i\ (1\le i\le t)\\ \sum_{i=1}^t n_i=n}}J^\varepsilon(n_1,...,n_t)=\{(0,t_1,...,t_n)\in I^\varepsilon(n)\,|\,\exists_i\,t_1{+}\cdots{+}t_i=i{-}1{+}\varepsilon\}.$

9.3 退化作用素

定義 9.10 全ての自然数 $n\ge1$ に対して、 写像 $\varphi:[0,\infty)^n\to[0,\infty)^n$ を次式で帰納的に定める:

$$\varphi(t_1,...,t_n)=(t'_1,...,t'_n),$$

$$t'_1=\mathrm{Max}\,\{0,t_1{-}1\},\quad t'_k=\mathrm{Min}\left\{t_k,\mathrm{Max}\left\{\textstyle\sum_{i=1}^j(t_i{-}1)\,;\,1{\le}j{\le}k\right\}-\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i{-}1)\right\},\quad k\ge2.$$

このとき、つぎの命題が定義から従う。

命題 9.11 全ての自然数 $k \leq n$ に対して、 $0 \leq t'_k \leq t_k$ である。

証明: まず $k = 1$ の場合を考える。 任意の実数 x に対して $0 \leq \mathrm{Max}\{0, x\}$ より $0 \leq \mathrm{Max}\{0, t_1 - 1\} = t'_1$ であり、$t'_1 = \mathrm{Max}\{0, t_1 - 1\} \leq \mathrm{Max}\{t_1, t_1\} = t_1$ である。

次に $k = \ell - 1, \ell \geq 2$ の場合まで正しいと仮定し $k = \ell$ の場合を考える。 任意の実数 x に対して $\mathrm{Min}\{t_\ell, x\} \leq t_\ell$ より $t'_\ell \leq t_\ell$ である。 さらに、$\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i - 1)\,;\, 1 \leq j \leq \ell\right\} \geq \sum_{i=1}^{\ell-1}(t_i - 1)$ より $t'_\ell \geq \mathrm{Min}\left\{t_\ell, \sum_{i=1}^{\ell-1}(t_i - 1) - \sum_{i=1}^{\ell-1}(t'_i - 1)\right\} = \mathrm{Min}\left\{t_\ell, \sum_{i=1}^{\ell-1}(t_i - t'_i)\right\}$ であり、帰納法の仮定から $t'_\ell \geq \mathrm{Min}\{t_\ell, 0\} = 0$ である。

従って帰納法が成立し、全ての自然数 $k \leq n$ に対して命題 9.11 が正しい。 終り.

命題 9.12 全ての自然数 $k \leq n$ に対して、 $\sum_{i=1}^{k}(t_i - t'_i) \leq 1$ である。

証明: まず $k = 1$ の場合を考える。 定義から $t'_1 \geq t_1 - 1$ であるので $\sum_{i=1}^{1}(t_i - t'_i) = t_1 - t'_1 \leq t_1 - (t_1 - 1) = 1$ である。

次に $k = \ell - 1, \ell \geq 2$ の場合まで正しいと仮定し $k = \ell$ の場合を考える。 定義から $\sum_{i=1}^{\ell}(t'_i - 1) = \mathrm{Min}\left\{\sum_{i=1}^{\ell-1}(t'_i - 1) + (t_\ell - 1), \mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i - 1)\,;\, 1 \leq j \leq \ell\right\} - 1\right\}$ より $\sum_{i=1}^{\ell}(t_i - t'_i) = \sum_{i=1}^{\ell}(t_i - 1) - \sum_{i=1}^{\ell}(t'_i - 1) = \mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{\ell-1}(t_i - t'_i), \sum_{i=1}^{\ell}(t_i - 1) - \mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i - 1)\,;\, 1 \leq j \leq \ell\right\} + 1\right\}$ である。 ここで $\sum_{i=1}^{\ell}(t_i - 1) \leq \mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i - 1)\,;\, 1 \leq j \leq \ell\right\}$ より $\sum_{i=1}^{\ell}(t_i - 1) - \mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i - 1)\,;\, 1 \leq j \leq \ell\right\} + 1 \leq 1$ であり、帰納法の仮定から $\sum_{i=1}^{\ell-1}(t_i - t'_i) \leq 1$ である。 よって $\sum_{i=1}^{\ell}(t_i - t'_i) \leq \mathrm{Max}\{1, 1\} = 1$ となる。

従って帰納法が成立し、全ての自然数 $k \leq n$ に対して命題 9.12 が正しい。 終り.

命題 9.13 (1) もし $t_1 \geq 1$ であるならば、 $t_1 - t'_1 = 1$ である。

(2) 自然数 $s \leq n$ が $s \geq 2$ のとき、 もし全ての自然数 $j < s$ に対して $\sum_{i=1}^{j} t_i \leq j - 1$ でありかつ $\sum_{i=1}^{s} t_i \geq s - 1$ であるならば、 $\sum_{i=1}^{s}(t_i - t'_i) = 1$ である。

証明: (1) 仮定から $t_1 \geq 1$ であれば、$t'_1 = \mathrm{Max}\{0, t_1 - 1\} = t_1 - 1$ より $t_1 - t'_1 = 1$ である。

(2) 仮定から $\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i - 1)\,;\, 1 \leq j \leq s\right\} = \sum_{i=1}^{s}(t_i - 1) \geq -1$ である。 一方で命題 9.12 より $\sum_{i=1}^{s-1}(t_i - t'_i) \leq 1$ であるので $\sum_{i=1}^{s}(t_i - t'_i) = \mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{s-1}(t_i - t'_i), 1\right\} = 1$ である。 終り.

命題 9.14 自然数kに対し、 もし $\sum_{i=1}^{k}(t_i - t'_i) = 1$ であるならば、 $t'_{k+1} = t_{k+1}$ である。

証明: まず $\sum_{i=1}^{k+1}(t_i-1)-\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j\le k+1\right\}+1\le 1$ より仮定から $(t'_{k+1}-t_{k+1})+1=\sum_{i=1}^{k+1}(t_i-t'_i)=\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{k}(t_i-t'_i),\sum_{i=1}^{k+1}(t_i-1)-\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j<n\right\}+1\right\}=1$ となり、従って $t'_{k+1}=t_{k+1}$ である。 終り.

命題 9.15 自然数 $k,s\ge 2$ に対し、もし全ての自然数 $\ell<s$ で $\sum_{i=1}^{\ell}t_{k+i-1}\le \ell-1$ かつ $\sum_{i=1}^{s}t_{k+i-1}\ge s-1$ であるならば、適当な実数 $\hat{t}_{k+s-1}\ge 0$ と $\bar{t}_{k+s-1}\ge 1$ により等式 $t_{k+s-1}=\hat{t}_{k+s-1}+\bar{t}_{k+s-1}$ と $\sum_{i=1}^{s-1}t_{k+i-1}+\bar{t}_{k+s-1}=s-1$ を得る。 このとき、$1\le\ell<s$ で $t'_{k+\ell-1}=t_{k+\ell-1}$ であり、次が成立する。

$$t'_{k+s-1}=\hat{t}'_{k+s-1}+\bar{t}_{k+s-1},$$

$$(t'_1,...,t'_{k-1},\hat{t}'_{k+s-1},t'_{k+s},...,t'_n)=\varphi(t_1,...,t_{k-1},\hat{t}_{k+s-1},t_{k+s},...,t_n).$$

証明: まず $1\le\ell<s$ のとき、$\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j\le k+\ell-1\right\}=\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j<k\right\}$ かつ $\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j<k\right\}-\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i-1)\ge 0$ となるので $\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j<k+\ell-1\right\}-\sum_{i=1}^{k+\ell-2}(t'_i-1)\ge\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j<k\right\}-\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i-1)-\sum_{i=1}^{\ell-1}(t_{k+i-1}-1)$ である。 そこで $t'_{k+i-1}=t_{k+i-1}$ $(1\le i<\ell)$ であったとすると、$\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j<k+\ell-1\right\}-\sum_{i=1}^{k+\ell-2}(t'_i-1)\ge(\ell-1)-\sum_{i=1}^{\ell-1}t_{k+i-1}=(\ell-1)-\sum_{i=1}^{\ell}t_{k+i-1}+t_{k+\ell-1}\ge t_{k+\ell-1}$ であるので $t'_{k+\ell-1}=t_{k+\ell-1}$ である。

又 $\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j<k+s-1\right\}=\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1),\sum_{i=1}^{k-1}(t_i-1)+(\hat{t}_{k+s-1}-1)\,;\,1\le j<k\right\}$ かつ $\sum_{i=1}^{k+s-2}(t'_i-1)=\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i-1)+\sum_{i=1}^{s-1}t_{k+i-1}-(s-1)=\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i-1)-\bar{t}_{k+s-1}$ より $\hat{t}'_{k+s-1}=t'_{k+s-1}-\bar{t}_{k+s-1}$ と $\hat{t}_{k+s-1}=t_{k+s-1}-\bar{t}_{k+s-1}$ に対する次の式を得る。

$$\hat{t}'_{k+s-1}=\mathrm{Min}\left\{\hat{t}_{k+s-1},\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1),\sum_{i=1}^{k-1}(t_i-1)+(\hat{t}_{k+s-1}-1)\,;\,1\le j<k\right\}-\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i-1)\right\}.$$

さらに $1\le\ell\le n-k-s+1$ のとき、上と同様な議論により $\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1)\,;\,1\le j<k+s+\ell-1\right\}=\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(t_i-1),\sum_{i=1}^{k-1}(t_i-1)+(\hat{t}_{k+s-1}-1)+\sum_{i=1}^{j'}(t_{k+s+i-1}-1)\,;\,1\le j<k,0\le j'\le\ell\right\}$ が得られ、さらに $\sum_{i=1}^{k+s+\ell-2}(t'_i-1)=\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i-1)-\bar{t}_{k+s-1}+(t'_{k+s-1}-1)+\sum_{i=1}^{\ell-1}(t'_{k+s+i-1}-1)=\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i-1)+(\hat{t}'_{k+s-1}-1)+\sum_{i=1}^{\ell-1}(t'_{k+s+i-1}-1)$ であるので、次の等式を得る。

$$\begin{aligned}t'_{k+s+\ell-1}=\mathrm{Min}\Big\{t_{k+s+\ell-1},\mathrm{Max}\Big\{&\textstyle\sum_{i=1}^{j}(t_i-1),\\ &\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(t_i-1)+(\hat{t}_{k+s-1}-1)+\sum_{i=1}^{j'}(t_{k+s+i-1}-1)\,;\,1\le j<k,0\le j'\le\ell\Big\}\\ &\textstyle-\sum_{i=1}^{k-1}(t'_i-1)-(\hat{t}'_{k+s-1}-1)-\sum_{i=1}^{\ell-1}(t'_{k+s+i-1}-1)\Big\}.\end{aligned}$$

従って命題 9.15 が成立する。 終り.

次の命題は上記の命題 9.11,9.12,9.13,9.14,9.15 から直ちに得られる。

命題 9.16 $1 \le k \le r,\ 2 \le r,t,\ r+t=n+2,\ \rho \in K(r),\ \tau \in K(t)$のとき次が成立する。

$$\varphi(\partial_k(\tau)(\rho)) = \begin{cases} \partial_k(\tau)(\varphi(\rho)), & 1{<}k \ \&\ t{>}2, \\ \partial_1(\varphi(\tau))(\rho), & 1{=}k \ \&\ r{>}2, \\ \rho, & k{=}2 \ \&\ r{=}n \ \&\ t{=}2, \\ \tau, & k{=}1 \ \&\ r{=}2 \ \&\ t{=}n, \end{cases}$$

すなわち、φ は本質的には退化作用素 d_1^K の満たすべき式を満たしていることになる。

定義 9.17 (1) 退化作用素 $d_k^{I,\varepsilon} : I^\varepsilon(n) \to I^\varepsilon(n{-}1), 1 \le k \le n$ を次の式で定義する。

$$d_1^{I,\varepsilon}(t_1, ..., t_n) = (t'_2, ..., t'_n),\ k{=}1,\ (t'_1, ..., t'_n) = \varphi(t_1, ..., t_n),$$

$$d_k^{I,\varepsilon}(t_1, ..., t_n) = (t_1, ..., t_{k-2}, t_{k-1}{+}t'_k, t'_{k+1}, ..., t'_n), \quad k{\ge}2,\ (t'_k, ..., t'_n) = \varphi(t_k, ..., t_n).$$

(2) 退化作用素 $d_k^K : K(n) \to K(n{-}1), 1 \le k \le n$ を $d_k^K = d_k^{I,0}$ により定義する。

命題 9.18 (1) $1 \le k \le n$ のとき $d_{k+1}^{I,\varepsilon}(I^\varepsilon(n)) \subseteq I^\varepsilon(n-1)$ が成立する。

(2) $1 \le k \le n$ のとき $d_{k+1}^K(K(n)) \subseteq K(n-1)$ が成立する。

証明: (2)の場合は(1)で $\varepsilon = 0$ と置いた場合にあたるので、省略する。

(1) の場合を証明する: $d_k^{I,\varepsilon}(t_1, ..., t_n) = (t_1, ..., t_{k-2}, t_{k-1}{+}t'_k, t'_{k+1}, ..., t'_n),\ k{\ge}1,\ (t'_k, ..., t'_n) = \varphi(t_k, ..., t_n)$ であり、自然数ℓに対し$\sum_{i=1}^{\ell} t'_{k+i-1} \le \ell{-}1 + \mathrm{Max}\{\sum_{i=1}^{j} t_{k+i-1} - j; 1{\le}j{\le}\ell\}$である。

従って始めの $k{+}\ell{-}2$ 個の和は、$t_1 + ... + t_{k-2} + (t_{k-1}{+}t'_k) + t'_{k+1} + ... + t'_{k+\ell-1} = \sum_{i=1}^{k-1} t_i + \sum_{i=1}^{\ell} t'_{k+i-1}$ $\le \ell{-}1 + \mathrm{Max}\{\sum_{i=1}^{k+j-1} t_i - j; 1{\le}j{\le}\ell\} \le \ell{-}1 + \mathrm{Max}\{k{+}j{-}2{+}\varepsilon - j; 1{\le}j{\le}\ell\} = k{+}\ell{-}3{+}\varepsilon$ であり、これは $d_{k+1}^{I,\varepsilon}(I^\varepsilon(n)) \subseteq I^\varepsilon(n-1)$ を意味する。 終り.

さて、$L(n{+}1)$ $(\subset K(n{+}1) \approx I^1(n))$ の中心 $b_n \in L(n{+}1) \approx J^1(n)$ を次の様に定める。

定義 9.19 $b_n = (0, 1, ..., 1) \in L(n{+}1) \subset K(n{+}1)$.

この b_n を用いて、境界作用素 $d_k^K : K(n{+}1) \to K(n)$ が次のように記述できる:

命題 9.20 $\tau = (t_1, t_2, ..., t_{n+1}) \in K(n{+}1)$ と $a \in [0, 1]$ に対して

$$d_k^K(a{\cdot}b_n + (1{-}a){\cdot}\tau) = a{\cdot}b_{n-1} + (1{-}a){\cdot}d_k^K(\tau), \quad 1 \le k \le n+1.$$

証明: さて $a{\cdot}b_n+(1{-}a){\cdot}\tau=(\bar{t}_1,...,\bar{t}_{n+1})$ かつ $d^K_k(a{\cdot}b_n+(1{-}a){\cdot}\tau)=(\bar{t}_1,...,\bar{t}_{k-1}{+}\bar{t}'_k,...,\bar{t}'_{n+1})$ とおくと、$\bar{t}_i=a+(1{-}a){\cdot}t_i$ $(1\le i\le n{+}1)$ である。

$k=1$ の場合: 定義より $t_1=t'_1=\bar{t}_1=\bar{t}'_1=0$ かつ $\bar{t}'_2=0=(1{-}a){\cdot}t'_2$ であるので、$\ell>2$ について帰納的に $\bar{t}'_\ell=a+(1{-}a){\cdot}t'_\ell$ $(2<\ell\le n{+}1)$ であることを示せば良い。 実際 $\ell{-}1$ $(\ell\ge 3)$ まで成立したとすると、$\bar{t}'_\ell=\mathrm{Min}\left\{\bar{t}_\ell,\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{j}(\bar{t}_i{-}1);1{\le}j{\le}\ell\right\}-\sum_{i=1}^{\ell-1}(\bar{t}'_i{-}1)\right\}=\mathrm{Min}\left\{a+(1{-}a){\cdot}t_\ell,\mathrm{Max}\left\{(1{-}a){\cdot}\sum_{i=2}^{j}(t_i{-}1);1{\le}j{\le}\ell\right\}+1-(1{-}a){\cdot}t'_2-(1{-}a){\cdot}\sum_{i=3}^{\ell-1}(t'_i{-}1)\right\}=a+(1{-}a){\cdot}\mathrm{Min}\left\{t_\ell,\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=2}^{j}(t_i{-}1);1{\le}j{\le}\ell\right\}+1-\sum_{i=3}^{\ell-1}(t'_i{-}1)\right\}=a+(1{-}a){\cdot}t'_\ell$ となる。

$k\ge 2$ の場合: 定義より $\bar{t}'_k=\mathrm{Max}\{0,\bar{t}_k-1\}=\mathrm{Max}\{0,(1{-}a){\cdot}(t_k{-}1)\}=(1{-}a){\cdot}\mathrm{Min}\{0,t_k\}=(1{-}a){\cdot}t'_k$ であるので、$\ell>k$ について帰納的に $\bar{t}'_\ell=a+(1{-}a){\cdot}t'_\ell$ $(k<\ell\le n)$ であることを示せば良い。実際 $\ell{-}1$ $(\ell>k)$ まで成立したとすると、$\bar{t}'_\ell=\mathrm{Min}\left\{\bar{t}_\ell,\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=k}^{j}(\bar{t}_i{-}1);k{\le}j{\le}\ell\right\}-\sum_{i=k}^{\ell-1}(\bar{t}'_i{-}1)\right\}=\mathrm{Min}\left\{a+(1{-}a){\cdot}t_\ell,\mathrm{Max}\left\{(1{-}a){\cdot}\sum_{i=k}^{j}(t_i{-}1);1{\le}j{\le}\ell\right\}+1-(1{-}a){\cdot}t'_k-(1{-}a){\cdot}\sum_{i=k+1}^{\ell-1}(t'_i{-}1)\right\}=a+(1{-}a){\cdot}\mathrm{Min}\left\{t_\ell,\mathrm{Max}\left\{t_1+\sum_{i=k}^{j}(t_i{-}1);1{\le}j{\le}\ell\right\}+1-\sum_{i=k}^{\ell-1}(t'_i{-}1)\right\}=a+(1{-}a){\cdot}t'_\ell$ となる。

従って帰納法が成立して、全ての k について命題が成立する。 終り.

特に $\varepsilon=\frac{1}{2}$ のとき、ε を省略し $I(n)\supseteq J(n)$, $\delta_j:K(t)\to\mathrm{Map}(I(r),I(r{+}t))$ $(1{\le}j{\le}t)$, $\delta:I(n_0)\times\cdots\times I(n_t)\to\mathrm{Map}(K(t),I(n))$, $d^I_k:I(n)\to I(n{-}1)$ $(1{\le}k{\le}n)$ などと記すことがある。

10 同相写像 $\eta^\varepsilon_n:K(n)\to J^\varepsilon(n)$

10.1 同相写像 $\psi^\varepsilon_n:[0,\varepsilon]\times K(n)\to I^\varepsilon(n)$

$K(n)$ の中心を $c_n=(0,\frac{1}{2},1,\cdots,1,\frac{3}{2})\in K(n)$ と定める. 次のように同相写像 ψ^ε_n を n に関して帰納的に構成する. まず $n=2$ のときは, $\psi^\varepsilon_2:[0,\varepsilon]\times K(2)\to I^\epsilon(2)$ は自明な同相写像とする:

$$\psi^\varepsilon_2(t,*)=(t,1{+}\varepsilon{-}t)=(0,1){+}(t,\varepsilon{-}t)\in I^\varepsilon(2).\quad *{=}(0,1)\in K(2).$$

次に, $n-1$ まで構成できたとして n の場合を次で与える:

$$\psi^\varepsilon_n(t,a\partial_k(\sigma)(\rho)+(1{-}a)c_n)=a\delta^\varepsilon_k(\sigma)(\psi^\varepsilon_r(t,\rho))+(1{-}a)b_n,\quad \sigma\in K(s),\rho\in K(r).$$

このとき, 次が成立 ([64, pp. 22--25] を参照) する.

$$\delta^\varepsilon_k(\sigma)(\rho)=\begin{cases}\psi^\varepsilon_n(0,\sigma), & \text{if } k{=}r{=}1,\\ \psi^\varepsilon_n\circ(1\times\partial_k(\sigma))\circ(\psi^\varepsilon_r)^{-1}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$$\delta^\varepsilon(*,...,*)(a\tau+(1{-}a)c_n)=(at)\tau+(1{-}at)b_n$$

定義 10.1 次の様に二つの同相写像 $\psi : K(n) \to K(n)$ と $\psi^{\varepsilon} : I^{\varepsilon}(n) \to I^{\varepsilon}(n)$ を定める。

(1) $\psi(t_1, ..., t_n) = (\hat{t}_1, ..., \hat{t}_n)$, $\quad \hat{t}_i = t_i \ (i{\neq}2, n)$, $\hat{t}_2 = \mathrm{Min}\left\{\sum_{i=1}^{j-1}(1{-}t_i) - t_j \, ; \, 2{\leq}j{<}n\right\} = 1 - t_2 + \mathrm{Min}\left\{\sum_{i=3}^{j-1}(1{-}t_i) \, ; \, 3{\leq}j{\leq}n\right\}$, $\hat{t}_n = \sum_{i=1}^{n-1}(1{-}\hat{t}_i)$.

(2) $\psi^{\varepsilon}(\bar{t}_1, ..., \bar{t}_n) = (\check{t}_1, ..., \check{t}_n)$, $\quad \check{t}_i = \bar{t}_i \ (i{\neq}1, n)$, $\check{t}_1 = \mathrm{Min}\left\{\sum_{i=1}^{j-1}(1{-}\bar{t}_i) + \varepsilon - \bar{t}_j \, ; \, 1{\leq}j{<}n\right\} = \varepsilon - \bar{t}_1 + \mathrm{Min}\left\{\sum_{i=2}^{j-1}(1{-}\bar{t}_i) \, ; \, 2{\leq}j{\leq}n\right\}$, $\check{t}_n = \sum_{i=1}^{n-1}(1{-}\check{t}_i) + \varepsilon$.

この定義から明らかに $\psi{\circ}\psi = 1_{K(n)}$ かつ $\psi^{\varepsilon}{\circ}\psi^{\varepsilon} = 1_{I^{\varepsilon}(n)}$ であり、次の命題が直ちに従う。

命題 10.2 退化作用素 d_j^K と $d_j^{I,\varepsilon}$ は上の同相写像 ψ や ψ^{ε} との間に次の可換性を満たす。

(1) 全ての $j \ (3 \leq j \leq n{-}1)$ について $d_j^K{\circ}\psi = \psi{\circ}d_j^K$ が成立する。

(2) 全ての $j \ (3 \leq j \leq n{-}1)$ について $d_j^{I,\varepsilon}{\circ}\psi^{\varepsilon} = \psi^{\varepsilon}{\circ}d_j^{I,\varepsilon}$ が成立する。

中への同相写像 $\bar{\eta}_n^{\varepsilon} : K(n) \to I^{\varepsilon}(n)$ を次のように定める。

定義 10.3 $\bar{\eta}_n^{\varepsilon}(t_1, ..., t_n) = (\bar{t}_1, ..., \bar{t}_n)$, $\quad \bar{t}_1 = 0$, $\bar{t}_k = t_k + \varepsilon \cdot \mathrm{Min}\left\{t_k, 1 - \mathrm{Min}\left\{1, \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right\}\right\}$

この定義から $\bar{t}_k = t_k + \varepsilon \left(\mathrm{Min}\left\{1, \sum_{i=1}^{k} t_i\right\} - \mathrm{Min}\left\{1, \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right\}\right)$ となり、直ちに次の命題が従う。

命題 10.4 任意の自然数 $k \geq 1$ に対して、 $\sum_{i=1}^{k} \bar{t}_i = \sum_{i=1}^{k} t_i + \varepsilon \cdot \mathrm{Min}\left\{1, \sum_{i=1}^{k} t_i\right\} \leq k{-}1 + \varepsilon$ であり、 特に $\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i = \sum_{i=1}^{n} t_i + \varepsilon \cdot \mathrm{Min}\left\{1, \sum_{i=1}^{n} t_i\right\} = n{-}1 + \varepsilon$ が成立する。

従って $\bar{\eta}_n^{\varepsilon}$ はうまく定義されており、次のように同相写像 η_n^{ε} を与える。

定義 10.5 $\eta_n^{\varepsilon} = \psi^{\varepsilon}{\circ}\bar{\eta}_n^{\varepsilon}{\circ}\psi : K(n) \to J^{\varepsilon}(n)$.

命題 10.6 全ての $j \ (1 < j < n)$ について $d_j^I{\circ}\eta_n^{\varepsilon} = \eta_{n-1}^{\varepsilon}{\circ}d_j^K$ が成立する。

証明: 命題 10.2 より、$j = 2$ の場合だけを証明すれば良い。

終り.

10.2 位相小圏 $\mathcal{A}_\infty$ と $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$

圏 $\mathcal{D}$ は、その任意の二つの対象 $A, B \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ に対して、その間の射全体 $\mathcal{D}(A, B)$ が位相空間をなすとき、位相圏と呼ばれる。 また圏 $\mathcal{D}$ は、その対象全体 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ および射全体 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ が集合をなすとき、小圏と呼ばれ、それらがともに位相空間であるとき、位相小圏と呼ばれる。 さて、Stasheff の胞体を用いた位相小圏を定義する。

定義 10.7 圏 $\mathcal{A}_\infty$ は、自然数全体 $\{\underline{1},\underline{2},\underline{3},\cdots\}$ が対象で $\underline{m}$ から $\underline{n}$ への射の全体が

$$\coprod_{\substack{a_1,\cdots,a_m\geq 1\\ a_1+\cdots+a_m=n}} K(a_1)\times\cdots\times K(a_m)$$

で、また二つの射 $(\rho_1,\cdots,\rho_\ell):\underline{\ell}\to\underline{m}$ と $(\sigma_1,\cdots,\sigma_m):\underline{m}\to\underline{n}$ との合成 $(\tau_1,\cdots,\tau_\ell):\underline{\ell}\to\underline{n}$ が次で与えられる。 $(\rho_i\in K(r_i), i\leq\ell, r_1+\cdots+r_\ell=m;\ \sigma_j\in K(a_j), j\leq m, a_1+\cdots+a_m=n)$

$$\tau_i=\partial_1(\sigma'_1)\circ\partial_2(\sigma'_2)\circ\cdots\circ\partial_{r_i}(\sigma'_{r_i})(\rho_i)\in K(a'_1+\cdots+a'_{r_i}),$$

$$(\sigma'_j=\sigma_{r_1+\cdots+r_{i-1}+j},\ a'_j=a_{r_1+\cdots+r_{i-1}+j};\quad 1\leq j\leq r_i).$$

問題 10.8 上の $\mathcal{A}_\infty$ が位相小圏となることを示せ。

この位相小圏 $\mathcal{A}_\infty$ を用いて、次のような圏を構成する $(1\leq m\leq\infty)$：

定義 10.9 圏 $\mathcal{A}_m$ を、集合 $\{\underline{1},\underline{2},\cdots,\underline{m}\}$ が対象の全体である $\mathcal{A}_\infty$ の充満部分圏とする。

さらに、位相小圏 $\mathcal{A}_m$ に退化作用素を付け加えた位相小圏を作る $(1\leq m\leq\infty)$：

定義 10.10 圏 $\tilde{\mathcal{A}}_m$ $(1\leq m\leq\infty)$ を、集合 $\{\underline{1},\underline{2},\cdots,\underline{m}\}$ が対象の全体で、$\underline{\ell}$ から $\underline{n}$ への射の全体が

$$\begin{cases} \displaystyle\coprod_{\substack{a_1,\cdots,a_\ell\geq 1\\ a_1+\cdots+a_\ell=n}} K(a_1)\times\cdots\times K(a_\ell), & 1<\ell\leq n,\\ \{(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})\,|\,1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{\ell-n}\leq\ell\}, & \ell>n>1.\end{cases}$$

で与えられ、$(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})$ が退化作用素の合成写像 $d^K_{i_1}d^K_{i_2}\cdots d^K_{i_{\ell-n}}$ に対応する。

問題 10.11 圏 $\tilde{\mathcal{A}}_m$ $(1\leq m\leq\infty)$ にうまく射の合成を定義して位相小圏とせよ。

注 10.12 Stasheff によるオリジナルの $\mathcal{A}_\infty$ 形式は、小圏 $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ を用いるものであったが、Boardman-Vogt, Klein-Schwänzl-Vogt によれば、小圏 $\mathcal{A}_\infty$ を用いて定義したものと同値である。 ただし、その同値性の明確な証明は現在まで出版されていない様である。

10.3 位相小圏 $\mathcal{I}_\infty$ と $\tilde{\mathcal{I}}_\infty$

定義 10.13 位相小圏 $\mathcal{I}$ を、その対象全体と射全体を次のように定める位相小圏とする。

（対象） 対象全体のなす離散空間が $\mathcal{O}_{\mathcal{I}_\infty}=\mathbb{N}\times\mathbb{Z}/2=\{\underline{1},\underline{1}',\underline{2},\underline{2}',\underline{3},\underline{3}',\cdots\}$ で与えられる。

（射） 自然数 m,n に対して、射の空間が次で与えられる。

(1) $\mathcal{M}_{\mathcal{I}_\infty}(\underline{m},\underline{n})=\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\infty}(\underline{m},\underline{n})=\displaystyle\coprod_{\substack{a_1,\cdots,a_m\geq 1\\ a_1+\cdots+a_m=n}} K(a_1)\times\cdots\times K(a_m)$

(2) $\mathcal{M}_{\mathcal{I}_\infty}(\underline{m}',\underline{n}')=\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\infty}(\underline{m},\underline{n})=\coprod_{\substack{a_1,\cdots,a_m\geq 1\\ a_1+\cdots+a_m=n}} K(a_1)\times\cdots\times K(a_m)$

(3) $\mathcal{M}_{\mathcal{I}_\infty}(\underline{m},\underline{n}')=\coprod_{\substack{a_1,\cdots,a_m\geq 1\\ a_1+\cdots+a_m=n}} I(a_1)\times\cdots\times I(a_m),\qquad \mathcal{M}_{\mathcal{I}_\infty}(\underline{m}',\underline{n})=\emptyset$

また射 $(\rho_1,\cdots,\rho_\ell):\underline{\ell}\to\underline{m}'$ と $(\sigma_1,\cdots,\sigma_m):\underline{m}'\to\underline{n}'$ との合成 $(\tau_1,\cdots,\tau_\ell):\underline{\ell}\to\underline{n}'$ が次で与えられる。 $(\rho_i\in I(r_i), i\leq\ell, r_1+\cdots+r_\ell=m;\ \sigma_j\in K(a_j), j\leq m, a_1+\cdots+a_m=n)$

$$\tau_i=\delta_1(\sigma'_1)\circ\delta_2(\sigma'_2)\circ\cdots\circ\delta_{r_i}(\sigma'_{r_i})(\rho_i)\in I(a'_1+\cdots+a'_{r_i}),$$

$$(\sigma'_j=\sigma_{r_1+\cdots+r_{i-1}+j},\quad a'_j=a_{r_1+\cdots+r_{i-1}+j};\quad 1\leq j\leq r_i).$$

さらに射 $(\rho_1,\cdots,\rho_\ell):\underline{\ell}\to\underline{m}$ と $(\sigma_1,\cdots,\sigma_m):\underline{m}\to\underline{n}'$ との合成 $(\tau_1,\cdots,\tau_\ell):\underline{\ell}\to\underline{n}'$ が次で与えられる。 $(\rho_i\in K(r_i), i\leq\ell, r_1+\cdots+r_\ell=m;\ \sigma_j\in I(a_j), j\leq m, a_1+\cdots+a_m=n)$

$$\tau_i=\delta(\rho_i)(\sigma'_1,\sigma'_2,\cdots,\sigma'_{r_i})\in I(a'_1+\cdots+a'_{r_i}),$$

$$(\sigma'_j=\sigma_{r_1+\cdots+r_{i-1}+j},\quad a'_j=a_{r_1+\cdots+r_{i-1}+j};\quad 1\leq j\leq r_i).$$

問題 10.14 上の $\mathcal{I}_\infty$ が位相小圏となることを示せ。

定義 10.15 圏 $\mathcal{I}_m$ を、 集合 $\{\underline{1},\underline{1}',\underline{2},\underline{2}',\cdots,\underline{m},\underline{m}'\}$ が対象の全体である $\mathcal{I}_\infty$ の充満部分圏とする。

さらに、位相小圏 $\mathcal{I}_m$ に退化作用素を付け加えた位相小圏を作る $(1\leq m\leq\infty)$：

定義 10.16 圏 $\tilde{\mathcal{I}}_m$ を、 対象の全体が圏 $\mathcal{I}_m$ と同じで射の全体が次で与えられる圏とする。

(1) $\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{I}}_\infty}(\underline{m},\underline{n})=\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{A}}_\infty}(\underline{m},\underline{n}),\qquad \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{I}}_\infty}(\underline{m}',\underline{n}')=\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{A}}_\infty}(\underline{m},\underline{n})$

(2) $\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{I}}_\infty}(\underline{m},\underline{n}')=\mathcal{M}_{\mathcal{I}_\infty}(\underline{m},\underline{n}),\qquad \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{I}}_\infty}(\underline{m}',\underline{n})=\emptyset$

問題 10.17 圏 $\tilde{\mathcal{I}}_m$ $(1\leq m\leq\infty)$ にうまく射の合成を定義して位相小圏とせよ。

10.4 位相小圏上の連続関手

定義 10.18 連続な共変関手 $\underline{\tilde{K}}:\tilde{\mathcal{A}}_\infty\to\underline{\mathcal{K}}$ を次で定める。

$$\underline{\tilde{K}}(\underline{n})=K(n),\quad n\geq 1,$$

$$\underline{\tilde{K}}(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)=\ \partial_1(\sigma_1)\circ\cdots\circ\partial_m(\sigma_m):K(m)\to K(n),$$
$$(\sigma_i\in K(a_i),\quad a_1+\cdots+a_m=n)$$
$$\underline{\tilde{K}}(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})=d^K_{i_1}d^K_{i_2}d^K_{i_{\ell-n}}:K(\ell)\to K(n),$$

さてここで次の機械を用意する。

定義 10.19 $\mathcal{D}$ を位相小圏とし、共変関手 $\underline{A}:\mathcal{D}\to\underline{\mathcal{K}}$ と $\underline{B}:\mathcal{D}\to\underline{\mathcal{K}}$ それに反変関手 $\underline{C}:\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\underline{\mathcal{K}}$ が連続関手であるとき、次の二つの空間を定義する。

(1) $\underline{A}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{C}=\amalg_{\underline{d}\in\mathcal{D}}\underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}(\underline{d})/\sim,\quad (\underline{A}(\chi)(a_{\underline{d}}),c_{\underline{d'}})\sim(a_{\underline{d}},\underline{A}(\chi)(c_{\underline{d'}})),\ (\chi:\underline{d}\to\underline{d'}),$

(2) $\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B})=\left\{(\phi_{\underline{d}})_{\underline{d}\in\mathcal{D}}\in\prod^{\underline{d}\in\mathcal{D}}\underline{\mathcal{K}}(\underline{A}(\underline{d}),\underline{B}(\underline{d}))\,\middle|\,\begin{array}{l}\forall(\chi:\underline{d}\to\underline{d'})\\ \underline{B}(\chi)\circ\phi_{\underline{d}}=\phi_{\underline{d'}}\circ\underline{A}(\chi)\end{array}\right\}.$

問題 10.20 $\mathcal{D}$ を位相小圏とし、共変関手 $\underline{A}:\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\underline{\mathcal{K}}$ と $\underline{B}_1,\underline{B}_2:\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\underline{\mathcal{K}}$ それに反変関手 $\underline{C}_1,\underline{C}_2:\mathcal{D}\to\underline{\mathcal{K}}$ が連続関手であるとき、次を示しなさい。

(1) 自然変換 $\underline{c}:\underline{C}_1\to\underline{C}_2$ に対し、写像 $\underline{A}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{c}:\underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_1\to\underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_2$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$(\underline{A}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{c})(a_{\underline{d}},c_{\underline{d}})=(a_{\underline{d}},\underline{c}(\underline{d})(c_{\underline{d}}))$$

(2) 自然変換 $\underline{b}:\underline{B}_1\to\underline{B}_2$ に対し、写像 $\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{b}):\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B}_1)\to\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B}_2)$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{b})(\phi_{\underline{d}})(a_{\underline{d}})=(\underline{b}(\underline{d})(\underline{d}(a_{\underline{d}})))$$

(3) より一般に上の (1) でさらに自然変換 $a:\underline{A}\to\underline{A}'$ が任意に与えられた時、写像 $\underline{a}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{c}:\underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_1\to\underline{A}'(\underline{d})\times\underline{C}_2$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$(\underline{a}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{c})(a_{\underline{d}},c_{\underline{d}})=(\underline{a}(a_{\underline{d}}),\underline{c}(\underline{d})(c_{\underline{d}}))$$

(4) より一般に上の (2) でさらに自然変換 $a:\underline{A}\to\underline{A}'$ が任意に与えられた時、写像 $\hom_{\mathcal{D}}(\underline{a},\underline{b}):\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A}',\underline{B}_1)\to\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B}_2)$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$\hom_{\mathcal{D}}(\underline{a},\underline{b})(\phi_{\underline{d}})(a_{\underline{d}})=(\underline{b}(\phi_{\underline{d}}(\underline{a}(\underline{d})(a_{\underline{d}}))))$$

11 $\mathcal{A}_\infty$ 構造

11.1 $\mathcal{A}_\infty$ 形式

二つの位相圏 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ の間の関手 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ が連続関手であるとは F の誘導する写像

$$F:\mathcal{D}(A,B)\to\mathcal{E}(F(A),F(B)),\quad A,B\in O(\mathcal{D}).$$

が連続写像なこととする。 まず Stasheff [125] による $\tilde{\mathcal{A}}_m$ を用いる定義を記述しよう。

定義 11.1 位相空間 $X\in O(\underline{\mathcal{K}})$ に対して、 連続な反変関手 $\underline{\tilde{X}}:\tilde{\mathcal{A}}_m^{\mathrm{op}}\to\underline{\mathcal{K}}$ が三条件

(1) $\underline{\tilde{X}}(\underline{n})=\prod^n X,$ the n-fold product,

(2) $\underline{\tilde{X}}(\beta_2):X\times X\to X,\ (\beta_2\in K(2)),$ a multiplication with two-sided homotopy unit : $*\to X$ and inversion : $X\to X$.

(3) $\underline{\tilde{X}}(j_1,\cdots,j_{\ell-n})(x_0,\cdots,x_n)=(y_0,\cdots,y_\ell),\quad y_j=\begin{cases}*, & \text{if } j=j_i,\\ x_{j+i}, & \text{if } j_i<j<j_{i+1}.\end{cases}$

を満たすとき、 X を $\tilde{A}_m$-空間、 $\underline{\tilde{X}}$ を X の $\tilde{A}_m$-形式 $(1\le m\le\infty)$ などという。

次に Stasheff [126] による A_m-形式 $(1\le m\le\infty)$ の定義を圏論的に記述する。

定義 11.2 位相空間 $X\in O(\underline{\mathcal{K}})$ に対して、 連続な反変関手 $\underline{X}:\mathcal{A}_m^{\mathrm{op}}\to\underline{\mathcal{K}}$ が二条件

(1) $\underline{X}(\underline{n})=\prod^n X$ the n-fold product,

(2) $\underline{X}(\beta_2):X\times X\to X,\ (\beta_2\in K(2)),$ a multiplication with two-sided homotopy unit : $*\to X$ and inversion : $X\to X$.

を満たすとき、 X を A_m-空間、 $\underline{X}$ を X の A_m-形式 $(1\le m\le\infty)$ などという。

さらに Boardman-Vogt [16], Klein-Schwänzl-Vogt [85] による co-A_m-形式 $(1\le m\le\infty)$ の定義を圏論的に記述する。

定義 11.3 位相空間 $Y\in O(\underline{\mathcal{K}})$ に対して、 連続な共変関手 $\underline{Y}:\mathcal{A}_m\to\underline{\mathcal{K}}$ が二条件

(1) $\underline{Y}(\underline{n})=\bigvee_n Y$ the n-fold wedge sum (one-point-sum),

(2) $\underline{Y}(\beta_2):Y\to Y\vee Y,\ (\beta_2\in K(2)),$ a co-multiplication with two-sided homotopy co-unit : $Y\to *$ and inversion : $Y\to Y$.

を満たすとき、 Y を co-$\mathcal{A}_m$-空間、 $\underline{Y}$ を Y の co-$\mathcal{A}_m$-形式 $(1\le m\le\infty)$ などという。

注 11.4 これに対する Stasheff [125] の定義の双対は無意味である。 もう少し正確には、$\mathcal{A}_m$ の代わりに $\tilde{\mathcal{A}}_m$ を用いた時点で co-$\tilde{\mathcal{A}}_m$–空間の非存在が直ちに得られる $(m \geq 2)$。

例 11.5 (1) いかなる位相群も $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$–空間である。

(2) 連結CW複体のホモトピー型を持ついかなる位相モノイドも $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$–空間である。

(3) $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$–空間に基点付きホモトピーでホモトピー同値な空間は $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$–空間である。

(4) いかなる $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$–空間も $\mathcal{A}_\infty$–空間である。

(5) $\mathcal{A}_\infty$–空間にホモトピー同値な空間は $\mathcal{A}_\infty$–空間である。

(6) いかなる単連結CW複体 X のループ空間 ΩX も $\mathcal{A}_\infty$–空間である。

(7) いかなる懸垂空間 ΣX も co-$\mathcal{A}_\infty$–空間である。

略証: (1) は自明である。 (2) は位相モノイド X のホモトピー逆元の存在のみが自明でないが、これは shearing map $\varphi : X\times X \to X\times X,\ \varphi(x,y) = (x,xy)$ がホモトピー群の同型を誘導し、J. H. C. Whitehead の定理からホモトピー同値写像となる事実に従う。 (3), (5)は $\mathcal{A}_m$-写像に対する I-M [71] の証明と同様に得られる。 (6)はループ空間 $\Omega(X)$ が J. C. Moore のループ空間 $\Omega(X)$ (位相モノイド) にホモトピー同値 (基点は保たない) で Toda [135] によって CW 複体のホモトピー型を持つことから(2)と(5)に帰着する。 (4), (7)は省略する。 終り.

定理 11.6 (**Stasheff [125]**) 任意の $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$–空間は、ループ空間にホモトピー同値である。

定理 11.7 (**Klein-Schwänzl-Vogt [85]**) 任意の 2–連結 co-$\mathcal{A}_\infty$–空間は、単連結な空間の懸垂空間にホモトピー同値である。

注 11.8 上記の事実に Klein-Schwänzl-Vogt の与えた証明は２種類の異なる構成を用い、little cube のアイデアを取り入れるなどかなり入り組んだものとなっている。

11.2 標準的な $\mathcal{A}_\infty$ 構造

定義 11.9 反変関手 $\underline{\tilde{X}} : \tilde{\mathcal{A}}_m^{op} \to \underline{\mathcal{K}}$ を $\tilde{\mathcal{A}}_m$ 形式とする $\tilde{\mathcal{A}}_m$ 空間 X をとる $(1{\leq}m{\leq}\infty)$。 反変関手 $\tilde{E}^k(\underline{\tilde{X}}) : \tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^{op} \to \underline{\mathcal{K}}$ $(1{\leq}k{\leq}m)$、 $\tilde{D}^k(\underline{\tilde{X}}), \tilde{B}^k(\underline{\tilde{X}}) : \tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^{op} \to \underline{\mathcal{K}}$ $(1{\leq}k{\leq}m{+}1)$ と自然変換 $\tilde{p}^k_{\underline{\tilde{X}}} : \tilde{E}^k(\underline{\tilde{X}}) \to \tilde{B}^k(\underline{\tilde{X}})$ を次で定める (ただし $\sigma_i \in K(a_i),\ \sum_i a_i = n$) :

(1) $\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n}) = \underline{X}(\underline{n}) = X^n, \quad n{\geq}0,$

$\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)(x_2,\cdots,x_n) = \underline{\tilde{X}}(\sigma_2,\cdots,\sigma_m)(x_{a_1+1},\cdots,x_n),$

$\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})(x_2,\cdots,x_n) = (y_2,\cdots,y_\ell), \qquad y_j = \begin{cases} *, & \text{if } j = j_i, \\ x_{j+i}, & \text{if } j_i < j < j_{i+1}. \end{cases}$

(2) $\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n{+}1}) = \begin{cases} \underline{\tilde{X}}(\underline{n{-}1}) = X^n, & n{\leq}m, \\ X^m{\times}\{*\}^{n-m}, & n{>}m, \end{cases}$

$\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m) = \tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)|_{\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n+1})}$

$\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n}) = \tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})|_{\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n+1})}$

(3) $\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n{+}1}) = \begin{cases} \underline{\tilde{X}}(\underline{n{-}1}) = X^{n-1}, & n{\geq}1, \\ \emptyset, & n{=}0, \end{cases}$

$\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)(x_1,\cdots,x_{n-1}) = \underline{\tilde{X}}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{m-1})(x_{a_0+1},\cdots,x_{n-a_m-1}),$

$\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})(x_1,\cdots,x_{n-1}) = (y_1,\cdots,y_{\ell-1}), \qquad y_j = \begin{cases} *, & \text{if } j = j_i, \\ x_{j+i}, & \text{if } j_i < j < j_{i+1}. \end{cases}$

(4) $\tilde{p}_{\underline{\tilde{X}}}(\underline{n{+}1})(x_1,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_{n-1}).$

このように定めた関手等に対して定義 10.19 を用いて新たに空間と写像を作る。

定義 11.10 $\tilde{E}^k(X) = \underline{\tilde{K}}\wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}}\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})$, $\tilde{B}^k(X) = \underline{\tilde{K}}\wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}}\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})$, $\tilde{p}^k_X = \underline{\tilde{K}}\wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}}\tilde{p}^{\underline{\tilde{X}}}$ $(0 \leq k \leq m)$ とおき、X の<u>標準的</u>な $\tilde{A}_m$ 構造と言う。

定理 11.11 (**[125, 64, 100, 71]**) $\tilde{A}_m$ 空間 X $(1{\leq}m{\leq}\infty)$ に対し、以下が成立する。

(1) $\tilde{B}^1(X) = \{*\}$ かつ $\tilde{E}^1(X) = X$ であり、$\tilde{p}_{\underline{\tilde{X}}}$ は自明な写像である。

(2) $\tilde{E}^k(X)$ は $\tilde{E}^{k+1}(X)$ の <u>中で可縮</u> $(k < m)$ となり、従って $m = \infty$ のとき $\tilde{E}^\infty(X)$ は可縮である。

(3) $\tilde{p}^k_X : \tilde{E}^k(X) \to \tilde{B}^k(X)$ $(k \leq m)$ は X を fibre とする quasi-fibration である。

(4) $\tilde{D}^k(X)$ $(\supset \tilde{E}^k(X))$ は可縮 $(k \leq m)$ であり、$\tilde{B}^{k+1}(X)$ $(k \leq m)$ は接着空間 $\tilde{B}^k(X) \cup_{\tilde{p}^k_X} \tilde{D}^k(X) \simeq C_{\tilde{p}^k_X}$ に同相である。

定義 11.12 CW 複体 X に対して、上記の (1)・(3) の 3 条件 ($\tilde{E}^k(X)$, $\tilde{B}^k(X)$, $\tilde{p}^k_X :\ \tilde{E}^k(X) \to \tilde{B}^k(X)$ を $E^k(X), B^k(X), p^k_X\colon E^k(X) \to B^k(X)$ に置き換える) を満たす $\{(E^k(X), B^k(X), p^k_X) \mid 0{\leq}k{\leq}m\}$ が存在する時、これを X の $\mathcal{A}_m$ 構造と言う。

定理 11.13 (**Stasheff [125]**) CW 複体 X が $\mathcal{A}_m$-構造 $\{B^{k+1}(X)\,|\,k \leq m\}$ を持つならば、X は $\tilde{\mathcal{A}}_m$-空間 X' にホモトピー同値であり、X' の $\tilde{\mathcal{A}}_m$-構造 $\tilde{B}^{k+1}(X')$ から X' への写像は X の $\mathcal{A}_m$-構造 $B^{k+1}(X)$ から X への写像を経由する compatible な構造を与える。

系 11.13.1 CW 複体 X に対して、$\Omega(X)$ の $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$-構造 $\{B^{k+1}(X)\}$ は $B^\infty(X) \simeq X$ をみたす。

例 11.14　(1) $\tilde{B}^{k+1}(S^0) = \mathbb{R}P^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^1) = \mathbb{C}P^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^3) = \mathbb{H}P^k$ $(0 \leq k \leq \infty)$。

(2) $\tilde{B}^1(S^7) = *$、$\tilde{B}^2(S^7) = S^8$、$\tilde{B}^3(S^7) = \mathbb{O}P^2$ (Cayley plane)。

注 11.15 古典的な射影空間との類比から、$\tilde{B}^{k+1}(X)$ を $\tilde{P}^k(X)$ によって表すことがある。

系 11.15.1 $\mathrm{Cat}(\tilde{P}^m(\Omega(X))) \leq m$ であり、従って $\mathrm{cat}(\tilde{P}^m(\Omega(X))) \leq m$ である。

定理 11.16 (**Cornea [23]**) $\mathrm{cat}(X) = m$ のとき、$i \leq m$ ならば $\mathrm{cat}(\tilde{P}^i(\Omega(X))) = i$ であり、$i \geq m$ ならば $\mathrm{cat}(\tilde{P}^i(\Omega(X))) = m$ である。

定理 11.17 (**Ganea [46], Gilbert [49], I [67], Sakai [116]**) 空間 X に対して $\mathrm{cat}(X) \leq m$ となる為には $e^X_m : \tilde{P}^m(\Omega(X)) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\Omega(X)) \simeq X$ が右ホモトピー逆写像を持つことが必要十分である：

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{\sigma : X \to P^m(\Omega(X))} \text{ such that } e^X_m \circ \sigma \sim 1 = X\}.$$

定理 11.18 (**Fox [43]), I [67]**) 常に $\mathrm{cat}(X{\times}Y) \leq \mathrm{cat}(X){+}\mathrm{cat}(Y)$ であり、等号が成立する為には $\bigcup_{i+j<m+n} \tilde{P}^i(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^j(\Omega(Y)) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(Y)) \simeq X{\times}Y$ ($\mathrm{cat}(X){=}m$, $\mathrm{cat}(Y){=}n$ は共に 1 以上) が右ホモトピー逆写像を持たないことが必要十分である。

略証: まず $\bigcup_{i+j<m+n} \tilde{P}^i(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^j(\Omega(Y)) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(Y)) \simeq X{\times}Y$ が右ホモトピー逆写像を持つとする: k についての帰納法で $\mathrm{Cat}(\bigcup_{i+j<k} \tilde{P}^i(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^j(\Omega(Y))) \leq k$ が得られるから、$\mathrm{cat}(\bigcup_{i+j<k} \tilde{P}^i(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^j(\Omega(Y))) \leq k-1$ であり、$X{\times}Y$ は仮定から $\bigcup_{i+j<m+n} \tilde{P}^i(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^j(\Omega(Y))$ に支配されるので $\mathrm{cat}(X{\times}Y) < \mathrm{cat}(X){+}\mathrm{cat}(Y)$ がわかる。

次に $\mathrm{cat}(X{\times}Y) < \mathrm{cat}(X){+}\mathrm{cat}(Y)$ とすると、定理 11.17から$X{\times}Y$ は $\tilde{P}^j(\Omega((X{\times}Y)))$ に支配される。 ここで、$\bigcup_{i+j\leq k} \tilde{P}^i(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^j(\Omega(Y))$ は $\tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(Y)) \simeq X{\times}Y$ の標準的ではない $\mathcal{A}_\infty$-構造を与え、定理 11.13 から標準的な写像$\tilde{P}^j(\Omega((X{\times}Y))) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(Y))$ は $\bigcup_{i+j\leq k} \tilde{P}^i(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^j(\Omega(Y)) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(Y))$ を経由する。 従って$\bigcup_{i+j\leq k} \tilde{P}^i(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^j(\Omega(Y))$ は $X{\times}Y$ を支配する。　終り.

系 11.18.1 (I [67]) $\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \mathrm{cat}(X)$ となる為には、写像 $\tilde{P}^m(\Omega(X)){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\Omega(X)){\times}S^n \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}S^n \simeq X{\times}S^n$ ($m = \mathrm{cat}(X) \geq 1$) が右ホモトピー逆写像を持つことが必要十分である。

略証: $\tilde{P}^m(\Omega(X)){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^1(\Omega(S^n)){\cup}\cdots{\cup}\tilde{P}^1(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^{m-1}(\Omega(S^n)){\cup}\{*\}{\times}\tilde{P}^{m-1}(\Omega(S^n)) \subseteq \tilde{P}^m(\Omega(X)){\times}\{*\} \cup \tilde{P}^{m-1}(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(S^n)) \subset \tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(S^n))$ に注意する。 従って定理 11.18 から、$\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \mathrm{cat}(X)$ならば $\tilde{P}^m(\Omega(X)){\times}\{*\} \cup \tilde{P}^{m-1}(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(S^n)) \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega(S^n)) \simeq X{\times}S^n$ が右ホモトピー逆写像を持つ。 従って $\tilde{P}^m(\Omega(X)){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\Omega(X)){\times}S^n \hookrightarrow \tilde{P}^\infty(\Omega(X)){\times}S^n \simeq X{\times}S^n$ が右ホモトピー逆写像を持つ。 逆は明か。 終り.

定理 11.19 (**Ganea**) $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X){+}1$.

略証: $\mathrm{cat}(X) = m$ とし、$\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega(X))$ を定理 11.17 により与えられるものとする。 $\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega(X))$ と包含写像 $\tilde{P}^i(\Omega(X)) \hookrightarrow \tilde{P}^m(\Omega(X))$ のホモトピー pull-back を B_i とし、$\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega(X))$ と写像 $\tilde{E}^{i+1}(\Omega(X)) \to \tilde{P}^i(\Omega(X)) \hookrightarrow \tilde{P}^m(\Omega(X))$ のホモトピー pull-back を A_i とし、σ のホモトピー fibre を F する。 このとき、$X_i = B_i/F, Y_i = A_i/F$ とおけば、$X_0 \simeq \{*\}, X_m \simeq X{\vee}\Sigma F$ であり、$Y_i \to X_i \to X_{i+1}$ は up to homotopy で cofibration となる。 従って $\mathrm{Cat}(X) \leq m{+}1 = \mathrm{cat}(X){+}1$ が成立する。 終り.

定理 11.20 (**Varadarajan,Hardie**) $F \to E \to B$ を fibration とする。 このとき次式が成立する：

$$\mathrm{cat}(E){+}1 \leq (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(\mathrm{cat}(B){+}1)$$

略証: $\mathrm{cat}(B) = m, \mathrm{cat}(F) = n$ とすると、定理 11.17 より必要なら B を $\tilde{P}^m(\Omega(B))$ に取り替えることにより $\mathrm{Cone}(B) = m$ と仮定してよい。 そこで $\{h_i : H_i \to B_i \,|\, 0{\leq}i{\leq}m\}$ を B の cone decomposition とし、$E_i = p^{-1}(B_i)$ とおく:

$$B_{i+1} = B_i \cup C_{H_i}, B_0 = \{*\} \text{ and } B_m = B,$$

$$E_{i+1} = E_i \cup C_{H_i}{\times}F, E_0 = F \text{ and } E_m = E.$$

さてここで帰納法を用いて $\mathrm{cat}(E_i){+}1 \leq (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(i{+}1)$ を示す。

($i = 0$ の場合) 明らか。

($i{\leq}j$ まで正しかったとして $i{=}j{+}1$ の場合) $E_{j+1} = E_j \cup C_{H_j}{\times}F$ であり、この式の中の F を定理 11.17 より $F' = \tilde{P}^n(\Omega(F))$ に取り替えれば、$E'_{j+1} = E_j \cup C_{H_j}{\times}F'$ は E を支配する。 そこで

$\{k_i : K'_i \to F'_i \,|\, 0{\le}i{\le}m\}$ を F' の cone decomposition とする:

$$F'_{i+1} = F'_i \cup C(K_i), F'_0 = \{*\} \text{ and } F'_n = F',$$

さらに $E'_{j,i} = E_j \cup C_{H_j}{\times}F'_i$ とおけば、次のような E_{j+1} の cone decomposition を得る:

$$E'_{j,i+1} = E_{j,i} \cup C_{H_j}{\times}C(K'_i), E'_{j,0} = E_j \text{ and } E'_{j,n} = E'_{j+1},$$

従って $\mathrm{cat}(E) \le \mathrm{cat}(E') \le (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}i + \mathrm{cat}(F){+}1 = (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(i{+}1)$ となり帰納法が成立する。

終り.

第４章　L–S の猫の決定

12　二つのスタンス

12.1　計算可能な不変量を用いて良い状況を捉える

定義 12.1 Toomer 不変量とその改良版を導入する。　Toomer 不変量は有理ホモトピー論では e(−) と表示されるが、 Adams e 不変量との競合を避けて wgt(−) と表示する：

(1) h を乗法的なコホモロジー論とする。

i) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\Omega(X))) \text{ は単射 } \right\}$

ii) $\mathrm{Mwgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l}(e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\Omega(X))) \text{ は } h^*h\text{-}\\ \text{modules の間の split mono}\end{array}\right\}$

iii) $\mathrm{Awgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l}(e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\Omega(X))) \text{ は } h^*h\text{-}\\ \text{algebras の間の split mono}\end{array}\right\}$

(2)　i) $\mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{wgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的なコホモロジー論}\right\}$

ii) $\mathrm{Mwgt}(X) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{Mwgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的なコホモロジー論}\right\}$

iii) $\mathrm{Awgt}(X) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{Awgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的なコホモロジー論}\right\}$

(3)　i) $\mathrm{wgt_p}(X) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{wgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的な } p\text{-local コホモロジー論}\right\}$

ii) $\mathrm{Mwgt}_p(X) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{Mwgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的な } p\text{-local コホモロジー論}\right\}$

iii) $\mathrm{Awgt}_p(X) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{Awgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的な } p\text{-local コホモロジー論}\right\}$

定理 12.2 $\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{wgt}(X;h) \leq \mathrm{Mwgt}(X;h) \leq \mathrm{Awgt}(X;h) \leq \mathrm{cat}(X)$が成立する。

さて Rudyak と Strom は Fadell-Husseini [36] (1992)の与えた位相不変量 category weight をホモトピー不変量となるように再定義し、L-S の猫を近似計算する仕組みを与えた：

定義 12.3 (Rudyak 1997 [111, 112], Strom 1998 [129]) $u \in \tilde{h}^*(X)$ に対して

$\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_*(u) \neq 0\right\}$ と定義する (h は乗法的コホモロジー論)。

定理 12.4 (**Rudyak [111, 112], Strom [129]**) h を乗法的なコホモロジー論とする。

(1) $\underline{uv \neq 0}$ in $h^*(X)$ ならば $\mathrm{wgt}(u;h) + \mathrm{wgt}(v;h) \leq \mathrm{wgt}(uv;h)$ が成立する。

(2) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h)\,|\,u \in \tilde{h}^*(X)\}$ が成立する。

定義 12.5 $\{(E_r^{**}(X;h), d_r)\,|\,r \geq 1\}$ を $X \simeq \tilde{P}^\infty(\Omega(X))$ の filtration $\left\{\tilde{P}^m(\Omega(X))\,|\,m \geq 0\right\}$ に associate し、$h^*(X)$ に収束する Rothenberg–Steenrod 型の spectral sequence とする。

定理 12.6 (**G. W. Whitehead [145], Ginsburg [50], McCleary [98]**) X を単連結とする。

(1) $h^*(\Omega(X))$ が h^* 上 free ならば、$E_2^{**}(X;h) \cong \mathrm{Cotor}^{*,*}_{h^*(\Omega X)}(h^*, h^*)$

(2) $d_r : E_r^{s,t}(X;h) \to E_r^{s+r,t-r+1}(X;h)$ であり、$H(E_r^{*,*}(X;h), d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}(X;h)$

(3) $E_\infty^{*,*}(X;h) \cong E_0 h^*(X), \qquad E_\infty^{s,t}(X;h) \cong F_s h^{s+t}(X)/F_{s+1}h^{s+t}(X)$

$$F_m h^n(X) = \ker\left\{(e_m^X)_* : h^n(X) \to h^n(\tilde{P}^m(\Omega(X)))\right\}$$

(4) (Whitehead) $r > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E_r^{s,t}(X;h) \cong E_\infty^{s,t}(X;h)$ である。

(5) (Ginsburg) $s > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E_\infty^{s,t}(X;h) = 0$ である。

注 12.7 任意の $[u]\ (\neq 0) \in E_\infty^{s,*}(X;h)$, $(u \in \tilde{h}^*(X))$ に対して $\mathrm{wgt}(u;h) = s$ である。

例 12.8 (1) $\mathrm{wgt}(L^n(p)) = \mathrm{cat}(L^n(p)) = \mathrm{Dim}(L^n(p)) = n$ ($p > 1$ は任意) である。

(2) Symplectic 多様体 M が $\pi_2(M)$=0 を満たせば wgt(M) = cat(M) = $2n$ である。

(3) $\mathrm{wgt}(Sp(2); H\mathbb{Z}/2) = 2 < 3 = \mathrm{Mwgt}(Sp(2); H\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(Sp(2))$ である。

12.2 二つの「安定」な猫

最近になって、cup(−) とは異なる形で安定化された L-S の猫たちが導入された：

定義 12.9 (Rudyak [112]) $\mathrm{rcat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0\,|\,\exists_{(stably)\ \sigma : X \to P^m(\Omega(X))}\ e_m^X \circ \sigma \sim 1_X\}$.

定義 12.10 (Vandembroucq [141])

$$\mathrm{Qcat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0\,|\,\exists_{\sigma : X \to (QP)^m(\Omega(X))}\ (Qe)_m^X \circ \sigma \sim 1_X\},$$

ただし、fibration $E^{m+1}(\Omega(X)) \longrightarrow P^m(\Omega(X)) \xrightarrow{e_m^X} X$ を安定化関手 $Q = \Omega^\infty\Sigma^\infty$ を用いて fibrewise に安定化したものが $Q(E^{m+1}(\Omega(X))) \longrightarrow (QP)^m(\Omega(X)) \xrightarrow{(Qe)_m^X} X$ である。

定理 12.11 (**Rudyak [112, 113], Vandembroucq [141]**) (1) $\mathrm{Qcat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

(2) 有理化された空間 X_0 は$\mathrm{wgt}(X_0) = \mathrm{rcat}(X_0) \le \mathrm{Qcat}(X_0) = \mathrm{cat}(X_0)$ をみたす。

(3) $\mathrm{cup}(X) \le \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Mwgt}(X) = \mathrm{rcat}(X) \le \mathrm{Awgt}(X) \le \mathrm{cat}(X)$.

注 12.12 一般に $\mathrm{cat}(X)$ の近似としては、$\mathrm{cup}(X;h)$ より $\mathrm{wgt}(X;h)$ の方が、$\mathrm{wgt}(X;h)$ より $\mathrm{Mwgt}(X;h)$ の方が、また $\mathrm{Mwgt}(X;h)$ より $\mathrm{Awgt}(X;h)$ の方が良い近似を与える。

12.3 高次の Hopf 不変量と L–S の猫

Berstein-Hilton [14] (1960)は R 係数のホモトピー群の元に対して高次の Hopf 不変量

$$H_m : \pi_n(X;R) \to \pi_{n+1}(\textstyle\prod^m X, \prod^m_{m-1} X;R), \quad n{\ge}2,\ m{\ge}1,$$

を用いて基点以外に二つだけ胞体を持つ複体の L-S 猫を決定した。 Stanley と I はこの高次 Hopf 不変量を ΩX の $\mathcal{A}_\infty$ 構造を用いて集合に値を持つ不変量として再定義した:

定義 12.13 (I [69], Stanley [124]) $\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega(X))$ を定理 11.9 で定まる $\mathrm{cat}(X) \le m$ の構造を与える写像とする。 任意の $f : \Sigma V \to X$ に対して次の可換図を考える: $(e^X_m{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}(f) = ev{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}(f) = f = 1_X{\circ}f = e^X_m{\circ}\sigma{\circ}f)$

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma V \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, dotted, "H^\sigma_m(f)"'] \arrow[dr, "\Sigma\,\mathrm{ad}(f)"] \arrow[ddr, dotted] \arrow[ddrr, "f"] & & \\
 & X \arrow[dr, "\sigma"'] & \Sigma\Omega(X) \arrow[d, hook] \arrow[dr, "ev"] & \\
 \tilde{E}^{m+1}(\Omega(X)) \arrow[rr, "p^{\Omega(X)}_{m+1}"'] & & \tilde{P}^m(\Omega(X)) \arrow[r, "e^X_m"'] & X.
\end{tikzcd}$$

そこで $\sigma{\circ}f$ と $\Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の差 $d^\sigma_m(f) = \sigma{\circ}f - \Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の持ち上げ $(p^{\Omega(X)}_{m+1}{\circ}H^\sigma_m(f) = d^\sigma_m(f))$ を $H^\sigma_m(f) \in [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega(X))]$ とし、$\mathcal{H}^\sigma_m(f) = \Sigma^\infty H^\sigma_m(f) \in \{\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega(X))\}$ とする。

問題 12.14 ΣV がホモトピー可換な co–Hopf 空間ならば H^σ_m が準同型となるか?

定理 12.15 (**I [69]**) V が co–Hopf 空間ならば任意の σ に対して H^σ_m は準同型である。

略証: $f, g : \Sigma V \to X$に対してそのadjointsを$\mathrm{ad}(f), \mathrm{ad}(g) : V \to \Omega(X)$とする:

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f) : \Sigma V \to \Sigma\Omega(X), \quad \Sigma\,\mathrm{ad}(g) : \Sigma V \to \Sigma\Omega(X), \quad \Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) : \Sigma V \to \Sigma\Omega(X)$$

ここで $+_S$ は suspension 構造によるホモトピー集合の積である。 ところが ΣV と V は、V の co-Hopf 構造によるホモトピー集合の積をもつので、これを $+_V$ で表せば

$$\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \mathrm{ad}(f{+_V}g) \sim \mathrm{ad}(f){+_V}\,\mathrm{ad}(g)$$

を得る。 従ってこれらの懸垂をとることで次のホモトピーを得る。

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \Sigma(\mathrm{ad}(f){+_V}\,\mathrm{ad}(g)) \sim \Sigma\,\mathrm{ad}(f){+_S}\Sigma\,\mathrm{ad}(g)$$

従って $\Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \Sigma\,\mathrm{ad}(f) +_S \Sigma\,\mathrm{ad}(g)$ となり、定義から $H^\sigma_m(f+g) \sim H^\sigma_m(f) + H^\sigma_m(g)$ が成立する。 終り.

問題 12.16 任意の σ に対して $H^\sigma_m(f\circ(\Sigma g)) = H^\sigma_m(f)\circ(\Sigma g)$ が成立することを確かめよ。

例えば $\tilde{\mathcal{A}}_m$ 空間 G に対して $X = \tilde{P}^m(G)$ とおけば、標準的な構造写像 $\sigma : \tilde{P}^m(G) \to \tilde{P}^m(\Omega(\tilde{P}^m(G)))$ に対して $H^\sigma_m : [\Sigma V, \tilde{P}^m(G)] \to [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega(\tilde{P}^m(G)))]$ が定まる (I [69]) 。

定理 12.17 球面 S^{n-1} $(n = 1, 2, 4, 8)$はノルムを保つ (非結合的) 積を持つ $\mathbb{R}$ 代数の単元の全体としての積構造を持つ。 このとき高次 Hopf 不変量 $H^S_m : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \mathbb{Z}$ が 1 となる元の存在が S^{n-1} の $\mathcal{A}_{m+1}$ 構造の存在と同値である。

略証: まず$H^S_m : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{E}^{m+1}(\Omega(\tilde{P}^m(S^{n-1}))))$であり、

$$\pi_{n(m+1)-1}(\tilde{E}^{m+1}(\Omega(\tilde{P}^m(S^{n-1})))) \cong \pi_{n(m+1)-1}(S^{n(m+1)-1}) \cong \mathbb{Z}$$

となるから、$H^S_m : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \mathbb{Z}$ と考えて良い。

$H^S_m(f) = 1$ となる $f : S^{n(m+1)-1} \to \tilde{P}^m(S^{n-1})$ が存在すれば、f のホモトピー fibre が Serre spectral sequence を用いて $S^{n-1})$ にホモトピー同値であることが分かり、X の Stasheff の意味の $\mathcal{A}_{m+1}$-構造が作られる。 よって定理 11.13 から X は $\tilde{\mathcal{A}}_{m+1}$-空間である。 逆は明らかである。 終り.

12.4 必要十分条件を用いて微妙な状況を探る

定義 12.18 (I [69]) 位相空間 X は $\mathrm{cat}(X) = m$ をみたす空間であるとする。 高次の (非安定および安定) Hopf 不変量は

$$\begin{cases} H^S_m(\alpha) = \{H^\sigma_m(\alpha) \mid \sigma \text{ is a structure of } \mathrm{cat}(X) = m\} \subseteq [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega(X))], \\ \mathcal{H}^S_m(\alpha) = \{\mathcal{H}^\sigma_m(\alpha) \mid \sigma \text{ is a structure of } \mathrm{cat}(X) = m\} \subseteq \{\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega(X))\}. \end{cases}$$

という集合として各々定義される。

問題 12.19 $d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2 \geq \mathrm{Dim}(X) \geq d\cdot\mathrm{cat}(X)$ ならば σ は一意的であることを示せ。

例 12.20 $X = S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$ (各々 $n \geq 1$) は上の条件をみたす。

定理 12.21 (**I [69]**) CW 複体 X が $\mathrm{cat}(X) = m$ $(m \geq 1)$ かつ $(d-1)$ 連結 $(d \geq 2)$ で条件「$\mathrm{Dim}(X) \leq d\,\mathrm{cat}(X)+d-2$」を満たすとき $W = X \cup_\alpha D^{e+1} \overset{i}{\hookleftarrow} X$ $(e \geq d)$ とおく。

(1) 「$\mathrm{cat}(W) = \mathrm{cat}(X)+1$ である」為には「$H^S_m(\alpha) \neq 0$ である」が必要十分である。

(2) また $\mathrm{cat}(W) = \mathrm{cat}(X)+1$ のとき、「すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{cat}(W\times S^n) = \mathrm{cat}(W)+1$ である」為には「$\mathcal{H}^S_m(\alpha) \neq 0$ である」が必要十分である。

略証: (2) は省略し、(1) のみを示す: $\tilde{P}^m(\Omega(i))\circ\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega(X)) \hookrightarrow \tilde{P}^m(\Omega(W))$ が W に extend できるための障害が

$$\tilde{P}^m(\Omega(i))\circ\sigma\circ\alpha \simeq \tilde{P}^m(\Omega(i))\circ\sigma\circ\alpha - \Sigma\,\mathrm{ad}\,(i\circ\alpha) \simeq \tilde{P}^m(\Omega(i))\circ\sigma\circ\alpha - \tilde{P}^m(\Omega(i))\circ\Sigma\,\mathrm{ad}\,\alpha$$
$$\simeq \tilde{P}^m(\Omega(i))\circ(\sigma\circ\alpha - \Sigma\,\mathrm{ad}\,\alpha) \simeq p^m_{\Omega(W)}\circ\tilde{E}^{m+1}(\Omega(i))\circ H^\sigma_m(\alpha)$$

で与えられ、$p^m_{\Omega(W)*}$ は単射であるので本質的には $\tilde{E}^{m+1}(\Omega(i))\circ H^\sigma_m(\alpha)$ である。 ここで $m\geq 1$ で $\Omega(i) : \Omega(X) \hookrightarrow \Omega(W)$ は $(e-1)$ 連結かつ $\Omega(W)$ は連結であるので、$\tilde{E}^{m+1}(\Omega(i))$ は $(e+1)$ 連結となる。従って$\tilde{E}^{m+1}(\Omega(i))_*$も単射であり、$\tilde{P}^m(\Omega(i))\circ\sigma$ が W に extend できるための障害は $H^\sigma_m(\alpha)$ で与えられる。終り.

定理 12.22 (**I [67]**) CW 複体の族 $\{Q_\ell\,;\, \ell\geq 2$ は素数$\}$ で次を満たすものが存在する。

$$\begin{cases} \mathrm{cat}(Q_2\times S^n) = \mathrm{cat}(Q_2) & \text{for all } n \geq 1, \\ \mathrm{cat}(Q_\ell\times S^n) = \mathrm{cat}(Q_\ell) & \text{for all } n \geq 2 \text{ and } \ell > 2. \end{cases}$$

$\ell = 2$ の場合の略証: $\sigma \in \pi_{15}(S^8)$ を Hopf 不変量 1 を与える元とすると、$H_1(\sigma) = 1 \in \pi_{15}(\Omega(S^8)*\Omega(S^8)) \cong \mathbb{Z}$ である。 S^{15} に対する Hopf 不変量 1 の元の非存在は、Toda [136] によって証明され, 特に $[\iota_{15}, \iota_{15}] \in \pi_{29}(S^{15})$ は懸垂準同型 $E : \pi_{28}(S^{14}) \to \pi_{29}(S^{15})$ の像に含まれる自明でない元である。問題 12.16 に挙げた事実から $H_1(\sigma\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]) = i_*[\iota_{15}, \iota_{15}]$ ($i : S^{15} \hookrightarrow \Omega(S^8)*\Omega(S^8)$ は bottom cell の包含写像) となり、$\Omega(S^8)*\Omega(S^8)$ は無限個の球面の一点和にホモトピー同値であるから i_* は split mono である。従って $H_1(\sigma\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]) \neq 0$ であり、Berstein-Hilton の定理から $Q_2 = S^8 \cup_{\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]} e^{30}$ は $\mathrm{cat}(Q_2) = 2$ をみたす。

一方で Whitehead 積の懸垂は必ず 0 になることから、$\Sigma([\iota_{15},\iota_{15}]) = 0$ である。 また $Q_2{\times}S^n = Q_2{\times}\{*\} \cup S^8{\times}S^n \cup_{\psi_n} e^{n+30}$ という CW 分割を考えると $\mathrm{cat}(Q_2{\times}\{*\} \cup S^8{\times}S^n) = 2$ であり、ψ_n は $\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]$ と $\iota_n \in \pi_n(S^n)$ の相対 Whitehead 積で与えられる。 従って $\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n) = 3$ となる為には、$H^S_2(\psi_n)$ が 0 を含んではならない。 しかし $H^S_2(\psi_n) \ni S^{n-1}{*}H_1(\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]) = \pm\Sigma^n[\iota_{15},\iota_{15}] = 0$ $(n \geq 1)$ となるので、$\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n) = \mathrm{cat}(Q_2) = 2$ $(n \geq 1)$ が成立する。 終り.

$\mathbb{C}P^3$ は S^4 上の S^2 束の構造を持つことに注意して、うまく自明でない co-Hopf 写像 $\beta : S^q \to S^3$ を選び、$\Sigma\beta : S^{q+1} \to S^4$ を smooth map で近似する。 $E(\beta)$ を $\Sigma\beta$ による $\mathbb{C}P^3$ の引き戻しとして定義すれば、$E(\beta) = S^2 \cup_{\eta\circ\beta} e^{q+1} \cup_{\psi(\beta)} e^{q+3}$ となる。 これに対して H^S_3 の計算を自明でない Toda bracket (cf. [137]) を用いて実行することで次の二つの定理を得る。

定理 12.23 (I [69], L-S-V [92]) 単連結な閉多様体 N で次を満たすものが存在する。

$$\mathrm{cat}(N \smallsetminus \{*\}) = \mathrm{cat}(N).$$

定理 12.24 (I [69]) 単連結な閉多様体 M で次の条件を満たすものが存在する。

$$\mathrm{cat}(M{\times}S^n) = \mathrm{cat}(M) \quad \text{for all } n \geq 2,$$

従って、[99] に挙げられた Problems 642 と 643 は閉多様体に限定しても共に否定的に解決されたことになる。 しかし、これらすべての計算例は次の予想を支持している。

問題 12.25 (I [67]) $n(X) = \mathrm{Max}\{n \mid \mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\mathrm{cat}(X){+}1 \text{ or } n{=}0\}$ は次をみたすか？

$$\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \begin{cases} \mathrm{cat}(X){+}1 & \text{for all } n \leq n(X), \\ \mathrm{cat}(X) & \text{for all } n > n(X). \end{cases}$$

これについては最近、次の結果がアナウンスされた。

定理 12.26 (Stanley-Strom-I. [75]) 単連結有限複体 X が十分大きな $n(X)$ に対し $\mathrm{cat}(X{\times}S^{n'(X)}) = \mathrm{cat}(X)$ をみたすならば次式が成立する。

$$\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \begin{cases} \mathrm{cat}(X){+}1 & \text{for all } n \leq n(X), \\ \mathrm{cat}(X) & \text{for all } n \geq n'(X), \end{cases}$$

ただし $n'(X)$ は X の連結性、次元そして L–S の猫に依存する非常に大きな自然数である。

さらに Lie 群 $\mathrm{Spin}(9)$ に対する結果 $\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9)) = 8$ が Kono-I. [88] によりアナウンスされ、その中で $\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9)) = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9); \mathbb{F}_2) = 8 > 6 = \mathrm{wgt}(\mathrm{Spin}(9); \mathbb{F}_2)$ が示されている。　この事実は $\mathrm{Mwgt}(\ ; \mathbb{F}_2)$ が実際に $\mathrm{wgt}(\ ; \mathbb{F}_2)$ より強い不変量であることを裏付けている。

文　　献

[1] J. F. Adams, On the non-existence of elements of the Hopf invariant one, Ann. of Math., 72 (1960), 20--104.

[2] M. Arkowitz, Co-H-spaces, Handbook of algebraic topology, 1143-1173, North Holland, Amsterdam, 1995.

[3] M. Arkowitz and G. Lupton, Homotopy actions, cyclic maps and their duals, Homology, Homotopy and Applications, **7** (2005), 169--184

[4] M. Arkowitz and D. Stanley, The cone length of a product of co-H-spaces and a problem of Ganea, Bull. London Math. Soc. 33 (2001), 735--742.

[5] John C. Baez, James Dolan, Higher-dimensional algebra III: n-categories and the algebra of opetopes, Advances in Mathematics **135** (1998), 145–-206.

[6] John C. Baez, James Dolan, Categorification. In ``Higher Category Theory", eds. Ezra Getzler and Mikhail Kapranov. Contemporary Mathematics vol. 230, Amer. Math. Soc., 1998, 1--36.

[7] Batanin:A-infinity Mikhail A. Batanin, Homotopy coherent category theory and A_∞-structures in monoidal categories, Journal of Pure and Applied Algebra **123** (1998), 67–-103.

[8] H. Bass, Projective modules over free groups are free, J. of Algebra 1 (1964), 367--373.

[9] H. Bass, Algebraic K-theory, Benjamin, Amsterdam,1968.

[10] M. Bendersky, A functor which localizes the higher homotopy groups of an arbitrary CW-complex, Lecture Notes in Math. 418, Springer Verlag, Berlin (1975), 13--21.

[11] I. Berstein, Homotopy mod C of spaces of category 2, Comment. Math. Helv. 35 (1961), 9--15.

[12] I. Berstein and E. Dror, On the homotopy type of non-simply connected co-H-space, Ill. Jour. Math. 20 (1976), 528--534.

[13] I. Berstein and T. Ganea, The category of a map and of a cohomology class, Fund. Math. **50** (1961/62), 265--279.

[14] I. Berstein and P. J. Hilton, Category and generalized Hopf invariants, Illinois. J. Math. **4** (1960), 437--451.

[15] J. M. Boardman and B. Steer, On Hopf invariants, Comment. Math. Helv. 42 (1967), 180--221.

[16] J. M. Boardman and R. M. Vogt, Homotopy-everything H-spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 1117--1122.

[17] A. K. Bousfield and D. M. Kan, Homotopy Limits, Completions and Localizations, Lecture Notes in Math. 304, Springer Verlag, Berlin (1972).

[18] A. Borel, Topics in the homology theory of fibre bundles, Lect. Notes in Math. 36, Springer Verlag, Berlin (1967).

[19] M. Brittenham, Life gets better as n gets larger (topology-style) The (continuing) saga of the Poincare Conjecture, http://www.math.unl.edu/ mbritten/ldt/poincare.html.

[20] F. E. Browder, Problems of present day mathematics, in ``Mathematical developments arising from Hilbert problems" (De Kalb, IL, 1974), 35--79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.

[21] W. Browder, Torsion in H-spaces, Ann. of Math. 74 (1961), 24--51.

[22] P. M. Cohn, Free ideal rings, J. of Algebra 1 (1964), 47--69.

[23] O. Cornea, Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category, Topology **33** (1994), 95--111.

[24] O. Cornea, There is just one rational cone-length, Trans. Amer. Math. Soc. 344 (1994), 835--848.

[25] O. Cornea, Strong LS category equals cone-length, Topology **34** (1995), 377--381.

[26] M. C. Crabb, J. R. Hubbuck and Kai Xu, Fields of spaces, Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology, 1 (1990), 241--254, LMS. Lecture Note 175, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[27] O. Cornea, Some properties of the relative Lusternik-Schnirelmann category, Stable and unstable homotopy (Toronto, 1996), Fields Inst. Commun., **19** (1998), 67--72.

[28] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea and D. Tanré, ``Lusternik-Schnirelmann category", Mathematical Surveys and Monographs **103**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[29] M. Clapp and L. Montejano, Lusternik-Schnirelmann category and minimal coverings with contractible sets, Manuscripta Math. 58 (1987), no. 1-2, 37--45.

[30] M. Clapp and D. Puppe, Invariants of the Lusternik-Schnirelmann type and the topology of critical sets, Trans. Amer. Math. Soc. 298 (1986), 603--620.

[31] C. R. Curjel, A note on spaces of category ≤ 2, Math. Z. 80 (1963), 293--299.

[32] C. R. Curjel, On the homology decomposition of polyhedra, Illinois J. Math. 4 (1963), 121--136.

[33] B. Eckmann, P. Hilton, Décomposition homologique d'un polyèdre simplement connexe, C. R. Acad. Sci. Paris 248 (1959), 2054--2056.

[34] S. Eilenberg and T. Ganea, On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups, Ann. of Math. (2), **65** (1957), 517--518.

[35] E. Fadell and S. Husseini, Relative category, products and coproducts, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 64 (1994), 99--115 (1996).

[36] E. Fadell and S. Husseini, Category weight and Steenrod operations (Spanish), Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), **37** (1992), 151--161.

[37] Y. Felix, S. Halperin and J.-M. Lemaire, The rational LS category of products and of Poincaré duality complexes, Topology **37** (1998), 749--756.

[38] Y. Felix, S. Halperin and J.-C. Thomas, ``Rational Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, 2001, Graduate Texts in Math. **205**.

[39] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato and D. Tanré, Hopf-Ganea invariants and weak LS category, Top. Appl. 115 (2001), 305--316.

[40] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato, J. Strom and D. Tanré, The Lusternik-Schnirelmann category of $Sp(3)$, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 587--595 (electronic).

[41] A. Floer, Cuplength estimates on Lagrangian intersections, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 335--356.

[42] A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, Comm. Math. Phys. 120 (1989), 575--611.

[43] R. H. Fox, On the Lusternik-Schnirelmann category, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 333--370.

[44] R. H. Fox, Free differential Calculus I, Ann. of Math. 57 (1953), 547--560.

[45] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant, Topology **38** (1999), 933--1048.

[46] T. Ganea, Lusternik-Schnirelmann category and strong category, Illinois. J. Math. **11** (1967), 417--427.

[47] T. Ganea, Cogroups and suspensions, Invent. Math. **9** (1970), 185--197.

[48] T. Ganea, Some problems on numerical homotopy invariants, In: ``Symposium on Algebraic Topology'', 23--30, Lecture Notes in Math. **249**, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[49] W.J. Gilbert, Some examples for weak category and conilpotency, Illinois J. Math. **12** (1968), 421-432.

[50] M. Ginsburg, On the Lusternik-Schnirelmann category, Ann. of Math. (2), **77** (1963), 538--551.

[51] D. Gonçalves, Mod 2 homotopy associative H-spaces, Geometric Applications of Homotopy Theory I, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), Lect. Notes in Math. 657, Springer Verlag, Berlin (1978) 198--216.

[52] J. C. Gómez-Larrañaga and F. González-Acuña, Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds, Topology **31** (1992), 791--800.

[53] K. A. Hardie, A note on fibrations and category, Michigan Math. J. **17**, (1970), 351--352.

[54] H. W. Henn, On almost rational co-H-spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **87**, (1983), 164--168.

[55] K. Hess, A proof of Ganea's Conjecture for Rational Spaces, Topology **30** (1991), 205--214.

[56] P. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, On co-H-spaces, Comment. Math. Helv. 53 (1978), 1--15.

[57] Y. Hirashima, A convenient axiom to convenient categories for homotopy theory, Math. J. Okayama U. 42 (2000) 115--122.

[58] H. Hofer, Lusternik-Schnirelman-theory for Lagrangian intersections, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5** (1988), 465--499.

[59] J. R. Hubbuck, On homotopy-commutative H-spaces, Topology 8 (1969) 119--126.

[60] J. R. Hubbuck, Two examples on finite H-spaces, Geometric Applications of Homotopy Theory I, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), Lect. Notes in Math. 657, Springer Verlag, Berlin (1978) 282--291.

[61] J. R. Hubbuck, Products with the seven sphere and homotopy associativity, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. Ser. A 40 (1986), 91--100.

[62] J. R. Hubbuck, Self maps of H-spaces, Advances in homotopy theory (Cortona, 1988), 105--110, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 139, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[63] J. R. Hubbuck and N. Iwase, A p-complete version of the Ganea conjecture on co-H-spaces, In: ``Lusternik-Schnirelmann category and related topics'' (South Hadley, MA, 2001), 127--133, Contemp. Math. **316**, 2002.

[64] N. Iwase: On the ring structure of $K^*(XP^n)$ (Japanese), Master Thesis, Kyushu University, Fukuoka, 1983.

[65] N. Iwase: On the A_n-structures of mappings (Japanese), Research on unstable homotopy theory (Japanese) (Kyoto 1983), Sūri Kaiseki Kenkyūsho Kōkyūroku, 505 (1983), 63--75.

[66] N. Iwase, On the K-ring structure of X-projective n-space, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. (A) Math. **38** (1984), 285-297.

[67] N. Iwase, Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 623--634.

[68] N. Iwase, Co-H-spaces and the Ganea conjecture, Topology **40** (2001), 223--234.

[69] N. Iwase, A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category, Topology **41** (2002), 695--723.

[70] N. Iwase, Lusternik-Schnirelmann category of a sphere-bundle over a sphere, Topology **42** (2003), 701--713.

[71] N. Iwase and M. Mimura, Higher homotopy associativity, Algebraic Topology, (Arcata CA 1986), 193--220, Lecture Notes in Math. **1370**, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[72] N. Iwase and M. Mimura, L-S categories of 1 connected compact simple Lie groups of low rank, In: ``Algebraic Topology: Categorical Decomposition Techniques", (Isle of Skye, 2001), 199--212, Progr. Math., 215, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[73] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, On the cellular decomposition and the Lusternik-Schnirelmann category of $Spin(7)$, Topology Appl. **133** (2003), 1--15.

[74] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, L-S categories of non-1 connected compact simple Lie groups, preprint, 2004.

[75] N. Iwase, D. Stanley and J. Strom, Implications of the Ganea Condition, Algebr. Geom. Topol., 4 (2004), 829--839.

[76] I. M. James, The topology of Stiefel manifolds, Cambridge University Press, Cambridge, 1976, London Math. Soc. Lec. Notes 24.

[77] I. M. James, On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann, Topology **17** (1978), 331-348.

[78] I. M. James, Lusternik-Schnirelmann Category, In: ``Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.

[79] I. James and W. Singhof, On the category of fiber bundles, Lie groups, and Frobenius maps, In: ``Higher homotopy structures in topology and mathematical physics" (Poughkeepsie, NY, 1996), 177--189, Contemp. Math. **227**, 1999.

[80] B. Jessup, Rational L-S category and a conjecture of Ganea, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655--660.

[81] H. Kadzisa, Cone-decompositions of the unitary groups, preprint, 2003.

[82] H. Kadzisa, Cone-decompositions of the special unitary groups, preprint, 2003.

[83] D. M. Kan, On monoids and their dual, Bol. Soc. Math. Mex. 3 (1958), 52--61.

[84] G.M. Kelly, ``Basic concepts of enriched category theory", London Math. Soc. Lecture Notes Series 64, Cambridge University Press (1982).

[85] J. Klein, R. Schwänzl and R. M. Vogt, Comultiplication and suspension, Topology Appl. 77 (1997), 1--18.

[86] K. Komatsu, On links whose complements have the Lusternik-Schnirelmann category one, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 473--483.

[87] K. Komatsu and T. Matumoto, Knot-link theory and Lusternik-Schnirelmann category, In: ``Algebra and topology 1992" (Taejoˇn), 211--216, Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejoˇn, 1992.

[88] A. Kono and N. Iwase, Lusternik-Schnirelmann category of Spin(9), preprint.

[89] M. A. Krasnosel′skiiˇ, On special coverings of a finite-dimensional sphere (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 103 (1955), 961--964.

[90] G. Liu and G. Tian, Floer homology and Arnold conjecture, J. Differential Geom. **49** (1998), 1--74.

[91] L. Lusternik and L. Schnirelmann, ``Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels", Hermann, Paris, 1934.

[92] P. Lambrechts, D. Stanley and L. Vandembroucq, Embedding up to homotopy of two-cones into Euclidean space, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3973--4013.

[93] S. Mac Lane, ``Homology", Springer Verlag, Berlin, 1963.

[94] S. MacLane, ``Categories for the working mathematician", Springer Verlag, Berlin, GTM series 5, 1971.

[95] T. Matumoto, Lusternik-Schnirelmann category and knot complement, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 103--107.

[96] T. Matumoto, Lusternik-Schnirelmann category and knot complement II, Topology **34** (1995), 177--184.

[97] J. P. May, Fiberwise localization and completion, Trans. Amer. Math. Soc. 258 (1980), 127--156.

[98] J. McCleary, ``A User's Guide to Spectral Sequences", Math. Lec. Ser. 12, Publish or Perish Inc., Wilmington Delaware (1985).

[99] J. van Mill and G. M. Reed, ``Open problems in topology", edited by J. van Mill and G.M. Reed, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[100] M. Mimura, ``Hopf Spaces" (Japanese), Kinokuniya Shoten, Tokyo, 1986.

[101] M. Mimura and T. Nishimoto, On the cellular decomposition of the exceptional Lie group G_2, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 2451--2459.

[102] L. Montejano, A quick proof of Singhof's $\mathrm{cat}(M\times S^1) = \mathrm{cat}(M) + 1$ theorem, Manuscripta Math. 42 (1983), 49--52.

[103] L. Montejano, Lusternik-Schnirelmann category: a geometric approach, Geometric and algebraic topology, 117--129, Banach Center Publ., 18, PWN, Warsaw, 1986.

[104] L. Montejano, Lusternik-Schnirelmann category and Hilbert cube manifolds, Topology Appl. 27 (1987), 29--35.

[105] L. Montejano, Geometric category and Lusternik-Schnirelmann category, Geometric topology and shape theory (Dubrovnik, 1986), 183--192, Lecture Notes in Math., 1283, Springer, Berlin, 1987.

[106] L. Montejano, Categorical and contractible covers of polyhedra; some topological invariants related to the Lusternik-Schnirelmann category, Conference on Differential Geometry and Topology (Sardinia, 1988). Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 58 (1988), 177--264.

[107] N. Oda, Pairings and copairings in the category of topological spaces, Publ. RIMS Kyoto U. 28 (1992), 83--97.

[108] S. Oka, The stable homotopy groups of spheres I, Hiroshima Math. J. 1 (1971), 305--337.

[109] J. Oprea and Y. Rudyak, On the Lusternik-Schnirelmann category of symplectic manifolds and the Arnold conjecture, Math. Z. **230** (1999), 673--678.

[110] J. Oprea and Y. Rudyak, Detecting elements and Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds, In: ``Lusternik-Schnirelmann category and related topics" (South Hadley, MA, 2001), 181--191, Contemp. Math. **316**, 2002.

[111] Y. B. Rudyak, On the Ganea conjecture for manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511--2512.

[112] Y. B. Rudyak, On category weight and its applications, Topology **38** (1999), 37--55.

[113] Y. Rudyak, On analytical applications of stable homotopy (the Arnold conjecture, critical points), Math. Z. **230** (1999), 659--672.

[114] S. Saito, Notes on Co-H-spaces, J. Fac. Sci. Shinshu U. **6** (1971), 101--106.

[115] S. Saito, On higher coassociativity, Hiroshima Math. J. 6 (1976), 589--617.

[116] M. Sakai, A proof of the homotopy push-out and pull-back lemma, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2461--2466.

[117] H. Scheerer, On rationalized H- and co-H-spaces, Manuscripta Math. 51 (1984), 63--87.

[118] P. A. Schweitzer, Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping, Topology **3** (1965), 337--355.

[119] C. S. Seshadri, Triviality of vector bundles over the affine space K^2, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 44 (1958), 456--458.

[120] W. Singhof, On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups, Math. Z. **145** (1975), 111--116.

[121] W. Singhof, On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups II, Math. Z. **151** (1976), 143--158.

[122] W. Singhof, Generalized higher order cohomology operations induced by the diagonal mapping, Math. Z. 162 (1978), 7--26.

[123] W. Singhof, Minimal coverings of manifolds with balls, Manuscripta Math. **29** (1979), 385--415.

[124] D. Stanley, Spaces with Lusternik-Schnirelmann category n and cone length $n+1$, Topology **39** (2000), 985--1019.

[125] J. D. Stasheff, Homotopy associativity of H-spaces, I & II, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275--292; 293--312.

[126] J. D. Stasheff, H-spaces from a Homotopy Point of View, Lecture Notes in Math. **161**, Springer Verlag, Berlin 1970.

[127] N. E. Steenrod, Cohomology operations, Annals of Mathematical Studies 50, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1962).

[128] J. Strom, Two special cases of Ganea's conjecture, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 679--688.

[129] J. Strom, Essential category weight and phantom maps, In: ``Cohomological methods in homotopy theory" (Bellaterra, 1998), 409--415, Progr. Math., 196, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[130] M. Sugawara, On a condition that a space is an H-space, Math. J. Okayama U. 5 (1956/57), 109--129.

[131] M. Sugawara, A condition that a space is group-like, Math. J. Okayama U. 7 (1957), 123--159.

[132] D. Sullivan, ``Geometric Topology, Part I", Localization and Galois Symmetry (3.1-4.42), M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.

[133] F. Takens, The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelman category, Invent. Math. **6** (1968), 197--244.

[134] F. Takens, The Lusternik-Schnirelman categories of a product space, Compositio Math. **22** (1970), 175--180.

[135] H. Toda, Topology of standard path spaces and homotopy theory. I, Proc. Japan Acad. 29 (1953), 299--304.

[136] H. Toda, Non-existence of mappings of S^{31} into S^{16} with Hopf invariant 1, J. Inst. Polytech. Osaka City U. Ser. A 8 (1957), 31--34.

[137] H. Toda, ``Composition methods in homotopy groups of spheres", Princeton U. Press, Princeton N.J., Ann. of math. studies 49, 1962.

[138] G. Toomer, Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence, Math. Z. **138** (1974), 123--153.

[139] G. Toomer, Two applications of homology decompositions, Canad. J. Math. 27 (1975), 323--329.

[140] L. Vandembroucq, Suspension of Ganea fibrations and a Hopf invariant, Topology Appl. 105 (2000), 187--200.

[141] L. Vandembroucq, Fibrewise suspension and Lusternik-Schnirelmann category, Topology **41** (2002), 1239--1258.

[142] K. Varadarajan, On fibrations and category, Math. Z. **88** (1965), 267--273.

[143] K. Varadarajan, The Finiteness Obstruction of C.T.C. Wall, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[144] C. T. C. Wall, An obstruction to finiteness of CW-complexes, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 269--270.

[145] G. W. Whitehead, The homology suspension, In: ``Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956", Georges Thone, Liége; 89--95, Masson & Cie, Paris, 1957.

[146] G. W. Whitehead, ``Elements of Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, 1978, Graduate Texts in Mathematics **61**.

[147] K. Xu, Space of rings, PhD Thesis at University of Aberdeen (1989).

[148] A. Zabrodsky, ``Hopf spaces", Notas de Matemática (59), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, 22 (1976).

Appendix

12.5　多様体の L–S category

(1) $\mathrm{cat}(\mathbb{F}P^n) = n,\ n{\geq}0$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$).　(2) $\mathrm{cat}(\mathbb{O}P^n) = n,\ 0{\leq}n{\leq}2$.

(3) $\mathrm{cat}(M^2) = \begin{cases} 1, & \pi_1(M^2) = 0, \\ 2, & \pi_1(M^2) \neq 0. \end{cases}$　(4) $\mathrm{cat}(M^3) = \begin{cases} 1, & \pi_1(M^3) = 0, \\ 2, & \pi_1(M^3) = \mathbb{Z}, \\ 3, & \text{otherwise.} \end{cases}$

(5) $\mathrm{cat}(S^n) = 1,\ n{\geq}1$.　(6) (Rudyak) $\mathrm{cat}(L^n(p)) = n,\ n{\geq}1, p{>}1$.

(7) (Rudyak) Symplectic 多様体 (M^{2n}, ω) が $\pi_2(M){=}0$ をみたせば $\mathrm{cat}(M^{2n}) = 2n,\ n{\geq}1$.

(8) (I) S^{t+1} 上の S^r 束 E と $Q = E \setminus \{pt\} \simeq S^r \cup_\alpha e^{t+1}$ の L–S カテゴリ数

r	t	α	$\mathrm{cat}(Q{\times}S^n)$	$\mathrm{cat}(Q)$	$\mathrm{cat}(E)$	$\mathrm{cat}(E{\times}S^n)$
$r{=}1$	$t{=}0$		2	1	2	3
	$t{=}1$	$\alpha{=}\pm 1$	1	0	1	2
		$\alpha{=}0$	2	1	2	3
		$\alpha{\neq}0, \pm 1$	3	2	3	4
	$t{>}1$		2	1	2	3
$r{>}1$	$t{<}r$		2	1	2	3
	$t{=}r$	$\alpha{=}\pm 1$	1	0	1	2
		$\alpha{\neq}\pm 1$	2	1	2	3
	$t{>}r$	$H_1(\alpha){=}0$	2	1	2	3
		$H_1(\alpha){\neq}0\ \&\ \Sigma^r H_1(\alpha){=}0$	3 or 2	2	2	3
		$\Sigma^r H_1(\alpha){\neq}0$			3	3 or 4

(9) (Singhof, James, FGST, IM, IMN) コンパクト単純 Lie 群の L–S カテゴリ数

階数	1		2		3		4		$5 \leq n$	
A_n	$SU(2)$	1	$SU(3)$	2	$SU(4)$	3	$SU(5)$	4	$SU(n{+}1)$	n
	$PU(2)$	3	$PU(3)$	6	$PU(4)$	9	$PU(5)$	12	$PU(n{+}1)$	?
B_n	$Spin(3)$	1	$Spin(5)$	3	$Spin(7)$	5	$Spin(9)$	8	$Spin(2n{+}1)$	?
	$SO(3)$	3	$SO(5)$	8	$SO(7)$	11	$SO(9)$	20	$SO(2n{+}1)$	?
C_n	$Sp(1)$	1	$Sp(2)$	3	$Sp(3)$	5	$Sp(4)$	?	$Sp(n)$	?
	$PSp(1)$	3	$PSp(2)$	8	$PSp(3)$	?	$PSp(4)$	?	$PSp(n)$	?
D_n					$Spin(6)$	3	$Spin(8)$	6	$Spin(2n)$	?
					$SO(6)$	9	$SO(8)$	12	$SO(2n)$	?
					$PO(6)$	9	$PO(8)$	18	$PO(2n)$	?
例外			G_2	4			F_4	?	E_n	?

(10) (Singhof) 複素 Stiefel 多様体 $W_{n,r} = U(n)/U(n{-}r)$ は $\mathrm{cat}(W_{n,r}) = r$ をみたす。

12.6 L–S の猫たちに関連した (私的な) 問題

問題 12.27 (Ganea) 多様体の L–S の猫の値を計算せよ。

問題 12.28 $\mathrm{Awgt}(M) = \mathrm{cat}(M) = \mathrm{Cat}(M)$ を満たす多様体 M のクラスを決定せよ。

問題 12.29 任意の compact Lie 群 G に対して $\mathrm{Awgt}(G) = \mathrm{cat}(G) = \mathrm{Cat}(G)$ となるか？

定理 12.30 (**Cornea**) $\underset{\longrightarrow}{\mathrm{hocolim}}(X_n) \simeq X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \leq 2\mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\geq}1\}$ となる。

問題 12.31 $\underset{\longrightarrow}{\mathrm{hocolim}}(X_n) \simeq X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\geq}1\} + 1$ となるか？

問題 12.32 $\underset{\longleftarrow}{\mathrm{holim}}(X_n) \simeq X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\geq}1\} + 1$ となるか？

定義 12.33 $\mathrm{cat}_{\mathrm{p}}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0\,;\, \exists_{\sigma : X \to P^m(\Omega(X))}\ \text{s.t.}\ e^X_m{\circ}\sigma$ は p-同値$\}$ とおく。

問題 12.34 $\mathrm{cat}_{\mathrm{p}}(X) = \mathrm{cat}(X_{(p)})$ となる為には X が単連結であることが必要十分か？

定理 12.35 (**Cornea**) $\mathrm{cat}(X) \leq 2{\cdot}\,\mathrm{Max}\{\mathrm{cat}_{\mathrm{p}}(X)\,;\, p \geq 0$ は素数$\}$ となる。

問題 12.36 $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Max}\{\mathrm{cat}_{\mathrm{p}}(X)\,;\, p \geq 0$ は素数$\} + 1$ となるか？

定義 12.37 $n(X) = \mathrm{Max}\{n \geq 0\,;\, \mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\mathrm{cat}(X){+}1\ \text{or}\ n{=}0\}$ とおく。

定理 12.38 (**I**) 任意の $n{\geq}0$ に対して $2n \leq n(X) \leq 2n{+}1$ を満たす X が存在する。

問題 12.39 常に $\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{cat}(X){+}1 & \text{for all } n \leq n(X), \\ \mathrm{cat}(X) & \text{for all } n > n(X). \end{array}\right\}$ が成立するのか？

定理 12.40 (**Roitberg**) 有限型の無限次元複体 X と Y で、同じ Mislin genus を持ち異なる L–S の猫の値を取るものが存在する。

問題 12.41 有限複体 X と Y が、同じ Mislin genus を持つならば L–S の猫の値も同じか？

定義 12.42 $\Lambda\mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} (e^X_m)^* : K^*(X) \to K^*(\tilde{P}^m(\Omega(X)))\ \text{は}\ \lambda\text{-rings} \\ \text{の間の split mono} \end{array} \right\}$

問題 12.43 コンパクト Lie 群 G に対して、$\Lambda\mathrm{wgt}(G) = \mathrm{cat}(G) = \mathrm{Cat}(G)$ となるか？

12.7　co–Hopf 空間 = Hopf 空間の双対 = L–S の猫の値が 1 の空間

基点を two–sided homotopy unit とする連続な積を持つ空間を Hopf 空間と言い、 またその積を Hopf 構造という。　Hopf 空間に支配された空間はまた Hopf 空間であり、 従って Lie 群に支配された空間は Hopf 空間である。　特に $SO(8) \approx S^7 \times SO(7)$ であり S^7 は Hopf 空間である。

事実 12.44 連結な CW 複体が Hopf 構造を持つ為には、 適当なループ空間に支配されることが必要十分である。

定理 12.45 (**I. James**) 連結な CW 複体が Hopf 構造をもてば、 その構造は two–sided homotopy inversion をもつ。

定理 12.46 (**A. Zabrodsky**) 連結な CW 複体が Hopf 構造をもてば、 その構造は two–sided strict unit をもつものに取り替えられる。

従って連結 CW 複体では、 Hopf 構造を持つことと $\tilde{A}_2$–構造をもつことは同値である。

定理 12.47 (**J. F. Adams**) 球面 S^n が Hopf 構造を持つ為には n が $0, 1, 3, 7$ のいづれかであることが必要十分である。

定理 12.48 (**W. Browder**) 連結な有限 CW 複体が Hopf 構造をもてば、 その空間はいくつかの S^1 と、 $H^1 = 0$ を満たす連結な有限 CW 複体の直積にホモトピー同値である。

定理 12.49 (**J. Hubbuck**) 連結な有限 CW 複体が homotopy abelian な Hopf 構造をもてば、 その空間は適当な次元の torus にホモトピー同値である。

定理 12.50 (**J. Lin, R. Kane**) 単連結な有限 CW 複体 X が Hopf 構造を持てば、 そのループ空間 $\Omega(X)$ はホモロジー群に torsion 元を持たない。　さらに X は複素 K 群にも torsion 元を持たない。

予想 2 連結 CW 複体では、$\mathcal{A}_m$–形式を持つことと $\tilde{\mathcal{A}}_m$–形式をもつことは、 up to homotopy で同値である。

　基点を two–sided homotopy unit とする連続な co–積を持つ空間を co–Hopf 空間と言い、 またその co–積を co–Hopf 構造という。　するとやはり co–Hopf 空間に支配された空間はまた co–Hopf 空間である。　従って懸垂空間に支配された空間は co–Hopf 空間である。

　さて、 上記の諸事実の双対はどうなるのであろうか？

定理 12.51 (**Ganea**) 連結な CW 複体が co–Hopf 構造を持つ為には、適当な懸垂空間に支配されることが必要十分である。

問題 12.52 連結な CW 複体が co–Hopf 構造を持てば、その空間は homotopy inversion をもつ co–Hopf 構造を持つだろうか？

事実 12.53 自明でない連結な CW 複体の co–Hopf 構造は strict unit を決してもたない。

事実 12.54 co–Hopf 構造と Hopf 構造を共に持つ空間には S^1, S^3, S^7 があり、これらに限る。

問題 12.55 連結な CW 複体が co–Hopf 構造を持てば、その空間はいくつかの S^1 と、$\pi_1 = 0$ を満たす連結な有限 CW 複体の一点和にホモトピー同値だろうか？

最後の問題12.55は、その肯定的な解答が期待され co–Hopf 空間に関する Ganea 予想と呼ばれ、問題 12.52 と問題 12.55 は同値であることが直ちに分かる。

定理 12.56 (**Berstein-Dror, Hilton-Mislin-Roitberg**) 上記の問題 12.52 と問題 12.55 は、co–Hopf 構造についての適当な (結合性などの) 条件のもとで成立する。

定理 12.57 (**Henn, Hubbuck-I**) いかなる素数 $p \geq 0$ に対しても、上記の問題 12.52 と問題 12.55 は、almost p–完備な圏で考えれば有限複体に対して成立する。

定義 12.58 co–Hopf 空間 X のホモロジー群が次元 1 と $n+1, \cdots, n+r$ (n は自然数) に集中し、$H_{n+r}(\tilde{X})$ がねじれ元を持たないとき、安定次元が r 以下であるという。

定理 12.59 (**Saito-Sumi-I, I**) 安定次元 2 までの連結な CW 複体が co–Hopf 構造を持てば、問題 12.52 と問題 12.55 は成立するが、安定次元 5 の連結な CW 複体でこれらを満たさないものが存在する。

ただし、安定次元 3 と 4 については不明である。