

論 説

ラフパス理論と確率解析

稲 浜 譲

1 序

本稿はラフパス理論の手短かな概説である。特に理論の確率論的な側面に焦点をあてて書く。前半ではごく簡単にラフパス理論の非測度論的な部分の基本事項をまとめる。なかでも一番重要なのは、ラフパスの意味での常微分方程式である。後半ではラフパス理論における一連の確率論的な結果について紹介する。このような短い原稿でこれら全てを詰め込むのは無謀かもしれないが、この話題の重要性や将来性を考えれば試みる価値はあると思う。

Terry Lyons が初めてラフパスの研究を発表したのが 1998 年の論文 [33] で、初期の結果をまとめたのが Zhongmin Qian との共著 [36] であった。数学的内容はすばらしかったが、誤植が多かったり、非常に一般性が高い設定で議論しているなどの理由でかなり読みづらい本だった。そのためにこの分野への参入を試みる人には、たいへん勉強しづらい状況だった。(その後に Lyons-Caruana-Levy [35] や Friz-Victoir [18] などの本が出版されて、だいぶ勉強しやすくなった)。そういった本格的な教科書とは逆に、本稿では細かい計算や証明は省略して理論全体の話の大きな流れをできるだけ平易にかつ短く書こうと試みる。

ブラウン運動の見本路 (サンプルパス) は確率論では重要な具体例だが、まったく性質はよくない。だが K. T. Chen の反復積分の理論を念頭において作ったであろうこのラフパス理論により、かなり性質の悪いパスからつくる反復積分 (に相当するもの) を使って、パスに沿った線積分や常微分方程式の定義を拡張し、その結果、確率微分方程式 (SDE) をブラウン運動のサンプルパスごとに研究することが可能になった。別の言葉で表現すると、確率微分方程式の「脱確率論化」に成功したわけである。特に確率微分方程式の解はブラウン運動の関数だと思ったときに連続になることが証明できた。これはマルチンゲール積分論を使う従来の確率論の常識からすると驚愕の結果である。

確率微分方程式は確率論の中で一番重要といっても過言でない研究対象だが、歴史も古く大勢の研究者が徹底的に調べてきたために成熟してしまい、これ以上の大規模な発展は望めないのではないか、という雰囲気がなんとなく業界にあったことは否定しきれない。約 16 年前 (ただし創業者の T. Lyons 以外が参入してからは約 11 年) に登場したラフパス理論は、まったく違った角度から確率微分方程式を眺める理論で、こういった状況を打破しつつあるように思える。これまで少人数で研究してきたが、約 3 年前から人数も論文数もハッキリと増えてきたように感じる。つまり、ラフパス理論は「離陸」しつつあるのではないかと、という印象を受ける。¹⁾ 専門家にとっても意外に思える方向への進展が現在もときどき起きるのも、この分野の将来性を物語っているのではないかと思う。まだ歴史の浅い分野なので、「やったもの勝ち」という雰囲気が強く残っており、その意味で新規参入者にも十分チャンス

のあるように見える。そのような新規参入を目指す人を含めてラフパス理論に感心を持つあらゆる人に、現時点でのラフパス世界の大きな見取り図を示すことが本稿の目的である。

2 ラフパス理論とは何か

急速に発展しているラフパス理論であるが、²⁾ 人数面ではまだ少数派であり、ラフパス理論とはそもそも何なのかを一通り知っている人は確率論業界でもそんなに多くないと思う。ましてや確率論外部にいたとはあまり期待できない。そこでこの章では細かい話をいっさい抜きにして、ラフパス理論の大きな流れを説明したいと思う。したがって厳密でない部分も多少あるが、ご容赦いただきたい。

まずパス (道, 路, 経路) によって駆動される常微分方程式 (ODE) から始めよう。これは”driven ODE”とか”controlled ODE”と呼ばれることが多い。 $x: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^d$ を原点から出発する十分よい性質を持った連続なパスとする。なお本稿では連続でないパスは考えない。また $\sigma: \mathbf{R}^n \rightarrow \text{Mat}(n, d)$ と $b: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を十分よい関数だとする。ここで $\text{Mat}(n, d)$ は $n \times d$ 実行列全体がなす集合である。次の x によって駆動される ODE を考えよう。

$$dy_t = \sigma(y_t)dx_t + b(y_t)dt \quad \text{with given } y_0 \in \mathbf{R}^n.$$

これはいわば省略形であり、正式な定義は次の積分方程式である。

$$y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(y_s)dx_s + \int_0^t b(y_s)ds.$$

一意解が存在する時には、 y は x の関数 (写像) だと思える。これを確率論業界の慣例に従い伊藤写像と呼ぶことにする。伊藤写像はパス空間からパス空間への写像である。以下では、簡単のため、 $y_0 = 0$ かつ $b \equiv 0$ と仮定する。 $(x$ の代わりに $d+1$ 次元のパス $t \mapsto (x_t, t)$ を考え、かつ σ と b からサイズ $(n, d+1)$ 型のブロック行列を作ればよいから。) したがって、以下では

$$dy_t = \sigma(y_t)dx_t \quad \text{with } y_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_t = \int_0^t \sigma(y_s)dx_s \quad (1)$$

を考えることにする。

さて、この方程式 (1) に意味がつくかどうかは、右辺のパス x に沿った積分 (=線積分) が定義できるかどうかにかかっている。定義できる場合は、係数行列 σ がそんなに悪くはないという仮定の下で、必要ならば時間区間を縮めて、Picard 型の逐次近似法を使って (時間局所) 解を得るとというのが、おそらく最も典型的な解法である。

なお駆動する x が連続であるという条件のみでは、線積分は定義できないことに注意せよ。例えば x が区分的に C^1 級であるとすれば、 $dx_s = x'_s ds$ なので、簡単に線積分に意味がつく。もう少し高級な例としては、 x が有界変動な場合がある。このときは、Riemann-Stieltjes 積分が可能なので、(1) は意味がつき、しかも一意解が存在する。しかもパス空間に有界変動 (1 次変動) ノルムを入れると、線積分写像や伊藤写像は連続になる。ここまでは微分積分のちょっとした応用であり、そんなに難しくはない。

また Riemann-Stieltjes 積分を多少拡張した Young 積分というものもある。簡単に紹介すると、 $1/p + 1/q > 1$ という関係式をみたす p, q に対して、 y が q 次変動、 x が p 次変動であれば、(1) の右辺の線積

分は意味がつくというものである。積分の近似 Riemann 和が Riemann-Stieltjes 積分の場合とまったく同じなので、拡張になっていることはすぐにわかる。 $p = q$ として使うことが多いので、その場合は $1 \leq p = q < 2$ が Young 積分できるための条件である。この場合も p 次変動ノルム ($1 \leq p < 2$) に関して、線積分写像や伊藤写像は連続になる。しかし後述の理由で、これも Brown 運動に沿った積分の研究には使えない。本稿における興味は「Young 積分という枠組みを超えて、どこまで確率論的に有用な方向に線積分の理論を拡張できるのか」という点にある。もちろん念頭にあるのは Brown 運動の見本路である。

さて、 μ を d 次元 Brown 運動の法則、すなわち d 次元 Wiener 測度とする。これは連続関数の空間 $C_0(\mathbf{R}^d) = \{x : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^d \mid \text{conti}, x_0 = 0\}$ 上の確率測度であり、確率論の中でもっとも重要な測度である。パス $t \mapsto x_t$ は μ のもとで $\mathbf{R}^d$ 内を走るランダムな運動と思えるが、こう思ったときには $(x_t)_{t \geq 0}$ は Brown 運動であるという。Brown 運動は非常にジグザグした運動であることが知られている。例えば任意の $p \leq 2$ に対して、 p 次変動が有限なパス全体がなす部分集合は μ で測ると重さ 0 である。³⁾ したがって、Brown 運動に沿った積分を Young 積分 (または Riemann-Stieltjes 積分) を使って定義することはできない。

通常の確率論においては、Brown 運動に沿った線積分は次のように伊藤流の確率積分として定義される。(簡単のため $d = 1$ とする.)

$$\int_0^t z_s dx_s = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N z_{t_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}).$$

ここで、 $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ は $[0, t]$ の分割である。この積分の定義はブラウン運動のマルチンゲール性を全面的に使っている。なお右辺の有限和のなかで、 $z_{t_{i-1}}$ と小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の左端からとっていることには、マルチンゲール性に関係した意味がある。よく知られているとおり、 $L^2(\mu)$ と $L^2(\mu \times ds)$ の間の等長性を意味する次の等式が成立する；

$$\mathbf{E}[|\int_0^t z_s dx_s|^2] = \mathbf{E}[\int_0^t |z_s|^2 ds].$$

これは伊藤積分に関する最重要事項であり、伊藤積分を定義するさいの鍵となる。なお L^2 の元は Wiener 測度にかんする almost sure に等しいという同値類でしかないので、確率積分に各 x ごとの意味はつかない。例えば 2 次元の Brown 運動に対して、Lévy の確率面積と呼ばれる次の量

$$x = (x^1, x^2) \mapsto \int_0^1 (x_s^2 dx_s^1 - x_s^1 dx_s^2) \quad (2)$$

は (仮に Wiener 空間の位相を、測度の構造を壊さない範囲で強めたとしても) 連続にならないことが知られている。(杉田 [37] を参照せよ。) 従って、方程式 (1) を伊藤流の確率微分方程式 (SDE) だと解釈した場合の解 y も、 x の写像として連続にならない。つまり伊藤写像は連続でないし、ならない。

上記のように Young 積分などの決定論的な線積分には根本的な限界があるのに対して、伊藤積分はご承知のように歴史的な大成功をおさめたわけである。このような状況なので、伊藤写像が決定論的に (つまり x ごとに) 定義できなかったり、連続にならないことは、「残念ではあるが、あきらめて受け入れざるをえない事実」というのが、ほぼ全ての確率論研究者の感覚だったと思われる。これがラフパ

ス理論が登場した時点での確率論業界における常識であった。

このような状況を打破したのが, T. Lyons の創始によるラフパス理論である ([33] に始まる). この理論により, SDE の解をパスごとに研究するという道がひらかれた. 実はこの理論では普通の意味でのパスではなく, パスとそれが作る反復積分の組を考える. こういった組を「ラフパス」という. おそらくは K. T. Chen というトポロジーの専門家が考えた反復積分の理論が念頭にあったと思われる. しかし解析である以上, かなり「ヘンな」パスも扱わざるをえず, どういった Banach ノルムでまともなパスの集合を完備化すればいいのかは難問である. 「ラフパスの空間に適切な位相を入れると線積分や伊藤写像が測度と関係なく定義できるうえに連続になる. すなわち SDE の解が連続写像の像として手に入る」というのがこの理論の基本思想である. 伊藤写像の連続性は Lyons の連続性定理とよばれている.

ラフパス理論においては, パスとは第 1, 第 2 レベルの 2 つの部分の組になっている. 第 1 レベルのパスとは単に通常のパスの差分 (あえていえば 1 重積分) であり, 第 2 レベルのパスとは 2 重積分のことである. パスの出発点を原点と決めれば, パスを考えることと, その差分を考えることは同値なので, 第 1 レベルは通常の意味でのパスである. だからパスが作る反復積分まで込みで考えることに新しさがあるわけだ. このとき, $2 < p < 3$ を一つ決めて, 第 1 レベルのパスは p 次変動が有限, 第 2 レベルのパスは $p/2$ 次変動が有限として, これに即した位相をラフパス空間に入れる.

このとき重要なことは, 逆方向を向いた次の 2 つの要請が同時に満たされること. (a). ラフパスに対して線積分が定義できる. つまりこの程度にはパスの性質はよく, 従ってラフパスの空間は小さい. ODE は定義から積分方程式であるので, ラフパスの意味での ODE が定義でき, しかも伊藤写像は連続である. (b). Wiener 測度 (の持ち上げ) はラフパスの空間にのる. つまりこの程度にはラフパスの空間は大きい.

ちなみにラフパスの意味での伊藤写像に Brown 運動の持ち上げを代入すると Stratonovich 型 SDE の解が得られる. (これは伊藤型 SDE に簡単な修正項を加えたものである.) 上でラフパスの意味での ODE の定義が確率測度とは何も関係ないことに注意してほしい. これはつまり SDE の非ランダム化である. 別の表現を使えば, 測度と微分方程式が分離されたわけである. 上でごく簡単に紹介したような通常のマルチンゲール積分論を使うかぎり, こういったことはありえなかったのである.

最後に「○○でない」式の説明を追加すると, 従来の確率論にくらべてラフパス理論は (a) マルチンゲール (積分) 論は使わない, (b) マルコフ性は出てこない, (c) フィルトレーション (時間とともに増加する部分 σ 代数の族のこと) と関係ない, などの特徴がある. 結果としてラフパス理論は確率論色が非常に薄く, 実解析のような雰囲気濃い分野になっている.

3 幾何学的ラフパス

この章では [36, 35, 19] に従いラフパスの定義をする. 簡単のためラフネスと呼ばれる定数 p が $2 \leq p < 3$ の場合のみ考える. ブラウン運動への応用を考える場合はこれで十分である. この場合, 第 1, 第 2 レベルのパスのみを使う. なお双子の兄弟である $1/p$ -Hölder ノルムを使う人も多いが, 本稿では主に p 次変動ノルムを使って議論する. ちなみに $p \geq 3$ 以上の場合にもラフパス理論はあり, その場合は第 $[p]$ レベルのパス, すなわち $[p]$ 重の反復積分に相当する量まで現れる.

$\Delta := \{(s, t) \mid 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ とおく. 連続写像 $A: \Delta \rightarrow \mathbf{R}^d$ および $p \geq 1$ に対して p 次変動ノル

ムを

$$\|A\|_p := \sup_{\mathcal{P}} \left\{ \sum_i |A_{t_{i-1}, t_i}|^p \right\}^{1/p} \quad (3)$$

と定義する. ここで $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1\}$ は $[0, 1]$ 区間のすべての有限分割をわたる. $p < p'$ のとき $\|A\|_p < \infty$ ならば $\|A\|_{p'} < \infty$ となることに注意せよ. つまり p が大きくなると条件がゆるくなる. 特に 1 次変動が有限なものは, ラフパスの世界では「すごく性質がよい」とみなされる. p 次変動ノルムではなく $1/p$ -Hölder ノルムを使いたい場合は, (3) 式のかわりに, $\|A\|_{1/p-Hld} := \sup_{s < t} |A_{s,t}|/|t-s|^{1/p}$ とすればよい.

さて, 以下では $2 \leq p < 3$ とし, $T^{(2)}(\mathbf{R}^d) := \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^d \oplus (\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d)$ を 2 階の切り捨てテンソル代数としよう.

定義 1 連続写像 $X = (1, X^1, X^2) : \Delta \rightarrow T^{(2)}(\mathbf{R}^d)$ が $(\mathbf{R}^d$ に値をとるラフネス p の) ラフパスであると次は 2 条件をみたすことである.

(i) (Chen の恒等式) 任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq 1$ に対して,

$$X_{s,t}^1 = X_{s,u}^1 + X_{u,t}^1, \quad X_{s,t}^2 = X_{s,u}^2 + X_{u,t}^2 + X_{s,u}^1 \otimes X_{u,t}^1.$$

(ii) (p 次変動ノルム有限) $\|X^1\|_p < \infty$, $\|X^2\|_{p/2} < \infty$.

以下では $\mathbf{R}^d$ に値をとるラフネス p のラフパス全体の集合を $\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ と書く.

$\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ には, 条件 (ii) にでてくる 2 つのノルムから自然に距離 d_p がはいり完備距離空間になる (可分ではない). 第 0 成分の "1" は自明であるので, それを省略して単に $X = (X^1, X^2)$ と書くことが非常に多い. 第 1 レベルのパス X^1 だけならば, 単なる普通の $\mathbf{R}^d$ 内の p 次変動ノルム有限な連続パス (の差分) だが, 第 2 レベルのパス X^2 を加えて考える点がこの理論の斬新さである. ちなみに, $T^{(2)}(\mathbf{R}^d)$ の乗法を $\otimes$ と書くと, 条件 (i) は単に $X_{s,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}$ と書き直せる. (つまりある群上の通常の意味でのパスに対する「差分」の関係式である.)

さて典型的なラフパスの例をあげる. 理論の構成上も重要な例である. 有界変動な通常の意味のパスから作られた反復積分を第 2 レベルとして持つもので, 滑らかなラフパスと呼ばれる. 反復積分を作るさいに, Riemann-Stieltjes 積分を使っていることに注意せよ. 原点から出発する連続かつ有界変動なパス $x : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^d$ および $(s, t) \in \Delta$ に対して,

$$X_{s,t}^1 = \int_s^t dx_{t_1} = x_t - x_s,$$

$$X_{s,t}^2 = \int_{s \leq t_1 \leq t_2 \leq t} dx_{t_1} \otimes dx_{t_2} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u,$$

とおくと, 簡単な計算で $X \in \Omega_p(\mathbf{R}^d)$ がわかる. これを (x の上にある) 滑らかなラフパス, あるいは x の標準的な持ち上げと呼ぶ. またこれから Chen の恒等式はパスが作る反復積分の満たす代数関係式を抽象化したものであることも見てとれる.

定義 2 滑らかなラフパスで近似できるラフパスを幾何学的ラフパスといい, その全体を $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ と書く. すなわち, $G\Omega_p(\mathbf{R}^d) = \overline{\{\mathbf{R}^d \text{ 内の滑らかなラフパス}\}}^{d_p}$.

作り方から幾何学的ラフパス空間 $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ は可分完備距離空間になる. ちなみに, $X^1 = Y^1$ だが $X^2 \neq Y^2$ となる $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ の元の例があることに注意せよ. なお $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して, $X_{s,t}^2$ の対称部分は $(X_{s,t}^1 \otimes X_{s,t}^1)/2$ であり, $X_{s,t}^1$ から自動的に決まっている. よって実質的に意味があるのは, X^1 と X^2 の反対称部分 (これも Lévy の面積と呼ばれる) であり, 後者は式 (2) とほぼ同じ形をしている. つまり Lévy の面積のようなものは始めから定義に組み込まれているわけである. よって Lévy の面積をラフパス空間からの写像だと思ったときに連続になることは当然である.

$X, Y \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して, 一般には加法 " $X + Y$ " は定義できないことに注意. (ただし, dilation と呼ばれるスカラー作用は自然に定義できる.) また $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d), Y \in G\Omega_p(\mathbf{R}^r)$ に対して, 直和ペアのラフパス " (X, Y) " $\in G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^r)$ も一般には定義できないことに注意. ただし X, Y の片方が (例えば) 滑らかなラフパスならば, 加法も直和ペアも定義できる. 第 2 レベルパスの "cross integral" が Riemann-Stieltjes 積分を使って定義できるからだ. (この段落は実はかなり重要である.)

なお幾何学的ラフパスの定義において, 有界変動なパスと Riemann-Stieltjes 積分に変えて, q 次変動が有限なパス ($1 \leq q < 2$) と Young 積分を使ってもまったく同じである. 加法 $X + Y$ や直和ペア (X, Y) も定義できるという上の議論では, 有界変動なパスと Riemann-Stieltjes 積分を用いる例で説明した. しかし実はこれも $q \in (1, 2)$ かつ $1/p + 1/q > 1$ を満たす q に対して, q 次変動が有限なパスとそれに対する Young 積分を使っても同様にできる. この場合, $X + Y$ を Young 平行移動, (X, Y) を Young 対と呼ぶ

この章の最後に $p \geq 3$ の場合の幾何学的ラフパスに関してごく簡単に述べよう. 結論から言うと, 適当な修正を加えれば, この章の内容全てがラフネス p の場合にも成立する. 修正すべき点をかいつまんであげると, $[p]$ 階の切り捨てテンソル代数 $T^{([p])}(\mathbf{R}^d)$ を使う. そして第 i レベルには p/i 次変動ノルムを導入する ($1 \leq i \leq [p]$). 通常の有界変動な連続パス x を持ち上げるときも,

$$X_{s,t}^i = \int_{s \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq t} dx_{t_1} \otimes \dots \otimes dx_{t_i} \quad (1 \leq i \leq [p], (s, t) \in \Delta)$$

と第 $[p]$ レベルまでの反復積分をすべて並べて考えることになる. Chen の恒等式は前と同じく $X_{s,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}$ となり, X はある群上の通常の意味でのパスに対する「差分」だと思えるのだが, この群はぎりぎりまで小さくとるとなんでしょうか. 答えは $T^{([p])}(\mathbf{R}^d)$ の部分集合として存在する $[p]$ 階の自由ベキ零群 $G^{[p]}$ である. この群上には dilation と相性のよい斉次距離というものが存在しており, 第 i レベルを p/i 次変動ノルムで測る理由はこの斉次距離を用いてきれいに説明できる. ほんの少しだけ雑に言えば, 幾何学的ラフパス空間 $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ は, 自由ベキ零群 $G^{[p]}$ 上の斉次距離に関する p 次変動有限な連続パスで単位元から出発するもの全体がなす空間だとみなせる. したがって, 幾何学的ラフパスはそんなに妙なものではないことがわかる. この見方は特に p が大きいときには見通しがよい. (この段落の内容は Friz-Victoir[19] にうまくまとめられている.) また $1/p$ -Hölder 位相をいれた幾何学的ラフパス空間もほぼ同様に定義できることに注意せよ.

4 ラフパスに沿った線積分

この章では $[p] = 2$ の場合にラフパスに沿った線積分を解説する. $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ として, $f: \mathbf{R}^d \rightarrow \text{Mat}(n, d)$ を簡単のため C^3 級とする. f はベクトル値の 1 形式だと思うとよい. 以下では, 積分

$\int f(X)dX$ を $G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ の元として定義したい. (なお f の条件を多少ゆるめることはできる.) 注意してほしいのは, 一般には $\int f(X)dY$ は定義できないことである. ただし (X, Y) が直和空間のラフパスを意味するときは例外. ちなみに本章の内容もごく自然に $p \geq 3$ の場合に拡張できる.

天下りになるが, 次の量を考える. $X_{0,s}^1 = x_s$ と書くことにする. $(s, t) \in \Delta$ に対して,

$$\hat{Y}_{s,t}^1 = f(x_s)X_{s,t}^1 + \nabla f(x_s)X_{s,t}^2$$

$$\hat{Y}_{s,t}^2 = f(x_s) \otimes f(x_s)X_{s,t}^2$$

とおく. $\hat{Y}_{s,t}^1 \in \mathbf{R}^n$, $\hat{Y}_{s,t}^2 \in \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^n$ である. 第1式は仮に右辺第2項がなければ, 普通の Riemann 和 (の和の中身) であることに注意せよ. $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ を区間 $[s, t]$ の分割として, $|\mathcal{P}|$ を分割の幅とする.

$$Y_{s,t}^1 = \lim_{|\mathcal{P}| \searrow 0} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_{t_{i-1}, t_i}^1, \quad (4)$$

$$Y_{s,t}^2 = \lim_{|\mathcal{P}| \searrow 0} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_{t_{i-1}, t_i}^2 + Y_{s, t_{i-1}}^1 \otimes Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \quad (5)$$

とすると, 実は両式の右辺は収束して, $Y = (Y^1, Y^2) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ となる.⁴⁾ この (4) 式はともかく (5) 式は初見では不自然に思えるかもしれない. しかし前に出てきた Chen 恒等式を少し修正して, (2 個ではなく) n 個の小区間分割の場合の Chen 恒等式を書いて比較してみれば, (5) 式も自然な式であることがわかる. 普通は $Y_{s,t}^j = \int_s^t f(X)dX^j$ ($j = 1, 2$) と書く. $G\Omega_p(\mathbf{R}^d), G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ 上の距離に関して, この写像 $X \mapsto \int f(X)dX$ は任意の有界集合上 Lipschitz 連続である (これを局所 Lipschitz 連続ということにする). まとめると以下ようになる.

$f: \mathbf{R}^d \rightarrow \text{Mat}(n, d)$ を C^3 級とする. このとき, 積分写像

$$G\Omega_p(\mathbf{R}^d) \ni X \mapsto \int f(X)dX \in G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$$

は局所 Lipschitz 連続であり, Riemann-Stieltjes (あるいは Young) 積分写像 $x \mapsto \int_0^\cdot f(x_s)dx_s$ を連続拡張したものである.

5 ラフパスによって駆動される常微分方程式

この章では Lyons-Qian[36] に従い, ラフパスの意味での driven ODE (rough differential equation, RDE) を考える. 簡単のため $[p] = 2$ とするが, 本章の内容も $p \geq 3$ の場合に拡張できる. RDE の定義が確率測度とまったく無関係であることに注意してほしい. $\sigma: \mathbf{R}^n \rightarrow \text{Mat}(n, d)$ を C_b^3 と仮定する. (すなわち, $j = 0, \dots, 3$ に対して $\|\nabla^j \sigma\|$ が有界とする.)

与えられた $\mathbf{R}^d$ 値のパス X に対して $\mathbf{R}^n$ 値のパス Y を解とする次の方程式を考える.

$$dY_t = \sigma(Y_t)dX_t, \quad Y_0 = 0. \quad (6)$$

初期値は $Y_0 = y_0 \in \mathbf{R}^n$ として議論するときは, 係数行列を $\sigma(\cdot + y_0)$ に取り替えればよい. 定石どおり積分方程式として

$$Y_t = \int_0^t \sigma(Y_u) dX_u$$

と意味付けしたい. ところが右辺をラフパスの意味で解釈しようとする, X, Y が違うラフパスであるため一般には積分が定義できないのでいきなり困る. そこで (6) 式にあえて自明の等式を加え,

$$\begin{cases} dX_t &= dX_t, \\ dY_t &= \sigma(Y_t) dX_t \end{cases} \quad (7)$$

という連立方程式だとみなす.

直和空間 $\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n$ において, $z = (x, y) \in \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n$ に対して, 第 1, 2 成分を対応させる射影を π_1, π_2 と書くことにする ($\pi_1 z = x, \pi_2 z = y$). ここで $\hat{\sigma} : \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n \rightarrow \text{Mat}(d+n, d+n)$ を以下で定める.

$$\hat{\sigma}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(\pi_2 z) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \hat{\sigma}(z)\langle z' \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \sigma(y)x' \end{pmatrix}.$$

この記号を使うと, (7) は次に同値.

$$dZ_t = \hat{\sigma}(Z_t) dZ_t \quad \text{with} \quad \pi_1 Z_t = X_t.$$

以上の考察をまとめて以下の定義を置く. (初期値 $y_0 = 0$ としている.) 射影 π_1 は自動的に射影 $G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n) \rightarrow G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ を導くが, これを再び同じ記号で書く (π_2 に関しても同様に書く).

定義 3 $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ が与えられているとする. 方程式 (6) のラフパスの意味での解とは, $Z \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n)$ で, 積分方程式

$$Z = \int \hat{\sigma}(Z) dZ, \quad \text{with} \quad \pi_1 Z = X \quad (8)$$

をみたすもののことである. 用語をやや濫用して $Y = \pi_2 Z$ のことを解ということも多い. 写像 $X \mapsto Y$ を伊藤写像とよび, $Y = \Phi(X)$ と書く.

つまり Lyons 流の元祖ラフパス理論の枠組みでは, 解 Y というのはいきなり単独であるわけではなく, 実は $Z = (X, Y)$ という組のことなのである. ただし最近ではここで書くような「元祖ラフパス理論の枠組みの中で Picard の逐次近似を行う」という以外の方法もいくつか提案されているので, そうした新しい方法では必ずしも $Z = (X, Y)$ を考えるわけではない. 特に重要なのが後述する Gubinelli 流の枠組み [20] で, そこではラフパス X と解 Y とは最初からある意味では分離されている.

ここでラフパス理論でもっとも重要な Lyons の連続性定理 (*T. Lyons' continuity theorem or, universal limit theorem*) を述べる.

定理 1 $\sigma : \mathbf{R}^n \rightarrow \text{Mat}(n, d)$ を C_b^3 級とし, RDE(6) を考える (定義 3 を参照せよ). このとき, 任意の $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して, 方程式 (8) の一意解 $Z \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n)$ が存在する. さらに $X \mapsto Z$ は局所リプシッツ連続であり, したがって伊藤写像 $X \mapsto Y = \pi_2 Z = \Phi(X) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ も局所リプシッツ連続である.

解の一意性により, X が $\mathbf{R}^d$ 値の有界変動なパス x の上にある滑らかなラフパスのときには, ラフパスの意味での解 Y は Riemann-Stieltjes 積分をつかった通常の意味での解 y の上にある滑らかなラ

フパスである. よって ODE 概念の拡張がなされたことがわかる.

定理 1. の略証 Picard の逐次近似法を使う. $Z(0)_{s,t}^1 = (X_{s,t}^1, 0)$, $Z(0)_{s,t}^2 = (X_{s,t}^2, 0, 0, 0)$ とおく. また, $Z(m-1)$ まで構成できたら,

$$Z(m) = \int \hat{\sigma}(Z(m-1)) dZ(m-1)$$

として, $Z(m)$ を構成する. すると, 十分小さな $T_1 \in (0, 1]$ をとると, 小区間 $[0, T_1]$ 上に制限した場合 (8) の右辺の積分汎関数は Lipschitz 係数 < 1 の Lipschitz 写像になり, $\{Z(m)\}_{m=1,2,\dots}$ はある Z に $G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n)$ の位相で収束することがわかる. これで, $[0, T_1]$ 区間での解ができた.

次に $[T_1, T_2]$ 区間での解を RDE(6) を新たな初期値 $y_{T_1} = Y_{0,T_1}^1$ のもとで解いて作る. 以下, 繰り返して $[T_i, T_{i+1}]$ という各小区間で解を作っていく. この操作が有限回でおさまることは, 係数行列の有界性条件からくる. (有界性をうかつにはずすと, この辺が難しくなる.) 最後は各小区間での解を Chen の恒等式を逆向きに使うてつなぎあわせ, 全区間での解を作る.

局所 Lipschitz 連続性については, $X, \hat{X}$ という 2 つの元に対して, $Z(m), \hat{Z}(m)$ の距離を評価することで証明できる. □

なお定理 1 における係数行列に対する C_b^3 という十分条件は, $\text{Lip}(\gamma)$ という条件 ($\gamma > p$) に緩められることが知られているが, 本稿では深入りしない. (Lyons-Caruana-Lévy [35] を参照せよ.) またラフネス p が一般の場合にも定理 1 は拡張可能で, その場合は係数行列に対する十分条件は $C_b^{[p]+1}$ か, またはもう少し緩く $\text{Lip}(\gamma)$ ($\gamma > p$) とできる.

上では簡単のため, 伊藤写像が駆動するラフパス X に関して局所 Lipschitz 連続性だと述べたが, 初期値および係数行列を動かした場合の局所 Lipschitz 連続性も証明できる. つまりラフパスの意味での伊藤写像は非常に柔軟性に富む. とくに X, σ を固定して初期値 (と時間) の関数だと思った場合, 伊藤写像は自然に ODE の流れ (flow of diffeomorphism) のラフパス版を定義することになる.

また Lyons 流の RDE の別解法について述べる. 上で紹介したのは Picard の逐次近似法にあたるものであるが, Euler(-Maruyama) 近似法のラフパス版とでもいうべきものが, Davie によって提案された. (Davie[14], もしくは Friz-Victoir[19] の該当部分を参照せよ.) この方法はかなり便利だろう. さらに最近 Bailleul[3] による "flow method" が登場した. これはいわば Davie 流の近似法のお化けみたいなもので, 初期値を固定せずに全ての初期値を一斉に並べて考える. このとき近似解は流れの空間 (つまり位相同相群) に値を取る. この方法により, 懸案だった係数 σ が一次増大する場合に RDE が最近解けたようである. (正確には σ 自身は一次増大するが, その微分 $\nabla^j \sigma$ はすべて有界という仮定.) また後述する Gubinelli 流の RDE もあるが, これは解き方が違うというより, 議論の枠組みが違うというのが正確な表現であろう.

6 Gubinelli によるラフパス理論の変種

話の本筋から少々はずれるが, この章では Gubinelli によるラフパス理論の変種を紹介する. 最近ではこれは被制御パス (controlled path) の理論とよばれることが多い. 現在のラフパス理論においては, この Gubinelli 流の枠組みと元祖 Lyons 流の枠組みとは双璧をなしており, 近い将来に片方がもう

片方を打倒する可能性はなさそうである。しかし Gubinelli 流のやり方が急速に注目を集めているのも事実で、その理由は (支持者に言わせれば) 簡明なことと、最近誕生した Hairer の正則構造 (regularity structure) の理論 [23] がこの被制御パスの理論から誕生したことによると思う。この Gubinelli 流の枠組みでは、ラフパスに沿った線積分と RDE はどのように理解されるのかをできるだけ簡潔に紹介することが本章の目的である。

Lyons 流のラフパス積分は、 $\int f(X)dX$ の形をしており、基本的には " $f(X)$ の X " と " dX の X " とがそろっている場合しかうまく定義できなかった。つまり一般的には、 $\int f(Y)dX$ というのはないのである。(もちろん線積分は 1 形式に対して行うものなので、これが変だというわけではない)。しかし「 X, Y を連動させずに自由に動かす」のは無理だという点は、ラフパス理論の初学者にとって非常に奇妙に映るようで、筆者自身も最初は驚いた思い出がある。

しかし、Stieltjes 積分やその一般化である Young 積分では当然そういうことは可能なことから、Young 積分のさらなる (巨大な) 一般化であるラフパス理論でもなんとかならないか、と考えるのは自然であろう。だがしばらくラフパス理論に親しんでいれば、とても見込みがないことがわかってくる。普通の人間ならここであきらめて、この件は忘れる。

しかし Gubinelli は違ったようで、「中間地点まで」進んだ。説明すると、ラフパス X を固定すると共に被積分関数のなす Banach 空間を抽象的に設定したのである。この Banach 空間のなかに $f(X)$ という形のものが含まれているので、その意味で線積分が一般化された。しかし、この Banach 空間は X に依存しており、違う X に対しては違う空間になるために、完全に被積分関数と dX とを分離したとは言えない。直感的な理解を助けるために大胆にたとえると、これは幾何学的ラフパス空間という無限次元の曲がった空間を底空間とし、ファイバーとして Banach 空間を持つ「ベクトル束」のようなものである。異なる X の上にあるファイバーはよく似ているが、別のベクトル空間である。

この理論では積分はラフパスを固定すると共に被積分関数のなす Banach 空間から (別の Euclid 空間値の) 被積分関数のなす Banach 空間への写像となる。したがって X で駆動される RDE の解も、被積分関数のなす Banach 空間の中での不動点として解釈されることになる。この被積分関数のことを被制御パスとよぶ。

以下で Gubinelli 流の議論を式を使って簡単に説明する。よくまとまった説明が出版予定の講義録 Friz-Hairer[16] にあるので、詳しくはそれを参照してほしい。Gubinelli 流の議論では p 次変動ノルムの代わりに、その双子の兄弟である $1/p$ -Hölder ノルムを使う。本章でも引き続き、 $2 \leq p < 3$ と仮定する。⁵⁾ 第 i ($i = 1, 2$) レベルパスに対して、 p/i 次変動ノルムの代わりに i/p -Hölder ノルムを使って定義した幾何学的ラフパス空間を $G\Omega_{1/p}^H(\mathbf{R}^d)$ と書く。

$X \in G\Omega_{1/p}^H(\mathbf{R}^d)$ を固定する。 (Y, Y') が以下の 3 条件を満たすときに、 X によって制御される $\mathbf{R}^n$ 値の被制御パスであるという。(i) $Y \in C^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$, (ii) $Y' \in C^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n \otimes (\mathbf{R}^d)^*)$, (iii) 次の関係式

$$Y_t - Y_s = Y'_s \cdot X_{s,t}^1 + R_{s,t} \quad (0 \leq s \leq t \leq 1)$$

で $R: \Delta \rightarrow \mathbf{R}^n$ を定義すると $R \in C^{2/p-Hld}(\Delta, \mathbf{R}^n)$ となる。ここで $C^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathbf{R}^n$ 値の $1/p$ -Hölder 連続なパスの全体とする。 Y, Y' は 1 変数関数で $1/p$ -Hölder 連続だが、 R は 2 変数関数で $2/p$ -Hölder 連続であることに注意。なお最後の式は「 Y の挙動の悪さがだいたい X の挙動の悪

さと同じ」という意味だとみなせる. (s を任意に固定された時刻として, t が s のごく近くを動くともなすとい). このような (Y, Y') がなす集合を $\mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ と書こう. これは Hölder ノルム $\|Y\|_{1/p-Hld} + \|Y'\|_{1/p-Hld} + \|R\|_{2/p-Hld}$ をいれると自然に Banach 空間になる. $\mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ の定義はラフパス X に依存していることに注意せよ. なお $'$ は単なる記号であり微分という意味ではないが, $\mathbf{R}^n \otimes (\mathbf{R}^d)^* = \text{Mat}(n, d)$ 値の関数 Y' は Gubinelli 微分という名前でよばれることもある.

こういった被制御パスとしては, (a) X 自身, より正確には $t \mapsto X_{0,t}^1$, (b) C^2 級関数 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ と $Y \in \mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ に対して $g(Y)$, (c) $Y \in \mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ と $2/p$ -Hölder 連続な $\mathbf{R}^n$ 値の Z を加えたもの, (d) $Y \in \mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ と $2/p$ -Hölder 連続なスカラー値の Z を掛けたもの, などが典型例である. (正確には適当な相棒 Y' が見つかって $(Y, Y') \in \mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}$ となる).

$\mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\text{Mat}(n, d))$ の元 (Y, Y') に対して, X に沿った積分が定義可能であり, 以下の修正リーマン和の極限でえられる:

$$(Z_t - Z_s :=) \int_s^t Y_u dX_u = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_i \left\{ Y_{t_{i-1}} X_{t_{i-1}, t_i}^1 + Y'_{t_{i-1}} \cdot X_{t_{i-1}, t_i}^2 \right\}$$

(右辺の総和の中の第2項は, $X_{t_{i-1}, t_i}^2 \in (\mathbf{R}^d)^{\otimes 2}$ および $Y'_{t_{i-1}} \in \mathbf{R}^n \otimes (\mathbf{R}^d)^* \otimes (\mathbf{R}^d)^*$ と見なした上で, 縮約をおこない $\mathbf{R}^n$ の元を得たもの). 実は $Z'_s = Y_s$ とおくと, $(Z, Z') \in \mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ が示せる.

特に $Y = f(X)$ ととった場合には Lyons 流の場合と第1レベル (つまり Z) に関しては一致するので, ラフパス積分がこの意味で拡張された. ただ注意すべきなのは, Lyons 流ではラフパス積分は, ラフパス空間から別のラフパス空間への連続写像であったが, Gubinelli 流では, X に関する被制御パスのなす Banach 空間から別の被制御パスのなす Banach 空間への連続写像であるという点である. (ちなみに X を動かした場合に, 積分の「第1レベル」の連続性も証明できる.)

以上のことを念頭において, 最初に与えた driven ODE

$$Y_t = \int_0^t \sigma(Y_s) dX_s$$

をもう一度見てみよう. ここで, $\sigma: \mathbf{R}^n \rightarrow \text{Mat}(n, d)$ はとりあえず C^2 級としておく. もし左辺の Y が $\mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ の元だとすると, 右辺はちょうどいま説明した意味での合成操作と Gubinelli 流ラフパス積分を合わせたものだと思うので, 右辺も $\mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ に属する. 右辺の積分汎関数を $\mathcal{Q}_X^{1/p-Hld}(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身への写像だと思って, なんらかの不動点定理に持ち込むというのが話の大筋である. したがって Gubinelli 流の RDE では解はラフパスではなく, 駆動するラフパス X による被制御パスである.

たとえば係数 σ が C_b^3 級であれば一意に時間大域解が存在するし, 伊藤写像 X に対して Y の第1レベルを対応させる伊藤写像は局所リプシッツ連続になることが知られている. (もちろん Y の第1レベルは Lyons 流の解の第1レベルと初期値を調整すれば一致する).

7 Brown 運動の持ち上げ

これまでは完全に決定論的な議論であり確率測度はいっさい登場しなかったが, 本章ではパス空間上の測度である Wiener 測度を持ち上げて, ラフパス空間上の確率測度を得たい. 今から Brown ラフ

パス (Brownian rough path, BRP) という $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 値の確率変数を構成する. これは通常の確率論における Brown 運動とよく似た役割をはたす.

この章以降では $p = 2$ の場合を除外して $2 < p < 3$ と仮定する. いままで (ラフ) パスを x, X などと表記してきたが, この章以降では固定された元ではなく, 「測度 μ のもとで確率変数である」という感じを強調するために w, W などと表記する.

$w \in C_0(\mathbf{R}^d)$ に対して, w の 2 進折れ線近似 $w(m) \in C_0(\mathbf{R}^d)$ を分点 $\{k/2^m \mid 0 \leq k \leq 2^m\}$ に対応した折れ線近似とする ($m = 1, 2, \dots$). $w(m)$ は明らかに有界変動なので, それを持ち上げた滑らかなラフパス $W(m)$ が存在する. このとき,

$$\mathcal{S} := \{w \in C_0(\mathbf{R}^d) \mid \{W(m)\}_{m=1,2,\dots} \text{ is Cauchy in } G\Omega_p(\mathbf{R}^d)\}$$

はどれぐらいの大きさの集合になるだろうか. $\mathcal{S}$ の元に対しては, $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ の元への持ち上げが, $\lim_{m \rightarrow \infty} W(m)$ で自然に定義できる. ちなみにパスが有界変動であれば $\mathcal{S}$ に属しており, 2 種類の持ち上げは一致している.

実は $\mathcal{S}$ が Wiener 測度 μ で測って重さ 1 になる. したがって $W := \lim_{m \rightarrow \infty} W(m)$ とおいて, BRP を定義できる. これは $(C_0(\mathbf{R}^d), \mu)$ 上で定義された $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 値の確率変数であり, その像測度は $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上の確率測度になることに注意せよ. (この持ち上げ写像は連続にはならず, 可測でしかない.) これで $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上に「Wiener 測度もどき」のような測度が BRP の法則として構成できた.
⁶⁾ なお p 次変動ノルムのかわりに $1/p$ -Hölder ノルムを幾何学的ラフパス空間に入れても同様のことが成立する.

ラフパスの意味での伊藤写像に W を代入すると, Stratonovich 型の SDE の解が得られることを示す. RDE(6) を考えて, $\Phi: G\Omega_p(\mathbf{R}^d) \rightarrow G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ で対応する伊藤写像を表す. すなわち $Y = \Phi(W)$. (6) 式に対応した SDE は次のものである.

$$dy_t = \sigma(y_t) \circ dw_t = \sigma(y_t)dw_t + \frac{1}{2} \text{Trace}[\nabla \sigma(y_t) \langle \sigma(y_t) \bullet, \bullet \rangle] dt, \quad y_0 = 0$$

Stratonovich 型の SDE は伊藤型にくらべると, 最右辺の第 2 項にある $\text{Trace}[\dots]$ の補正項がつく. Riemann 和を使った方式で書くと,

$$\int_0^t \sigma(y_s) \circ dw_s = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\sigma(y_{t_i}) + \sigma(y_{t_{i-1}})}{2} (w_{t_i} - w_{t_{i-1}})$$

となる. 伊藤積分を定義する Riemann 和と異なることに注意せよ.

定理 2 上記のように, W を標準的な Brown 運動 (w_t) を持ち上げて作った BRP とする. このとき a.a.w (μ) に対して, $y_t = \Phi(W)_{0,t}^1$ が任意の $t \in [0, 1]$ で成立する.

この定理 2 によって, SDE の解が連続写像の像として得られたことになる. 通常の SDE 理論の範疇ではありえなかったことである. 証明は簡単で, まず任意の m に対して, $\Phi(W(m))^1$ について, $w(m)$ によって駆動される通常の意味の ODE と RDE が一致するという等式を作る. その後, 左辺を昔から確率論でよく知られている Wong-Zakai の近似定理, 右辺を Lyons の連続性定理を使って極限をとればよい.

なおこの章で考えた Stratonovich 型の SDE は簡単のためドリフト項とよばれる dt によって駆動

される項がついていないが、修正は容易である。なぜなら 1 次元値の自明なパス $\lambda_t = t$ との Young 対 $(W, \lambda) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^{d+1})$ を W の代わりに考えればいいからだ。

本章の最後では、Lyons の連続性定理の quasi-sure 解析への応用を一つ紹介する。詳細は Aida[1], Inahama [25, 28] を参照せよ。quasi-sure 解析とはいわば Wiener 空間上のポテンシャル論のようなもので、Malliavin 解析における非常に深い話題である。なお Malliavin 解析に詳しくない読者は、この部分を読み飛ばしてもかまわない。

Wiener 空間 $(C_0(\mathbf{R}^d), \mu)$ 上には適切な微分概念があるので、Sobolev 空間 $\mathbf{D}_{r,k}$ が定義できる。ここで $r \in (1, \infty)$ は積分指数であり、 $k \in \mathbf{N}$ は微分指数である。各 $\mathbf{D}_{r,k}$ に応じて、容量 $C_{r,k}$ が $C_0(\mathbf{R}^d)$ の部分集合に対して定義できる。これは Wiener 測度 μ より細かく、 μ 零集合が正の容量を持つことはよくある。 $\mathbf{D}_{r,k}$ ノルムが r, k の両方に関して単調非減少であることにより、容量 $C_{r,k}$ も r, k の両方に関して単調非減少である。全ての $C_{r,k}$ 容量が 0 となる部分集合を "slim" という。要するに、単なる μ 零集合に比べると slim な部分集合は非常に小さいわけである。

さてラフパスの話に戻ろう。さきほど折れ線持ち上げがうまくいかない集合 S^c は μ 零集合だと述べたが、実は S^c は slim であることが比較的すっきりした議論で示せる。しかも証明の過程をよく見てみると、持ち上げ写像 $w \mapsto W$ が擬連続になっていることまでわかる。(この段落の内容も $1/p$ -Hölder ノルムの場合にも成り立つ。)

このことの簡単な応用として、quasi-sure 解析で知られている以下の定理がほぼ自明になる。まず先ほど登場した Wong-Zakai の近似定理の収束は、実は "almost sure" ではなく "quasi-sure" に成り立つことが知られているが、これはラフパス的観点からはほぼ明らかである。また SDE の解がパス空間 (あるいはもっと大きく、流れの空間値パス空間) に値をとる Wiener 汎関数として擬連続修正を持つことも知られているが、これも (値域の Banach 位相の多少の違いを気にしなければ) ほぼ明らかになった。しかも係数 σ に滑らかさを仮定せずに C_b^3 級だという条件だけでこういった事実が証明できてしまうのは、もしラフパス理論を知らなければかなり意外に思えるのではなかろうか。

8 Gauss 過程の持ち上げ

本章では Brown 運動以外の Gauss 過程の持ち上げについて簡単にまとめる。本章ではラフネスは $[p] = 2, 3$ となる。すなわち第 3 レベル (3 重積分) までのラフパス理論を使う。しかしこの理論では第 4 レベル (4 重積分) 以上は登場しない。Gauss 過程の持ち上げを Gauss ラフパス (Gaussian rough path) という。これで駆動される RDE はいわば、Gauss 過程で駆動される SDE のようなものだと考えられる。RDE は非ランダムなので、Gauss 過程がセミマルチンゲールであるかどうかはまったく関係がなく、ランダムなラフパスに持ち上げられれば必ずこのような「SDE もどき」が定義できる。

まず考えるガウス過程 $w = (w_t^1, \dots, w_t^d)$ は連続で d 次元だとし、原点から出発するとする。これは $C_0(\mathbf{R}^d)$ 値の確率変数である。簡単のために d 個の座標成分は平均 0 で独立同分布だと常に仮定する。したがって、この Gauss 過程の法則は共分散 $R(s, t) := \mathbb{E}[w_s^1 w_t^1]$ で決まる。

定数 $H \in (0, 1)$ に対して $R(s, t) = \{s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}\}/2$ と書ける場合、 w を Hurst 指数 H を持つ非整数 Brown 運動 (fractional Brownian motion, fBm) という。 $H = 1/2$ の時は通常の Brown 運動である。 $H \neq 1/2$ の時はセミマルチンゲールでないし Markov 過程でもない。しかし自己相似性と定常増分性は持っている。ことわらないかぎり、以下では常に $1/4 < H \leq 1/2$ と仮定す

る。大雑把に言えば、 H が小さくなるほど状況は難しくなる。

さて fBm の見本路は $p > 1/H$ のときに $1/p$ -Hölder 連続かつ p 次変動ノルム有限なので、前章で Brown 運動を持ち上げたように w がラフネス p のランダムなラフパスに持ち上げられないか、というのは自然な疑問であろう。これを証明したのは Coutin-Qian[13] である。彼らの結論を簡潔に述べると、前章で考えたような 2 進折れ線近似を用いて、 $1/4 < H \leq 1/2$ のときに fBm は任意の $p > 1/H$ に対して、 $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に値をとる確率変数に持ち上げられる。 $(p$ が小さいほど命題は強くなるので、条件は「 $1/H$ よりほんの少しでも大きい p に対して」と読むべきである)。 $1/3 < H \leq 1/2$ のときは $[p] = 2$ ととれるので、第 2 レベルまでしか使わないが、 $1/4 < H \leq 1/3$ のときは $[p] = 3$ となるため第 3 レベルのラフパス理論が必要になる。この持ち上げは非整数 Brown ラフパス (fractional Brownian rough path) と呼ばれ、Gauss ラフパスの中で最初に存在が証明されただけでなく、現在でも最重要例であるとされている。なお p 次変動ノルムの代わりに $1/p$ -Hölder ノルムを幾何学的ラフパス空間に入れても同様の結果が成り立つことを注意しておく。ちなみに $H \leq 1/4$ の場合にはこの種の方法では持ち上げられない事が証明されている。(しかしその場合でも「標準的ではない」持ち上げが存在することが知られている)。

さて fBm という具体例を超えてもっと一般的な Gauss 過程は持ち上げられるだろうか。共分散 $R(s, t)$ は Gauss 過程 w の情報を全て知っているのであるから、これに何かの条件を置くのがよさそうである。しかし具体的にどうすれば筋の良い十分条件になるのかは簡単にはわからない。 R の 2 変数関数としての ρ 次変動ノルムに注目すべきだというのが、Friz-Victoir[18] の案である。

さて $\rho \geq 1$ に対して、 R の $[0, 1]^2$ 上での 2 変数 ρ 次変動ノルム $\|R\|_\rho$ を以下で定める。

$$\|R\|_\rho^\rho = \sup_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} \sum_{i,j} \left| R(s_i, t_j) - R(s_i, t_{j-1}) - R(s_{i-1}, t_j) + R(s_{i-1}, t_{j-1}) \right|^\rho.$$

ここで上限は全ての $[0, 1]$ の有限分割 $\mathcal{P} = (s_i)$, $\mathcal{Q} = (t_j)$ をわたる。さて w に対して前章で考えたような 2 進折れ線近似 $\{W(m)\}$ がどうなるかを考えよう。[18] によれば、 $1 \leq \rho < 2$ かつ $2\rho < p < 4$ のときに、各レベル $\{W(m)^i\}$ は p/i 次変動ノルムの空間に値をとる Banach 空間値確率変数列として、任意の $r \in (1, \infty)$ に対して L^r 収束する。収束先を W と書き、Gauss ラフパスと呼ぶ。また w の持ち上げとも言う。前出の fBm($1/4 < H \leq 1/2$) の場合が典型例なのだが、上の条件に追加して $R(s, t)$ がある種の Hölder 条件を満たすと仮定すると、収束の位相が p/i 次変動ノルムから i/p -Hölder ノルムへと強くできるうえに、概収束であることまで結論できる。(なおこの理論では必ず $[p] \leq 3$ なので、第 4 レベル以上のラフパス理論は使わないことに注意してほしい)。なおここでは 2 進折れ線近似のみを用いて議論したが、もっと一般の折れ線近似、軟化子を使った近似、Karhunen-Loève 近似 (要するに Cameron-Martin 空間の ONB と 1 次元標準正規分布の iid 列の一次結合で Gauss 過程を近似する方法のこと) などの場合も、ほとんどすべての場合で近似は収束し、収束先は同じ W になることがわかっている。この意味において W は標準的な持ち上げだといえる。

さて $\rho < 2$ のときに w の持ち上げ W が存在するとわかったわけだが、次はこの W がどれぐらいよいのが問題になる。持ち上げ写像が Gauss 構造をひどく破壊してしまう場合は、 W で駆動される RDE の解の性質を調べるのは実際には非常に難しくなるからだ。さまざまな Gauss 測度の性質のなかで、最も重要なものの一つが Cameron-Martin の定理であろう。これは「Cameron-Martin 空間

の元の方向への平行移動によって引き起こされる Gauss 測度の像測度が、もとの Gauss 測度と互いに絶対連続になる」と主張するもので、Gauss 測度に関する解析のなかでは基本中の基本である。したがって、持ち上げ写像が平行移動の構造を壊さないという条件が重要なのは、誰でもなんとなく想像できると思う。これをまとめたのが、今から紹介する補完 Young 正則性 (complementary Young regularity) 条件である。要するに、下の空間 (抽象 Wiener 空間) における Cameron-Martin 平行移動と、上の空間 (幾何学的ラフパス空間) に定義されている Young 平行移動との間に整合性がある、という条件である。

上のおりに R はある $\rho \in [1, 2)$ に対して 2 変数 ρ 次変動ノルムが有限だとする。また w の Cameron-Martin 空間を $\mathcal{H}$ と書く。次の条件をみたす p, q が存在するときに、補完 Young 正則性がみたされるという。 $p \in (2\rho, 4)$, $q \in [1, 2)$ かつ $1/p + 1/q > 1$ であり、 $\mathcal{H}$ は q 次変動が有限な原点から出発する連続パスの空間 $C_0^{q-var}(\mathbf{R}^d)$ に連続に埋め込まれている。

このとき $W = \mathcal{L}(w)$ は $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に値をとるので、 q 次変動有限なパスによる Young 平行移動 τ が定義される。ここで持ち上げ写像を $\mathcal{L}$ と書いた。補完 Young 正則性がみたされる場合には、任意の $h \in \mathcal{H}$ とある測度 1 の (h によらない) 集合に属する w に対して $\mathcal{L}(w+h) = \tau_h(\mathcal{L}(w))$ が示せる。つまり持ち上げと平行移動の順番は気にしないでよい。このわかりやすい性質のおかげで、補完 Young 正則性条件を仮定するといろいろな定理が証明できる。この先の章ではこれを紹介する。

Brown 運動の場合には、Cameron-Martin パスの挙動を調べるのはかなり簡単である。しかしそれ以外の場合は難しく、最重要例である fBm の場合ですらかなり難しい問題であった。しかし Friz と共著者の研究 [17, 15] によれば、 $q = (H + 1/2)^{-1}$ ととれる。前述したように $p > 1/H$ ととれるので、 $H > 1/4$ のときには Young 積分のための条件 $1/p + 1/q > 1$ となる p, q が見つかり、補完 Young 正則性がみたされることがわかる。

これ以外の補完 Young 正則性のための十分条件としては、(1) ある $\rho \in [1, 3/2)$ に対して R が 2 変数 ρ 次変動ノルムが有限の場合や、(2) ある $\rho \in [1, 2)$ に対して R の 2 変数混合 $(1, \rho)$ 次変動ノルムとよばれる量が有限である場合などが知られている。(後者については [15] を参照せよ)。

この章のまとめになるが、現時点での Gauss ラフパスは以下の 3 クラスに分けて理解するとわかりやすいと思う。番号の小さいクラスは大きいクラスを含んでいる。(i) ある $\rho \in [1, 2)$ に対して R が 2 変数 ρ 次変動ノルムが有限の場合。このとき標準的な持ち上げ W が存在する。(ii) さらに補完 Young 正則性条件もみたす場合。(iii) 最重要例としての fBm (ただし $1/4 < H \leq 1/2$)。

9 大偏差原理

本章からはラフパス理論の確率論的な定理を議論する。そのような定理のなかで、もっともよく知られているのはおそらく Schilder 型の大偏差原理なので、本章ではまずこれを紹介する。

まず普通の意味での Schilder の大偏差原理を思い出そう。前と同じく μ を $C_0(\mathbf{R}^d)$ 上の Wiener 測度として、任意の $\varepsilon > 0$ に対してスカラー倍写像 $w \mapsto \varepsilon w$ による μ の像測度を μ^ε と書く。また Cameron-Martin 空間を $\mathcal{H}$ と書き、レート関数を $w \in \mathcal{H}$ に対しては $I(w) = \|w\|_{\mathcal{H}}^2/2$, $w \notin \mathcal{H}$ に対しては $I(w) = \infty$ で定める。(このレート関数は “good” である)。さて $\varepsilon \searrow 0$ のときに重みが原点に集中するのは明らかだが、より詳しくは次の Schilder の大偏差原理が成立する。任意の Borel 集合 $A \subset C_0(\mathbf{R}^d)$ に対して、

$$-\inf_{h \in A^\circ} I(w) \leq \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \log \mu^\varepsilon(A^\circ) \leq \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \log \mu^\varepsilon(\bar{A}) \leq -\inf_{w \in \bar{A}} I(w)$$

が成立する. ここで $A^\circ, \bar{A}$ はそれぞれ A の開核と閉包である. 要するに原点から少し離れたところにある集合 A の重みが, 大雑把には $\exp(-\text{const}/\varepsilon^2)$ の速さで減少して行き, しかもこの定数 const はレート関数の A 上での下限として書けると主張している. ちょっと不思議なことは $\mu^\varepsilon(\mathcal{H}) = 0$ なのに, $\mathcal{H}$ 上の情報だけでこの大偏差原理が書けている点である.

ちなみに大偏差原理は連続写像と相性がよく, 連続写像の定義域で大偏差原理が成立していれば, そのまま自動的に値域でも像測度が大偏差原理を満たし, しかもそのレート関数も簡単な公式で書ける. これを縮小原理と呼ぶ. この観点から Freidlin-Wentzell 型大偏差原理を見てみよう.

十分よい係数行列 $\sigma: \mathbf{R}^n \rightarrow \text{Mat}(n, d)$ と $b: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対して, $\varepsilon > 0$ で添字付けされた次の Stratonovich 型 SDE を考えよう. (簡単のため初期値は 0 とする).

$$dy_t^\varepsilon = \sigma(y_t^\varepsilon) \circ \varepsilon dw_t + b(y_t^\varepsilon) dt \quad \text{with} \quad y_0^\varepsilon = 0 \in \mathbf{R}^n.$$

$\varepsilon \searrow 0$ のときに確率過程 y^ε の法則の重みが非ランダムな ODE の解 “ $dz_t = b(z_t)dt$ with $z_0 = 0$ ” で決まるパス z の周りに集中するのは想像がつかが, 実は大偏差原理が成立する. これを Freidlin-Wentzell の大偏差原理という. まったく形式的に考えると, ブロック行列 $[\sigma, b]$ と初期値 y_0 に対応した伊藤写像を Φ と書き, $\lambda_t = t$ とおくと, $y^\varepsilon = \Phi(\varepsilon w, \lambda)$ と書ける. よって伊藤写像が連続ならば, 縮小原理と Schilder の大偏差原理を組み合わせて Freidlin-Wentzell の大偏差原理が証明できることになる. しかし現実には通常確率論においては伊藤写像は連続でないので, 別の方法で証明された.⁷⁾ ところが証明された結果を見れば, 形式的に縮小原理を適用した場合に得られるものとまったく同じものがなぜか現れる.

そこで Ledoux-Qian-Zhang[32] は次の新証明を提案した. まずスケールされた Brown ラフパス $\varepsilon W = (\varepsilon W^1, \varepsilon^2 W^2)$ の法則 $\hat{\mu}^\varepsilon$ に対して, $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上で Schilder 型大偏差原理を示す ($2 < p < 3$). 正確には以下の通り. ($\mathcal{H}$ は持ち上げを通じて自然に $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ の部分集合とみなす.) 任意の Borel 集合 $A \subset G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して,

$$-\inf_{h \in A^\circ} \hat{I}(w) \leq \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \log \hat{\mu}^\varepsilon(A^\circ) \leq \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \log \hat{\mu}^\varepsilon(\bar{A}) \leq -\inf_{w \in \bar{A}} \hat{I}(w)$$

が成立する. ここで $\hat{I}$ は $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上で定義された “good” なレート関数で, $h \in \mathcal{H}$ に対しては $\hat{I}(h) = \|h\|_{\mathcal{H}}^2/2$, $X \notin \mathcal{H}$ に対しては $\hat{I}(X) = \infty$ で定める.

次にラフパス理論においては厳密な意味で $y^\varepsilon = [t \mapsto \Phi(\varepsilon W, \lambda)_{0,t}^1]$ と書けることに注意する. ここで $(\varepsilon W, \lambda)$ は Young 対であり, Φ はラフパスの意味での伊藤写像の第 1 レベルなので, Lyons の連続性定理により連続写像である. よって文字通りに縮小原理が使えて非常に見通しよく, Freidlin-Wentzell の大偏差原理が証明できた.

この論文は大偏差原理が証明が見通しよくなるという点と Lyons の連続性定理の威力が示されているという点と両方の理由から注目を集めた. そのためか多数の後続論文が生まれた. 今ではさまざまなランダムなラフパスに対して Schilder 型大偏差原理がラフパス空間上で証明されている. もちろん代表例は前章で紹介したような Gauss ラフパスである. ある $\rho \in [1, 2)$ に対して, 共分散 $R(s, t)$ の 2 変数 ρ 次変動が有限な場合に Schilder 型大偏差原理が $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上で成立することが知られている

($p > 2\rho$). (Friz-Victoir 定理 15.55 を参照せよ.) また位相も p 次変動位相だけでなく, $1/p$ -Hölder 位相の場合もよく研究されている. 現在ではこの種の大偏差原理は Freidlin-Wentzell の大偏差原理の別証明という元々の動機を離れて, これ自体が独立した定番のテーマになりつつあるようである.

10 台定理

Freidlin-Wentzell 型大偏差原理の場合と同じように, Stroock-Varadhan の台定理はもし通常の SDE の意味での伊藤写像が連続であったならばすぐに証明できる. これも Ledoux-Qian-Zhang[32] によるのだが, ラフパスを使った新証明が登場した. 本章ではこの話題を紹介しよう.

まず前章と同じ係数行列 σ, b を持つ次の SDE を考える.

$$dy_t = \sigma(y_t) \circ dw_t + b(y_t)dt \quad \text{with} \quad y_0 = 0 \in \mathbf{R}^n.$$

この解 $y = (y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ がパス空間 $C_0(\mathbf{R}^n)$ に像測度を誘導するわけだが, その台, すなわち全測度を持つ最小の閉部分集合はどのようなものだろうか. Stroock-Varadhan の台定理はこの問いに答えるもので, Cameron-Martin 空間 $\mathcal{H}$ の元が決定論的な意味での伊藤写像でどこに移るかを見ればよいと主張する. $h \in \mathcal{H}$ に対して, $\phi(h)$ を次の ODE の解だとする.

$$d\phi(h)_t = \sigma(\phi(h)_t)dh_t + b(\phi(h)_t)dt \quad \text{with} \quad \phi(h)_0 = 0 \in \mathbf{R}^n. \quad (9)$$

すると, 求める台は $\{\phi(h) \mid h \in \mathcal{H}\}$ の $C_0(\mathbf{R}^n)$ における閉包になるというのが台定理の主張である. 伊藤写像の定義域において, Wiener 測度 μ の台は全体集合 $C_0(\mathbf{R}^d)$ そのものだし, $\mathcal{H}$ はその中の稠密な部分集合だから, もし仮に伊藤写像が連続であったならば証明はごく簡単である. しかし実際は連続でないため難しい問題だった.

しかしラフパス理論においては伊藤写像は連続なので, その定義域において確率測度の台を確認すればすぐに証明できる. 実は Brown ラフパスの法則の台は, $\mathcal{H}$ (を持ち上げたもの) の p 次変動位相に関する閉包である $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ そのものであることが証明できるので, この系として Stroock-Varadhan の台定理が従う.

この Brown ラフパスに対する台定理も現在では様々な Gauss ラフパスの場合に拡張されている. 基礎になる Gauss 過程が補完 Young 正則性条件を満たす場合に成立することが Friz-Victoir ([19], 定理 15.60) によって示されている. (もちろん $1/p$ -Hölder 位相の場合も研究されている).

11 Laplace 近似

この章では Laplace 近似,⁸⁾ すなわち第 9 章で扱った Freidlin-Wentzell 型大偏差原理の精密化を紹介する. 本章では [27] に従い, 非整数 Brown ラフパスの場合を紹介する. (なお無限次元の Brown ラフパスの場合が [31] にある).

第 9 章と同じ係数行列を持つ次の RDE を考えよう.

$$dy_t^\varepsilon = \sigma(y_t^\varepsilon)\varepsilon dx_t + b(y_t^\varepsilon)dt \quad \text{with} \quad y_0^\varepsilon = 0 \in \mathbf{R}^n.$$

簡単のため初期値は 0 とした. また $\varepsilon \in (0, 1]$ は小さなパラメーターである.

駆動するラフパス $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ として, 非整数 Brown ラフパス $W(1/4 < H \leq 1/2)$ をとると,

Schilder 型大偏差原理と伊藤写像の連続性から、解 $y^\varepsilon = [t \mapsto (Y^\varepsilon)_{0,t}^1]$ も Freidlin-Wentzell 型の大偏差原理を満たすのであった. ($p > 1/H$ ととった.)

さて $h \in \mathcal{H}$ に対して, $\phi(h)$ を ODE(9) で初期値を 0 としたものだとしよう. ここで $\mathcal{H} = \mathcal{H}^H$ は fBm の Cameron-Martin 空間である. fBm の Cameron-Martin パスは, 前述のとおり $q = (H + 1/2)^{-1}$ (< 2) 次変動が有限なので, この ODE は Young 積分の意味で理解する.

さて Varadhan の積分補題といわれるよく知られた一般論により, 次の極限公式が成り立つ. これはいわば Freidlin-Wentzell 型の大偏差原理の「積分形」である.

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{E}[\exp(-F(y^\varepsilon)/\varepsilon^2)] = - \inf_{h \in \mathcal{H}} \left\{ F(\phi(h)) + \frac{1}{2} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \right\}.$$

ここで $F: C_0^{p-var}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ は任意の有界連続関数である.

この公式では積分量の対数の極限値を計算している. しかし必要ならば関数 F にもっと仮定をおいてもいいので, 積分量そのものの漸近挙動を求められないか, というのが Laplace 近似である. 通常の SDE の場合は Azencott[2] から始まり, Ben Arous [7] など多数ある.⁹⁾

ここではラフパス理論の観点からこの問題を考える. その際の一番の特徴を述べると, 証明の急所である伊藤写像の Taylor 展開は非ランダムになり, もとの確率過程が何であるかは (ラフパスへの持ち上げがうまくいけば) あまり問題にならなくなる. その結果, fBm の場合であっても Brown 運動の場合と統一的な証明がつく. ここで仮定をいくつか導入しよう.

(H1): ある $p > 1/H$ に対して, F と G は $C_0^{p-var}(\mathbf{R}^n)$ 上で定義された有界連続な $\mathbf{R}$ 値関数である.

(H2): $\mathcal{H}$ 上の関数 $\hat{F} := F \circ \phi + \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2/2$ はある点 $\gamma \in \mathcal{H}$ においてのみ最小値を達成する.

(H3): $\phi(\gamma)$ の $C_0^{p-var}(\mathbf{R}^n)$ 内のある近傍上で, F と G は Fréchet 微分の意味で滑らかで, かつ全ての導関数は有界だとする.

(H4): $\mathcal{H}$ 上の関数 $F \circ \phi$ の $\gamma \in \mathcal{H}$ における Hessian $\nabla^2(F \circ \phi)(\gamma)|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}}$ は二次形式として $-\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ より真に大きい.

これらの仮定はこの種の問題においては典型的なものである. さて以上の 4 つの仮定をおいた上でさらに有界な係数行列 σ, b が滑らかなで, かつその全ての導関数も有界 (すなわち C_b^∞ 級) だとすると, 以下の定理が証明できる.

$\varepsilon \searrow 0$ のときに適当な定数 α_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) が存在して,

$$\mathbb{E}[G(y^\varepsilon) \exp(-F(y^\varepsilon)/\varepsilon^2)] = \exp(-\hat{F}(\gamma)/\varepsilon^2) \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \dots + \alpha_m \varepsilon^m + \dots)$$

と漸近展開できる.

証明のカギになるのは, $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 内において, γ (正確にはその持ち上げ) の十分小さな近傍で, 伊藤写像の第 1 レベルを Taylor 展開することである. ちなみにこの近傍の補集合からの寄与が漸近展開に影響を与えないことは大偏差原理からわかる. この展開は実は決定論的で, 確率測度 (確率過程) とは関係がない.

もう少し詳しく説明する. 係数 $[\sigma|b]$ に対応した伊藤写像を $\Phi: G\Omega_p(\mathbf{R}^{d+1}) \rightarrow G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ と書き,

$\lambda_t = t$ と $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ との Young 対を $(X, \lambda) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^{d+1})$ と書く. すると $y_t^\varepsilon = \Phi((\varepsilon X, \lambda))_{0,t}^1$ であり $\phi(h)_t = \Phi((h, \lambda))_{0,t}^1$ である. ここで h とその持ち上げは同じ記号で書いた. 証明の中で使うのは, γ だけ平行移動した $\Phi((\gamma + \varepsilon X, \lambda))_t^1$ の展開である. ここで $\gamma + \varepsilon X$ は Young 平行移動であることに注意せよ. $\varepsilon \searrow 0$ のときに適当な $\phi_j(\gamma, X)$ ($j = 1, 2, \dots$) が存在して, 第 1 レベルパスは

$$\Phi((\gamma + \varepsilon X, \lambda))_t^1 = \phi(\gamma) + \varepsilon \phi_1(\gamma, X) + \varepsilon^2 \phi_2(\gamma, X) + \dots$$

と p 次変動位相に関して展開できる. 各 $\phi_j(\gamma, X)$ は形式的には定数変化法で解ける簡単な 1 階 ODE の解であり, X の関数としては j 次の量なので, 上の公式は「Taylor 展開」的なものである. もちろん剰余項がラフパス空間の位相 (距離) に関してしかるべき評価を満たすことも示せる. (ただし X が任意であるのに対して, 展開の基点 γ は Young 平行移動が意味を持つ程度に「いいパス」でないと, そもそも問題が設定できない).

少しだけ別の角度から説明する. 有界変動な世界で, Riemann-Stieltjes 積分の意味での伊藤写像を考えると, それは Fréchet 微分の意味で滑らかことが知られているので, 当然任意の γ の周りで Taylor 展開も可能であり, そこには上の ϕ_j と形式的にはまったく同じものが現れる. これをラフパス空間の位相に関して完備化を取って拡張したものが, ここで議論しているラフパスの意味での伊藤写像の Taylor 展開である. この考え方が一番わかりやすいと思う.

なおこの伊藤写像の第 1 レベルの展開は, 任意のラフネス $p \geq 2$ の場合にも成立する. そのさいに展開の基点は Young 積分のための関係式 $1/p + 1/q > 1$ を満たす任意の $q \in [1, 2)$ に対して, q 次変動有限なものにとれる. ([26] を参照せよ).

12 Jacobian 過程とその可積分性

前章までと同じく係数 σ と b を持つ RDE を考えるが, 表記の都合上 σ の縦ベクトルを $V_1, \dots, V_d$ と書き, これに合わせて $b = V_0$ と書く. V_i ($0 \leq i \leq d$) は $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場だとみなすべきである. 本章では V_i は $C_b^{[p]+2}$ 級だと仮定する. この記号を使うと RDE は

$$dy_t = \sum_{i=1}^d V_i(y_t) dx_t^i + V_0(y_t) dt \quad \text{with} \quad y_0 = a \in \mathbf{R}^n \quad (10)$$

と書ける. ここで dx^i の上つき添字 i はもちろん反復積分のレベルではなく, $\mathbf{R}^d$ の座標を意味する.

さて $y_t = y_t(a)$ を初期値 $a \in \mathbf{R}^n$ の関数だと見なして (形式的に) 微分すると, $j_t = \nabla y_t$ と $k_t = j_t^{-1}$ は $n \times n$ 行列に値をとり, 次の ODE を形式的に満たすことがわかる.

$$dj_t = \sum_{i=1}^d \nabla V_i(y_t) j_t dx_t^i + \nabla V_0(y_t) j_t dt, \quad \text{with} \quad j_0 = \text{Id}_n. \quad (11)$$

$$dk_t = - \sum_{i=1}^d k_t \nabla V_i(y_t) dx_t^i - k_t \nabla V_0(y_t) dt, \quad \text{with} \quad k_0 = \text{Id}_n. \quad (12)$$

なおここでは ∇V_i を $n \times n$ 行列だと見なしている. この j はもとの方程式の解 y の Jacobian 過程と呼ばれ, 通常の SDE に対する確率解析では非常に重要な役割をはたす. したがってラフパス理論においても重要なはずである. しかし, (10)-(12) 式をラフパス X が駆動する連立 RDE だと解釈すると

きに、まず困るのは方程式 (11)-(12) の係数が線形増大 (というよりも線形) であり、有界でない点である。有界でない係数を持つ RDE は難しく、一般には有限時間内に解が爆発する危険性がある。

しかし (10)-(12) の場合は一意的に解けて、しかも Lyons の連続性定理も成立するのである。理由を簡潔に述べると以下のとおり。まずこの連立 RDE は「三角行列的な形」をしており、さらに (10) が解けて (X, Y) が求まってしまう。すると $\nabla V_i(y_t)$ はすでに既知なので、(11) と (12) は文字通りに線形な RDE になる。実は線形な driven ODE の解は級数表示を持つので、それをラフパス位相に拡張してやれば、線形 RDE の解の第 1 レベルが求まる。解の第 1 レベルがある十分大きい球の内側に入っているならば、その外側での係数の情報は関係ないので、カットオフ関数を係数に作用させたもので考えなおせば、線形 RDE の解の第 2 レベル以上も求まるし、連続性定理も示せる。以上により、任意の $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して、連立 RDE(10)-(12) は一意解 (Y, J, K) を持つことがわかった。

確率解析においては J, K の可積分性が問題になる。上で述べたようなカットオフ関数の議論と組み合わせると、実は $\sup_{0 \leq t \leq 1} (|J_{0,t}^1| + |K_{0,t}^1|)$ の可積分性がわかれば十分なのだが、これがなかなか難しかったのである。というのは単純に計算すると、適当な定数 $C > 0$ に対して、

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} (|J_{0,t}^1| + |K_{0,t}^1|) \leq C \exp \left(C \sum_{i=1}^{[p]} \|X^i\|_{p/i}^{p/i} \right)$$

となってしまう。 X が Gauss ラフパスのとき、 $p > 2$ なので Fernique の定理は使えない形になっていて、これでは右辺が L^1 であるかどうかすら不明である。

この難問を解決したのが、Cass-Litterer-Lyons[12] による可積分性補題である。まず任意の $\alpha > 0$ に対して、 $\tau_0 = 0$ とおき、 $m \geq 1$ に対しては順番に次のように定める。

$$\tau_m = 1 \wedge \inf \{ t \geq \tau_{m-1} \mid \sum_{i=1}^{[p]} \|X^i\|_{p/i, [\tau_{m-1}, t]}^{p/i} \geq \alpha \}.$$

ここで $\|X^i\|_{p/i, [s, t]}$ は部分区間 $[s, t]$ に制限した p/i 次変動ノルムである。そして

$$N_\alpha(X) = \max \{ m \mid \tau_m < 1 \}$$

とおく。この量が重要である。 α に関して減少 (非増加) であるので、小さな α に対しての N_α の可積分性が価値が高い。各小区間 $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ ごとに考え直すことにより、実は J^1, K^1 の評価は

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} (|J_{0,t}^1| + |K_{0,t}^1|) \leq C_\alpha \exp \left(C_\alpha N_\alpha(X) \right) \quad (13)$$

となる。ここで $C_\alpha > 0$ は α に依存する定数である。したがって、ある α に対して N_α の指数可積分性がわかれば十分である。

Cass-Litterer-Lyons[12] によると、 X が Gauss ラフパス W で補完 Young 正則性条件を満たす場合には、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $\alpha > 0$ に対して $\mathbb{E}[\exp(N_\alpha(W)^{1+\delta})] < \infty$ となる。(より正確には、 $N_\alpha(W)$ の尾確率の評価を与えた)。よってこの条件のもとでは、(13) 式の両辺は任意のモーメントを持つのである。これで Jacobian 過程の可積分性がわかった。

13 RDE の解に対する Malliavin 解析

成功した解析の理論によくあるように, Malliavin 解析には抽象論の部分と、それを適用する具体的な調査対象とがある. この場合, 抽象論は抽象 Wiener 空間上の Sobolev 空間の理論であり, 端的に言うとも無限次元 Gauss 空間上の微分積分である. これを使って調べる最も重要な具体例は SDE の解である. したがって, ラフパス理論で Gauss 過程の持ち上げが登場したときに誰もが考えることは, Malliavin 解析を使って RDE の解を調べられるのか, という自然な問いである. 本章では係数ベクトル場 V_i が C_b^∞ の場合に, Gauss ラフパスで駆動される RDE(10) を考える.

最初にこの路線を行ったのは, Cass-Friz-(Victoir)[10, 9] である. 彼らは補完 Young 正則性条件を満たす Gauss ラフパスがさらにある種の非退化性を持つ場合を考えた. この例は fBm($1/4 < H \leq 1/2$) を含む. (ここでいう意味の非退化性とは例えばピン留め Brown 運動のような「あまり拡散しない」ものを排除するためである). この場合に RDE の解 y_t は局所 Sobolev 空間 $\mathbf{D}_{r,1}^{loc}(\mathbf{R}^n)$ ($1 < r < \infty$) の元になるという, かなり弱い微分可能性を持つことがわかる. 係数ベクトル場 V_i ($0 \leq i \leq d$) が出発点 $y_0 = a \in \mathbf{R}^n$ において Hörmander 条件を満たす場合には, Malliavin 共分散行列が弱い意味で非退化 (つまりほとんどいたるところで正則) であることも彼らは示したので, 一般論によって解 y_t の法則は Lebesgue 測度 da' に対して密度関数 $p_t(a, a')$ を持つことがわかる. しかし, この議論では密度関数の正則性などについてはよくわからない.

しかしやはり通常の SDE においてそうだったように, RDE の解 y_t は任意の積分指数 $r \in (1, \infty)$ と微分指数 $k \geq 0$ に対して Sobolev 空間 $\mathbf{D}_{r,k}(\mathbf{R}^n)$ の元になってほしいし, Malliavin 共分散行列が普通の意味で非退化 (つまり逆行列の行列式が任意のモーメントを持つ) であってほしい. すると一般論によって密度関数は a' に関して滑らかであることがわかる. しかしこのことを証明するのに重大な障害となっていたのが, 前章で議論した Jacobian 過程の可積分性であった. たとえば解の k 解微分 $D^k y_t$ を書き下すと, その式は Jacobian 過程とその逆を含むので, この種のことが証明できなければ話が先に進まないのは明らかである.

ところが最近その可積分性が示されたことにより, RDE に対する Malliavin 解析は急速に発展しはじめた. まず最初は Hairer-Pillai[24] において, fBm($1/3 < H \leq 1/2$) の場合が証明された. Malliavin 解析の意味での微分可能性, すなわち $y_t \in \cap_{1 < r < \infty} \cap_{k \geq 0} \mathbf{D}_{r,k}(\mathbf{R}^n)$ は非整数解析 (fractional calculus) を経由して示されている. Hörmander 条件の下での Malliavin 共分散行列の非退化性については, Norris の補題という通常の Malliavin 解析でよく知られている補題の「決定論版」にあたるものを, Gubinelli 流の controlled path 理論の枠組の中で示すことにより解決している.

その後, 補完 Young 正則性条件を満たす Gauss ラフパスの場合には, y_t の Malliavin 解析の意味での微分可能性が示された ([29] を参照せよ). また Hörmander 条件の下での Malliavin 共分散行列の非退化性については, Cass-Hairer-Litterer-Tindel[11] がかなり一般的な Gauss ラフパスの場合へと拡張した. こうした一連の発展により, RDE の解に対する Malliavin 解析がかなり自由にできるようになったので, これからこの分野は急速に発展するのではなかろうか.

実際にすでに発表された例をいくつか列挙しよう. fBm の場合に, (1) Varadhan の評価, つまり密度関数の対数 $\log p_t(a, a')$ の短時間の漸近挙動. Baudoin-Ouyang-Zhang[4]. (2) 楠岡の UFG 条件とよばれる Hörmander 条件に似たベクトル場の Lie 括弧積に対する条件の下で, 熱半群 (に対応するもの) の平滑化定理. Baudoin-Ouyang-Zhang[5]. (3) 密度関数 $p_t(a, a')$ の正值性. Baudoin-

Nualart-Ouyang-Tindel[6]. この3つでは, Hurst 指数は $1/4 < H \leq 1/2$ と仮定されている. また $1/3 < H \leq 1/2$ の場合だが, (4) ベクトル場に出発点で楕円型条件を課した場合における密度関数の $p_t(a, a')$ の短時間での (非対角) 漸近挙動が [30] によって証明された. 最後の例では渡辺超関数とその漸近展開の理論が使われている. Malliavin 解析において非常に強力な道具として知られているこの理論は, ラフパス理論の枠組みにおいても威力を発揮するようである.

14 書かなかったこと

紙数の都合もあり, ラフパス理論に関係する確率解析についてのいくつかの重要な話題には触れることはできなかった. なかでも最も重要なのは, ラフパス理論の確率偏微分方程式 (stochastic PDE, SPDE) への応用である. 通常の SPDE 理論ではうまく意味のつかない場合や解けない場合を, ラフパス理論の変種をうまく利用してなんとか解決しようという路線である. (誤解のないように注意すると, SPDE の一般論をラフパス理論を使って全面的に書き直したり, 拡張したりしようとしているのではない.) この件に関しては, 何種類かの試みがすでに提案, 研究されているのだが, 互いに関係のない個別の工夫の集合といった感じで, 統一された何かではない. よって本稿のような短い原稿で紹介することはあきらめざるえなかった.

仮にその中でひとつ取り上げるとすれば, 最大の成功例だとされている Hairer 流のラフ SPDE になるだろう.¹⁰⁾ これは KPZ 方程式という統計物理学で非常に重要視されている未解決 SPDE を解決したことで注目を集めた (Hairer[22]). しかしこの理論はその後さらに大発展して, 正則構造 (regularity structure) の理論というものになった (Hairer[23]). ここまで来るともはや独立した新理論であり, ラフパス理論の一部と考えるべきではなからうから, 本稿ではふれなかった.

別の話題になるが, 通常の SDE に対して非常によく研究されている話題として, 数値解析学, あるいは統計学の観点からの研究がある. 平行した問題を Gauss ラフパスで駆動される RDE の解に対して考えてみるのは悪くないと思う. 今はそれほど論文も発表されていないが, 近いうちに盛んに研究されるようになると個人的には予想している. また SDE の近似をラフパスの観点から考えてみるという話題もこの段落に含めるべきであろう.

それから Lyons やその周辺の研究者が精力的に研究している, (ラフ) パスの signature に関する話題にもふれなかった. 時間区間 $[0, 1]$ 上で定義された (ラフ) パスがあったときに, それを全時間区間上で k 重反復積分した $X_{0,1}^k = \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dx_{t_1} \otimes \dots \otimes dx_{t_k}$ ($k = 1, 2, \dots$) もの (あるいはそれに相当する量) を signature と呼ぶ. signature から (ラフ) パスが時間パラメーターの付け替えを無視すれば一意に決定できるか, というのがこの分野の基本的な問題意識である. この問題の確率論版として, signature の期待値から (ラフ) パス空間上の確率測度が何らかの意味で一意的に決定できるか, というものがある. 最近の成果については例えば [34] やその文献表を参照せよ.

注 釈

- 1) したがって, この理論への参入を目指す人には好機ではないだろうか.
- 2) そろそろ "rough path" に適切な日本語訳がほしいところである.
- 3) $p = 2$ の場合, 「2 次変動 (変分)」という言葉の意

味が, 普通の確率論の教科書で「Brown 運動の時刻 t までの 2 次変動は定数 t 」と言う場合とは違う意味で用いられていることに注意せよ.

- 4) 実は $\dot{Y}$ は almost rough path とよばれる量である. 任意の almost rough path には一意にラフパスが対応するが, 式 (4)(5) はこの一般論の特殊な場合を書き下したものである.

- 5) $p \geq 3$ の場合にも Gubinelli 理論はもちろん拡張できている。
- 6) この測度にもそろそろ名前がほしい
- 7) 現在では何種類かの証明が知られている。
- 8) 何を Laplace 近似または Laplace の方法と呼ぶかについて、用語が多少混乱しているようだ。
- 9) SDE に対する Laplace 近似に関する論文は多数あるようだ。なかでも最強なのは Malliavin 解析と組み合わせて、熱核の漸近挙動の研究に応用したものである。また SDE の様々な変種に対しても同様の研究がある。
- 10) 他には例えば Gubinelli と共著者たちによる “controlled distribution” の理論 [21] とか、Friz と共著者たちによる rough stochastic PDE 理論 [8] などがある。

文 献

- [1] Aida, S.; Vanishing of one-dimensional L^2 -cohomologies of loop groups. *J. Funct. Anal.* 261 (2011), no. 8, 2164–2213.
- [2] Azencott, R.; Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynman. *Seminar on Probability, XVI, Supplement*, pp. 237–285, *Lecture Notes in Math.*, 921, Springer, Berlin-New York, 1982.
- [3] Bailleul, I.; Flows driven by rough paths. *arXiv:1203.0888*.
- [4] Baudoin, F.; Ouyang, C.; Zhang, X.; Varadhan Estimates for rough differential equations driven by fractional Brownian motions. *arXiv:1304.7376*.
- [5] Baudoin, F.; Ouyang, C.; Zhang, X.; Smoothing effect of rough differential equations driven by fractional Brownian motions. *arXiv:1304.4838*.
- [6] Baudoin, F.; Nualart, E.; Ouyang, C.; Tindel, S.; On probability laws of solutions to differential systems driven by a fractional Brownian motion. *Preprint. arXiv:1401.3583*
- [7] Ben Arous, G.; Methods de Laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de Wiener. *Stochastics* 25 (1988), no. 3, 125–153.
- [8] Caruana, M.; Friz, P.; Oberhauser, H.; A (rough) pathwise approach to a class of non-linear stochastic partial differential equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 28 (2011), no. 1, 27–46.
- [9] Cass, T.; Friz, P.; Densities for rough differential equations under Hörmander's condition. *Ann. of Math.* (2) 171 (2010), no. 3, 2115–2141.
- [10] Cass, T.; Friz, P.; Victoir, N.; Non-degeneracy of Wiener functionals arising from rough differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 6, 3359–3371.
- [11] Cass, T.; Hairer, M.; Litterer, C.; Tindel, S.; Smoothness of the density for solutions to Gaussian rough differential equations. To appear in *Ann. Probab.* *arXiv:1209.3100*.
- [12] Cass, T.; Litterer, C.; Lyons, T.; Integrability and tail estimates for Gaussian rough differential equations. *Ann. Probab.* 41 (2013), no. 4, 3026–3050.
- [13] Coutin, L.; Qian, Z.; Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probab. Theory Related Fields* 122 (2002), no. 1, 108–140.
- [14] Davie, A. M.; Differential equations driven by rough paths: an approach via discrete approximation. *Appl. Math. Res. Express. AMRX* 2007, no. 2, Art. ID abm009, 40 pp.
- [15] Friz, P.; Gess, B.; Gulisashvili, A.; Riedel, S.; Jain-Monrad criterion for rough paths and applications. *Preprint. arXiv:1307.3460*.
- [16] Friz, P.; Hairer, M.; A course on rough paths. *Preprint*.
- [17] Friz, P.; Victoir, N.; A variation embedding theorem and applications. *J. Funct. Anal.* 239 (2006), no. 2, 631–637.
- [18] Friz, P.; Victoir, N.; Differential equations driven by Gaussian signals. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 46 (2010), no. 2, 369–413.
- [19] Friz, P.; Victoir, N.; Multidimensional stochastic processes as rough paths. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2010.
- [20] Gubinelli, M.; Controlling rough paths. *J. Funct. Anal.* 216 (2004), no. 1, 86–140.
- [21] Gubinelli, M.; Imkeller, P.; Perkowski, N.; Paracontrolled distributions and singular PDEs. *arXiv:1210.2684*.
- [22] Hairer, M.; Solving the KPZ equation. *Ann. of Math.* (2) 178 (2013), no. 2, 559–664.
- [23] Hairer, M.; A theory of regularity structures. To appear in *Invent. Math.* *arXiv:1303.5113*
- [24] Hairer, M.; Pillai, N.; Regularity of laws and ergodicity of hypoelliptic SDEs driven by rough paths. *Ann. Probab.* 41 (2013), no. 4, 2544–2598.
- [25] Inahama, Y.; Quasi-sure existence of Brownian rough paths and a construction of Brownian pants. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 9 (2006), No. 4, 513–528.
- [26] Inahama, Y.; A stochastic Taylor-like expansion in the rough path theory, *J. Theoret. Probab.* 23 (2010), Issue 3, 671–714.
- [27] Inahama, Y.; Laplace approximation for rough differential equation driven by fractional Brownian motion. *Ann. Probab.* 41 (2013), No. 1, 170–205.
- [28] Inahama, Y.; Large deviation principle of Freidlin-Wentzell type for pinned diffusion processes. To appear in *Trans. Amer. Math. Soc.* *arXiv:1203.5177*.
- [29] Inahama, Y.; Malliavin differentiability of solutions of rough differential equations. To appear in *J. Funct. Anal.* *arXiv:1312.7621*.
- [30] Inahama, Y.; Short time kernel asymptotics for rough differential equation driven by fractional Brownian motion. *Preprint. arXiv:1403.3181*.

24

論

説

- [31] Inahama, Y.; Kawabi, H.; Asymptotic expansions for the Laplace approximations for Itô functionals of Brownian rough paths. *J. Funct. Anal.* 243 (2007), no. 1, 270–322.
- [32] Ledoux, M.; Qian, Z.; Zhang, T.; Large deviations and support theorem for diffusion processes via rough paths. *Stochastic Process. Appl.* 102 (2002), no. 2, 265–283.
- [33] Lyons, T.; Differential equations driven by rough signals. *Rev. Mat. Iberoamericana* 14 (1998), no. 2, 215–310.
- [34] Lyons, T.; Rough paths, signatures and the

modelling of functions on streams. To appear in the Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2014, Korea. arXiv: 1405.4537.

- [35] Lyons, T.; Caruana, M.; Lévy, T.; Differential equations driven by rough paths. *Lecture Notes in Math.*, 1908. Springer, Berlin, 2007.
- [36] Lyons, T.; Qian, Z.; System control and rough paths. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [37] Sugita, H.; Hu-Meyer’s multiple Stratonovich integral and essential continuity of multiple Wiener integral. *Bull. Sci. Math.* 113 (1989), no. 4, 463–474.

(年 月 日提出)

(いなはま ゆずる・社団法人日本数学会)