線形代数学 (火４) の期末試験の略解

問題 1 [20 点]　(1) -81.　(2) -41.　(3) -900.　(4) $+4$.
各 5 点．計算のやり方は自由．ただし (3) については，以下のように文字式の行列式を計算したのちに $x=100$ を代入するのが賢いかもしれない．

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & x+1 \\ x-1 & x+2 & x-1 \\ x+1 & x-1 & x \end{vmatrix} = \cdots = -9x$$

問題 2 [20 点]　各 10 点．
(1) 係数行列の行列式は $-39 \neq 0$ なので，係数行列は正則である．よってクラーメルの公式が使えるので，露骨に使えば，$(x,y,z) = \frac{1}{39}(-1,13,8)$ と求まる．
(2) 行列式を計算すれば $|A| = -1 \neq 0$ なので正則である．余因子行列は定義通り計算すればよく，有名公式により直ちに逆行列が求まる．

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 3 [20 点]　各 10 点．(1) 実は $C = BA$ であることに注意せよ．行列式の基本性質により，$|BA| = |B| \cdot |A|$ となるなので，B, A の行列式をそれぞれ求めればよい．比較的簡単な計算で，$|B| = 4$, $|A| = 2abc$ とわかるので，答えは $|C| = 8abc$ である．
(2)

余因子展開を無理やりに進めるよりは，因数のとり出しを計る．

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & c & b & a \\ c & 0 & a & b \\ b & a & 0 & c \end{bmatrix} \text{ であるから } \underset{\text{(第 1 列に集める)}}{|A| =} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ a+b+c & c & b & a \\ a+b+c & 0 & a & b \\ a+b+c & a & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{(共通因数)}}{= (a+b+c)} \begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 1 & c & b & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \end{vmatrix} \underset{\text{(第 1 行を引く)}}{= (a+b+c)} \begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 0 & c-b & b-c & a \\ 0 & -b & a-c & b \\ 0 & a-b & -c & c \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{(余因子展開)}}{= (a+b+c)} \begin{vmatrix} c-b & b-c & a \\ -b & a-c & b \\ a-b & -c & c \end{vmatrix}$$

(1 列と 2 列に 3 列を加え、2 列と 1 列から共通因数。3 行 -1 行、1 列で余因子展開)

$$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

問題4 [20点]　各10点．(i) 与えられた4本の条件を行列を使って書き直せば，

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

となる．これを ${}^t(a_0, a_1, a_2, a_3)$ に関する連立1次方程式とみなしていることに注意せよ．

(ii) 任意に与えた右辺に対して一意解を持つ同値条件は，係数行列が正則なことだが，それは行列式がゼロでないことと同値．さて，(i) の行列の行列式はヴァンデルモンド行列式（正確にはその転置）なので，

$$\prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

となるが，$x_1, \ldots, x_4$ は相異なると仮定したので，これはゼロにはならない．

問題5 [20点]　多少注意しつつ掃き出し計算すると，拡大係数行列は

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & a-2 & -a+1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a-4) & (a-1)(a-6) \end{array}\right]$$

という形になるので，$a = 4, a = 1, a \neq 1, 4$ という3種類の場合分けが必要なことがわかる．
(1) $a = 4$ の場合は解なし．(2) $a = 1$ の場合は，実パラメーターを c 用いて，解は $(x, y, z) = (1 - 3c, c, c)$ となる（本当は縦ベクトルで表記するべき）．(3) $a \neq 1, -1/2$ の場合は一意解が存在して，

$$(x, y, z) = \left(a + 5, \frac{-3a + 8}{a - 4}, \frac{-a + 6}{a - 4}\right)$$

が答えである．念のためにそれぞれの場合の簡約形を書いておくと，以下のようになる．

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a+5 \\ 0 & 1 & 0 & (-3a+8)/(a-4) \\ 0 & 0 & 1 & (-a+6)/(a-4) \end{array}\right].$$

配点: 行基本変形して場合分けが3種類あることに気づくのに5点．それぞれの場合について，答えが書けたら5点づつ．