線形代数 (木１) の期末試験の略解

2 月 6 日実施

配点について 基本的には各大問ごとに 20 点づつですが，もう少し詳しくは以下のようになる予定です．
問題 1　20 点，　**問題 2**　20 点 (そのうち対角化に 10 点)，　**問題 3**　5 点＋ 10 点，
問題 4　10 点＋ 10 点，　**問題 5**　5 点＋ 10 点＋ 10 点
中間点は答案のできに応じて，５点きざみで出します．

● **成績について：** 合格者の総数に対して，A, B, C の人数がそれぞれ約 $40 : 40 : 20$ になるようにします．（これは同学科の別の組とそろえています．）

問題 1　A の固有多項式を計算すると

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t+2 & -1 & -4 \\ 3 & t-2 & -3 \\ 1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)^2$$

と因数分解されるので，固有値は $2, -1$ である．それぞれの固有値に属する固有空間を求めると

$$W(2; A) = \{s\,{}^t(1,0,1) \mid s \in \mathbf{R}\}, \qquad W(-1; A) = \{s\,{}^t(1,1,0) \mid s \in \mathbf{R}\}$$

と求まる．よって，固有空間の次元の和は 2 で，全体空間の次元 3 に満たない．教科書の定理 5.4.2（p. 108）により，A は対角化できない．

問題 2　B の固有多項式を計算すると

$$|tE - B| = \begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ -2 & t-2 \end{vmatrix} = \cdots = (t-1)(t-4).$$

と因数分解されるので，固有値は $1, 4$ である．固有値 1 に属する固有ベクトルは $(E - B)\mathbf{x} = 0$ を解いて，${}^t(1, -2)$ の定数倍と求まる．また固有値 4 に属する固有ベクトルは $(4E - B)\mathbf{x} = 0$ を解いて，${}^t(1, 1)$ の定数倍と求まる．よって，この 2 本の縦ベクトルを並べたものを P と置くと

$$BP = B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left[B\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

P と P^{-1} が隣同士打ち消しあうことを使うと

$$B^n = \left[P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}\right]^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

となる．多少面倒くさいが，この右辺を露骨に計算すると

$$B^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2\cdot 4^n & -1 + 4^n \\ -2 + 2\cdot 4^n & 2 + 4^n \end{pmatrix}$$

と求まる．

問題 3　(1) 基になっている方法はいろいろある．例えば $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ を並べて作る 3×3 行列が「ランク 3 である」とか,「行列式が 0 でない」ことを示せばよい.
(2) シュミットの直交化法を露骨に適用する問題．まず

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

次は

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

最後は

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{a}_3 + \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_3\|}\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

問題 4　X と E は交換可能（つまり $XE = EX = X$）なので，X の多項式は普通の多項式と同様に計算してよいことに注意せよ.
(1) X の固有多項式は

$$|tE - X| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$$

なので，ケーリー・ハミルトンの定理 5.4.2（教科書 p. 108）により，上の式で形式的に $t = X$ と置いた次の式が成り立つ．したがって，(1) の答えは $(p, q, r) = (-3, 3, -1)$ である.

$$(X-E)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = O.$$

(2) 多項式の割り算を用いても計算できるがやや煩雑になるので，ここでは 2 項定理を用いる．（上に書いた理由で 2 項定理を適用できる.）$(X-E)^3 = O$ に注意すると

$$\begin{aligned} X^{11} &= \{(X-E)+E\}^{11} = \sum_{k=0}^{11} {}_{11}C_k\,(X-E)^k E^{11-k} \\ &= {}_{11}C_2\,(X-E)^2 + {}_{11}C_1\,(X-E) + {}_{11}C_0\,E \\ &= 55\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 55 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問題 5 (1) 固有多項式は以下のように求まる．

$$|tE-A| = \begin{vmatrix} t-4 & 1 & -1 \\ 1 & t-4 & 1 \\ -1 & 1 & t-4 \end{vmatrix} = \cdots = (t-3)^2(t-6).$$

よって，固有値は 3 と 6 である．

(2) 固有値 3 に対応する固有空間は $3E-A$ の核である．$3E-A$ は

$$3E-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約化できるので，固有空間の基として（例えば）$\{{}^t(1,1,0), {}^t(-1,0,1)\}$ が求まる．

固有値 6 に対応する固有空間は $6E-A$ の核である．$6E-A$ は

$$6E-A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約化できるので，固有空間の基として（例えば）$\{{}^t(1,-1,1)\}$ が求まる．

(3) (2) で求めた固有空間の基をそれぞれ正規直交化して

$$\left\{\mathbf{p}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}, \qquad \left\{\mathbf{p}_3 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

を作ると，$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基になっている．そこで

$$P := [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]$$

とおけば，P は直交行列であり，お馴染みの議論により

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．