解析学 I （火２）の期末試験の略解

2019 年 8 月 6 日

問題 1 [5+10 点]　(1) $t \geq 0$ のとき，$\log(1+e^t) \leq \log(e^t+e^t) \leq t + \log 2$ となる．
(2) 前小問により，

$$0 \leq \frac{1}{n}\log(1+e^{n|f(x)|}) \leq |f(x)| + \frac{\log 2}{n} \leq |f(x)| + \log 2.$$

$[0,1]$ 上では定数関数は可積分なので，問題の仮定と合わせて，$|f(x)| + \log 2$ は n によらない可積分関数である．これを優関数としてルベーグの収束定理を使えば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{n}\log\bigl(1+e^{n|f(x)|}\bigr)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\Bigl[\frac{1}{n}\log\bigl(1+e^{n|f(x)|}\bigr)\Bigr]dx = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

（ルベーグの収束定理を使うときに，優関数の議論がきちんとできることに５点.）

問題 2 [20 点]　微分と積分の交換定理（優収束定理の一変種）を使う．$t=1$ で微分するので，以下では $1/2 \leq t \leq 3/2$ としてよい．被積分関数をパラメーター t で偏微分すると，$e^{-x}x^{t-1}\log x$ をえる．上から押さえる関数 $g\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ として以下のものをとる．($g(x)$ が t に依存していないことに注意せよ.)

$$g(x) = x^{-1/2}|\log x| \quad (0 < x \leq 1 \text{ のとき}), \qquad g(x) = e^{-x}x^{3/2} \quad (x \geq 1 \text{ のとき}).$$

この g は $(0,\infty)$ 上で可積分でかつ

$$\sup_{1/2\leq t\leq 3/2} |e^{-x}x^{t-1}\log x| \leq g(x)$$

を満たすので，交換定理が使えて，$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx$ が示せる．

問題 3 [10+5+10 点]

(1). 非負であることおよび $\mu^*(\emptyset) = 0$ は定義から明らか．次は単調性 $(A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B))$ を示す．$A \cap \mathbf{Q} = \emptyset$ のときは $\mu^*(A) = 0$ なので明らか．$A \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ のときは, $A \subset B$ なので $B \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ であり，$\mu^*(A) = \infty = \mu^*(B)$ となる．これで単調性が示せた.

最後に可算劣加法性 $(A_1, A_2, \cdots \subset \mathbf{N} \Longrightarrow \mu^*(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu^*(A_i))$ を示す．$\mu^*(\cup_i A_i) = 0$ のときには示すことは何もない．$\mu^*(\cup_i A_i) \neq 0$ は, ある番号 i に対して $A_i \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ と同値だが, このとき $\mu^*(A_i) = \infty$ となるので，当然 $\sum_i \mu^*(A_i) = \infty$ である．以上で可算劣加法性が示せたので証明が終わる．

(2). A が可測であることの定義は，任意の $B \subset \mathbf{N}$ に対して

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

ただし，上で "$\geq$" を "$=$" で置き換えても同値である．

(3). 任意の $\mathbf{R}$ の部分集合 A が可測である．$\mu^*(B) = \infty$ のときには示すことは何もないので，$\mu^*(B) = 0$ の場合のみ考える．しかし, これは $B \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ と同値であり，すると必然的に $B \cap A$, $B \cap A^c$ も $\mathbf{Q}$ と交わらないので，$\mu^*(B \cap A) = 0 = \mu^*(B \cap A^c)$ である．これで A が可測であることが示せた.

問題 4 [20 点]　(1) 高校生風に部分積分を 2 回繰り返してもできるが，時間の節約のために $\cos x = (e^x + e^{-x})/2$ として計算すると，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{(-y+i)x} + e^{(-y-i)x})\ dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{(-y+i)x}}{-y+i} + \frac{e^{(-y-i)x}}{-y-i}\Big]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{-y+i} + \frac{1}{-y-i}\Big] = \frac{y}{1+y^2}.\end{aligned}$$

(2) $(0,\infty)\times(t,\infty)$ 上の関数 $f(x,y) = e^{-xy}(1-\cos x)$ にフビニの定理を使う.（非負値関数なので，無条件で使ってよい．この理由に 5 点.）先に y で積分すると問題の積分量が出てくるので，先に x で積分した場合を計算すればよい.

$$\int_t^\infty dy\Big(\int_0^\infty e^{-xy}(1-\cos x)dx\Big) = \int_t^\infty \Big(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\Big)dy = \Big[\frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1+y^2}\Big]_{y=t}^{y=\infty} = \frac{1}{2}\log\frac{1+t^2}{t^2}.$$

（見かけが違った正解がいくつかあることに注意せよ.）

問題 5 [20 点]　まず以下の自明の等式に注意せよ.（太文字 $\mathbf{1}$ は部分集合の定義関数である.）

$$|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1}dt = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t<|f(x)|\}}pt^{p-1}dt$$

これを x に関して積分すると，被積分関数は非負なので無条件でフビニの定理が使えて，

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^p d\mu(x) &= \int_X d\mu(x)\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t<|f(x)|\}}pt^{p-1}dt \\ &= \int_0^\infty \Big(\int_X \mathbf{1}_{\{t<|f(x)|\}}\Big)d\mu(x)pt^{p-1}dt \\ &= \int_0^\infty \mu(\{x\in X \mid |f(x)|\geq t\})pt^{p-1}dt \\ &\leq \int_0^1 pt^{p-1}dt + \int_1^\infty \frac{C}{t^{p+\delta}}pt^{p-1}dt \\ &= p + Cp\int_1^\infty \frac{1}{t^{1+\delta}}dt < \infty.\end{aligned}$$

上で μ が確率測度であること，$\delta > 0$ であることを使った.

解析学 I　(火 2) の期末試験　（再掲）

2019 年 7 月 30 日

注意：提出する答案用紙すべてに名前と番号を書いてください。解答する順番は自由ですが、どの問題を解いているのかは、わかりやすく示してください。裏面を使用する場合は、その旨をハッキリと示してください。

問題 1 [15 点]　(1) 任意の $t \geq 0$ に対して，$\log(1+e^t) \leq t + \log 2$ となることを示せ.
(2) ボレル可測関数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ は可積分だとする．このとき次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \log\bigl(1 + e^{n|f(x)|}\bigr) dx$$

問題 2 [20 点]　通常通りに $t \in (0,\infty)$ に対して，ガンマ関数を以下のように定める.

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$$

このとき，$\Gamma(t)$ は $t=1$ で微分可能であり，微分係数は以下の式で与えられることを <u>厳密に</u> 示せ.

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x} \log x \ dx$$

Hint: 優関数を探すときには，調べている関数が x が大きい場所と小さい場所で様子が異なることに注意すべき

問題 3 [25 点]　$A \subset \mathbf{R}$ に対して，$\mu^*(A)$ を以下のように定める.

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & (\text{if } A \cap \mathbf{Q} = \emptyset), \\ \infty & (\text{if } A \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset), \end{cases}$$

と定める.

(1). μ^* は $\mathbf{R}$ 上の外測度になることを示せ.

(2). $A \subset \mathbf{R}$ が（カラテオドリ外測度論の意味で）可測であることの定義を述べよ.

(3). $\mathbf{R}$ の部分集合で（カラテオドリ外測度論の意味で）可測なものを全て求めよ.

注意: 配点は (1)(3) は 10 点，(2) は 5 点.

問題 4 [20 点]　(1) $y > 0$ に対して，次の積分公式を証明せよ．

$$\int_0^\infty e^{-xy} \cos x \, dx = \frac{y}{1+y^2}$$

(2) $t > 0$ とする．フビニの定理を用いて, 以下の積分を計算せよ．

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx}(1-\cos x)}{x} \, dx$$

問題 5 [20 点]　$p \geq 1$ とし，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を全測度が 1 となる測度空間とする．$f\colon X \to \mathbf{R}$ を X 上の可測関数とする．ある $C > 0$ と $\delta > 0$ が存在して，任意の $t \geq 1$ に対して

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq t\}) = \frac{C}{t^{p+\delta}}$$

が成り立つとする．このとき，$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ であること示せ.

Hint: フビニの定理，およびほぼ自明の等式 $|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} dt$ を使うと示せる.