数学特論 B4 (木２) のレポート 2020 年 1 月 9 日

注意: 締め切りは２月７日 (金) の午後５時とします.

提出先は数理事務室のレポート提出箱へ．レポート用紙は A4 を使ってください．表紙に氏名と学生番号を忘れずに書いてください．それ以外は形式自由にしますので，常識の範囲内で適当にお願いします.

なおこのレポートでは有限状態空間 S 上のマルコフ連鎖のみを考える．その推移確率行列を P とする．行列成分 $P(x, y)$ が正のときに，$x \in S$ から $y \in S$ に向かう矢印を書いて集合 S を図示したものを遷移図という (必要ならば，その矢印の近くに１ステップで x から y に向かう確率 $P(x, y)$ も書き込むと良い).

問題 1 I 先生にはお気に入りの問題が A, B の２問ある．ある年に A を出した次の年にはサイコロを投げて，$1, 2, 3, 4$ が出れば A を，$5, 6$ が出れば B を翌年出題する．ある年に B を出題した次の年にはサイコロを投げて，奇数が出れば A を，偶数が出れば B を翌年出題する．

(i) この問題を状態空間が２点集合であるマルコフ連鎖として一番自然に定式化するときの推移確率行列 P とそれに対応する遷移図を書け.
(ii) 今年（0 年目）は確率 p で A を出題し，確率 $1 - p$ で B を出題する．ただし，$0 \leq p \leq 1$ とする．m 年後に A, B が出題される確率をそれぞれ求めよ．なお m は自然数である．
(iii) (前小問の状況を続ける) 十分長い期間に A, B が出題される割合を求めよ．

問題 2 以下の推移確率行列で定まる２つのマルコフ連鎖を考える．状態空間はそれぞれ３点集合，または５点集合である．

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(i) それぞれの推移確率行列に対応する遷移図を書け.
(ii) ２つのうち既約なマルコフ連鎖はどれか．また既約なものに関しては，状態空間の各点における周期を定義通りに求めよ.
(iii) それぞれのマルコフ連鎖に対して，定常分布を全て求めよ．
(iv) 既約なマルコフ連鎖に関しては $\lim_{n\to\infty}$(推移確率行列)^n を求めよ．

問題 3 既約かつ非周期的なマルコフ連鎖の推移確率行列 P を考える．十分大きな自然数 N に対して行列のベキ P^N の全ての行列成分は正になることを示せ．

Hint: 点 $x \in S$ における周期が 1 ならば集合 $\mathrm{Per}(x) = \{n \geq 1 \mid P^n(x, x) > 0\}$ は有限個の例外を除いて全ての自然数を含んでいることに注意するとよい．