数学特論 B4 のレジュメ

1 月 16 日 (木曜２限)

本日の目標:
トランプのリフル・シャッフル (riffle shuffle) を 52 次の置換群（対称群）を用いてマルコフ連鎖としてモデル化する．この定式化は Gilbert-Shannon と Reeds によって独立に行われ，GSR 模型と呼ばれている．

注意: 置換の設定の仕方は２種類あって，片方からもう片方に取り替えると，演算の左右が取り変わる（または置換 σ の替わりに σ^{-1} を考える) ことになる．この講義では文献 [LPW] の第８章に従って，「場所」に注目する流儀を採用する．

• S_N を N 次置換群とする．$\sigma \in S_N$ は N 点集合 $\{1, 2, \ldots, N\}$ からそれ自身への全単射である．群演算 $\tau\sigma$ と σ^{-1} は写像としての合成および逆写像のことである．単位元はもちろん恒等写像 Id である．

• N 枚のカードがあるとする ($N \geq 2$ だが，内心では $N = 52$ だと思っている)．カードには番号が 1 から N まで書かれている．またカードの並べるときに一番上から一番下まで場所にも 1 から N までの番号が順番に与えられている．カード番号の順に整然と上から下までカードがならんでいる状態を「整列状態」と呼ぶことにしよう．整列状態は場合によっては恒等置換と同一視される．

• 置換 $\sigma \in S_N$ のカードの束への作用を，「場所の番号」に注目して決める．すなわち，現時点で場所 i に存在しているカードを (そのカード番号がなんであれ) 場所 $\sigma(i)$ に移すことにする．すると必然的に σ をほどこしてから τ をほどこすのは，$\tau\sigma = \tau \circ \sigma$ をほどこすのと同じである．

例えば, $\sigma \in S_4$ が以下のものだとしよう．

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	3	1	2	4

すると，これを 4 枚のカードに作用させると以下のようになる．1 番上にあるカードは上から 3 番目に行く．2 番目のカードは 1 番目に行く．3 番目のカードは 2 番目に行く．4 番目 (一番下) のカードはそのまま．

注意すべきは整列状態にこの置換 σ を施すと，カードは上から順に $(2, 3, 1, 4)$ になるが，これは $\sigma(i)$ **の番号を並べたものではなく** $\sigma^{-1}(i)$ **の番号を並べたもの**である．(これはもちろん一般の置換 $\sigma \in S_N$ に対してもいえる．)

• **リフル・シャッフル** このモデルではカードの束に作用させる置換として任意の置換を許すわけではない．リフル・シャッフルと呼ばれるものだけを許す．$\sigma \in S_N$ がリフル・シャッフルであるとは，ある k $(0 \leq k \leq N)$ が存在して，

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(k), \qquad \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(N)$$

が成り立つことと定義する．しかし，下の図を見た方がよほどわかりやすい．

• **ランダムなリフル・シャッフル** N 枚のカードに対するランダムなリフル・シャッフルを以下のように導入する．なお確率変数 K が２項分布に従うとは

$$\mathbf{P}(K=k)=\frac{{}_NC_k}{2^N}=\frac{1}{2^N}\cdot\frac{N!}{k!(N-k)!}\qquad(k=0,1,\ldots,N)$$

を意味する．

1. ２項分布に従う確率変数 K を用意する．まず N 枚のカードの束を「上の K 枚」と「下の $N-K$ 枚」に分離する．この２つの束を両手に持つ．
2. ある時点で右手にあるカードが a 枚，左手にあるカードが b 枚ならば，次に下に落とすカードは確率 $a/(a+b)$ で右手から，確率 $b/(a+b)$ で左手から選ぶ．
3. 上記の (ランダムな) 操作を全てのカードが落ちきるまで繰り返す．上のステップで各回の操作は独立とする．

• 上のランダムな操作でリフル・シャッフルに値をとる確率変数ができた．これを Y_1 と書こう．また

$$P(\mathrm{Id},\sigma):=\mathbf{P}(Y_1=\sigma)$$

とおく．仮に初期状態が（非ランダムな) 置換 α をした時点から始めるのであれば，このランダムなリフル・シャッフルをしたあとは $Y_1\alpha=Y_1\circ\alpha$ というランダムな置換なので，

$$P(\alpha,\sigma):=\mathbf{P}(Y_1\alpha=\sigma)=\mathbf{P}(Y_1=\sigma\alpha^{-1})$$

と定める．したがってこの推移確率行列 P は右不変である (すなわち，$P(\alpha,\sigma)=P(\alpha\beta,\sigma\beta)$)．なおこの P が S_N 上の推移確率行列になることはほぼ自明である．

• 独立なリフル・シャッフルを繰り返す．$Y_1,Y_2,Y_3\ldots$ を可算無限個の Y_1 の独立なコピーだとする．初期状態が（非ランダムな) 置換 α だとすれば，$X_0:=\alpha$ かつ

$$X_n:=Y_nY_{n-1}\cdots Y_1\alpha\quad(=Y_nX_{n-1})\qquad(n\geq 1)$$

とおけば，n 回のランダムなリフル・シャッフルがモデル化できる．$Y_1,Y_2,Y_3\ldots$ の独立性により，$(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は推移確率行列 P を持つマルコフ連鎖になることが簡単に確かめられる．

既約性と非周期性: このマルコフ連鎖が既約かつ非周期的であることは以下の点に着目すれば簡単に確認できる．

1. ２項分布に従う確率変数 K が $K=0$ となる確率は正だが，この場合におきるシャッフルは Id なので，$P(\mathrm{Id},\mathrm{Id})>0$ であり，右不変性により任意の σ に対して $P(\sigma,\sigma)=P(\mathrm{Id},\mathrm{Id})>0$. よって非周期的である．
2. S_N は $(j,j+1)$ という形の互換全体で生成されることに注意する．すなわち任意の $\sigma\in S_N$ はこの形の互換の有限積で書ける．$K=j$ となる確率は正であることから，$Y_1=(j,j+1)$ となる確率は正であることもわかる．よって $P(\mathrm{Id},(j,j+1))>0$. 以上により既約性がわかる．

定常分布の一意的な存在定理 前回分の講義内容により，このマルコフ連鎖には一意的な不変分布 π が存在する．任意の σ に対して $\lim_{n\to\infty}\delta_\sigma P^n=\pi$ となるのであった．P の右不変性と合わせて考えると，この π は S_N 上の一様分布 (各点に等しく $1/N!$ の重みをもつ分布) であることもわかる．

参考文献

[LPW] Levin, David A.; Peres, Yuval; Wilmer, Elizabeth L.; Markov chains and mixing times. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.