数学特論 B4 のレジュメ

1 月 9 日 (木曜 2 限)

本日の目標:
「既約かつ非周期的なマルコフ連鎖は唯一の定常分布を持つ」という極めて有名な定理を (結構まじめに) 証明します.

既約性と非周期性: (前回分の復習)
いままでどおり有限集合 S 上を状態空間とし，推移確率行列 $P = (P(i,j))_{i,j\in S}$ を持つマルコフ連鎖を考える.

定義 1. このマルコフ連鎖が**既約**であるとは，任意の $i,j \in S$ に対してある $n \in \mathbf{N}$ が存在して $P^n(i,j) > 0$ となることをいう.

次は**周期 (period)** の定義をする．証明はしないが実は「既約なマルコフ連鎖に対して d_i は i にはよらない定数である」ことが知られている．$d_i \equiv 1$ であるマルコフ連鎖を**非周期的 (aperiodic)** という.

定義 2. $i \in S$ に対して，$\mathrm{Per}(i) = \{n \geq 1 \mid P^n(i,i) > 0\}$ とおき，$d_i =$ $\mathrm{Per}(i)$ に属する要素の最大公約数 と定める．この d_i を点 i の周期という.

定常分布の一意的な存在定理 [再掲]

定理 3. 上記のとおり有限状態のマルコフ連鎖を考え，これが <u>既約かつ非周期的</u> だと仮定する．このとき

- 定常分布 π が一意的に存在する．さらに任意の $j \in S$ に対して $\pi(j) > 0$ となる.
- 任意の $i,j \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = \pi(j)$．これは S 上の任意の分布 μ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu P^n = \pi$ といっても同値である.

注意: ちなみに上の定理で $\lim_{n\to\infty} P^n(i,\bullet)$ (横ベクトル) が定常分布になることはよくある話なので，すごく意外というほどではない．以下で理由を説明する.

既約とも非周期的とも限らない一般のマルコフ連鎖があるとする．ある $i \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$ が任意の $j \in S$ に対して存在していれば，この極限値 $\lim_{n\to\infty} P^n(i,\bullet)$ は定常分布になる．なぜなら，$\pi(j) := \lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$ とおくと

$$\sum_j \pi(j)P(j,k) = \sum_j \lim_{n\to\infty} P^n(i,j)P(j,k) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1}(i,k) = \pi(k)$$

となる．これは定常分布の定義そのものである.