数学特論 B4 のレジュメ

12 月 19 日 (木曜 2 限)

簡単な例 2: (前回分の続き)
$S=\{1,2,\dots,M\}$ として，推移確率行列 P を以下で与える．なお $0<p<1$ かつ $q:=1-p$ である．

$$P=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix} \qquad \text{(3 重対角行列)}$$

このとき上と同様の簡単な掃き出し計算で P の固有値 1 に対する横固有ベクトル空間は 1 次元であることがわかる．(かなりの規則性があるので行列のサイズが大きくても難しくない.) よって定常分布は存在するにしても一意的だが，実際に以下のものが存在する．

$$\pi(i)=\begin{cases} (\text{定数})\times\left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} & (p\neq q \text{ の場合}) \\ \frac{1}{M} & (p=q=1/2 \text{ の場合}) \end{cases}$$

ここで $(\text{定数})=(1-p/q)/\{1-(p/q)^M\}$ である (正規化定数)．ごく簡単な直接計算で

$$\pi(i)P(i,i+1)=\pi(i+1)P(i+1,i) \qquad (1\le i\le M-1)$$

となることが確認できるので，この π は可逆であることもわかる．

既約性と非周期性: (今回分の最初)
マルコフ連鎖の基本性質を勉強します．いままでどおり有限集合 S 上を状態空間とし，推移確率行列 $P=(P(i,j))_{i,j\in S}$ を持つマルコフ連鎖を考える．

まずは**既約性 (irreducibility)** から．要するに任意の点 $i\in S$ から出発したマルコフ連鎖が他の任意の点 $j\in S$ に有限時間内で到達する確率が 0 ではない，と言っている．

定義 1. このマルコフ連鎖が既約であるとは，任意の $i,j\in S$ に対してある $n\in\mathbf{N}$ が存在して $P^n(i,j)>0$ となることをいう．

既約なマルコフ連鎖は例えてみればマルコフ連鎖の世界における「原子」のようなものである．その心は以下のとおり．既約なマルコフ連鎖の状態空間 S をどうような真部分集合に制限しようとしても絶対にマルコフ連鎖にはならない．

次は**周期 (period)** の定義をする．

定義 2. $i\in S$ に対して，$\mathrm{Per}(i)=\{n\ge 1 \mid P^n(i,i)>0\}$ とおき，$d_i=$ $\mathrm{Per}(i)$ に属する要素の最大公約数 と定める．この d_i を点 i の周期という．

証明はしないが実は「既約なマルコフ連鎖に対して d_i は i にはよらない定数である」ことが知られている．
$d_i\equiv 1$ であるマルコフ連鎖を**非周期的 (aperiodic)** という．

簡単な例 3: ($\mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ 上の単純ランダムウォーク)
$\mathbf{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (mod k) 上の単純ランダムウォークを考える．すなわち $\mathbf{Z}_k$ は k 個の点が首飾り状につながっているグラフであり，両隣の点に確率 1/2 づつで移動するモデルである．この例が既約であることは明らか．

- k が偶数のとき．任意の $i \in \mathbf{Z}_k$ に対して i から i に戻ってくる「ループ」は常に偶数ステップである．また 2 ステップで戻ってこれるのは明らか．よって周期は 2.
- k が奇数のとき．任意の $i \in \mathbf{Z}_k$ に対して i から i に戻ってくる「ループ」を考える． 2 ステップで戻ってくる移動方法と, 一周回って k ステップで戻ってくる移動方法がある．よって周期は 1.

定常分布の一意的な存在定理 次の定理はおそらくマルコフ連鎖論のなかで一番有名な定理だと思う．ようするに，既約かつ非周期的なマルコフ連鎖は状態空間 S を「よくかき混ぜる」ので十分時間がたつと S 上に誘導された分布は定常分布に収束する，という感じである．一意的な定常分布が推移確率行列からわかりやすく計算できる点に注目せよ．(行列の n 乗の極限を求める問題になっている．)

なお本日は定理の主張を紹介するだけにする．この定理の証明は何種類か知られている．次回の講義でそのうちどれかの大筋を紹介する予定である．

定理 3. 上記のとおり有限状態のマルコフ連鎖を考え，これが 既約かつ非周期的 だと仮定する．このとき

- 定常分布 π が一意的に存在する．
- 任意の $i, j \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = \pi(j)$．これは S 上の任意の分布 μ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu P^n = \pi$ といっても同値である．

注意: ちなみに上の定理で $\lim_{n\to\infty} P^n(i, \bullet)$ (横ベクトル) が定常分布になることはよくある話なので，すごく意外というほどではない．以下で理由を説明する．

既約とも非周期的とも限らない一般のマルコフ連鎖があるとする．ある $i \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$ が任意の $j \in S$ に対して存在していれば，この極限値 $\lim_{n\to\infty} P^n(i, \bullet)$ は定常分布になる．なぜなら，$\pi(j) := \lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$ とおくと

$$\sum_j \pi(j)P(j,k) = \sum_j \lim_{n\to\infty} P^n(i,j)P(j,k) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1}(i,k) = \pi(k)$$

となる．これは定常分布の定義そのものである．