例　(**Simple Random Walk on a Graph**). $G=(V,E)$ を有限グラフ, $S=V$ とする.

$$\deg(i) = \text{点 } i \text{ から出る辺の本数} = |N_i|$$

とする. ただし $N_i = \{j \in V : j \text{ は } i \text{ の隣接点}\}$ とする. このとき,

$$P(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{\deg(i)}, & j \in N_i, \\ 0, & j \notin N_i, \end{cases}$$

と定めると $P=(P(i,j))$ は確率行列となる. この P を推移確率とする Markov 連鎖を, このグラフ上の simple random walk (SRW) と云う.

$$\begin{array}{c|cccc} & ① & ② & ③ & ④ \\ \hline ① & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ ② & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ ③ & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ ④ & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

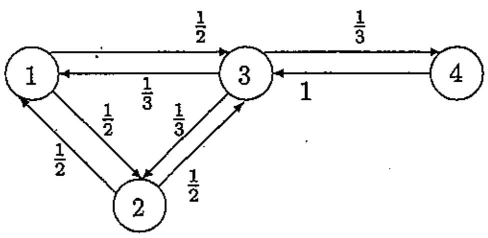
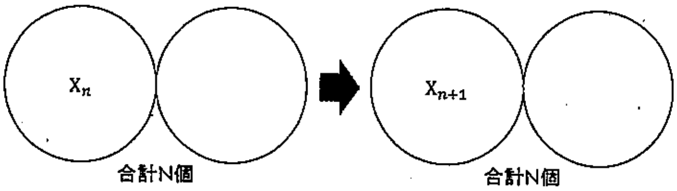


図 2: $|S|=4$ のときのグラフの例とその上の SRW

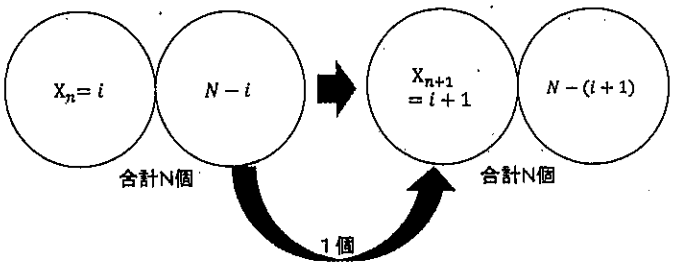
○例　エーレンフェスト連鎖

合計N個のボールが入っている２つの壺がある. 等確率 $\frac{1}{N}$ で1つのボールをランダムに取り出してもう片方の壺に入れる.

X_n : n 回の動作を行った後の左の壺の中のボールの個数

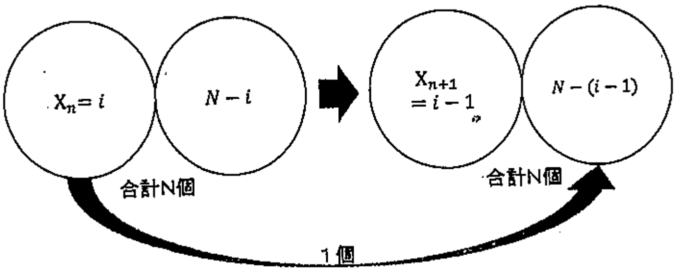


(1) $X_n = i,\ X_{n+1} = i+1$ となる場合 $(0 \le i \le N)$



$$P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = p(i,i+1) = \frac{N-i}{N}$$

(2) $X_n = i,\ X_{n+1} = i-1$ となる場合 $(0 \le i \le N)$



$$P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = p(i,i-1) = \frac{i}{N}$$

N=5として実際に遷移確率行列を求めてみよう！

$$p(i,i+1) = \frac{N-i}{N},\ p(i,i-1) = \frac{i}{N}$$

それ以外のとき $p(i,j) = 0 \quad (0 \le i,j \le N)$

③ 各要素は0以上（確率なので）

i \ j	0	1	2	3	4	5
0	0	5/5	0	0	0	0
1	1/5	0	4/5	0	0	0
2	0	2/5	0	3/5	0	0
3	0	0	3/5	0	2/5	0
4	0	0	0	4/5	0	1/5
5	0	0	0	0	5/5	0

② 各行の要素の合計 1
ある状態から変化する可能性のある場合全て考えたので当たり前

① 操作前の状態が左の箱に4個(i=4)操作後の状態が左の箱に5個(i=5)になる遷移確率