解析学 I・演習

2019 年 7 月 9 日配布分

♡ 今回のテーマは積測度とフビニの定理です．このテーマに関しては，具体的な計算がバリバリできることが重要です．

記号

問題 10-1 $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ を σ 有限な測度空間とする．関数 $f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$ は $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ 可測だとする．μ-a.e. $x \in X$ に対して，関数 $f_x(y) := f(x, y)$ は ν-a.e. $y \in Y$ で 0 だとする．このとき，ν-a.e. $y \in Y$ に対して，関数 $f_y(x) := f(x, y)$ は μ-a.e. $x \in X$ で 0 であることを示せ.

Hint: この問題は見た目ほど自明ではないが，$|f|$ に対してフビニの定理を適用すると示せる.

問題 10-2 ルベーグ可測集合 E に対して $f(x) := \lambda(E \cap (x, x+1))$ とおく．ただし，λ は 1 次元ルベーグ測度である．このとき，$\int_{\mathbf{R}} f(x) d\lambda(x)$ を求めよ.

問題 10-3 $0 < a < b$ とする．$(0, 1] \times [a, b]$ 上で関数 $f(x, y) := x^y = e^{y \log x}$ の積分を考えて，次の公式を示せ.

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{1+b}{1+a}.$$

問題 10-4 $[0, 1] \times [0, \infty)$ 上で関数 $f(x, y) := e^{-y} \sin(2xy)$ の積分を考えて，次の公式を示せ.

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin^2 y}{y} dy = \frac{1}{4} \log 5$$

Hint: まずある可積分関数で $|f|$ を押さえることにより，f の可積分を示し，その後でフビニの定理を適用する.

問題 10-5 $a > 0$ とし，$f(x, y) := e^{-axy} \sin x$ とおく．まず，f が $[0, \infty) \times [1, \infty)$ 上で可積分であることを示し，フビニの定理を用いて次の公式を示せ.

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \arctan \frac{1}{a}.$$

問題 10-6 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上で関数 $f(x, y) := e^{-xy} \sin x$ を考える.

(1). 任意の $t > 0$ に対して，f は $[0, t] \times [0, \infty)$ 上で可積分であることを示せ.

(2). 次の公式を示せ.

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \cos t \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{y^2+1} dy - \sin t \int_0^\infty \frac{y e^{-ty}}{y^2+1} dy.$$

(3). 小問 (2) で $t \to \infty$ とするとどうなるか？

問題 10-7 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする．$f \geq 0$ を X 上の有限値非負可測関数とし，次の集合を考える．

$$\Gamma_f := \{(x,t) \in X \times \mathbf{R} \colon 0 \leq t \leq f(x)\}$$

このとき，Γ_f は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$ 可測であることを示せ．また, $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度を λ とすると，

$$(\mu \otimes \lambda)(\Gamma_f) = \int_X f d\mu$$

であることを示せ.

Hint: "$(x,t) \mapsto f(x) - t$" は標準射影との合成で書けるため可測関数である.

問題 10-8 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を確率測度空間とする．$f \geq 0$ を X 上の有限値非負可測関数とし，ある $p > 1$ と $\delta > 0$ に対して，

$$\mu(\{x \in X \colon f(x) \geq t\}) = O\Big(\frac{1}{t^{p+\delta}}\Big) \qquad (t \to \infty \text{ のとき})$$

だとする．ここで O は大文字ランダウ記号である．このとき，$\int_X f^p d\mu < \infty$ であること示せ.

Hint: 前問の Γ_f および $f(x)^p = \int_0^{f(x)} pt^{p-1}dt$．ちなみにこの問題は「尾確率 (tail probability) から可積分性を導く」という確率論で頻出する議論の特殊な場合である.

問題 10-9 次を示せ.

(1). f, g を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分関数とするとき，

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy$$

で定まる関数 $f * g$ はルベーグ測度に関してほとんど至る所有限であり，さらに可積分である.

(2). 特に f が有界閉区間 $[a,b]$ の定義関数であれば，$f * g$ は連続関数であることを示せ.

問題 10-10 $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ を σ 有限な測度空間とする．可測関数 $f \colon X \to \bar{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$ および $g \colon Y \to \bar{\mathbf{R}}$ は $\mu(\{x \colon f(x) \neq 0\}) > 0$ かつ $\nu(\{y \colon g(y) \neq 0\}) > 0$ をみたすとする．もし，$h(x,y) := f(x)g(y)$ が $\mu \otimes \nu$ 可積分であれば，f, g はそれぞれ μ, ν に対して可積分であることを示せ.

問題 10-11 $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ を σ 有限な測度空間とする．可測関数 $f \colon X \times Y \to \bar{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$ は $\mu \otimes \nu$-a.e. (x,y) に対して $f(x,y) \geq 0$ だとする．このとき，ある $x \in X$ に対して，$\nu\{y \colon f(x,y) \geq 0\} > 0$ となることを示せ.

問題 10-12 $f \colon [0, \infty) \to \mathbf{R}$ は連続関数とする．$\alpha > 0,\ x \geq 0$ に対して，

$$I_\alpha f(x) = \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

とおく．このとき次を示せ.

(1). $\alpha > 0,\ \beta > 0$ に対して，$I_{\alpha+\beta} f = I_\alpha (I_\beta f)$

(2). $n = 1, 2, \ldots$ に対して，$I_n f$ を求めよ.