解析学 I・演習

2019 年 7 月 2 日配布分

記号　教科書のように外測度に $*$ をつけずに単に μ と書くと，測度と紛らわしいので，ここでは μ^* と書くことにします．また有限加法的な測度は μ_0 と書きます．

問題 9-1　S を集合とし，$\mathcal{G} \subset 2^S$ を S 上の半加法族とする．このとき，$\mathcal{G}$ を含む最小の有限加法族 $\sigma_0[\mathcal{G}]$ は以下で与えられることを示せ．

$$\sigma_0[\mathcal{G}] = \{A\colon A \text{ は } \mathcal{G} \text{ の元の非交差有限和 }\}.$$

問題 9-2 前問 (問題 9-1) の記号を引き続き使う．$(\mathcal{G}, \mu_0)$ が非負かつ有限加法的だとする．$A = G_1 + \cdots + G_n$ $(G_i \in \mathcal{G})$ と表示される $A \in \mathcal{G}$ に対して，$\mu_0(A) = \sum_{i=1}^n \mu_0(G_i)$ とおく．このとき，$\mu_0(A)$ は well-defined であり (つまり A の表示の仕方によらず)，$(\sigma_0[\mathcal{G}], \mu_0)$ は有限加法的な測度になることを示せ．

問題 9-3 問題 9-1, 9-2 の記号を引き続き使う．$(\mathcal{G}, \mu_0)$ が非負かつ有限加法的だとする．任意の $B \subset S$ に対して，

$$\mu^*(B) := \inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty \mu_0(C_i)\colon\ B \subset \cup_{i=1}^\infty C_i,\ C_i \in \mathcal{G}\ (\forall i \in \mathbf{N})\Big\}$$

とおく．ここで下限は $\mathcal{G}$ からなる B の可算被覆を全てわたってとる．

(1) μ^* は S 上の外測度であることを示せ．

(2) μ^* の定義において，$(\mathcal{G}, \mu_0)$ を問題 9-2 で定めた $(\sigma_0[\mathcal{G}], \mu_0)$ に取り替えても，全く同じ μ^* が定まることを示せ．

問題 9-4　問題 9-1 から問題 9-3 の記号を引き続き使う．$\sigma[\mathcal{G}]$ 可測な集合は問題 9-3 の外測度 μ^* に関して可測であることを示せ．

問題 9-5　A を $\mathbf{R}$ の部分集合とし, I_j $(j \in \mathbf{N})$ は有界閉区間 $(\subset \mathbf{R})$ とする. $\alpha > 0$, 自然数 N に対して,

$$H_N^\alpha(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^\infty |I_j|^\alpha\colon\ A \subset \cup_{i=1}^\infty I_j,\quad I_j \text{ は有界閉区間で } |I_j| \le \tfrac{1}{N}\ (\forall j \in \mathbf{N})\ \Big\}$$

$$H^\alpha(A) := \lim_{N\to\infty} H_N^\alpha(A)$$

と定義する. ただし, $|I|$ は区間 I の長さを表す.

(1) A を有界な集合とする. $\alpha > \beta > 0$ であるとき, $N^{\alpha-\beta} H_N^\alpha(A) = H_N^\beta(A)$ を示せ.

(2) $\alpha > 1$ のとき, $H^\alpha([0,1]) = 0$ を示せ.

(3) $\alpha = 1$ のとき, $H^\alpha([0,1]) = 1$ を示せ.

(4) $0 < \alpha < 1$ のとき, $H^\alpha([0,1]) = \infty$ を示せ.

問題 9-6 (X,d) を距離空間とする．$A \subset X$ に対して，その直径を $\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,y)\colon x,y \in A\}$ と書く．$\alpha > 0$, $0 < \delta < 1$ に対して，

$$\Gamma_\delta^\alpha(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^\infty \mathrm{diam}(A_j)^\alpha\colon\ A \subset \cup_{i=1}^\infty A_j,\quad A_j \subset X \text{ かつ } |A_j| \le \delta\ (\forall j \in \mathbf{N})\ \Big\}$$
$$\Gamma^\alpha(A) := \lim_{\delta \to 0} \Gamma_\delta^\alpha(A)$$

と定義する．このとき，Γ^α は X 上の外測度になることを示せ．

Hint: 実はこれはハウスドルフ外測度という由緒正しいものである．

問題 9-7 μ^* を外測度とする．部分集合列 $\{A_j\}, \{B_j\}$ が $\mu^*(A_j \triangle B_j) = 0$ $(\forall j \in \mathbf{N})$ をみたすとする．このとき，$\mu^*(\cup_j A_j) = \mu^*(\cup_j B_j)$ が成り立つことを示せ．

問題 9-8 S を集合とし，$\mathcal{H}$ は S 上の有界実数値関数全体がなすベクトル空間のある部分空間で，以下の条件をみたすとする．

- 定数関数は $\mathcal{H}$ に属する．
- 有界関数 f が $\mathcal{H}$ の元からなる非負の広義単調増大列の各点収束の極限であれば，f も $\mathcal{H}$ に属する．

さて，$\mathcal{Z}$ は $\mathcal{H}$ の部分集合で積に関して閉じているとする．このとき，$\mathcal{H}$ はすべての有界 $\sigma[\mathcal{Z}]$ 可測関数を含むことを示せ．ただし，$\mathcal{Z}$ に属する全ての関数を可測にするような σ 加法族のうち最小のものを $\sigma[\mathcal{Z}]$ と書いた．

Hint: 測度の一致を確認するときに使う定理で単調族定理 (ディンキン族定理の兄弟) というのがあるが，これは単調族定理の「関数版」である．(2 つの定理については，問題 3-13, 3-14 を参照せよ)