解析学 I・演習

2019 年 6 月 18 日配布分

♡ 今回のテーマはカラテオドリ流の外測度理論です.

記号 教科書のように外測度に $*$ をつけずに単に μ と書くと，測度と紛らわしいので，ここでは μ^* と書くことにします.

問題 8-1 $\mathbf{N}$ の部分集合 E に対して,

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \qquad \mu^*(E) = 1 \quad (E \neq \emptyset, \mathbf{N}), \qquad \mu^*(\mathbf{N}) = 2.$$

と定めると，$\mu^* \colon 2^{\mathbf{N}} \to [0, \infty]$ は外測度であることを示せ.

問題 8-2 前問 (問題 8-1) の外測度 μ^* に対して，カラテオドリ外測度論の意味で可測な集合は $\emptyset$ と $\mathbf{N}$ のみであることを示せ.

問題 8-3 （ルベーグ外測度）$A \subset \mathbf{R}$ に対して,

$$m^*(A) := \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \colon A \subset \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]\Big\}$$

と定める．ただし，inf は A を被覆するような有限左半開区間の可算和集合 $\cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]$ を全てわたってとる．このとき，m^* が外測度であることを (この問題の状況に即して直接的に) 示せ.

問題 8-4 m^* を前問 (問題 8-3) の外測度 m^* とする．任意の区間 $I \subset \mathbf{R}$ に対して，$m^*(I)$ は区間の長さと等しくなることを示せ.
Hint: まず有界閉区間の場合を考えてみるとよい.

問題 8-5 ひきつづき m^* を問題 8-3 の外測度 m^* とする．このとき，任意の $\mathbf{R}$ のボレル部分集合は, m^* に関してカラテオドリ外測度論の意味で可測なことを示せ.
Hint: 区間が可測であることを示せば十分.

問題 8-6 X を集合，μ^* は X 上の外測度とする．μ^* に関してカラテオドリ外測度論の意味で可測な集合の全体を $\mathcal{M}$ と書く．次を示せ.

$$E,\ E \triangle F \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad F \in \mathcal{M}.$$

ここで $\triangle$ は集合の対称差を表す．したがって，$E \in \mathcal{M}$ かつ $\mu^*(E \triangle F) = 0$ ならば $F \in \mathcal{M}$.

問題 8-7 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ として，集合族 $\mathcal{A}$ を次で定める．

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbf{N} \colon A \text{ または } A^c \text{ は } 0 \text{ を含まない有限集合}\}$$

(1) A は有限加法族であることを示せ．
(2) $\mu_0(A) = \#A$（A の元の個数）とおく．このとき，$(\mathcal{A}, \mu_0)$ は有限加法的であるだけでなく，可算加法的であることを示せ．また $(\mathcal{A}, \mu_0)$ は σ 有限ではないこと，$\sigma[\mathcal{A}] = 2^{\mathbf{N}}$ であることも示せ．
Hint: 「可算加法的」という言葉の定義にやや注意せよ．

問題 8-8 前問 (問題 8-7) の設定を引き続き使う．$\alpha \in (0, \infty]$ と $E \subset \mathbf{N}$ に対して，

$$\nu_\alpha(E) = \#E \quad (\text{if } 0 \notin E), \qquad \nu_\alpha(E) = \alpha + \#(E \setminus \{0\}) \quad (\text{if } 0 \in E)$$

とおく．このとき，ν_α は $2^{\mathbf{N}}$ 上の測度であり，$\nu_\alpha|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ であることを示せ．
Hint: σ 有限性を仮定からはずすと，拡張の一意性が破れる例である．ちなみに μ_0 から Hopf の拡張定理を使って得られる測度は ν_∞ である．

問題 8-9 $A \subset \mathbf{R}$ に対して，$\Gamma(A), \Lambda(A)$ を以下のように定める．

$$\Gamma(A) := \begin{cases} 0 & (\text{if } A \cap \mathbf{Q} = \emptyset), \\ \infty & (\text{if } A \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset), \end{cases} \qquad \Lambda(A) := \begin{cases} 0 & (\text{if } A \cap \mathbf{Q} = \emptyset), \\ 1 & (\text{if } A \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset). \end{cases}$$

このとき，Γ, Λ が $\mathbf{R}$ 上の外測度になるかどうかを判定せよ．また，外測度になる場合には,（カラテオドリ外測度論の意味で）可測な集合を全て求めよ．