解析学 I・演習

2019 年 6 月 4 日配布分

♡ 今回のテーマはルベーグ測度の基本性質についてです.

記号 このプリントにおいては特にことわらないかぎり d 次元ルベーグ測度を使い，それを $\lambda = \lambda^d$ と書く．なお，$J \subset \mathbf{R}^d$ が d 次元区間であるとは

$$J = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d], \qquad -\infty \leq a_i < b_i \leq \infty (1 \leq i \leq d)$$

という形をしていることを意味する．（ただし，$b_i = \infty$ のときは，$(a_i, b_i] = (a_i, \infty)$ と読み替える.）また集合 $E \subset \mathbf{R}^d$ の $x \in \mathbf{R}^d$ による平行移動を通常通りに $E + x := \{y + x \colon y \in E\}$ と定める．また $-E := \{-y \colon y \in E\}$ と定める.

問題 7-1 内点を持たない $\mathbf{R}^d$ のコンパクト部分集合で，ルベーグ測度が正のものが存在することを示せ.

問題 7-2 $\mathbf{R}^d$ の有界部分集合 A に対して，以下を示せ．ただし ∂A は A の境界である.

$$\lambda(\partial A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ は (リーマン積分論の意味で) 体積確定.}$$

さらに，上の条件が成り立つならば，A はルベーグ可測かつ $\lambda(A) = \mathrm{vol}(A)$ が成立することを示せ.

問題 7-3 ルベーグ可測集合 $E \subset \mathbf{R}^d$ は $\lambda(E) < \infty$ であるとする．このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な d 次元区間の和集合 $A = \cup_{n=1}^m J_n$ が存在して，$\lambda(E \triangle A) < \varepsilon$ となることを示せ．ここで $\triangle$ は集合の対称差を表す.

問題 7-4 ルベーグ可測集合 $E \subset \mathbf{R}^d$ と $x \in \mathbf{R}^d$ に対して, 前問を用いて，以下を示せ.

(1). $E + x$ もルベーグ可測であり，$\lambda(E + x) = \lambda(E)$.

(2). $-E$ もルベーグ可測であり，$\lambda(-E) = \lambda(E)$.

問題 7-5 $\lambda(E) < \infty$ をみたすルベーグ可測集合 $E \subset \mathbf{R}^d$ に対して，以下を示せ.

$$\lim_{|x| \to 0} \lambda(E \triangle (E + x)) = 0, \qquad \lim_{|x| \to \infty} \lambda(E \triangle (E + x)) = 2\lambda(E).$$

問題 7-6 f は $\mathbf{R}^d$ 上のルベーグ可積分関数だとする．このとき，次を示せ.

$$\lim_{|x| \to 0} \int_{\mathbf{R}^d} |f(y + x) - f(y)| d\lambda(y) = 0, \qquad \lim_{|x| \to \infty} \int_{\mathbf{R}^d} |f(y + x) - f(y)| d\lambda(y) = 2 \int_{\mathbf{R}^d} |f(y)| d\lambda(y).$$

問題 7-7 $[0,1]$ 区間上の有界なリーマン可積分関数 f はルベーグ可積分であり，積分値は一致することを示せ．
Hint: 教科書（吉田本）の該当部分の文字通りの丸写しはせずに，せめて $[0,1]$ というわかりやすい状況に即して，少しは書き直すこと．

問題 7-8 $[0,1]$ 区間上の有界関数 f について以下を示せ．f がリーマン可積分であることは，λ-a.e. $x \in [0,1]$ において f が連続であることと同値である．
Hint: 問題 7-7 と同様．

問題 7-9 $K_0 = [0,1], \quad K_1 = [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \quad K_2 = K_1 \setminus \{(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\}$,
$K_3 = K_2 \setminus \{(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}) \cup (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}) \cup (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}) \cup (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})\}$ のように，K_n を順次前の K_{n-1} の「中央の 1/3 区間を抜き取る」ことで作る．また $K = \cap_{n=0}^{\infty} K_n$ とおく．このとき, K はルベーグ測度ゼロであり，かつ実数と同じ濃度を持つことを証明せよ．
Comment: この K は Cantor 集合とよばれる非常に有名な集合である．存在ぐらいは知っておいて損はない．