解析学 I・演習

2019 年 5 月 28 日配布分

♡ 今回のテーマはルベーグ積分と極限の関係についての続きです．前回よりも具体的な問題が並んでいます．

記号 このプリントにおいては特にことわらないかぎり 1 次元ルベーグ測度を使う．問題に登場する関数は全てボレル可測だとする．リーマンの意味での定積分と絶対収束する広義積分がルベーグ測度に関するルベーグ積分と一致することは認めてよい．

問題 6-1 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ をルベーグ可積分関数とする．さらに $\phi_n(x) = x^n f(x)$ とおき $(n = 1, 2, \ldots)$，ϕ_n は全てルベーグ可積分関数とする．$y \geq 0$ に対して

$$L(y) := \int_0^\infty e^{-yx} f(x) dx$$

とおく．このとき，$L(y)$ は well-defined で，$[0, \infty)$ 上 C^∞ 級となることを示せ．

問題 6-2 $t \in \mathbf{R}$ に対して，$f_t\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ を $f_t(x) = e^{\sqrt{-1}tx} e^{-x^2/2}$ と定める．
(1) 各 t に対して，f_t はルベーグ可積分関数であることを示せ．
(2) $I(t) := \int_{\mathbf{R}} f_t(x) dx$ は t の関数として C^∞ 級であることを示せ．
(3) I のみたす微分方程式を求めよ．

問題 6-3 ガンマ関数 $\Gamma\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ を $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ とおく．このとき，Γ が微分可能であることを示し，導関数 Γ' の表示をあたえよ．

問題 6-4 ガンマ関数 (前問を参照) に関するスターリングの公式 $\lim_{t \to \infty} t^{-t+1/2} e^t \Gamma(t) = \sqrt{2\pi}$ を示したい．以下の誘導に従って答えよ．
(1) 次の積分表示を示せ．

$$t^{-t+1/2} e^t \Gamma(t) = \int_{\mathbf{R}} \exp\Big\{ -t \Big(e^{x/\sqrt{t}} - 1 - \frac{x}{\sqrt{t}} \Big) \Big\} dx$$

(2) (1) の右辺の被積分関数について．各点収束先は何か？また優関数として，$\mathbf{1}_{(-\infty, 0)} e^{x+1} + \mathbf{1}_{[0, \infty)} e^{-x^2/2}$ が取れることを示せ．
(3) スターリングの公式を示せ．

問題 6-5 ボレル可測関数 $f\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ は $\int_0^\infty x|f(x)| dx < \infty$ をみたすとする．このとき次を示せ．

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty (\sin tx - tx) f(x) dx = 0.$$

問題 6-6 ボレル可測関数 $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ はある $\delta > 0$ に対して，$\int_0^1 |f(x)|^\delta dx < \infty$ をみたすとする．このとき次を示せ．

$$\lim_{p \searrow 0} \frac{1}{p} \int_0^1 (|f(x)|^p - 1) dx = \int_0^1 \log |f(x)| dx.$$

問題 6-7 $[0,\infty)$ 上の関数項級数 $\sum_{m=1}^{\infty}(e^{-(2m-1)x}-e^{-2mx})$ を考えることにより，交代級数に関する有名な次の公式を示せ.

$$\log 2 = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

問題 6-8 $t>0,\ x\in\mathbf{R}$ に対して,

$$p(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})$$

とおく.（この関数はガウス核，熱核などよばれる.）有界連続関数 $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ に対して

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x-y)f(y)dy$$

とおくと，各点で $\lim_{t\searrow 0}u(t,x)=f(x)$ となることを示せ.

問題 6-9 （前問の続き） 前問で定めた $u(t,x)$ は熱方程式を満たすこと，すなわち任意の $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}$ に対して次の等式が成立することを示せ

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$