解析学 I・演習

2019 年 5 月 14 日配布分

♡ 今回のテーマはルベーグ積分と極限の関係についてです.「三種の神器」と言われる**単調収束定理，Fatou の補題，ルベーグの優収束定理**を確実に使いこなせるようになりましょう．この点に関しては高校数学的にガンガン計算練習することが必要（かつ有効）だと思います.

記号 このプリントにおいては特にことわらないかぎり $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間だとする．その場合は問題に登場する関数は全て $\mathcal{F}$ 可測だとする.

ただし問題 5-3, 5-6, 5-11, 5-12, 5-13, 5-14 では 1 次元ルベーグ測度を使う．その場合，リーマンの意味での定積分と絶対収束する広義積分がルベーグ測度に関するルベーグ積分と一致することは認めてよい.

問題 5-1 $f\colon X \to \mathbf{R}$ は μ 可積分だとする．このとき次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} n \int_X \log\Bigl(1 + \frac{|f(x)|}{n}\Bigr) d\mu(x)$$

問題 5-2 μ は有限測度だとし，$f\colon X \to \mathbf{R}$ は μ 可積分だとする．このとき次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X \log\bigl(1 + e^{n|f(x)|}\bigr) d\mu(x)$$

問題 5-3 この問題では $0 < r < 1$ とし，$d\theta$ を 1 次元ルベーグ測度とする.

(1) 任意の $\theta \in \mathbf{R}$ に対して，次の級数表示を示せ.

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \geq 0.$$

(2) 次の定積分を示せ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta = 2\pi.$$

問題 5-4 $f\colon X \to \mathbf{R}$ は μ 可積分だとする.

(1) 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して，$\sin(tf(x))$ は μ 可積分であることを示せ.

(2) $G(t) = \int_X \sin(tf(x)) d\mu(x)$ とおくと，$G(t)$ は微分可能で $G'(t) = \int_X f(x)\cos(tf(x)) d\mu(x)$ となることを示せ.

問題 5-5 $f\colon X \to [0, \infty]$ は $\mu(\{x \in X\colon f(x) = \infty\}) = 0$ をみたすとする．このとき，次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu\Bigl(\{x \in X\colon \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}\Bigr) = \int_X f d\mu$$

Hint: 縦軸（関数が値をとる空間）を「スライス」することで作る近似和の収束について．非負の関数の定義からほとんど当たり前といえば当たり前だが，一応左辺は無限和である.

問題 5-6 実数列 $\{x_n\}$ が，任意の実数 t に対して $\lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{-1}x_n t} = 1$ をみたしているとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示せ.

Hint: $e^{\sqrt{-1}x_n t}$ を $[0, 1]$ 上でルベーグ測度 dt に関して積分してみよ.

問題 5-7 $f\colon X \to \mathbf{R}$ は μ 可積分だとする．このとき，可測集合列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$ をみたせば，$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)d\mu(x)=0$ となることを示せ．
Hint: f の代わりに $|f|$ を考えれば十分で，$|f|$ の積分値をいったん単関数の積分値で近似するとよい．

問題 5-8 $\mu(X)<\infty$ とする．このとき以下の小問に答えよ．
(1) 有界な関数 $f\colon X\to\mathbf{R}$ は可積分であることを示せ．
(2) $f\colon X\to\mathbf{R}$ が 2 乗可積分であれば，f は可積分であることを示せ．（まずルベーグ積分に対するシュワルツの不等式を示せ．）
(3) 可積分関数の列 $f_n\colon X\to\mathbf{R}$ $(n=1,2,\ldots)$ が $\sup_{n\geq 1}\int_X |f_n|d\mu(x)<\infty$ をみたし，ある関数 f に各点収束しているならば，極限関数 f は可積分であることを示せ．

問題 5-9 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の非負値関数 f と f_n $(n=1,2,\ldots)$ が以下の 2 条件をみたすときに，以下の小問に答えよ．

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\quad(\forall x\in X),\qquad 0<\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\,(=:\alpha<\infty).$$

(1) $0\leq \int_X f d\mu \leq \alpha$ を示せ．
(2) $\int_X f d\mu = 0\,(\neq\alpha)$ となる例を見つけよ．
(3) $0<\beta<\alpha$ をみたす任意の α,β に対して，上の 2 条件および $\int_X f d\mu=\beta$ をみたす例が作れることを示せ．

問題 5-10 非負値関数 $f\colon X\to[0,\infty)$ は可積分だとする．このとき，$\lim_{n\to\infty}\int_X f(x)^n d\mu(x)=0$ となるための必要十分条件は $f(x)<1$, $\mu-$a.e. であることを示せ．

問題 5-11 (1) $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $[0,1]$ 区間上のボレル可測関数列とする．もし $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1|f_n(x)|dx<\infty$ ならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ はほとんど全ての $x\in[0,1]$ に対して絶対収束することを示せ．ただし，dx は 1 次元ルベーグ測度である．
(2) $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ となる実数列とし，$\{r_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $[0,1]$ に属する全ての有理数を適当に並べて作った数列とする．このとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n|x-r_n|^{-1/2}$ はほとんど全ての $x\in[0,1]$ に対して絶対収束することを示せ．

問題 5-12 次の極限値を計算せよ．

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n\sin x}{1+n^2\sqrt{x}}dx\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}dx$$

問題 5-13 $a=0$ と $a>0$ のそれぞれの場合について，以下の極限値を計算せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{\infty}\frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx.$$

問題 5-14 以下の極限値を計算せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n\,x^{1/n}}dx.$$